République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Année univ. : 2019/2020

Sur quelques problèmes elliptiques à structure variationelle avec conditions de Dirichlet homogènes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse mathématique

par

Allaoui Mohamed

[1] Sous la direction de

Dr. Safia Benmansour

Soutenue le 14/09/2020 devant le jury composé de

Dr N. Bekouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr S. Benmansour	ESM Tlemcen	Encadreur
Dr F.Dib	ESSA Tlemcen	Examinateur
Dr F.Z.Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : meda1837@gmail.com

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

- ***Mes très chers parents***
  **** Allah yahfadhoum ! *.***

- ***Toute ma famille.***

- ***Mon encadreur Dr. S.Benmansour***

- ***Tous mes enseignants qui m'ont inculqué le savoir et que je considère au plus haut degré.***

- ***Tous mes amis et alliés sans exception.***

- ***Tous ceux qui m'ont encouragé et soutenu durant la réalisation de ce mémoire ; je leur souhaite vivement beaucoup de succès.***

Allaoui Mohamed

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur, Dr S. Benmansour, pour sa patience, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance durant la réalisation de ce travail.

Je remercie également Dr N. Bekkouche pour avoir accepté de présider mon jury

Toute ma gratitude va aux examinateurs Dr F. Dib et Dr F.Z. Mostefai pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

J'exprime mon vif respect et mes sincères remerciements à l'ensemble des enseignants du département de mathématique.

Je remercie également tous ceux qui ont compati de proche ou de loin à la concrétisation de ce travail.

Table des Matières

0.0.1

Notation

- $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2}; ... \frac{\partial u}{\partial x_N})$: Gradient de u.
- $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$: Elément de $\mathbb{R}^N$.
- $p^* = \frac{Np}{(N-p)}$: Exposant critique de Sobolev.
- $\partial\Omega$: Frontiére de Ω.
- $\langle ; \rangle$ Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$ /crochet de dualité V, V' .
- $C(\Omega)$ ou $C^0(\Omega)$: Espace des fonctions continues sur Ω.
- $C_0(\Omega)$: Espace des fonctions continues sur Ω à support compact.
- $C^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω.
- $C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$: Espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact.
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,\big|\, u$ mesurable; $\int_\Omega |u|^p < \infty, 1 \leq p < \infty\}$.
- $L^\infty(\Omega) = u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, u$ mesurable; $\exists C$ tel que $|u(x)| \leq C$ en p.p $x \in \Omega$.
- $W^{k,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev; à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$.
- $W_0^{k,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev avec trace nulle.
- $\longrightarrow$: La converge forte dans l'espace de Banach V .
- $\rightharpoonup$: La convergence faible dans V.
- $\hookrightarrow$: Injection continue.
- $\hookrightarrow\hookrightarrow$: Injection compacte.

0.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) puisent leur intérêt dans le fait qu'elles soient impliquées pour interpréter d'un point de vue mathématique des phénomènes observés dans la nature. Elles sont fortement sollicitées dans les sciences appliquées, en l'occurence en Physique, Chimie et Biologie. La liste des exemples où interviennent les EDP ne saurait être exaustive, ainsi nous en citons quelques échantillons tels que la dynamique des structures, la mecanique des fluides, les théories de la gravitation de l'électromagnétisme (équations de Maxwell). Elles sont omniprésentes dans les sciences appliquées particulièrement en Physique, Chimie et Biologie.

Elles émergent aussi dans certains domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'image ou la prévision météorologique. En outre, précisons que les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique reposent également sur les EDP.

Les équations aux dérivées partielles se répartissent essentiellement en trois catégories:

1) Les EDP elliptiques dont l'exemple le plus illustratif et celui des équations de Poisson.

2) Les EDP hyperboliques telles que l'équation des ondes qui modélise des phénomènes de propagation, comme celle du son.

3) Les EDP paraboliques servent à modéliser des phénomènes de diffusion de la chaleur ou celle de la matière par exemple un polluant dans une rivière, où des bactéries dans un organe ou encore d'une charge éléctrique.

De part cette panoplie de leurs motivations les transportants du monde académique vers celui de l'application, les équations aux dérivées partielles ont suscité l'intérêt des chercheurs mathématiciens qui ont déployé des efforts de taille afin d'en assurer l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions car bien souvent une solution des équations aux dérivées partielles n'est généralement pas unique.

Plusieurs méthodes ont été mises en vigueur pour assurer l'éxistence et les propriétés qualitatives de ces solutions; nous en citons les méthodes du degré topologique, du point fixe, de transversalité qui sont typiquement topologiques ainsi que les méthodes variationelles qui restent trés fructueuses quand les méthodes topologiques s'avèrent inopérantes.

Dans ce mémoire, nous focalisons sur la formulation variationelle dite parfois formulation faible de quelques problèmes elliptiques à structures variatinelles avec conditions aux limites du type Dirichlet homogènes.

Dans un prélude, rehaussons le fait que l'une des idées les plus fécondes issue de cette approche est la notion de l'existence des points critiques qui est liée à des ensembles de sous-niveau de la fonctionelle, dans le sens qu'un changement dans le type topologique de ces sous-niveaux nous assure l'existence d'un point critique, pourvu que des conditions de compacité soient satisfaites.

La systématisation des propriétés de compacité demandées dans le cadre de la dimension infinie est due à Palais et Smale qui ont introduit une condition de compacité qui porte leurs noms et est aujourd'hui reconnue comme la notion la plus utilisée dans la théorie des points critiques.

Les deux facteurs que sont le changement de la topologie et la compacité, ont été beaucoup utilisés par des chercheurs travaillant dans les équations elliptiques semi-linéaires. Les deux résultats les plus célébres sont le théoréme du col (Mountain Pass) démontré par Ambrosetti et Rabinowitz en 1973, et le théoréme de point selle démontré par Rabinowitz en 1978.

La recherche d'une solution $x \in \mathbb{R}^N$ de l'équation $Mx - a = 0$ où M est une matrice symétrique d'ordre N; $N \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}^N$ sont données, consiste à trouver un point critique de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & E(x) = \dfrac{1}{2}\langle Mx, x\rangle - \langle a, x\rangle . \end{array}$$

où $\langle .;. \rangle$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^N$. Or la résolution d'une équation de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ est plus simple que celle de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Cette approche est appelée méthode variationnelle, elle est fortement utilisée dans la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques, à plus forte raison lorsqu'il s'agit de l'opérateur Laplacien. On a souligné que les équations aux dérivés partielles apparaissent dans la modélisation de plusieurs phénoménes physiques, chimiques...; par exemple une solution qui correspond à un état d'équilibre est obtenue comme un point de minimum d'une fonctionnelle d'énergie.

L'outil majeur sur lequel s'appuie la théorie des points critiques est le fameux théorème de Passe Montagne dit aussi Lemme du Col.

Ce mémoire est composé de quatres chapitres

Le premier est introductif; il contient toutes les notions préliminaires requises dans les chapitres qui lui succèderont.

le deuxième chapitre met en exergue la formulation faible ou variationelle d'un problème elliptique linéaire avec conditions de Dirichlet sur les bords, le passage de la formulation forte à la formulation faible y est illustré avec simplicité sur un problème linéaire sur lequel on applique aisément la Théorie de Lax-Milgram dans la quête de la solution.

En effet nous abordons le problème suivant

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Où Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f est une fonction définie sur $L(\Omega)$.

Le résultat principale de cette partie s'ennonce dans le théorème suivant:

Théorème 0.1 *Pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$, le problème*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \textit{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \textit{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$.

La preuve de ce théorème repose sur la Théorie de Lax-Milgram qui est directement appliquée sur la formulation faible associée au problème précédent à savoir:

Théorème 0.2 *[4] On suppose que V est un espace de Hilbert et que les formes a et L vérifient les hypothèses suivantes:*

(1) Il existe $c > 0$ telle que $|L(v)| \leq c \|v\|_V$ pour tout $v \in V$ (L est continue).

(2) Il existe $C' > 0$ telle que $|a(u,v)| \leq c' \|u\|_V \|v\|_V$ pour tout $u, v \in V$ (a est continue).

(3) Il existe $\alpha > 0$ telle que $a(u,v) \geq \alpha \|u\|_V^2$ pour tout $u \in V$ (a est coercive).

Alors il existe une unique solution $u \in H$ du problème

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \textit{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \textit{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

qui vérifie l'estimation apriori

$$\|u\|_V \leq \frac{\|L\|_{V'}}{\alpha},$$

avec $\|L\|_{V'} = \sup \|u\|_{v=1} |L(v)|$ la norme de L dans le dual V'.

Dans le troisième chapitre, nous appliquerons l'identité de Pohazaev pour montrer la non existence des solutions pour un problème elliptique à croissance critique, nous allons constater dans cette partie que l'absence de perturbation d'ordre inférieure va entraver l'existence des solutions.

En effet, nous abordons le problème suivant qui est un problème elliptique contenant un exposant critique de Sobolev sur un domaine étoilé par rapport à l'origine:

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2*-2} u \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le but principal de ce problème est de mettre en branle l identité de Pohozaev ennoncée dans le théorème suivant pour montrer que les solutions non triviales n'existent pas.

Théorème 0.3 *Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à 0 et u une solution de $(\mathcal{P}_1)$.*

Alors u satisfait l'identité

$$\frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\,(x.v)ds=N\int G(u)dx.$$

On a

$$-\Delta u=g(u)\ \ dans\ \Omega$$

Dans le dernier chapitre, on étudie l'existence des solutions non triviales dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, pour le problème critique perturbé suivant:

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases}-\Delta u=|u|^{p-2}\,u+|u|^{2*-2}\,u, & \text{dans } \Omega\\ u=o & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N\geq 3)$; $2^*=2N\,/N-2$ est l'exposant critique de Sobolev et $2<p<2^*$.

Etonamment, ce passage va nous montrer que la présence de perturbation d'ordre inférieur avec le terme contenant l'exposant critique de Sobolev va nous permettre d'obtenir une solution non triviale via le théorèème de Passe Montagne. Notre résultat principale est donné dans le théorème suivant:

Théorème 0.4 *Si $N\geq 3$, $2<p<2^*$; alors il existe une solution positive non triviale pour le problème $(\mathcal{P}_2)$.*

Chapitre 1

préliminaires

Ce chapitre étant d'importance cruciale dans la mesure où il facilitera la compréhension des autres qui vont succéder, les notions de base de l'analyse fonctionnelle sur lesquelles sont fondés les raisonnements qui s'impliquent dans l'approche variationnelle sollicitée dans ce travail, y sont étalées. Ainsi nous y rappelons quelques définitions de base jugées utiles dans les parties suivantes.

La notion des points critiques ainsi que la condition de Palais-Smale y prendront part. On y trouvera aussi le principe variationnel d'Ekeland et le Lemme du Col (Mountain Pass Theorem) ces deux puissants outils exigés dans le processus de démonstration de l'existence des solutions. Le chapitre introduit aussi les espaces de Sobolev qui constituent le cadre fonctionel adéquat pour la recherche des solutions des problèmes à stucture variationelle. Ces espaces sont connus pour leurs vertus, en l'occurence leurs propriétés entre autres, leurs injections et leur réfléxivité, ces derniers dont l'atout majeur est de constituer une chaine de liaison entre convergence faible et convergence forte.

A cet effet, définissons d'abord quelques espaces fonctionnels.

1.1 Quelques espaces fonctionnels

Définition 1.1 *[3] Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On appelle espace de Lebesgue et on le note $L^P(\Omega)$ l'ensemble:*

$$L^P(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

qui est muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.1 *(Fischer-Riesz)*

L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 1.1 *(Inégalité de Hölder)*

Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$, $|fg| \in L^1(\Omega)$, on a l'inégalité:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Si $p = p'$, cette inégalité est plus communément appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

Lemme 1.1 *(Lemme de Brézis-Lieb)*

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq P < \infty$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et bornée dans $L^p(\Omega)$ et $u_n \longrightarrow u$ p.p dans Ω, alors:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (\|u_n\|_{L^p}^p - \|u_n - u\|_{L^p}^p) = \|u_n\|_{L^p}^p.$$

Définition 1.2 *Soient E un espace de Banach et J l'injection canonique de E dans E", on dit que E est réflexif si*

$$J(E) = E".$$

Lorsque E est réflexif on identifie imlicitement E et E" (à l'aide de l'isomorphisme J).

Théorème 1.2 *(d'Eberlein-Shmulyan)*

Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E contient une sous suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement E.

Proposition 1.2 *Un espace de Banach E est dit réflexif si et seulement si tout fermé borné de E est faiblement compact.*

Définition 1.3 *Un espace métrique E est dit séparable s'il existe un ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Les espaces de Sobolev sont des espaces vectoriels normés qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles pour des ouverts de $\mathbb{R}^N$ "assez réguliers", ainsi la partie qui suit leur est dédiée.

1.2 Espaces de Sobolev

L'approche sollicitée dans ce mémoire étant purement variationnelle, préciser le cadre fonctionnelle dans la quête des solutions est de mise, ce cadre n'est en fait autre que les espaces de Sobolev dont la propriété de réflexivité définie précédement sera le maillon liant la solution faible à la solution classique. Pour cela, il est primordial d'en donner la définition et quelques propriétés.

1.2.1 Les espaces de Sobolev d'ordre "1"

Définition 1.4 *Soient $p \in [1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1, et on note $W^{1,p}(\Omega)$ l'ensemble:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \text{ telles que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Ici les dérivées parielles d'ordre 1 sont considérées au sens faible c'est-à-dire au sens des distributions.

Cas particulier: si $p = 2$, alors $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Théorème 1.3 *Pour tout $P \in [1, +\infty[$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, on a les propriétés suivantes:*

1. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme:*

$$u \longmapsto \|u\| = \begin{cases} (\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} & si\ P \in [1, +\infty[, \\ \max(\|u\|_{L^\infty},\ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L\infty}\ 1 \leq i \leq n) & si\ p = +\infty. \end{cases}$$

2. *Si $p = 2$, $W^{1,p}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est un espace de Banach pour le produit scalaire:*

$$(u,v) \longmapsto (u\,|v\,) = \int_\Omega u\overline{v}dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u \partial \overline{v}}{\partial x_i \partial x_i} dx.$$

3. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif, pour $1 < p < +\infty$.*

4. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable, pour $1 \leq p < +\infty$.*

Dans ce qui suit, nous étendrons cette notion à un contexte plus général.

1.2.2 Les espaces de Sobolev d'ordre "m"

Définition 1.5 *Soient $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq +\infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et m un entier avec $m \geq 2$. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on le note $W^{m,p}(\Omega)$ (resp $H^m(\Omega)$ si $p = 2$) l'ensemble:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega),\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

1.3 Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Soient p un réel, $1 \leq p < \infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$et $D(\Omega)$ est un sous-ensemble de $W^{1,p}(\Omega)$. On peut facilement montrer que pour $I =]a,b[$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $D(I)$ n'est pas dense dans $W^{1,p}(I)$. Pour de nombreux ouverts, $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{1,p}(\Omega)$ à cet effet, on introduit de nouveaux espaces de Sobolev (il existe des hypothèses précises sur Ω qui vont permettre de prouver que $D(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$).

Définition 1.6 *[7] Pour tout p tel que $1 \leq P < \infty$, on appelle espace de Sobolev, et on note $W_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ i.e $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\|_{w^{1,p}(\Omega)}}$.*

Cas particulier: si $p = 2$ alors $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Remarque 1.1 *[14] Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ est fermé dans $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la topologie induite, c'est un espace de Banach séparable, il est réflexif pour tout réel p vérifiant $1 < p < \infty$.*

Remarque 1.2 *Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, on sait que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, et par conséquent $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Cette propriété n'est pas vraie pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, par exemple lorsque Ω est une boule ou un pavé borné de $\mathbb{R}^N$, $W^{m,p}(\Omega) \neq W_0^{m,p}(\Omega)$.

1.4 Quelques inégalités et injections de Sobolev utiles

Les injections de Sobolev sont trés utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espace de Lebesgue. Commençons par le critère de compacité de Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.4 *[14] "Rellich-Kondrachov"*

Soit Ω un ouvert de classe C^k de $\mathbb{R}^N$ borné, alors:

- *si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q \quad \forall q \in [1, p^*[$, où $p^* = \frac{N_p}{N-p}$.*
- *si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q \quad \forall q \in [p, \infty[$.*
- *si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \overline{C}(\Omega)$.*

Remarque 1.3 *L'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ n'est pas compacte. On remarque qu'en particulier que:*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \; \forall 1 \leq p < 2^*.$$

Proposition 1.3 *"Inégalité de Poincaré":*

On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante $c = c(\Omega,p)$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty.$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.4 *L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie ou bien si Ω est borné dans une seule direction.*

Théorème 1.5 *"Inégalité de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg"*

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on définit $p^* = \frac{N_p}{N-p}$ ou de façon équivalente $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} = \frac{1}{N}$ alors:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

De plus, il existe une constante $C = C(p,N)$ telle que:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Lemme 1.2 *[2] Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine ouvert borné, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ et $1 \leq p \leq 2^*$. Alors il existe une constante positive $\tilde{C}$ telle que*

$$\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \tilde{C}\left(\int_\Omega |\nabla_u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Par conséquent $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, si $p < 2^*$.

1.5 Méthodes variationnelles

L'essentiel de cette section sera consacré à la présentation des méthodes variationnelles et à leur application pour résoudre des équations aux dérivées partielles elliptiques. Cette section est aussi l'occasion d'introduire des définitions et des notations qui seront utilisées par la suite dans ce travail.

Utiliser une méthode variationnelle en analyse non linéaire signifie que l'on va chercher une solution sous forme d'un point critique d'une fonctionnelle associée.

1.5.1 Point critique

Définition 1.7 *[13] Soient E un espace de Banach, $V \subset E$ un ouvert et $J\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $\mathbb{C}^1$.*

- *On dit que $u \in V$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.*
- *Si $u \in V$ est un point critique de J alors le réel c vérifiant $J(u) = c$ est dit valeur critique de J sinon c est une valeur régulière.*

Remarque 1.5 *La notion de point critique peut être interprétée comme minimum local d'une fonctionnelle, mais en général ceci ne se produit qu'en présence d'une certaine propriété de compacité. L'exemple le plus simple des points critiques est les extrémités d'une fonction $J \in \mathbb{C}^1$, i.e un point où J atteint un minimum ou un maximum. Une classe importante des fonctions atteignant leur minimum est constituée par les fonctions convexes.*

1.5.2 La condition de Palais-Smale

Pour minimiser une fonctionnelle dans le calcul des variations, un ingrédient essentiel est la compacité relative (pour une certaine topologie) des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition apriori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle, indépendament de l'existence ou non de valeurs critiques. Elles sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

Définition 1.8 *[9] Soient E un espace de Banach et J: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c ((P-S)$_c$en abrégé) si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que:*

$$J(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } E \text{ et } J'(u_n) \longrightarrow O \text{ dans } E' \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans E vers un point critique de J.

Si la condition de (P-S)$_c$ est vérifiée pour tout $c \in \mathbb{R}$, on dit alors que J vérifie la condition de (P-S).

Remarque 1.6 *La condition de Palais-Smale ne préjuge pas l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *celle-ci est nécessairement relativement compacte.*

Définition 1.9 *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ *est dite une suite de Palais-Smale pour* J *sur* $H_0^1(\Omega)$ *si elle vérifie*

$$J(u_n) \text{ est bornée dans } E \text{ et } J'(u_n) = o_n(1) \text{ dans } E'.$$

De plus, si chaque suite de Palais-Smale pour J *sur* $H_0^1(\Omega)$ *possède une sous-suite fortement convergente, alors on dit que* J *satisfait la condition de Palais-Smale.*

Exemple 1 *Dans* $\mathbb{R}$, *la fonction* $f\colon t \longrightarrow t^2$ *satisfait la condition de Palais-Smale en* 0 *tandis que la fonction* $g\colon t \longrightarrow \exp(-t)$ *ne la satisfait pas, car la suite* $u_n = n$ *vérifie* $\exp(-n) \longrightarrow 0$ *et* $u_n \longrightarrow \infty$. *pour cela, on exige que la fonctionnelle satisfasse une certaine condition de compacité. Ainsi, pour prouver la convergence forte des suites minimisantes ou de façon générale des suites qui convergent vers un point présentant une candidature à devenir un point critique, on a souvent recours à la dite condition de Palais-Smale.*

Remarque 1.7 *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ *est une suite (P-S) et que* $u_n \rightharpoonup u$, *il est souvent facile de montrer que* $J'(u) = 0$. *Si* $u \neq 0$ *on obtient alors un point critique non trivial. C'est souvent plus simple que de montrer que* $u_n \longrightarrow u$.

Définition 1.10 *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ *est dite une suite de Cerami au niveau* c *si elle vérifie:*

$$J(u_n) \longrightarrow c \text{ et } (1 + \|u_n\|)J'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Théorème 1.6 *"Ambrosetti-Rabinowitz" [11]*

Soit J *une fonctionnelle de classe* C^1 *sur un espace de Banach* E *qui vérifie les hypothèses suivantes:*

(i) Il existe $u_0 \in E$, $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que:

$$\text{si } \|u - u_0\| = 0 \text{ alors } J(u) > J(u_0) + \alpha.$$

$ii)$ Il existe un point $u_1 \in E$ tel que:

$$\|u - u_0\| = 0 \text{ et } J(u_1) < J(u_0) + \alpha.$$

Soit P l'ensemble des chemins reliant u_0 à u_1, c'est-à-dire

$$P = \{p \in C([0,1];V) \text{ tel que } p(0) = u_0 \text{ et } p(1) = u_1\},$$

et

$$\beta = \inf_{p \in P} (\sup_{s \in [0,1]} J(p(s))).$$

Alors $\beta \geq J(u_0) + \alpha$ et β est une valeur critique généralisée de J.

Si J vérifie (P-S), β est donc une valeur critique de J.

1.5.3 Principe variationnel d'Ekeland

Théorème 1.7 *Soient (Γ,d) un espace métrique, et J: $\Gamma \longrightarrow]-\infty,+\infty[$ une fonctionnelle bornée inférieurement c'est-à- dire:*

$$c = \inf_{\Gamma} J > -\infty,$$

et semi continue inférieurement sur Γ. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ tel que

$$c \leq J(\gamma_\epsilon) \leq c + \epsilon,$$

et

$$J(\gamma) - J(\gamma_\epsilon) + \epsilon d(\gamma, \gamma_\epsilon) \geq 0. \ \forall \gamma \in \Gamma.$$

Si Γ *est un espace de Banach et* $J \in C^1(\Gamma;\mathbb{R})$ *est bornée inférieurement, alors il existe une suite minimisante* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* J *dans* Γ *telle que:*

$$J(u_n) \longrightarrow \inf_\Gamma J \text{ et } J'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } \Gamma' \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

1.5.4 Lemme du col (Mountain Pass Theorem)

Pour une fonctionnelle J qui n'est pas bornée (ni majorée, ni minorée), chercher des points critiques revient à chercher des points selles. Ces points sont déterminées par un argument de type min-max, ce qui nous ramène à l'utilisation du Lemme du col ou Théorème de Pass Montagne.

Lemme 1.3 *Soient* E *un espace de Banach et* $J \in C^1(E;\mathbb{R})$ *vérifiant la condition de Palais-Smale et telle que:*

i) $J(0) = 0$.

ii) Il existe $R > 0$ *et* $a > 0$ *tels que si* $\|u\|_E = R$ *alors* $J(u) \geq a$.

iii) Il existe $v \in E$, $\|v\|_E > R$ *, tel que* $J(v) < a$.

On définit :

$$P = \{p \in C([0,1];\, E),\, p(0) = 0,\, p(1) = v\}\,.$$

Alors J *admet une valeur critique* $c \geq a$ *avec* $c = \inf_{p\in P} \sup_{v\in P} J(u)$.

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions pour un problème elliptique via la théorie de Lax Milgram

2.1 Introduction

Nous allons illustrer le passage à une formulation variationnelle sur l'exemple simple mais important du problème du Laplacien (ou équation de Poisson): on cherche une fonction u telle que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f est une fonction définie sur $L^2(\Omega)$.

Afin de donner un sens à l'équation (2.1), il faut préciser l'espace dans lequel on cherche la solution.

En multipliant l'équation par une fonction test v de classe C^1, et en intégrant sur le domaine, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta uv = \int_\Omega fv$$

en appliquant la formule de Green, on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_\Omega fv,$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = \bigtriangledown u.n$ est la dérivée normale de u, avec n le vecteur unitaire extérieur au bord $\partial\Omega$.

En supposant de plus que v s'annulle au bord, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv.$$

En introduisant l'espace $V = \{v \in C^1;\, v|_{\partial\Omega} = 0\}$, on déduitt que toute solution de (2.1) est aussi une solution de la formulation variationnelle.

Trouver $u \in V$ telle que $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in V$,

$$a(u;v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} \text{ et } L(v) := \int_\Omega fv = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 2.1 *La formulation variationnelle nous permet aisément d'obtenir un résultat d'unicité pour l'équation, en prouvant que $u = 0$ si $f = 0$.*

En effet, en prenant dans ce cas $u = v$ dans (2.1), on obtient $\nabla u = 0$ donc, u est une constante nulle puisque $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Remarque 2.2 *[4] Si V est un espace de dimension finie, toute équation de type (2.1) peut se reformuler sous la forme d'une équation linéaire $Au = f$ où A est l'unique endomorphisme de V tel que $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ et f l'unique élément de V, avec $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire fixé dans V. Dans un tel cas, l'unicité de la solution signifie que A est injective et donc un isomorphisme qui assure l'existence d'une solution. Cependant nous travaillons ici en dimension infinie. L'existence de la solution du problème (2.1) va découler de la théorie de Lax-Miligram.*

2.2 Théorie de Lax-Milgram

Dans cette section, on considère un problème général pouvant se mettre sous la forme variationnelle

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Miligram, il faut que u et v soient dans le même espace fonctionnel, ce qui explique que lors de la fabrication de la formulation faible à partir d'une "EDP", on essaie d'équilibrer les dérivées entre la solution et la fonction test. Ce théorème apporte une réponse à l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution dans un cadre précis.

Théorème 2.1 *[4] On suppose que V est un espace de Hilbert et que les formes a et L vérifient les hypothèses suivantes:*

(1) Il existe $c > 0$ telle que $|L(v)| \leq c \|v\|_V$ pour tout $v \in V$ (L est continue).

(2) Il existe $c' > 0$ telle que $|a(u,v)| \leq c' \|u\|_V \|v\|_V$ pour tout $u, v \in V$ (a est continue).

(3) Il existe $\alpha > 0$ telle que $a(u,v) \geq \alpha \|u\|_V^2$ pout tout $u \in V$ (a est coercive).

Alors il existe unique solution $u \in H$ du problème (2.1) qui vérifie l'estimation apriori

$$\|u\|_V \leq \frac{\|L\|_{V'}}{\alpha},$$

avec $\|L\|_{V'} = \sup_{\|u\|_v=1} |L(v)|$; la norme de L dans le dual V'.

Preuve: L'estimation à postériori s'établit en prenant $u = v$ puis en appliquant la continuité de L et la coercivité de a ce qui donne

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq c \|u\|_V .$$

Il suffit alors de prendre $c = \|L\|_{V'}$. Cette estimation nous donne aussi l'unicité de la solution.

Pour l'existence, considérons d'abord le cas simple où a est une forme symétrique. Dans ce cas, la continuité et la coercivité de a montrent qu'il sagit d'un produit scalaire sur $V \times V$ et que la norme $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$ est équivalente à la norme $\|.\|_V$. Puisque L est continue, elle l'est aussi par rapport à $\|.\|_a$ et le théorème de représentation de Riesz nous assure donc l'existence d'un unique $u \in V$ tel que $L(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in V$.

Dans le cas non symétrique, on remarque que puisque $v \longrightarrow a(u,v)$ et $v \longrightarrow L(v)$ sont continues, on peut écrire $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ et $L(v) = \langle f, v\rangle$ où A est un opérateur continu sur V, $f \in V$ et $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire dans V. On obtient donc $Au = f$ dans V.

L'hypothèse de la coercivité nous permet d'affirmer que

$$\alpha \|u\|_V \leq \|Av\|_V ,$$

pour tout $v \in V$, ce qui est entraine que $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace fermé de V qui se décompose donc suivant $V = \mathrm{Im}(A) \oplus (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$. Considérons à présent $w \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$. La coercivité nous montre que

$$\alpha \|w\|_V^2 \leq a(w,w) = \langle Aw, w\rangle = 0.$$

Par conséquent $\mathrm{Im}(A) = V$ ce qui prouve l'existence de la solution u. ∎

Remarque 2.3 *Bien qu'un espace de Hilbert s'identifie avec son dual, il sera souvent pertinent de distinguer V et V'. On écrit donc $a(u,v) = \langle Au, v\rangle_{V',V}$ et $L(v) = \langle f, v\rangle_{V',V}$ où A est un opérateur continu de V dans V', $f \in V'$ et $\langle .,. \rangle_{V',V}$ le produit de dualité entre V' et V. L'équation s'écrit alors $Au = f$ dans V'et le théorème de Lax-Miligram montre que A est un isomorphisme de V dans V'.*

Remarque 2.4 *[4] Dans le cas où la forme a est symétrique, on vérifie que toute solution* *u est aussi un minimiseur sur V de la fonctionnelle*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - L(v).$$

On pourra vérifier que la propriété de la coercivité est alors équivalente à la propriété dite de $\alpha-$*convexité*

$$J(\frac{v+w}{2}) \leq \frac{J(v)+J(w)}{2} - \frac{\alpha}{8}\left\|u-v\right\|_V^2,$$

et que toute fonction $\alpha-$*convexe continue sur un espace de Hilbert atteint un minimum qui est unique.*

Si l'on revient à présent au problème du Laplacien (2.1) *et à sa formulation variationnelle dans l'espace* $V = \{v \in C^1;\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$*, on voit que*

$$\left\|v\right\|_V = \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}$$

définit une norme sur V telle que les propriétés de la continuité et de la coercivité sont trivialement satisfaites par a*. La continuité de* $L(v) = \langle f, v\rangle_{L^2(v)}$ *est une conséquence de l'inégalité de Poincaré, si* Ω *est un domaine borné, il existe une constante* c_p *telle que pour toute fonction* f *de* V*, on a*

$$\left\|v\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_p \left\|\nabla v\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré on a donc

$$|L(v)| \leq \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|v\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_L \left\|v\right\|_V,$$

avec $c_L = c_p \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}$*. Toutes les conditions du théorème de Lax-Miligram sont vérifies à l'exception du fait que V n'est pas un espace complet. Il est donc nécessaire d'introduire un cadre fonctionnel mieux approprié. Celui-ci se fonde sur les espaces de Sobolev.*

2.3 Application

Définition 2.1 *$u \in H_0^1(\Omega)$ est dite solution faible de (2.1) si*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 2.2 *Pour toute $f \in L^2(\Omega)$, le problème (2.1) admet une solution faible unique dans $H_0^1(\Omega)$.*

Preuve: *$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni par la norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \backsimeq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.*

Soit

$$\begin{aligned} a \quad &: \quad H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) \quad &\longrightarrow \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v. \end{aligned}$$

Il est clair que a est bilinéaire (linéaire et symétrique). De l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega |\nabla u| \, |\nabla v| \\ &\leq (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\nabla v|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1}.$$

Par conséquent, a est continue et coercive.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \int_\Omega |fv| \\ &\leq (\int_\Omega f^2)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega v^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui implique que L est continue.

D'où les hypothèses du théorème de Lax-Miligram sont satisfaites donc, il existe une unique solution faible u de la formulation variationnelle qui est l'unique solution du problème (2.1) . De plus a est symétrique alors u minimise la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$. ■

Chapitre 3

L'identité de Pohozaev et la non existence des solutions

Dans ce chapitre, nous ferons usage de l'identié de Pohazaev pour montrer la non existence des solutions dans le cas critique; nous soulignons dans ce passage, que la non existence de solution découle du fait que la non linéarité ne contienne pas de terme de perturbation.

3.1 Non existence des solutions pour des problèmes non perturbés

L'idendité de Pohozaev a été remarqué par S.I Pohozaev [5], elle sert à montrer la non existence des solutions sur un ouvert étoilé.

On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2*-2}\, u & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert étoilé par rapport à l'origine, de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$; $2^* = 2N/N-2$ est l'exposant critique de Sobolev. On cherche des solutions non triviales du problème $(\mathcal{P}_1)$.

C'est la présence de l'exposant critique de Sobolev qui fait que le problème en question soit critique.

Définition 3.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *contenant* 0 *et de bord* $\partial\Omega$, v *désigne la normale extérieur à* $\partial\Omega$*. On dit que* Ω *est étoilé si :*

$$x.v > 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

on considère le problème suivant:

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{dans } \Omega, \\ u \equiv 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

où Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* g *est une fonction donnée continue et de primitive*

$$G(v) = \int_0^v g(u)du,$$

appartient à $L^1(\Omega)$*.*

Théorème 3.1 *Soit* Ω *un ouvert étoilé par rapport à* 0 *et* u *une solution de* $(\mathcal{P}_1)$*.*

Alors u *satisfait l'identité :*

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x.v)ds = N\int G(u)dx.$$

Preuve: *On a*

$$-\Delta u = g(u) \text{ dans } \Omega \tag{3.1}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (3.1) par $x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ *pour un indice i fixé, et intégrons sur* Ω*, alors*

$$-\int_{\partial\Omega} \Delta u x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_\Omega g(u) x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

On intégre par parties le terme de droite, on obtient :

$$\int_{\Omega} g(u)x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega}\frac{\partial[G(u)]}{\partial x_i}x_i dx-\int_{G}(u)dx.$$

D'autre part, on intégre par parties le terme de gauche de l'équation (3.1), on obtient:

$$-\int_{\partial\Omega}\Delta u x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}dx=-\int_{\Omega}(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j})(x_i\frac{\partial u}{\partial x_i})dx.$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{N}[\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i\frac{\partial u}{\partial x_i})]dx-\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i)dv\\
&= \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{N}[\frac{\partial u}{\partial x_j}(\delta_i j\frac{\partial u}{\partial x_i}+x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_i})]dx-\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i)dv\\
&= \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2dx+\frac{1}{2}\int\sum_{j+1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_j})^2x_idx-\sum_{j=1}^{N}\int\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}x_iv_jds.\\
&= \int(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{j}^{N}(\frac{\partial u}{\partial x_j})^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial u}{\partial x_j})^2x_idv-\sum_{j=1}^{N}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}x_iv_ids
\end{aligned}$$

Sur le bord $\partial\Omega$, on a $x\nabla u=xv\frac{\partial u}{\partial v}$ et donc en faisant la somme par rapport à i, on obtient:

$$(1-\frac{N}{2})\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2(x.v)ds-\int(\frac{\partial u}{\partial v})^2(x.v)ds=-N\int G(u)dx$$

d'où

$$(\frac{N-2}{2})\int|\nabla u|^2dx-\frac{1}{2}\int|\nabla u|^2(x.v)ds=N\int G(u)dx \tag{3.2}$$

■

3.2 Résultat de non existence

On considère le problème suivant:

$$(p)\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2*-2}\, u \ \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

En multipliant Eq (3.3) par "u"et en intégrant par partie

$$\begin{aligned} -\Delta u u &= |u|^{2*-2} u \\ -\Delta u u &= |u|^{2*-1} \\ -\int \Delta u u &= \int |u|^{2*-1} \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \int |\nabla u|^2 &= \int |u|^{2*-1} \\ \int |\nabla u|^2 &= \frac{|u|^{2*}}{2^*} \end{aligned} \tag{3.4}$$

En multipliant Eq (3.2) par $\frac{2}{N-2}$, on obtient

$$\int |\nabla u|^2 \, dx + \frac{N}{N-2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \, (x.v) ds - \frac{2N}{N-2} \int \frac{|u|^{2*}}{2^*} dx = 0$$

Par idetification avec (3.4), on déduit:

$$\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \, (x.v) ds = 0$$

et donc $u \equiv 0$ sur Ω d'o% la non existence des solutions non triviales.

Chapitre 4

Problème critique perturbé

Dans ce chapitre, on étudie l'existence des solutions non triviales dans $H_0^1(\Omega)$, pour le problème critique perturbé suivant:

$$(\mathcal{P}_2)\ \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + |u|^{2*-2}\, u, & \text{dans } \Omega \\ \quad u = o & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$; $2^* = 2N\,/N-2$ est l'exposant critique de Sobolev et $2 < p < 2^*$.

Notre résultat principale est le théorème suivant:

Théorème 4.1 *Si $N \geq 3$, $2 < p < 2^*$; alors il existe une solution positive non triviale pour le problème $(\mathcal{P}_2)$.*

On définit la fonctionnelle d'énergie associé au problème $(\mathcal{P}_2)$ par

$$I(u) = \frac{1}{2}\,\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2*}\, dx.$$

Il est clair que I soit bien définie et de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\, \mathbb{R})$ et ses points critiques sont des solutions faibles du problème $(\mathcal{P}_2)$ ceci veut dire qu'un point $u \in H_0^1(\Omega)$ est dit solution faible de $(\mathcal{P}_2)$ s'il satisfait :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{p-2} uvdx - \int_\Omega |u|^{2*-2} uvdx = 0$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

4.1 Conditions géométriques

On va montrer que les conditions géométriques de Théorème de Passe-Montagne sont vérifiées.

Lemme 4.1 *:*

Il existe $\alpha, \rho > 0$ et $e \in H_0^1(\Omega)$ tels que:

$$\begin{aligned} i)\ I(u) &\geq \alpha \quad si\ \|u\| = \rho. \\ ii)\ \|e\| &> \rho \quad et\ I(e) < \alpha. \end{aligned}$$

Preuve: *:*

i) Par l'inégalité de Sobolev on a:

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|^p dx - \frac{1}{2^*}\int |u|^{2*} dx \\ &\geq I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_1\|u\|^p - c_1\|u\|^{2*} \end{aligned}$$

Comme $2^* > p > 2$ alors il existe $\rho > 0$ assez petit et $\alpha > 0$ tels que

$$I(u) \geq \alpha \ pour\ \|u\| = \rho.$$

ii) Soit $\tilde{u} \in H_O^1(\Omega)$ tel que $\|\tilde{u}\| = 1$. On a:

$$I(t\tilde{u}) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\tilde{u}|^p dx - \frac{t^{2*}}{2^*}\int_\Omega |\tilde{u}|^{2*} dx$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En faisant tendre t vers $+\infty$, alors:

$$I(t\tilde{u}) \longrightarrow -\infty.$$

Donc il existe $t_1$assez grand ($t_1 > \rho$) tel que $I(t_0\tilde{u}) < 0$. Alors pour $e = t_1\tilde{u}$, la condition ii) est vérifiée. ■

4.2 Condition de Palais-Smale

Dans ce qui suit, nous déterminons la condition de Palais-Smale.

Lemme 4.2 *Soit (u_n) une suite de Palais-Smale de niveau $c < c^*$ avec $c^* = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$. Alors on peut extraire une sous suite qui converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une fonction u_0 non nulle.*

Preuve: *On a*

$$C + o_n(1) = I(u_n) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int |u_n|^p\,dx - \frac{1}{2^*}\int |u_n|^{2^*}\,dx \tag{4.1}$$

$$o_n(1) = \langle I'(u_n), u_n\rangle = \|u\|^2 - \int |u_n|^p\,dx - \int |u_n|^{2^*}\,dx \tag{4.2}$$

Alors

$$\begin{aligned} C + o_n(1) &= I(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{P})\|u\|^2 + (\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*})\int |u_n|^{2^*}\,dx. \\ &\geq \frac{p-2}{2p}\|u_n\|^2 \end{aligned}$$

car $p < 2^*$. Comme $p > 2$, on déduit que (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Quitte à en *extraire une sous suite* (u_n), *on obtient*

$$\begin{array}{lll} u_n & \rightharpoonup & u_0 \ \ dans\ H_0^1(\Omega) \\ u_n & \rightharpoonup & u \ \ dans\ L^{2^*}(\Omega) \\ u_n & \longrightarrow & u_0 \ \ dans\ L^p(\Omega) \\ u_n & \longrightarrow & u_0 \ \ p.p\ dans\ (\Omega) \end{array}$$

donc u_0 *satisfait*

$$-\Delta u_0 = |u_0|^{p-2}\, u_0 + |u_0|^{2^*-2}\, u_0 \ \ dans\ \Omega$$

Nous obtenons aussi

$$\|u_0\|^2 = \int_\Omega |u_0|^p\, dx + \int_\omega |u_0|^{2^*}\, dx \quad dans\ \Omega \tag{4.3}$$

Soit $V_n = u_n - u_0$, *alors*

$$\begin{array}{lll} V_n & \rightharpoonup & 0 \ \ dans\ H_0^1(\Omega) \\ V_n & \rightharpoonup & 0 \ \ dans\ L^{2^*}(\Omega) \\ V_n & \longrightarrow & 0 \ \ dans\ L^p(\Omega) \\ V_n & \longrightarrow & 0 \ \ p.p\ dans\ (\Omega). \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} & & \left\| u_n \right\|^2 = \|V_n\|^2 + \left\| u_0 \right\|^2 + o_n(1), \\ \int |u_n|^p\, dx & = & \int |u_0|^p + o_n(1) \end{array}$$

et par le résultat de Brézis-Lieb, on a

$$\int |u_n|^{2^*}\, dx = \int |v_n|^{2^*}\, dx + \int |u_0|^{2^*} + o_n(1).$$

Donc par (4.1) on obtient

$$\begin{aligned}
C + o_n(1) &= I(u_n)\\
&= I(V_n + u_0)\\
&= \frac{1}{2}\|V_n + u_0\|^2 - \frac{1}{p}\int |V_n + u_0|^p\,dx - \frac{1}{2^*}\int |V_n + u_0|^{2^*}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\Big\|V_n\Big\|^2 + \frac{1}{2}\Big\|u_0\Big\|^2 - \frac{1}{p}\int |u_0|^p\,dx - \frac{1}{2^*}\int \Big|V_n\Big|^{2^*}dx - \frac{1}{2^*}\int \Big|u_0\Big|^{2^*}dx\\
&= I(u_0) + \frac{1}{2}\|V_n\|^2 - \frac{1}{2^*}\int V_n^{2^*}dx
\end{aligned}$$

D'autre part, par (4.2) et du fait que $\langle I'(u), u\rangle = 0$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \|u_n\|^2 - \int |u_n|^p - \int |u_n|^{2^*}\,dx.\\
&= \|V_n + u_0\|^2 - \int_\Omega |V_n + u_0|^p\,dx - \int_\Omega |V_n + u_0|^{2^*}\,dx\\
&= \|V_n\|^2 + \|u_0\|^2 - \int_\Omega |u_0|^p - \int_\Omega \Big|V_n\Big|^{2^*}dx - \int \Big|u_0\Big|^{2^*}dx\\
&\quad \langle I'(u_0), u_0\rangle + \|V_n\|^2 - \int |V_n|^{2^*}\,dx\\
&= \|V_n\|^2 - \int |V_n|^{2^*}\,dx
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Sobolev on a

$$\int |V_n|^{2^*}\,dx < S^{\frac{-2^*}{2}}\|V_n\|^{2^*}$$

D'où

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \|V_n\|^2 - \int |V_n|^{2^*}\,dx\\
&\geq \|V_n\|^2\,[1 - S^{\frac{-2^*}{2}}\|V_n\|^{2^*-2}].
\end{aligned}$$

Supposons que $\|V_n\| \longrightarrow l$ *avec* $l > 0$*; il s'ensuit que*

$$0 \geq l[1 - S^{\frac{-2^*}{2}} l^{\frac{2^*-2}{2}}].$$

Donc

$$l \geq S^{\frac{N}{2}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} c &= I(u_0) + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2^*}l \\ &= I(u_0) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})l \\ &\geq I(u_0) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})S^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, par (4.3) on a

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \frac{1}{p}\int |u_0|^p \, dx - \frac{1}{2^*}\int |u_0|^{2^*} \, dx \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\|u_0\|^2 + (\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*})\int |u_0|^{2^*} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $2 < p < 2^*$ *. On obtient alors*

$$c \geq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} = c^*.$$

Ce qui donne lieu à une contradiction par conséquent

$$l = 0 \text{ et } u_n \longrightarrow u_0 \text{ fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

■

A présent, nous allons montrer que la hauteur de l'énergie ne dépasse pas le niveau da Palais-Smale.

Il existe $v \in H_0^1(\Omega)$; $v \neq 0$ dans Ω tel que

$$\sup_{t \geq 0} I(tv) < c^*.$$

:

On suppose que $0 \in \Omega$.

Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$; $0 \leq \phi(x) \leq 1$ et

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } \ |x| \leq R \\ 0 \ \text{ si } \ |x| \geq 2R \end{cases} \text{ où } B(0, 2R) \subset \Omega.$$

On pose

$$u_\epsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}; \ \forall \epsilon > 0$$

et

$$v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon}{\int |u_\epsilon|^{2^*} dx}$$

de sorte que $\int |v_\epsilon|^{2^*} dx = 1$; on a les résultats suivants :

$$\|v_\epsilon\|^2 = S + o(\epsilon^{\frac{N-2}{4}}) \tag{4.4}$$

$$\int |v_\epsilon|^p = \begin{cases} o(\epsilon^{\frac{N-2}{4}p}) \ \text{ si } 1 \leq p < \frac{N}{N-2} \\ o(\epsilon^{\frac{N-2}{4}p} |\ln \epsilon|) \ \text{ si } p = \frac{N}{N-2} \\ (\epsilon^{\frac{1}{2}[N - p(\frac{N-2}{2})]}) \ \text{ si } \frac{N}{N-2} < p < 2^*. \end{cases} \tag{4.5}$$

On considère les fonctions suivantes:

$$g(t) = I(tv_\epsilon) = \frac{t^2}{2} \|v_\epsilon\|^2 - \frac{t^p}{p} \int |v_\epsilon|^p dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}$$

et

$$\tilde{g}(t) = \frac{t^2}{2}\|v_\epsilon\|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}$$

comme $\lim_{t\longrightarrow+\infty} g(t) = -\infty$ et $g(t) > 0$ pour t assez petit; alors il existe $t_\epsilon > 0$ tel que

$$\sup_{t\geq 0} g(t) = g(t_\epsilon)$$

Donc

$$\begin{aligned} o &= g'(t_\epsilon). \\ &= t_\epsilon \|v_\epsilon\|^2 - t_\epsilon^{p-1}\int |v_\epsilon|^p\,dx - t_\epsilon^{2^*-1} \\ &= t_\epsilon[\|v_\epsilon\|^2 - t_\epsilon^{p-2}\int |v_\epsilon|^p\,dx - t_\epsilon^{2^*-2}]. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|v_\epsilon\|^2 = t_\epsilon^{p-1}\int |v_\epsilon|^p\,dx + t_\epsilon^{2^*-2} \geq t_\epsilon^{2^*-2}$$

d'où

$$t_\epsilon \leq \|v_\epsilon\|^{\frac{2}{2^*-2}} = t_0$$

et on obtient:

$$\|v_\epsilon\|^2 \leq t_\epsilon^{2^*-2} + \|v_\epsilon\|^{2(p-2)/(2^*-2)}\int |v_\epsilon|^p\,dx.$$

Choisissant ϵ assez petit, on a par (4.4) et (4.5)

$$t_\epsilon \geq (\frac{S}{2})^{\frac{1}{2^*-2}} = t_1. \tag{4.6}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \theta &= \tilde{g}'(t) \Leftrightarrow \theta = t\|v_\epsilon\|^2 - t^{2^*-1} \\ &\Leftrightarrow t = \|v_\epsilon\|^{2/(2^*-2)} = t_0 \end{aligned}$$

La fonction $\tilde{g}$ est croissante sur $[0; t_0]$ et elle est décroissante sur $[t_0; +\infty]$, donc par (4.4) on obtient

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \tilde{g}(t) &= \tilde{g}(t_0). \\ &= \frac{1}{2} \|v\|^N - \frac{1}{2^*} \|v_\epsilon\|^N \\ &= \frac{1}{N} \|v_\epsilon\|^N \\ &= \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) \end{aligned}$$

D'où; par (4.6)

$$\begin{aligned} g(t_\epsilon) &= \tilde{g}(t_\epsilon) - \frac{t_\epsilon^p}{p} \int |v_\epsilon|^p \, dx \\ &\leq \tilde{g}(t_0) - \frac{t_\epsilon}{p} \int |v_\epsilon|^p \, dx. \\ &\leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) - \frac{1}{p} (\frac{S}{2})^{\frac{p}{2^*-2}} \int |v_\epsilon|^p \, dx. \end{aligned}$$

Dans le cas où $N = 3$, on a

$$\begin{aligned} g(t_\epsilon) &\leq \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}} + o(\epsilon^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{p} (\frac{S}{2})^{\frac{p}{4}} \int |v_\epsilon|^p \, dx \\ g(t_\epsilon) &< \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

dans le cas où $N \geq 4$ et $p > 3$, on a

$$g(t_\epsilon) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) - o(\epsilon^{\frac{1}{2}(p + \frac{N}{2}(2-p))}).$$

Comme $\frac{N-2}{2} > \frac{1}{2}(p + \frac{N}{2}(2-p))$ pour $N \geq 4$ et $p > 3$, alors pour ϵ assez petit on obtient :

$$g(t_\epsilon) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Conclusion: si $N = 3$ et $p > 4$; ou $n \geq 4$ et $p > 3$,alors

$$\sup_{t \geq 0} I(tv_\epsilon) < c^*.$$

Par les lemmes précédents on a les conditions géométriques du Théorème de passe montagne sont satisfaites; la condition de Palais-Smale est vérifiée pour $c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$ et le niveau d'énérgie ne dépasse pas le niveau de P.S. On conclut qu'il existe un point critique u_0 de I satisfaisant $I(u_0) = I(|u|)$ ie $u_0 \ > 0$.

Bibliographie

[1] A. Cohen, Approximations variationnelles des EDP, Notes du cours de M2.

[2] A. Ouahab, Analyse Fonctionnelle, cours Master Equations aux Dérivées Partielles et Applications EDPA, Université de Sidi Bel-Abbes, (2018).

[3] C.O. Alves, Corrêa and T.F.Ma, Positive solutions for a quasi-linear elliptic equation of Kirchhoff type, Computers and mathematics with applications, 49 (2005) 85-93.

[4] C-M. Marle, Distributions Espace de Sobolev et Applications, Marie Thérèse Lacroix- Sonrier, ellipses.

[5] E.Darrigrand, F.Méhats, Equations aux Dérivées Partielles elliptiques, IRMAR, Université de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex.

[6] F. Moktit, Solutions positives pour un problème elliptique non homogène, université Abou Bekr Belkaid, Novembre 2011, BP 119 Tlemcen13000 - ALGERIE.

[7] H. Brezis. Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson, 1983.

[8] H. Brezis, Functional Analysis,Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

[9] H. Le Dret, Notes de cours M2 équations aux dérivées partielles elliptiques, université Pierre & Marie CURIE, 4 Mars 2010.

[10] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris (1969).

[11] J. Rochat, Les espace de Sobolev, Ecole Polytechnique, Federalle de Lausanne.

[12] K.J. Brown, Y. Zhang, The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight functions, J.Differential Equations. 193 (2003) 481-499.

[13] L. Boulanger, Quelques théorèmes des points critiques basés sur une nouvelle notion d'enlacement.

[14] L. Moktefi, Introduction à la théorie des points critiques. Application à l'étude de quelques equations aux dérivées partielles non linéaires, Université Mira de Bejaia, (2018).

[15] M. Abdellah Taibi, Sur quelques problèmes elliptiques de type Kirchhoff, université Abou Bekr Belkaid, 25 septembre 2018.

[16] M. Chipot, Elements of Nonlinear Analysis, Birkhauser Advanced Texts, (2000).

[17] M-Thèrèse L-Sonrier, Distributions Espaces de Sobolev Applications, ellipses.

[18] S. Benmansour, Multiplicité des solutions pour des problèmes de Kirchhoff avec exposant critique de Sobolev, thèse de Doctorat, Université de Tlemcen, (2015).

[19] S-Hassani, {Espaces de Sobolev}, Cours Master Equation au dérivées partielles et applications EDPA, université de Sidi Bel-Abbes, (2018).

[20] S. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\blacksquare u + \blacksquare f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. 6,1408-1411(1965).