



N° Attribuée par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année univ.: 2019/2020



## Classes du gradient solitons de Ricci

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Mlle **Bahram Rania**<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Dr M.H.Dida**

Soutenue le 14/09/2020 devant le jury composé de

<b>Dr O.Bennihi</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
<b>Dr M.H. Dida</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
<b>Mr B. Saadli</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
<b>Pr F. Hathout</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

---

<sup>1</sup>e-mail : raniabahram@yahoo.fr

# *Dédicaces*

Je dedie ce travail à

- L'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral, mon offre précieux du dieu celui qui s'est sacrifié pour me voire heureuse qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect

**Mon cher père**

- La femme qui souffert sans me laisser souffrir qui n'a jamais dit non à mes exigences ,la lumière de mes jours, la sources de mes efforts, ma vie et ma bonheur, que dieu la donne la santé

**Ma mère**

- Les exemples de ma vie, Qui m'ont encouragé et c'est grace à eux je suis arrivé ici ,qui n'ont pas cessée de me consieller tout au long de mes étude. Que dieu les protège et leurs offre la chance et la bonheur

**Mes tantes**

- Qui sait toujours comment procurer la joie et la bonheur pour toute la famille

**Mon petit frère**

- Toute ma famille qui m'aiment.
- Mes amis et mes compagnons sur mon chemin de vie qui sont toujours avec moi je vais les remercier pour le soutien moral, la patience et la compréhension tout au long de ces années d'étude.

**Belkis et Fatima**

- 
- Tout ceux qui me connaissent et m'aiment.
- Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

# *Remerciements*

- Je voudrais dans un premier temps remercier mon Dieu de m'avoir donné la force et le savoir pour accomplir ce travail.
- J'adresse toutes mes gratitudes et mes remerciements à monsieur M.H.Dida pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils qui m'ont aidé à réaliser ce travail.
- Je tiens à remercier également monsieur O.Bennihi pour avoir accepté la présidence du jury.
- Je remercie également B.Saadli et F. Hathout d'avoir accepté d'examiner mon travail et d'être membres du jury.
- Je remercie aussi mes amis et tous les étudiants d'Analyse Mathématique et les autres spécialités.
- J'adresse mes remerciements à tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années.  
Enfin, je remercie Toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce modeste travail.

# Table des matières

<b>1 Variétés différentielles</b>	<b>8</b>
1.1 Définitions	8
1.2 Applications différentiables	10
1.3 Espace tangent	11
1.4 Fibré tangent	12
1.5 Champ de vecteur	12
1.6 Fibré cotangent	13
1.7 Crochet et Algèbre de Lie	14
1.8 Dérivée de Lie	15
1.8.1 Approche algébrique	15
1.8.2 Approche analytique	15
<b>2 Variétés Riemanniennes</b>	<b>16</b>
2.1 Métrique Riemannienne	16
2.2 Connexion	16
2.2.1 Tenseur de torsion	17
2.2.2 Connexion de Levi-cevita	18
2.3 Courbures	18
2.3.1 Tenseur de courbure	18
2.3.2 Courbure sectionnelle	19
2.3.3 Courbure de Ricci	19
2.3.4 Courbure scalaire	20
2.3.5 Courbures en dimension 2	20
2.4 Champs de vecteurs killing	22
2.5 Opérateurs	23
2.5.1 Opérateur gradient	23
2.5.2 Opérateur divergence	24
2.5.3 Opérateur Laplacien	25
2.5.4 Opérateur Hessien	25
<b>3 Soliton de Ricci</b>	<b>27</b>
3.1 Solitons de Ricci	29
3.1.1 Quelques exemples du soliton de Ricci Riemmannien	29
3.1.2 Quelques propriétés de soliton de Ricci	31
3.2 Les classes du gradient soliton de Ricci	33
3.2.1 Gradient soliton de Ricci en dimension 2	35
<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>

# Introduction

En mathématique, la géométrie différentielle est l'application des outils de calcul différentielle à l'étude de la géométrie. Les objets d'étude de base sont les variétés différentielles qui sont des collections d'homéomorphismes d'ensembles ouverts vers une sphère unitaire  $\mathbb{R}^n$  tel que les ensembles ouverts couvrent l'espace.

Les propriétés métriques de  $\mathbb{R}^n$  (distances et angles) sont déterminées par les coordonnées cartésiennes canoniques. Dans une variété généralement différentiable, cependant, il n'y a pas de telles coordonnées pour définir les distances et les angles, il faut ajouter plus de structure en choisissant un 2-champ de tenseur spécial, appelé métrique Riemannienne. Cette idée a été introduite par Riemann dans son exposé d'habilitation de 1854 intitulé «On the hypotheses which underlie geometry», à la suite de la découverte (vers 1830) de la géométrie non Euclidienne par Gauss, Bolyai et Lobachevsky. C'est une généralisation directe de géométrie différentielle des surfaces de Gauss en  $n$  dimensions.

Les variétés Riemanniennes sont des variétés différentielles munies d'une métrique riemannienne, voire des fibrés vectoriels riemmaniens.

Ainsi la théorie des groupes et algèbre de Lie apparaît dans les années 1870, alors que parallèlement Felix Klein souligne l'importance de groupe en géométrie.

Un pas décisif est franchi lorsque Gregorio Ricci-Curbastro et Tullio Levi-Civita développent le calcul tensoriel dans leur ouvrage «Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications », paru en 1900.

Même si plusieurs résultats que nous appelons aujourd'hui "topologiques" étaient déjà connus, c'est avec Poincaré (1854-1912) que la topologie prend sa forme moderne. En particulier, concernant les propriétés des surfaces ou des espaces de dimensions supérieures. Poincaré a introduit le concept fondamental de simplement connexe.

**Définition 0.1** *Une surface est appelée simplement connexe si chaque courbe sur elle peut être continuellement déformée en un seul point.*

**Théorème 0.2** *Toute surface fermée et simplement connexe est homéomorphe à la sphère (homéomorphe = déformable).*

Poincaré s'est demandé si ce théorème était vrai en dimension supérieure à deux, en particulier en dimension trois.

**Conjecture 1** (Poincaré, 1904). Soit  $M$  une variété compacte de dimension 3, simplement connexe, alors  $M$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^3$ .

Proposé en 1904 dans "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo"

1. Cette question, à l'origine purement topologique, s'est révélée extraordinairement difficile et a stimulé les recherches sur la classification des variétés de dimension 3.
2. Depuis les années 70, beaucoup de progrès ont été faits dans la compréhension des liens entre la topologie d'une variété et les géométries qu'elle peut porter.
3. La notion de courbure sectionnelle généralise la courbure de Gauss des surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$ .

4. Le point fondamental est qu'un espace où la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire  $K = -1, 0$  ou  $1$  est localement isométrique à l'espace hyperbolique, à l'espace euclidien ou à la sphère ronde. Si de plus l'espace est supposé simplement connexe, on a une isométrie globale.

On peut donc reformuler la conjecture de Poincaré comme un problème géométrique :

**Conjecture 2 :** Soit  $M$  une variété compacte, de dimension 3, simplement connexe, alors  $M$  peut être munie d'une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive. Pour munir une variété de la métrique la plus jolie, une idée naturelle consiste à partir d'une métrique quelconque et à la déformer pour lui donner le plus possible de symétrie ou d'homogénéité. Suivant cette idée, en 1982, Richard Hamilton a introduit l'équation du flot de Ricci

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric_{g(t)}, \quad (1)$$

où  $g(t)$  est une famille de métriques riemanniennes sur une variété donnée et  $Ric_g$  la courbure de Ricci associée à la métrique  $g$ . Cette courbure contient moins d'information que la courbure sectionnelle en général, mais autant en dimension 3.

- Fin 70- début 80, l'étude des tenseurs de Ricci et d'Einstein d'un point de vue analytique suscite un vif intérêt.
- Une proposition d'analyse d'une famille de flots, parmi laquelle le flot de Ricci, a été proposée par Jean-Pierre Bourguignon («Courbure de Ricci et métriques d'Einstein», Notes de cours en Math 838, 1981).
- En 1982, Richard Hamilton définit et étudie le flot de Ricci, c'est-à-dire le système de PDE

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric_{g(t)}, \quad (2)$$

décrivant l'évolution d'une métrique d'une variété riemannienne. "Three-manifolds with positive Ricci curvature", Journal of Differential Geometry 17, 1982, pp. 255–306. On dit que  $g(t)$  est un flot de Ricci sur  $[0, T[$  si elle satisfait à l'équation d'évolution 2.

- Le flot de Ricci déforme la métrique (d'où la géométrie locale) de manière «sélective» : se contractant dans les directions à tenseur de Ricci positif et se dilatant dans celles à tenseur de Ricci négatif.
- L'équation est non linéaire, appartenant à la même famille de l'équation de la chaleur.

**Théorème 0.3** *Si une variété Riemannienne en dimension 3 a un tenseur de Ricci positif, alors le flot de Ricci la déforme en une 3-sphère.*

Le large éventail d'applications de soliton de Ricci a incité les scientifiques à s'intéresser au développement de cette étude dans plusieurs directions. L'un d'eux est de trouver les solutions les plus simples du flot Ricci qui sont ses points fixes, en d'autres termes les métriques Ricci-flot. Une autre consiste à trouver des solitons de Ricci, c'est-à-dire des métriques solitaires résolvant des équations données. La théorie du soliton de Ricci a trouvé des applications dans diverses branches des sciences pures, appliquées, de l'ingénierie et médicales. Nous avons en particulier à l'esprit la géométrie Riemannienne, la relativité générale, les équations différentielles, la théorie de l'information, les statistiques mathématiques. Les solitons de Ricci sont des généralisations naturelles des métriques d'Einstein si  $X$  est un champs killing. On peut aussi les voir comme des points fixes du flots de Ricci, d'où l'appellation "Soliton" Un soliton est appelé rétrécit, stable ou en expansif si la constante  $\lambda$  est respectivement négatif, nul ou positif.

Le cas important est le gradient Ricci soliton ou  $X$  est le gradient du fonction  $f$  alors la dérivée de Lie devient la hessienne de  $f$

L'objectif de notre mémoire est de trouver les classes du gradient soliton de Ricci.

Notre mémoire est réparti en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous citons les notions générales et les préliminaires des variétés différentielles, espace tangent, fibré tangent, champ de vecteur et fibré cotangent parlons aussi d'algèbre de Lie et la dérivée de Lie accompagnons de quelques exemples et figures.

Le deuxième chapitre est réservé pour l'étude de la géométrie Riemannienne, on décrit les notions de métrique Riemannienne, la connexion Levi-Civita associée, les structures des courbures telle que les tenseurs de courbures, courbures sectionnelles, courbures de Ricci et courbures scalaires. Parlons aussi des opérateurs (gradient, divergence, laplacien et hessien) illustrant avec la 2-sphère, le 2-tore et la métrique tordue comme des exemples. Puis on fait un rappel des champs killing. Ces notions seront utiles pour la suite de ce travail.

La première section du dernier chapitre sera consacrée au solitons de Ricci (définitions, exemples et propriétés) et dans la deuxième section nous parlons de l'objectif essentiel qui consiste à étudier les classes de gradient soliton de Ricci à 2 dimensions et à spécialiser nos résultats pour présenter des études de cas remarquables des solitons de Ricci à gradient stable. .

# Chapitre 1

## Variétés différentielles

### 1.1 Définitions

**Définition 1.1** Un atlas de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , et de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée d'un ensemble de couple  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tel que :

(i)  $\forall i \in I$ ,  $U_i$  est un ouvert de  $X$  et  $\varphi_i$  est un homéomorphe de  $U_i$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

(ii)  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ .

(iii)  $\forall i, j \in I$ ,  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  est un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme.

**Remarque 1.2** (i)  $\forall i, j \in I$ ,  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Le couple  $(U_i, \varphi_i)$  est une carte de l'atlas.

(iii) Si  $x \in U_i$ ,  $(U_i, \varphi_i)$  est une carte en  $x$ .

(iv) Le  $n$ -uplet  $\varphi_i(x) = (\varphi_{i_1}(x), \dots, \varphi_{i_n}(x))$  représente les coordonnées locales de  $x$  associées à la carte  $(U_i, \varphi_i)$ .

(v) L'application  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  est nommée application de changement de cartes.

**Définition 1.3** Deux atlas de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $X$  sont compatibles si leur réunion est encore un atlas de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $X$ , il s'agit d'une relation d'équivalence. L'atlas maximal est obtenu en considérant la réunion de tous les atlas compatibles (qui est encore compatible).

**Remarque 1.4** (i) Pour vérifier que deux atlas sont compatibles il suffit donc de vérifier qu'étant données une carte  $(U, \varphi)$  du premier atlas et une carte  $(V, \psi)$  du second atlas, l'application de transition  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  est un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme.

(ii) Tout atlas est donc contenu dans un unique atlas maximal pour l'inclusion.

**Exemple 1.5** 1.  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable de dimension  $n$ .

2. La sphère  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est une variété différentiable de dimension  $n$ .

3. L'ensemble des matrices carré  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  d'ordre  $n$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  est une variété de dimension  $n^2$ .

4. Le produit de deux variétés est une variété de dimension somme des deux dimension par exemple le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  est une variété différentielle de dimension 2.

**Définition 1.6** Une variété différentielle de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est la donnée d'un espace topologique  $M$  séparé à base dénombrable et d'un atlas maximal sur  $M$  de classe  $\mathcal{C}^p$  et de dimension  $n$ .

**Exemple 1.7** la sphère  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Soient  $N = (1, 0, \dots, 0)$  et  $S = (-1, 0, \dots, 0)$ . Posons  $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  et  $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ .

On construit la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^n$  sur l'hyperplan équatorial  $H = \{x_0 = 0\} \simeq \mathbb{R}^n$  par



rapport à  $N$  en associant à tout point  $x \in U_N$  l'intersection de  $(N_x)$  et de  $H$ . De même pour la projection stéréographique par rapport à  $S$ . Après calculs on obtient

$$i_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad i_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto \frac{1}{(1-x_0)}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{1}{(1+x_0)}(x_1, \dots, x_n)$$

Il s'agit d'homéomorphismes d'inverses

$$i_N^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_N \\ y \longmapsto \left( \frac{1}{\|y\|^2+1} \right) (\|y\|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n), \\ i_S^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_S \\ y \longmapsto \left( \frac{1}{\|y\|^2+1} \right) (-\|y\|^2 + 1, 2y_1, \dots, 2y_n).$$

et L'application de changement de cartes est donnée par

$$i_S \circ i_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ y \longmapsto \frac{y}{\|y\|^2}$$

(voir Fig 1.1).

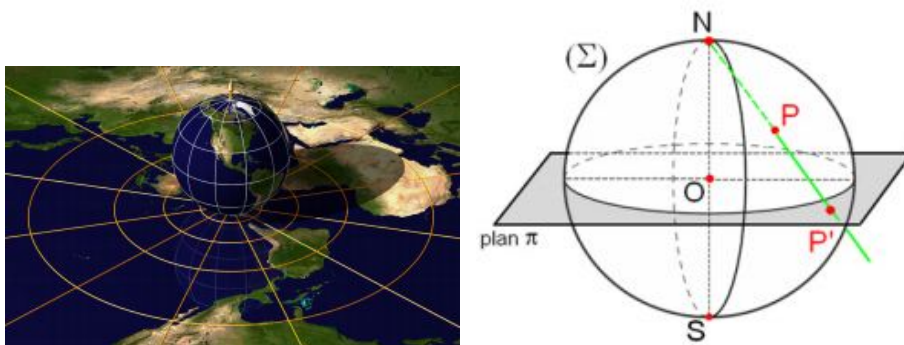


FIG. 1.1 –

**Exemple 1.8** (espace projectif réel  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ). Le  $(n+1)$ -uplet  $x = (x_0, \dots, x_n)$  est un système de coordonnées homogènes de  $p(x)$ . Il sera commode de noter  $[x] = [(x_0, \dots, x_n)]$  le point de coordonnées homogènes  $x$ . Nous allons munir  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  d'un atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  et donc en faire une variété. Posons  $V_i = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$  ( $0 \leq i \leq n$ ) et définissons les applications  $\Phi_i$  par :

$$\Phi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) \longmapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

où le signe  $\widehat{\phantom{x}}$  signifie que le terme correspondant est omis. Ce sont des applications continues et  $\Phi_i(x) = \Phi_i(y)$  si et seulement si  $p(x) = p(y)$ . D'après les propriétés de la topologie quotient,  $U_i = \Phi_i(V_i)$  est un ouvert de  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  et  $\Phi_i$  passe au quotient et donne une application bijective et continue  $\varphi_i$  de  $U_i$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Explicitement,

$$\varphi_i(p(x)) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

L'application réciproque est donnée par :  $\varphi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = p(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1})$ , ce qui montre que  $\varphi_i$  est un homéomorphisme de  $U_i$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Les fonctions de transition  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  sont bien des difféomorphismes de  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  sur  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ , car pour  $y_j \neq 0$  on a

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = \left( \frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \dots, \widehat{\frac{y_j}{y_j}}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_j} \right)$$

Nous avons ainsi une structure de variété lisse sur  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  (Fig.1.2).

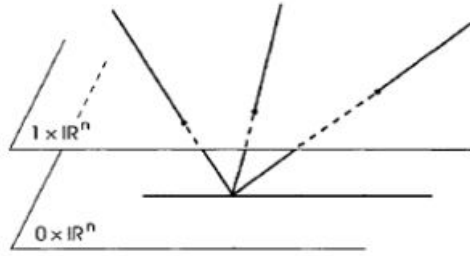


FIG. 1.2 –

## 1.2 Applications différentiables

Nous ne savons faire du calcul différentiel que sur des ouverts d'espaces vectoriels normés. L'intérêt des variétés est de pouvoir faire du calcul différentiel localement en se ramenant à des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  via les cartes. D'où la définition suivante.

**Définition 1.9** Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés différentielles de classe  $\mathcal{C}^p$  est dite de classe  $\mathcal{C}^p$  en  $x \in M$  s'il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $x$  et une carte locale  $(V, \psi)$  de  $N$  en  $f(x)$  telles que  $f(U) \subset V$  et que l'application  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$  en  $\varphi(x)$ .

**Définition 1.10** Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés différentielles est dite de classe  $\mathcal{C}^p$  si elle l'est en tout point de  $M$ .

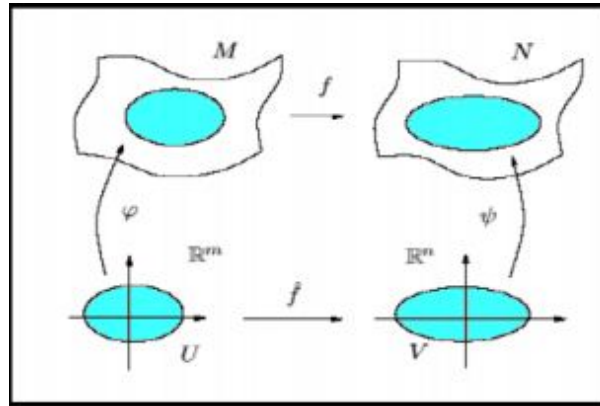


FIG. 1.3 –

**Remarque 1.11**

1. En particulier une application de classe  $\mathcal{C}^p$  en  $x$  est continue en  $x$  (localement  $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ ).
2. Une application lisse est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  entre variétés lisses.
3. On peut remplacer l'hypothèse  $f(U) \subset V$  par  $f$  continue de sorte à ce que  $f^{-1}(V)$  soit un ouvert.
4. La définition est cohérente du fait de la régularité des applications de changement de cartes, elle ne dépend pas du choix des cartes.

**Lemme 1.12** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue entre deux variétés. Alors les sont équivalents :

1.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ .
2. Il existe un atlas  $\mathcal{U}$  de  $M$  et un atlas  $\mathcal{V}$  de  $N$  tels que pour toutes cartes  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{U}$  et  $(V, \psi)$  de  $\mathcal{V}$

:  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est  $C^p$ .

3. Pour toutes cartes  $(U, \varphi)$  de  $M$  et  $(V, \psi)$  de  $N$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est  $C^p$ .

**Remarque 1.13** Il suffit donc de vérifier l'aspect  $C^p$  sur un atlas définissant la structure différentielle.

Le théorème de composition des applications de classe  $C^p$  se généralise aux applications de classe  $C^p$  entre deux variétés :

**Théorème 1.14** Soient  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow P$  deux applications de classe  $C^p$  entre variétés différentielles alors  $g \circ f : M \rightarrow P$  est encore de classe  $C^p$ .

### 1.3 Espace tangent

Soient  $M$  une variété différentielle et  $c : I \rightarrow M$  une application de classe  $C^p$ . Posons

$$C_m^M = \{c : I \rightarrow M \mid 0 \in I \text{ et } c(0) = m\}$$

où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $m \in M$ . Deux courbes de  $C_m^M$  sont tangentes en  $m$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $m$  tel que  $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$ . Cette condition ne dépend pas du choix de la carte. En effet ; si  $(V, \psi)$  est une autre carte alors

$$(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_i)'(0) = d_\varphi(m)(\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c_i)'(0))$$

On a donc défini une relation d'équivalence sur  $C_m^M$ , d'où

**Définition 1.15** Une classe d'équivalence est un vecteur tangent à  $M$  en  $p$  et on nomme espace tangent à  $M$  en  $p$  l'espace quotient noté  $T_p M$ .

**Remarque 1.16** 1. Si  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $p \in U$  alors  $T_p U = T_p M$ .

2. Soient  $p \in M$  et  $p' \in M$  alors  $T_{(p,p)}(M \times M') = T_p M \oplus T_{p'} M'$ .

**Définition 1.17** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable entre variétés différentielles, alors pour tout  $p \in M$  l'application

$$\begin{array}{ccc} C_p^M & \longrightarrow & C_{f(p)}^N \\ c & \longmapsto & f \circ c \end{array}$$

passse au quotient en une application linéaire  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , nommée différentielle de  $f$  en  $p$  (ou application linéaire tangente de  $f$  en  $p$ ).

**Proposition 1.18** 1. Si  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow P$  sont deux applications différentiables entre variétés alors  $\forall p \in M$ ,  $T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f$ .

2. Si  $f : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme alors  $T_p f$  est un isomorphisme et  $(T_p f)^{-1} = T_{f(p)}(f^{-1})$ .

**Exemple 1.19** espace tangent de  $\mathbb{S}^n$  en un point (Fig.5)

On considérant  $\mathbb{S}^n$  comme une sous variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Si  $x \in \mathbb{S}^n$  alors  $T_x \mathbb{S}^n \simeq \ker T_x f = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x \mid y) = 0\}$  où

$$\begin{array}{ccc} f & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & x_0^2 + \dots + x_n^2 \end{array}$$

(voir Fig.1.4).

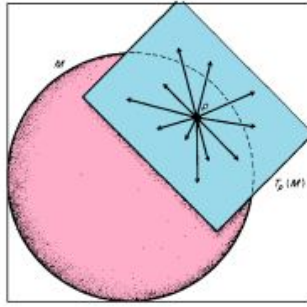


FIG. 1.4 –

## 1.4 Fibré tangent

Nous allons voir que l'ensemble des espaces tangents d'une variété admet une structure de fibré vectoriel. Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$  et de classe  $\mathcal{C}^p, p > 0$ , on note  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  et si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  on pose  $TU = \bigcup_{p \in M} T_p U = \bigcup_{p \in M} T_p M$ . L'application

$$\phi : (p, \xi) \rightarrow (\varphi(p), T_p \varphi(\xi))$$

est une bijection de  $TU$  dans  $\varphi(U) \times \mathbf{R}^n$  (on rappelle que  $T_p \varphi$  ne dépend pas de  $p$  mais que de  $U$  et que  $T_p \varphi(U)$  donne les coordonnées de  $\xi$  dans la base usuelle). Si  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  est l'atlas maximal de  $M$ , on munit  $TU$  d'une topologie en imposant les conditions suivantes :

1. Les  $TU_i$  sont des ouverts.
2. Les  $\phi_i$  sont des homéomorphismes.

Ainsi,  $\Omega \in TM$  est un ouvert si et seulement si  $\forall i : \phi_i(\Omega \cap TU_i)$  est un ouvert de  $\varphi_i(U_i) \times \mathbf{R}^n$ . L'application

$$\begin{aligned} \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbf{R}^n \\ (y, v) &\longmapsto ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), T_y(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(v)) \end{aligned}$$

est un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme. Par conséquent  $TM$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$  et de dimension  $2n$  pour l'atlas  $\{(TU_i, \phi_i)\}$  (voir Fig.1.5).

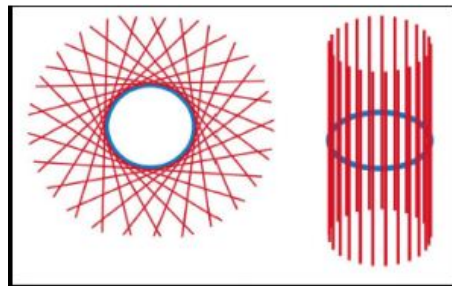


FIG. 1.5 –

## 1.5 Champ de vecteur

Une section de  $TM$  est une application  $X : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi \circ X$  soit l'identité sur  $M$ . C'est à dire pour tout  $p \in M$ , nous associons un  $X(p) \in T_p M$ . Une telle section  $X$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,

sera appelé **champ de vecteurs** sur  $M$ . Un champ de vecteur est donc une application qui à tout point de la variété  $M$  associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété), de façon  $C^\infty$ . cette dernière hypothèse équivaut à ce point, si  $X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ , les fonctions  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  soient  $C^\infty$  sur l'ouvert de la carte locale. Nous notons  $\mathfrak{X}(M)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $M$ .

**Exemple 1.20** La formule  $X_{(x,y)} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ , définit un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  (Fig.1.6).

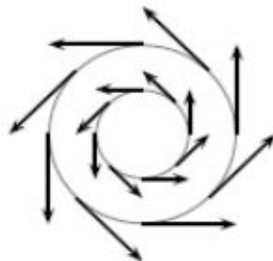


FIG. 1.6 –

Un champ de vecteurs  $X$  est différentiable si et seulement si, à toute fonction différentiable  $f \in C^\infty(M)$ , la fonction

$$\begin{aligned} X.f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (X.f)_p = X_p(f) \end{aligned}$$

est différentiable. La fonction  $X.f$  est appelée dérivation de  $f$  le long de  $X$ . Ainsi on peut voir  $X \in \mathfrak{X}(M)$  comme un opérateur linéaire  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ .

Prenons maintenant deux champs de vecteurs  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . En général, les opérateurs  $X \circ Y$  et  $Y \circ X$  impliqueront des dérivées d'ordre 2 et ne correspondront pas à des champs de vecteurs. Cependant, le commutateur  $X \circ Y - Y \circ X$  définit un champ de vecteur.

**Proposition 1.21** Soit deux champs de vecteurs différentiables  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  sur une variété lisse  $M$ , il existe un unique champ de vecteurs différentiable  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  tel que

$$Z.f = (X \circ Y - Y \circ X).f$$

pour toute fonction différentiable  $f \in C^\infty(M)$ .

## 1.6 Fibré cotangent

Soient  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  passant par  $p$  ( $p \in M$ ), en définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto df_p(v) = v(f) \end{aligned}$$

On appelle  $T_p^* M$  l'espace cotangent à  $M$  au point  $p$ .

**Remarque 1.22** 1. Soit  $(U, x)$  une carte locale contenant le point  $p$  et  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  la base locale, alors les différentielles  $(dx_p^1, \dots, dx_p^n)$  forment une base dual pour  $T_p^* M$

$$dx_p^i(\partial_{jp}) = \delta^{ij}$$

alors le fibré cotangent à  $M$  est défini par  $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ .

. Une section sur  $T^*M$  est une application,  $w : M \longrightarrow T^*M$  ( $w$  est appelé un champ de covecteur ou une forme différentielle),

3.  $T^*M$  est un ensemble de champ de covecteur ou une forme différentielle,

4. La différentielle est un  $C^\infty(f)$  champ de covecteur définie par

$$\begin{aligned} df : M &\longrightarrow T^*M \\ p &\longmapsto df(p) = df_p \end{aligned}$$

5. Localement, soit  $(U, x)$  une carte et  $w$  un champ de covecteur alors, il existe  $(w^i)_{i=1, \dots, n}$   $n$  fonctions réelles de classe  $C^\infty : w_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $w = w_i dx^i$ .

## 1.7 Crochet et Algèbre de Lie

**Définition 1.23** Une algèbre de Lie est un espace vectoriel  $V$  muni d'une opération bilinéaire  $[\cdot, \cdot]$  qu'on appelle crochet de Lie, qui a les propriétés suivantes :

1. le crochet est antisymétriques :  $[a, b] = -[b, a]$ , pour tout  $a, b \in V$ ,
2. le crochet satisfait l'identité de Jacobi :  $[[a, b], c] + [[c, a], b] + [[b, c], a] = 0$  pour tout  $a, b, c \in V$ .

Par conséquent, on a

**Corollaire 1.24** Les champs de vecteurs  $\mathfrak{X}(M)$  forment une algèbre de Lie, avec le crochet

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad f \in C^\infty(M)$$

qui vaut en coordonnées locales

$$[X, Y]_{|U} = \sum (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ou bien  $[V, W] = (VW^j - WV^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$ .

**Preuve.** pour tout  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , on a  $V = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = V_i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $W = \sum W_j \frac{\partial}{\partial x^j} = W_j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , si  $f \in C^\infty(M)$ , alors  $[V, W]f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} [V, W]f &= V^i \frac{\partial}{\partial x^i} (W^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) - W^j \frac{\partial}{\partial x^j} (V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}) \\ &= V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + V^i W^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - W^j V^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + V^i W^j (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}) \\ &= V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \end{aligned}$$

remplaçant  $j$  par  $i$  et  $i$  par  $j$  dans le seconde terme, on aura

$$\begin{aligned} [V, W]f &= V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= (V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}) \frac{\partial f}{\partial x^j} \end{aligned}$$

■

**Remarque 1.25** Si  $V = \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $W = \frac{\partial}{\partial x^i}$  i.e.  $V^i = 1$  et  $W^j = 1$ , alors  $\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] f = 0$ .

## 1.8 Dérivée de Lie

Nous voulons maintenant généraliser le fait qu'un champ de vecteurs  $X$  soit une dérivation sur  $\mathcal{D}(C^\infty(M))$ , en étendant cette dérivation aux tenseurs et aux formes. Cette dérivation portera le nom de dérivée de Lie dans la direction  $X$  et sera notée  $\mathcal{L}_X$ . Elle ne modifiera pas le type du tenseur auquel elle s'applique (un vecteur est envoyé sur un vecteur, une  $r$ -forme sur une  $r$ -forme...).

Il y a plusieurs approches possibles (toutes équivalentes) à cette définition. La première approche est algébrique : on se donne des règles de calcul qui permettent d'atteindre tous les tenseurs et toutes les formes. La seconde est analytique : on se donne l'expression de cette dérivée dans des coordonnées locales

### 1.8.1 Approche algébrique

Sur les fonctions, nous posons  $\mathcal{L}_X f = X(f) = \langle df, X \rangle$ , qui n'est autre que l'action de  $X$  sur  $f$  en tant que dérivation. Sur les champs de vecteurs, nous posons  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$  pour  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Pour définir  $\mathcal{L}_X$  sur les tenseurs, nous nous donnons les règles suivantes :

1.  $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = T \otimes (\mathcal{L}_X S) + (\mathcal{L}_X T) \otimes S$ ;
2.  $\mathcal{L}_X$  commute avec la contraction des tenseurs ;
3.  $\mathcal{L}_X$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire (i.e.) pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$   $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  on a  $\mathcal{L}_{aX+bY} = a \mathcal{L}_X + b \mathcal{L}_Y$

Sur les formes différentielles,  $\mathcal{L}_X$  est donc définie par la méthode précédente. Cependant, une autre approche algébrique est possible. Pour cela, nous devons définir le produit intérieur  $i_X$  sur les formes différentielles. Pour  $\omega \in \Omega^r(M)$ , nous définissons  $i_X \omega \in \Omega^{r-1}(M)$  par

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1})$$

on a, alors, les propriétés suivantes :

1.  $i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X \omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_X \eta$  (i.e.)  $i_X$  est une anti-dérivation sur  $\Omega^*(M)$ ,
2.  $(i_X)^2 = 0$ ,
3.  $\mathcal{L}_X = i_X d + di_X$ . pour  $\omega \in \Omega^r(M)$  et  $\eta \in \Omega^s(M)$  et  $f \in C^\infty(M)$ .

### 1.8.2 Approche analytique

Au dessus d'une carte locale de  $M$  de coordonnées  $(x^i)$ , prenons  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}$ . Nous posons alors

$$(\mathcal{L}_X T)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = X^l \frac{\partial}{\partial x^l} T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} - \sum_{n=1}^s T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{p-1} l i_{p+1} \dots i_s} \frac{\partial X^{i_p}}{\partial x^l} + \sum_{n=1}^r T_{j_1 \dots j_{p-1} l j_{p+1} \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \frac{\partial X^l}{\partial x^{j_p}}$$

# Chapitre 2

## Variétés Riemmanniennes

### 2.1 Métrique Riemmannienne

**Définition 2.1** La métrique Riemmannienne sur une Variété est une application

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

verifie les conditions suivantes :

1.  $C^\infty(M)$ - bilinéaire

2. symétrique :

$$(g(V, W) = g(W, V))$$

3. non dégénéré :

$$(g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0)$$

4. définie positive :

$$(g(V, V) \geq 0)$$

**Définition 2.2** La Variété Riemmannienne est un couple  $(M, g)$  telque  $M$  Variété différentielle et  $g$  métrique Riemmannienne sur le fibré tangent  $(TM, \pi, M)$

**Définition 2.3** Soient  $(N, h)$  une variété Riemmannienne de dimension  $n$ ,  $M$  une variété différentielle, de dimension  $m$ , et  $f : M \rightarrow N$  une immersion. Alors :

$$f^*h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$$

définie pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  et  $x \in M$  par :

$$f^*h(X, Y)_x = h_{f(x)}(d_x f(X_x), d_x f(Y_x))$$

est une métrique sur  $M$ , appelée métrique inverse.

### 2.2 Connexion

**Définition 2.4** Une connexion linéaire sur une Variété  $M$  est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$



satisfais

$$\nabla_X(V, W) = \nabla_X V + \nabla_X W \quad (2.1)$$

$$\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V \quad (2.2)$$

$$\nabla_{X+fY} V = \nabla_X V + f\nabla_Y V \quad (2.3)$$

$\forall V, W, X, Y \in \Gamma(TM)$  et  $f \in C^\infty(M)$

**Définition 2.5** Soient  $\nabla$  connexion sur une Variété  $M$  de dimension  $n$  et  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  (resp  $(dx^1, \dots, dx^n)$ ) une base locale de section de  $\Gamma(M)$  (resp  $\Gamma(T^*M)$ ). Les coefficients de Christoffel sont définie par :

$$\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\partial_i}\partial_j) \quad (2.4)$$

**Définition 2.6** On dit qu'une section  $V \in \Gamma(TM)$  est parallèle par rapport à la connexion  $\nabla$  si :

$$\nabla_X V = 0 \quad (2.5)$$

pour tout  $X \in \Gamma(TM)$

**Définition 2.7**  $g$  une metrique Riemmannienne sur  $M$ , on dit que  $g$  est compatible avec la connexion  $\nabla$  (ou parallèle), si :

$$\nabla_g = 0 \quad (2.6)$$

ie

$$\nabla_{Xg}(V, X) = 0 \quad (2.7)$$

où

$$X(g(V, W)) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W) \quad (2.8)$$

pour tout  $X, V, W \in \Gamma(TM)$

### 2.2.1 Tenseur de torsion

**Définition 2.8** Soient  $M$  Variété différentielle muni d'une connexion  $\nabla$ . Le tenseur de torsion associe à  $\nabla$  est une application  $C^\infty(M)$ - bilinéaire définie par :

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto T(X, Y) \end{aligned}$$

telque :

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$

La connexion  $\nabla$  est dite sans torsion si  $T \equiv 0$

**Remarque 2.9** 1.  $T$  est un champ de tenseur de type  $(1, 2)$

2.  $T$  est antisymétrique :  $T(X, Y) = -T(Y, X)$  pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$

3. La connexion  $\nabla$  est sans torsion ssi pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  on a :

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

4. Pour tout  $x \in M$ , le tenseur de torsion  $T$  induit une application bilinéaire vectoriel

$$\begin{aligned} T_x : T_x M \times T_x M &\rightarrow T_x M \\ (v, w) &\mapsto T_x M(v, w) = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X, Y]_x \end{aligned}$$

ou  $X, Y \in \Gamma(TM)$  telque :  $X_x = w$  (indépendamment du choix de  $X$  et  $Y$ )

**Théorème 2.10** Soit  $\nabla$  une connexion linéaire sur  $M$ . Si  $p \in M$  tel que  $T_p \equiv 0$ , alors il existe une carte  $(U, x^1, \dots, x^n)$  telle que pour tout  $i, j, k = 1, \dots, n$ , on a :

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0$$

## 2.2.2 Connexion de Levi-cevita

**Théorème 2.11** Soit une Variété Riemannienne  $(M, g)$ , l'application :  
 $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$   
 définie par la formule de Kozul :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \quad (2.9)$$

est une connexion linéaire sur  $M$ , appelée connexion de Levi-cevita

**Théorème 2.12 (Théorème fondamentale)** Si  $(M, g)$  est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-cevita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec  $g$ .

**Proposition 2.13** Soient  $(M^m, g)$  une variété Riemannienne, de dimension  $m$  et  $\nabla$  la connexion de Levi-cevita. Si  $(U, \varphi)$  est une carte sur  $M$  avec les champs de bases  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$  associés, alors les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  définie par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\} \quad (2.10)$$

où,  $g_{ij}$  sont les coordonnées de  $g$  relativement à la carte  $(U, \varphi)$ .

## 2.3 Courbures

### 2.3.1 Tenseur de courbure

**Définition 2.14** Soit  $M$  une variété,  $\nabla$  connexion linéaire. Le tenseur de courbure associée à  $\nabla$  est défini par l'application :

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$R(X, Y)V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X, Y]} V$$

$$\forall X, Y, V \in \Gamma(TM)$$

**Proposition 2.15** La tenseur de courbure a les propriétés suivantes :

1.  $R$  est  $C^\infty(M) - 3$  linéaire
2.  $R$  est antisymétrique

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

**Définition 2.16** soit une Variété Riemannienne  $(M, g)$ . Le tenseur de courbure Riemannienne est le tenseur de courbure de la connexion de Levi-cevita. Ce tenseur est donnée en fonction des coefficients de Christoffel :

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \partial_l$$

telque :

$$R_{ijk}^l = \partial_i(\Gamma_{jk}^l) - \partial_j(\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^n \{\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m\}$$

ou  $(\partial_i)_{i=1..n}$  est une base locale de champs de vecteurs sur  $M$ .

**Proposition 2.17** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne  $R$  a les propriétés suivantes :

1.  $R$  est un champ de tenseurs de type  $(3, 1)$
2.  $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
3.  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$
4.  $R$  vérifie l'identité de Bianchi algébrique

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \quad (2.11)$$

5.  $R$  vérifie l'identité de Bianchi différentielle

$$(\nabla_X R(X, Z) + \nabla_Y (R, Z)X + \nabla_Z R(X, Y)) = 0 \quad (2.12)$$

$$\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$$

### 2.3.2 Courbure sectionnelle

**Définition 2.18**  $(M, g)$  une Variété Riemannienne de  $n \geq 2$  et  $P$  un 2-plan de  $T_x M$  de base  $X, Y$ . On définit la courbure sectionnelle en  $x$  de  $P$  par :

$$K_x(P) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y)^2}$$

**Définition 2.19** Soit  $(M, g)$  Variété Riemannienne.  $M$  est une Variété à courbure constante s'il existe une constante  $k \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in M$  et tout plan 2-plan  $P$  de  $T_x M$

$$K_x(P) = k$$

### 2.3.3 Courbure de Ricci

**Définition 2.20**  $(M, g)$  une Variété Riemannienne de dimension  $m$ . On définit la courbure de Ricci par un tenseur de type  $(0, 2)$  donnée par :

$$Ric(X, Y) = \text{trace} R(*, X)Y = \sum_{i=1}^m g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

$$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

$(e_i)$  une base orthonormée locale sur  $M$  et

$$\begin{aligned} R(*, X)Y &: \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\mapsto Ric(X, Y) \end{aligned}$$

**Définition 2.21** Soit  $M$  une Variété Riemannienne. Le tenseur de Ricci de cette Variété est donnée par :

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^m R(X, e_i)e_i$$

$\forall X \in \Gamma(TM)$ , ou  $(e_i)_{i=1 \dots m}$  est une base orthonormée locale sur  $M$

**Remarque 2.22** Soit  $(M^m, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $m$ . Pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  on a :

$$Ric(X, Y) = g(Ricci(X), Y) \quad (2.13)$$

### 2.3.4 Courbure scalaire

**Définition 2.23** La Variété Riemannienne  $(M, g)$ . La courbure scalaire est une fonction sur  $M$  donnée par :

$$S = \text{trace}_g \text{Ric} = \sum_{i,j=1}^m g(R(e_i, e_j)e_j, e_i) \quad (2.14)$$

où  $(e_i)_{i=1,\dots,m}$  une base orthonormée locale sur  $M$

**Proposition 2.24**  $(M, g)$  Une Variété Riemannienne est de courbure sectionnelle constante  $k$  si et seulement si :

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

**Corollaire 2.25** Si  $(M^m, g)$  est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante  $k$ , alors pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  on a :

1. Ricci  $(X) = (m-1)kX$
2. Ric  $(X, Y) = (m-1)kg(X, Y)$
3.  $S = m(m-1)k$

### 2.3.5 Courbures en dimension 2

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \quad (2.15)$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl} = R_{jilk} \quad (2.16)$$

$$R_{ijkl} = R_{klij} \quad (2.17)$$

$$R_{ij} = R_{ikj}^k = g^{kl} R_{kilj} = g^{kl} R_{ikjl} \quad (2.18)$$

Le cas bidimensionnel : Si  $n = 2$ , les seules composantes non nulles de  $R_{ijkl}$  sont, par (2.16) (2.17)

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$$

Il résulte de (2.18) que, avec  $\hat{R} = R_{1212}$

$$R_{11} = \hat{R}g^{22}, \quad R_{22} = \hat{R}g^{11}, \quad R_{12} = R_{21} = -\hat{R}g^{12}$$

Et donc par (2.15)

$$R_{ij} = \hat{R} |g|^{-1} g_{ij}$$

et

$$R_{ij} = 2 |g|^{-1} \hat{R}$$

Cela peut aussi être écrit par

$$R_{2112} = R_{2121} = -R_{1221} = \frac{1}{2} |g| R \quad (2.19)$$

ou équivalent,

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = \frac{1}{4} R_{ij} \odot g_{kl}$$

Où

$$R_{ij} \odot g_{kl} = R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}$$

⊙ : produit de Kulkarni Nomizu et

$$R_{ij} = \frac{1}{2} R g_{ij}$$

**Exemple 2.26** Pour calculer le tenseur de Riemann, nous n'avons besoin que du tenseur métrique pour la surface. La métrique les tenseurs pour les surfaces des 2-sphères et 2-tores sont indiqués ci-dessous.

2-sphère

$$X(\theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

$$\theta = 0, \phi = 2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & r^2 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Le tenseur de courbure Riemannien :

Première type :

$$R_{2121} = R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = r^2 \sin^2 \theta$$

Deuxième type :

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = \sin^2 \theta$$

$$R_{121}^2 = -R_{112}^2 = 1$$

Tenseur de Ricci :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

2-tore

$$X(\theta, \phi) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi)$$

$$\theta = 1, \phi = 2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Le tenseur de courbure Riemannien :

Première type :

$$R_{1212} = R_{2112} = -R_{1221} = -R_{2112} = r \cos \phi (R + r \cos \phi)$$

Deuxième type :

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = \frac{r \cos \phi}{R + r \cos \phi}$$

$$R_{121}^2 = -R_{112}^2 = \frac{1}{r} \cos \phi (R + r \cos \phi)$$

Tenseur de Ricci :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cos \phi (R + r \cos \phi) & 0 \\ 0 & \frac{r \cos \phi}{R + r \cos \phi} \end{pmatrix}$$

## 2.4 Champs de vecteurs killing

**Définition 2.27** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. Un champ de vecteurs de killing est un champ de vecteurs qui vérifie :

$$\mathcal{L}_X g = 0 \quad (2.20)$$

Nous illustrons maintenant la condition du champ de vecteurs Killing en coordonnées locales, en l'exprimant sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires de premier ordre.

**Proposition 2.28** Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  être un système de coordonnées sur un domaine  $U$  et  $\left\{ (\partial_i)_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$  la base correspondante de  $T_p(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $g$  une  $mX = X_i \partial_i$  est un champs de vecteur de Killing si et seulement si les composantes  $X_i$  satisfont aux  $\frac{n(n+1)}{2}$  équations aux dérivées partielles

$$\sum_{k=1}^n \left\{ X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + g_{jk} \frac{\partial X^k}{\partial x_i} + g_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x_j} \right\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \leq j. \quad (2.21)$$

**Exemple 2.29** Soit  $g_0$  la métrique euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^2$  avec les coordonnées  $(x, y)$ . Soit  $X = X^1 \frac{\partial}{\partial x} + X^2 \frac{\partial}{\partial y}$  un champ de vecteur sur  $\mathbb{R}^2$ . Notre objectif est de décrire d'abord les champs de vecteurs Killing dans le contexte euclidien sur  $\mathbb{R}^2$ , et ensuite de les intégrer pour obtenir des isométries euclidiennes (locales). De la dernière proposition, après les calculs appropriés, on trouve

$$\frac{\partial X^1}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial X^1}{\partial y} + \frac{\partial X^2}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial X^2}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Par (1) et (3), on voit  $X_1 = X_1(y)$  et  $X_2 = X_2(x)$ . Equation (2) implique que

$$\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial x} = a$$

où  $a$  est une certaine constante, et donc les champs de vecteurs Euclidean Killing doivent avoir la forme

$$X(x, y) = (ay + b) \frac{\partial}{\partial x} + (-ax + c) \frac{\partial}{\partial y},$$

pour certaines constantes  $a, b, c$ .

Le fait que les champs de vecteurs de Killing euclidienne aient une forme aussi simple leur permet d'être intégrés afin d'obtenir des isométries. Le flot  $\phi_t$  donné par  $\phi_t(x, y) = (x(t), y(t))$  généré par un champ de vecteur de Killing euclidienne doit satisfaire le système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = ay + b \\ \dot{y} = ax + c \end{cases}$$

la solution générale est

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at) + \frac{c}{a} \\ y(t) = c_2 \cos(at) + c_1 \sin(at) - \frac{b}{a} \end{cases}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes dépendantes (différentiablement) de la condition initiale  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ .

Cela montre que les isométries locales issues des intégrales des champs de vecteurs de Killing euclidienne sont en fait définies de manière globale et peuvent être exprimées sous la forme de compositions de rotations et de translations.

**Remarque 2.30** Dans le plan euclidien, les champs de vecteurs de Killing correspondent à des translations et des rotations et les géodésiques sont des lignes. Nous trouvons qu'aux points d'intersection entre une ligne fixe et des cercles variables centrés à l'origine, le produit scalaire entre leurs vecteurs tangents est constant (ne dépend pas du cercle) (voir Fig.2.1)

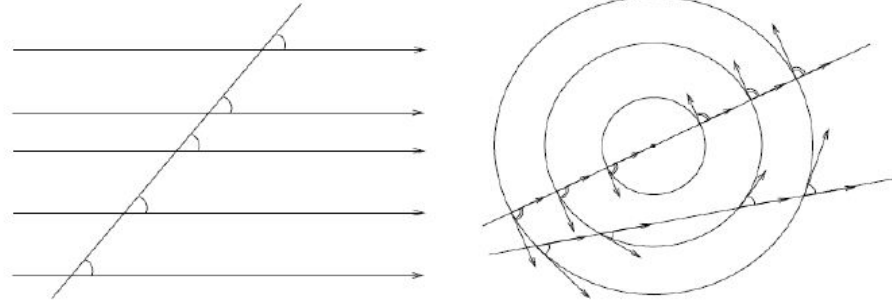


FIG. 2.1 –

**Exemple 2.31** Dans l'espace euclidien de dimension 3  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ , il y a six champs de Killing linéairement indépendants sur le champ des nombres réels :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = -y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_6 = -x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Les groupes de transformations générés par les champs de vecteurs  $X_1, X_2, X_3$  sont des groupes de translations dans la direction des axes  $Ox, Oy$  et  $Oz$ , respectivement, et les groupes de transformations générés par les trois derniers champs de vecteurs sont des rotations autour des axes du  $Ox, Oy$  et  $Oz$  en conséquence. Les trois derniers champs sont aussi des champs de destruction sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

**Proposition 2.32** Un champ de vecteurs  $X$  est un champ de Killing si et seulement si  $\nabla X$  est antisymétrique, i.e. pour tout point  $P$  et tous vecteurs tangents  $v$  et  $w$  en  $P$ ,

$$\langle \nabla_v X, w \rangle + \langle v, \nabla_w X \rangle = 0 \quad (2.22)$$

**Définition 2.33** Une variété d'Einstein est une variété Riemannienne pour laquelle il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\text{Ric} = \lambda g \quad (2.23)$$

## 2.5 Opérateurs

### 2.5.1 Opérateur gradient

**Définition 2.34** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. L'opérateur gradient est définie par :

$$\begin{aligned} \text{grad} : C^\infty(M) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ f &\mapsto \text{grad}(f) = \sharp df \end{aligned}$$

Pour tout champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TM)$  et tout fonction  $f \in C^\infty(M)$  on a :

$$df(X) = X(f) = g(\text{grad}(f), X)$$

**Proposition 2.35 (Expression du gradient en coordonnées locales)**

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $m$ ,  $(U, \varphi)$  une carte sur  $M$  avec les champs de base associés  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ , alors pour tout  $f \in C^\infty(M)$  on a :

$$(\text{grad}(f))|_U = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

**Propriétés 2.36** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tout  $f, h \in C^\infty(M)$  on a :

1.  $\text{grad}(f+h) = \text{grad}(f) + \text{grad}(h)$
2.  $\text{grad}(fh) = h \text{grad}(f) + f \text{grad}(h)$
3.  $(\text{grad} f)(h) = (\text{grad}(h))(f)$

**2.5.2 Opérateur divergence**

**Définition 2.37** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TM)$ , notée  $\text{div}X$  est une fonction sur  $M$  définie par :

$$\text{div}X = \text{tr}_g(\nabla X)$$

pour tout  $x \in M$ , on a :

$$(\text{div}X)(x) = \text{tr}_g((\nabla X)_x)$$

En coordonnée locale on a :

$$\begin{aligned} \text{div}X &= dx^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X) \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j}) \end{aligned}$$

Si  $(e_i)$  est une base orthonormée locale sur  $M$  on a :

$$\text{div}X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} X, e_i) \quad (2.24)$$

**Proposition 2.38** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $m$ , pour tout  $X \in \Gamma(TM)$  on a localement :

$$\text{div}X = \sum_{i,j=1}^m \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^k \right)$$

ou  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

**Propriétés 2.39** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tout  $f, h \in C^\infty(M)$  on a :

1.  $\text{div}(X, Y) = \text{div}(X) + \text{div}(Y)$
2.  $\text{div}(fX) = f \text{div}(X) + X(f)$



### 2.5.3 Opérateur Laplacien

**Définition 2.40** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien noté  $\Delta$ , sur  $M$  par :

$$\begin{aligned}\Delta &: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \\ f &\mapsto \Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))\end{aligned}$$

**Propriétés 2.41** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tout  $f, h \in C^\infty(M)$  on a :

1.  $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h)$
2.  $\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(h))$

**Proposition 2.42** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tout  $f \in C^\infty(M)$  on a :

$$\Delta(f) = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \quad (2.25)$$

### 2.5.4 Opérateur Hessien

**Définition 2.43** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne et  $f \in C^\infty(M)$ . La Hessienne de la fonction  $f$ , définie par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}(f) &: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\mapsto g(\nabla_X \operatorname{grad}(f), Y)\end{aligned}$$

**Lemme 2.44** La Hessien  $H^f$  de  $f$  est le champ tenseur symétrique  $(0,2)$  telque

$$H^f(X, Y) = XYf - (D_X Y)f = \langle D_X(\operatorname{grad}(f)), Y \rangle$$

**Preuve.** Puisque  $Df = df$

$$\begin{aligned}H^f(X, Y) &= D(df)(X, Y) = D_Y(df)(X) = Y(df(X)) - df(D_Y X) \\ &= YXf - (D_Y X)f\end{aligned}$$

Parce que  $XY - YX = [X, Y] = D_X Y - D_Y X$ , nous pouvons inverser  $X$  et  $Y$  en la formule précédente montrant également que  $H^f$  est symétrique. Finalement,

$$\langle D_X(\operatorname{grad}(f)), Y \rangle = X \langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle - \langle \operatorname{grad}(f), D_X Y \rangle = H^f(X, Y)$$

■

**Exemple 2.45** Soit la variété  $(\mathbb{R}, \bar{g})$

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} K^2 & 0 \\ 0 & Q(x^2) \end{pmatrix}$$

ou  $Q(x^2) > 0$  pour tout  $x^2$

Symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 &= 0, & i, j &= 1, 2 \\ \Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{12}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{Q'}{2Q}\end{aligned}$$

Tenseur de courbure :

$$R_{121}^2 = R_{221}^1 = R_{121}^2 = R_{112}^2 = 0, \quad (\text{i.e.}) \quad R_{ijk}^l = 0$$

Gradient :

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = g^{11} \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + g^{22} \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{K^2} \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{Q} \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Hessien :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0 \quad i, j = 1, 2$$

(i.e)

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} - \frac{Q'}{2Q} \frac{\partial f}{\partial x^2} = 0$$

# Chapitre 3

## Soliton de Ricci

Un certain nombre d'équations d'évolution géométrique, correspondant à différents problèmes, ont récemment étudié en géométrie riemannienne. La courbe raccourcissant le flot et la moyenne l'écoulement de courbure ne sont que deux exemples importants qui ont attiré une attention considérable. Notre travail est lié à une autre équation d'évolution importante : le flot de Ricci.

Une famille de paramètres  $g(t)$  à un paramètre sur une variété  $M$  définie sur un certain intervalle de temps  $I \in \mathbb{R}$  est une solution de l'équation de flot de Ricci si :

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric(g(t)) \quad (3.1)$$

Hamilton a montré que pour tout  $C^\infty$  métrique  $g_0$  sur un collecteur fermé  $M$ , il existe une solution unique de l'équation de flot de Ricci  $g(t)$ ,  $t \in [0, \epsilon)$  pour certain  $\epsilon > 0$ , avec  $g(0) = g_0$ .

Les véritables points fixes du flot Ricci sont donnés par Ricci aux métriques. Cependant, si  $(M, g_0)$  est une métrique d'Einstein avec constante  $\lambda \neq 0$ , ensuite

$$g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0 \quad (3.2)$$

est une solution du flot de Ricci. Observez que  $g(t)$  diffère de  $g_0$  par une homothétie. Donc, si l'on cherche des points fixes géométriques du flot i.e, considérant le flot de Ricci dans l'espace des difféomorphismes et homothéties modulo métriques, les métriques d'Einstein apparaissent également comme des points fixes du flot. De plus, observez que si  $\lambda < 0$ , alors la solution  $g(t)$  est définie pour tout  $t > \frac{1}{2\lambda}$  et il se développe avec  $t$ , alors que si  $\lambda > 0$ , ensuite  $g(t)$  est définie pour  $t < \frac{1}{2\lambda}$  et ça rétrécit. Généraliser le comportement des métriques d'Einstein, et permettre à la métrique initiale de changer non seulement par les homothéties mais aussi par les difféomorphismes, une solution  $g(t)$  du flot de Ricci est dite auto-similaire s'il existe une fonction positive  $\sigma(t)$  et un groupe de difféomorphismes à un paramètre  $\psi(t) : M \rightarrow M$  tel que

$$g(t) = \sigma(t)\psi(t)^*g(0) \quad (3.3)$$

**Remarque 3.1** Si (3.3) définit une solution du flot de Ricci (3.1) puis différencier (3.3) les rendements

$$-2Ric(g(t)) = \sigma'(t)g_0\psi(t)^*(\mathcal{L}_X g_0) \quad (3.4)$$

où  $g_0 = g(0)$ ,  $X$  est le champ vectoriel dépendant du temps tel que  $X(\psi(t)(p)) = \frac{d}{dt}(\psi(t)(p))$  pour tout  $p \in M$  et  $\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}$

Puisque  $\rho(g(t)) = \psi(t)^*(t)\rho(g_0)$ , on peut supprimer les retraits en (3.4) et obtenir :

$$-2Ricg(0) = \sigma'(t)g_0 + \mathcal{L}_{\dot{X}(t)}g_0 \quad (3.5)$$

Où  $\check{X}(t) = \sigma(t)X(t)$ . Mettre  $\lambda = \frac{1}{2}\dot{\sigma}(0)$  et  $X_0 = \frac{1}{2}\check{X}(0)$  alors l'équation (3.5) devenir

$$-2\text{Ric}(g_0) = -2\lambda g_0 + 2\mathcal{L}_{X_0}g_0, \quad \text{ou } t = 0$$

Cela montre que pour toute solution auto-similaire du flot de Ricci, il existe un champ vectoriel sur  $M$  satisfaisant

$$\mathcal{L}_X g + \text{Ric} = \lambda g$$

Inversement, soit  $X$  un champ vectoriel complet sur une variété Riemannienne  $(M; g)$  et dénoté par  $\psi(t) : M \rightarrow M$  avec  $\psi(0) = \text{id}_M$  la famille des difféomorphismes générés par  $X$  selon

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)(p) = \frac{1}{1-2\lambda t}X(\psi(t)(p))$$

qui est défini pour tous  $t < \frac{1}{2\lambda}$  si  $\lambda > 0$  et pour tout  $t > \frac{1}{2\lambda}$  si  $\lambda < 0$ . Considérant maintenant la famille de paramètres à un paramètre

$$g(t) = (1 - 2\lambda t)\psi(t)^*g$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g(t) &= -2\lambda\psi(t)^*g + (1 - 2\lambda)\psi(t)^*(\mathcal{L}_{\frac{1}{1-2\lambda t}}Xg) \\ &= \psi(t)^*(-2\lambda g + \mathcal{L}_{X(\psi(t)(p))}g) \end{aligned}$$

Maintenant, si le champ vectoriel  $X$  est satisfaisant (3.7), alors

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \psi(t)^*(-2\text{Ric}) = -2\psi(t)^*\text{Ric} = -2\text{Ric}(\psi(t)^*g) = -2\text{Ric}(g(t)) \quad (3.6)$$

ce qui montre que  $g(t)$  est une solution du flot de Ricci donnée par (3.1).

La remarque ci-dessus motive la définition suivante.

**Définition 3.2** Un triple  $(M, g, X)$  où  $(M, g)$  est une variété Riemannienne et  $X$  est un champ vectoriel sur  $M$  satisfaisant

$$\mathcal{L}_X g + \text{Ric} = \lambda g \quad (3.7)$$

est appelé un soliton Ricci. On dit qu'un soliton de Ricci rétrécit, stable ou expansif si  $\lambda > 0, \lambda = 0$  or  $\lambda < 0$  respectivement.

Un soliton de Ricci est un soliton de Ricci à gradient s'il existe une fonction lisse  $f$  sur  $M$  telle que  $X = \frac{1}{2}\nabla f$  i.e si :

$$\text{Hess}_f + \text{Ric} = \lambda g \quad (3.8)$$

avec  $\frac{1}{2}\mathcal{L}_f g = \text{Hess}_f$

Dans ce cas, nous disons que le triple  $(M; g; f)$  est un soliton de Ricci à gradient et nous appelons  $f$  la fonction potentielle du soliton.

**Remarque 3.3** Le soliton de Ricci est la généralisation de la variété d'Einstein si  $X$  est un champs killing ( $\mathcal{L}_X g = 0$ )

## 3.1 Solitons de Ricci

### 3.1.1 Quelques exemples du soliton de Ricci Riemannien

#### Exemple 3.4 (Gaussien soliton)

Un exemple fondamentale est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , muni de la métrique standard  $g$ , et

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{4} |x|^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

est un soliton de Ricci de type gradient. En effet; montrons que  $\text{Ric} + \text{Hess}(f) = \frac{1}{2}g$ . La courbure de Ricci de  $\mathbb{R}^n$  est nulle, et on a :

$$\begin{aligned} (\text{Hess}(f))_{ij} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} \end{aligned}$$

#### Exemple 3.5 (Cigar soliton)

Dans cette section, nous passons en revue certains des exemples de solitons de Ricci à 2 dimensions, tels que le cigare, qui ont été construits à ce jour ;

nous donnerons quelques conditions dans lesquelles le flot de Ricci converge vers certains des solitons discutés ici. Tout ancien solution du flot de Ricci sur une surface de courbure positive qui atteint sa courbure maximale dans l'espace et le temps est le cigare. De même, toute solution ancienne du flot de Ricci sur une variété d'opérateurs de courbure positive qui atteint sa courbure maximale dans l'espace et le temps est un soliton de Ricci à gradient constant.

En dimension  $n = 2$ , Hamilton a découvert le soliton stable  $\Sigma = (\mathbb{R}^2, g, f)$ , avec :

$$g = ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad f = -\log(1 + x^2 + y^2)$$

Cette variété est également connu sous le nom de Witten's black hole dans la relativité générale.

En effet, nous pouvons réécrire la métrique du cigare en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme :

$$g_\Sigma = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2}$$

Si nous définissons la nouvelle variable de distance radiale comme

$$s = \sinh^{-1}(r)$$

alors la métrique  $g_\Sigma$  peut s'écrire

$$g_\Sigma = ds^2 + (\tanh^2 s) d\theta^2$$

Maintenant, si nous mettons

$$f(s) = -2 \ln(\cosh s)$$

nous avons alors

$$\text{Ric} + \text{Hess}(f) = 0$$

Ainsi, le soliton de cigare est stable.

En coordonnées locales

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2+y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Les symboles de Christoffel sont :

$$\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{21}^2 = \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{21}^1 = \frac{y}{1+x^2+y^2}$$

La courbure de Ricci est :

$$Ric_{1,2} = Ric_{2,1} = 0, \quad Ric_{1,1} = Ric_{2,2} = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$(Hess(f))_{ij}$  sont :

$$(Hess(f))_{1,2} = (Hess(f))_{2,1} = 0, \quad (Hess(f))_{1,1} = (Hess(f))_{2,2} = \frac{-2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Par conséquent

$$Ric_{1,1} + Hess(f)_{1,1} = 0$$

$$Ric_{2,2} + Hess(f)_{2,2} = 0$$

$$Ric_{1,2} + Hess(f)_{1,2} = 0$$

$$Ric_{2,1} + Hess(f)_{2,1} = 0$$

**Exemple 3.6** Le cigar soliton de Hamilton est la surface riemannienne complète  $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$ , où

$$g_\Sigma = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{1+x^2+y^2}$$

Comme nous le verrons ci-dessous, il s'agit d'un soliton stable, correspondant donc à une solution auto-similaire éternelle. Rappelant que les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  d'une métrique  $g$  sont donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right)$$

il est facile de calculer que les symboles Christoffel de  $g_\Sigma$  par rapport au système de coordonnées  $(z^1 = x, z^2 = y)$  sur  $\mathbb{R}^2$  sont :

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-x}{1+r^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{-y}{1+r^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{x}{1+r^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{y}{1+r^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{-x}{1+r^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{-y}{1+r^2}$$

ou  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Parce que  $g_\Sigma$  est symétrique en rotation, il est naturel de l'écrire en coordonnées polaires comme

$$g_\Sigma = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1+r^2} \tag{3.9}$$

La courbure scalaire de  $g_\Sigma$  est

$$R_\Sigma = \frac{4}{1+r^2} \tag{3.10}$$

et sa forme de zone est

$$d\mu_\Sigma = \frac{1}{1+r^2} dx \wedge dy \quad (3.11)$$

Puisque  $r^2/(1+r^2) \rightarrow 1$  comme  $r \rightarrow \infty$ , les équations (3.9) et (3.10) montrent que la métrique est asymptotique à l'infini à un cylindre de rayon 1. En fait, nous verrons ci-dessous que cette convergence se produit exponentiellement rapidement dans l'échelle des distances induit par la métrique. On peut également voir l'approche asymptotique du cigare au cylindre d'une autre manière : les géodésiques dans la métrique du cigare sont exactement ces courbes  $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$  donnée en coordonnées polaires par des solutions au système EDO

$$\theta'' \frac{2}{r(1+r^2)} \theta' r' = 0 \quad (3.12)$$

$$r'' - \frac{r}{1+r^2} [(r')^2 + (\theta')^2] = 0 \quad (3.13)$$

De là, il n'est pas difficile de voir que  $\theta(t)$  peut être écrit sous la forme

$$\theta(t) = a + bt + b \int^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)} \quad (3.14)$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$  sont des constantes arbitraires. En particulier, lorsque  $r_0 = r(0)$  est grand, un cercle euclidien de rayon  $r_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  est près géodésique pendant une courte période.

### 3.1.2 Quelques propriétés de soliton de Ricci

**Proposition 3.7** Soit  $(M, g, \nabla f, \lambda)$  un soliton de Ricci de type gradient, alors :

1.  $\operatorname{div}(\operatorname{Ric})(X) = g(\operatorname{Ricci}(\nabla f), X), \forall X \in \Gamma(TM)$
2.  $(\nabla_X \operatorname{Ric})(Y) - (\nabla_Y \operatorname{Ric})(X) = -R(X, Y)\nabla f, \forall X, Y \in \Gamma(TM)$
3.  $\sum_{i=1}^m (\nabla_{E_i} R)(E_i, X, Y) = R(\nabla f, X)Y, \forall X, Y \in \Gamma(TM)$  où  $\nabla f = \operatorname{grad}(f)$  et  $\{E_i\}$  est une base orthonormée sur  $M$

**Preuve.**

1. Sur la carte normale en  $x \in M$  (i.e  $(\nabla_{E_i} E_j)_x = 0$ ), avec  $X = E_k$  on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{Ric})(X) &= (\nabla_{E_i} \operatorname{Ric})(X, E_i) \\ &= E_i(\operatorname{Ric}(X, E_i)) \\ &= E_i(\lambda g(X, E_i) - \operatorname{Hess}(f)(X, E_i)) \\ &= -E_i g(\nabla_X \operatorname{grad}(f), E_i) \\ &= -g(\nabla_{E_i} \nabla_X \operatorname{grad}(f), E_i) \\ &= -g(R(E_i, X)\operatorname{grad}(f), E_i) - g(\nabla_X \nabla_{E_i} \operatorname{grad}(f), E_i) \\ &= -g(R(\operatorname{grad}(f), E_i)E_i, X) - X(g(\nabla_{E_i} \operatorname{grad}(f), E_i)) \\ &= -g(\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad}(f)), X) - X(\operatorname{Hess}(f)(E_i, E_i)) \end{aligned}$$

Ici,  $\operatorname{Ric} = \lambda g - \operatorname{Hess}(f)$ . D'autre part :

$$\operatorname{tr}(\operatorname{Ric}(E_i, E_j) + \operatorname{Hess}(f)(E_i, E_j)) = \lambda g_{ij} = \operatorname{Ric}(E_i, E_i) + \operatorname{Hess}(f)(E_i, E_i) = \lambda g(E_i, E_i)$$

C'est-à-dire  $S + \Delta f = \lambda m$ , avec  $m$  est la dimension de  $M$ , d'où :

$$X(S) + X(\Delta f) = 0$$

$$dS(X) + X(\Delta f) = 0$$

$$2\text{div}(\text{Ric})(X) + X(\Delta f) = 0$$

Par conséquent :

$$X(\text{Hess}(f)(E_i, E_i)) = -2\text{div}(\text{Ric})(X)$$

Finalement

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{Ric})(X) &= -g(\text{Ricci}(\text{grad}(f)), X) + 2\text{div}(\text{Ric})(X) \\ -\text{div}(\text{Ric})(X) &= -g(\text{Ricci}(\text{grad}(f)), X) + \\ \text{div}(\text{Ric})(X) &= g(\text{Ricci}(\text{grad}(f)), X) + 2\text{div}(\text{Ric})(X) \end{aligned}$$

2. Si  $X = E_a$ ,  $Y = E_b$  et  $Z = E_c$ , où  $\{E_i\}$  est une base orthonormée sur  $M$  tel que  $(\nabla_{E_i}, E_j)_x = 0, \forall i, j = 1, \dots, m(x \in M)$ , on a :

$$\begin{aligned} g(R, (X, Y)\text{grad}(f), Z) &= g(\nabla_X \nabla_Y \text{grad}(f) - \nabla_Y \nabla_X \text{grad}(f), Z) \\ &= Xg(\nabla_Y \text{grad}(f), Z) - Yg(\nabla_X \text{grad}(f), Z) \\ &= X(\text{Hess}(f)(Y, Z)) - Y(\text{Hess}(f)(X, Z)) \\ &= X(\lambda g(Y, Z) - \text{Ric}(Y, Z)) - Y(\lambda g(X, Z) - \text{Ric}(X, Z)) \\ &= -(\nabla_X \text{Ric})(Y, Z) + (\nabla_Y \text{Ric})(X, Z) \end{aligned}$$

3. De même on obtient :

$$\begin{aligned} g((\nabla_{E_i}, R)(E_i, X, Y), Z) &= g(\nabla_{E_i} R(E_i, X)Y, Z) \\ &= E_i g(R(E_i, X)Y, Z) \\ &= g(\nabla_{E_i} R(Y, Z)E_i, X) \end{aligned}$$

D'après l'identité de Bianchi

$$\begin{aligned} g((\nabla_{E_i} R)(E_i, X, Y), Z) &= -g(\nabla_Y R(Z, E_i)E_i, X) - g(\nabla_Z R(E_i, Y)E_i, X) \\ &= -Yg(R(Z, E_i)E_i, X) - Zg(R(E_i, Y)E_i, X) \\ &= -Y\text{Ric}(Z, X) + Z\text{Ric}(Y, X) \\ &= -Y(\lambda g(Z, X) - \text{Hess}(f)(Z, X)) - Z(\lambda g(Y, X) - \text{Hess}(f)(Y, X)) \\ &= Y(\text{Hess}(f)(Z, X)) - Z(\text{Hess}(f)(Y, X)) \\ &= Yg(\nabla_Z \text{grad}(f), X) - Zg(\nabla_Y \text{grad}(f), X) \\ &= Yg(\nabla_X \text{grad}(f), Z) - Zg(\nabla_Y \text{grad}(f), X) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_X \text{grad}(f), Z) - g(\nabla_Z \nabla_Y \text{grad}(f), X) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_X \text{grad}(f), Z) - g(R(Z, Y)\text{grad}(f), X) - g(\nabla_Y \nabla_Z \text{grad}(f), X) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_X \text{grad}(f), Z) - g(R(Z, Y)\text{grad}(f), X) - Yg(\nabla_Z \text{grad}(f), X) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_X \text{grad}(f), Z) - g(R(Z, Y)\text{grad}(f), X) - Yg(\nabla_X \text{grad}(f), Z) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_X \text{grad}(f), Z) - g(R(Z, Y)\text{grad}(f), X) - g(\nabla_Y \nabla_X \text{grad}(f), Z) \\ &= -g(R(\text{grad}(f), X)Z, Y) \\ &= g(R(\text{grad}(f), X)Y, Z) \end{aligned}$$

D'où

$$\nabla_{E_i} R(E_i, X, Y) = R(\text{grad}(f), X)Y$$

puisque  $g$  est non dégénérée.

■



### 3.2 Les classes du gradient soliton de Ricci

Considérons la variété  $M = \mathbb{R}^2$ , munie de la métrique de type diagonale (métrique déformée) $\bar{g}$  où  $\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(g(x^2), 1)$  avec  $g$  fonction positive, de classe  $C^\infty$ . La métrique  $\bar{g}$  induit la connexion riemannienne ayant les composants

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}g'(x^2), \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{g'(x^2)}{2g(x^2)}$$

Pour les tenseurs de courbures non nuls on trouve

$$R_{212}^1 = -\left(\frac{g'(x^2)}{2g(x^2)}\right)' - \left(\frac{g'(x^2)}{2g(x^2)}\right)^2, \quad R_{1212} = g_{1s}R_{212}^s = g(x^2)R_{212}^1$$

et  $\Delta = g_{11}g_{22} - (g_{12}) = g(x^2)$ . Ensuite, la courbure sectionnelle est précisément la courbure de Gauss,

$$K = \frac{R_{1212}}{\Delta} = \frac{g(x^2)R_{212}^1}{g(x^2)} = R_{212}^1 = -\left(\frac{g'(x^2)}{2g(x^2)}\right)' - \left(\frac{g'(x^2)}{2g(x^2)}\right)^2$$

Pour clarifier notre exposé, sur l'expression donnée ci-dessus nous notons

$$\frac{g'(x^2)}{2g(x^2)} = r(x^2) \tag{3.15}$$

et on trouve

$$-K = r^2(x^2) + r'(x^2) \tag{3.16}$$

Pour les variétés bidimensionnelles, les composants du tenseur de Ricci sont :

$$R_{11} = R_{111}^1 + R_{121}^2$$

$$R_{12} = R_{112}^1 + R_{122}^2$$

$$R_{22} = R_{212}^1 + R_{222}^2$$

Par calcul direct, on trouve

$$R_{111}^1 = R_{112}^1 = R_{122}^2 = 0$$

$$R_{121}^2 = \frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g(x^2)}$$

$$R_{212}^1 = \frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g^2(x^2)}$$

et les composants du tenseur Ricci sont :

$$R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{11} = \frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g(x^2)}$$

$$R_{22} = \frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g^2(x^2)}$$

## Section de courbure sur $\bar{g}$

Nous soulignons le rôle de la métrique  $\bar{g}$  dans la détermination des variété à courbure sectionnelle négative, nulle ou positive.

Les études de cas, présentées ci-dessous, montrent le rôle de la métrique  $\bar{g}$  dans la détermination des variétés ayant une courbure de section négative, nulle ou positive.

**Etude des cas :**  $r'(x) = 0$ ,  $r(x^2) = c$  ou  $c$  est un réel constant, et la formule (3.16), il s'ensuit  $K = -r^2(x^2)$ . La courbure sectionnelle  $K = -c^2$  est constante et négative.

Du relation (3.15), on obtient  $\frac{g'(x^2)}{2g(x^2)} = c$ . Il signifie que il y'a un constant réel  $a$  tel que  $\ln g(x^2) = 2cx^2 + a$  ou  $g(x^2) = \exp(2cx^2 + a)$ . Si  $e^a = \alpha > 0$ , donc  $g(x^2) = \alpha \exp(2cx^2)$

Maintenant, on a la preuve du résultat dans

**Proposition 3.8** *La variété Riemannienne  $(\mathbb{R}^2, \bar{g})$*

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(\alpha \exp(2cx^2), 1)$$

Où  $\alpha > 0$  et  $c$  sont des réelles,  $a$  une courbure négative constante  $K = -c^2$

**Etude des cas**  $r'(x^2) \neq 0$ . nous déterminerons la métrique  $\bar{g}$  qui donner lieu à une variété à courbure nulle,  $K = 0$ . Dans ce cas, l'équation. (3.16) a la forme  $r^2(x^2) + r'(x^2) = 0$ . Par intégration on obtient  $r(x^2) = \frac{1}{x^2 - c}$  où  $c$  est une constante réelle. De la relation (3.15), nous obtenons  $\frac{g'(x^2)}{g(x^2)} = \frac{2}{x^2 - c}$ . Après l'intégration on obtient :  $g(x^2) = a(x^2 - c)^2$ , avec  $a > 0$ .

Par conséquent, nous pouvons déclarer le résultat dans

**Proposition 3.9** *La variété Riemannienne  $\mathbb{R}^2, \bar{g}$*

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(a(x^2 - c)^2, 1)$$

où  $a > 0$  et  $c$  réel  $a$  une courbure sectionnelle nulle,  $K = 0$

En utilisant des arguments similaires à ceux ci-dessus, nous avons trouvé la métrique  $\bar{g}$  qui détermine une variété avec une courbure positive en coupe. Ce résultat est donné par

**Proposition 3.10** *La variété Riemannienne  $(\mathbb{R}^2, \bar{g})$*

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(a \cos^2(kx^2 + c), 1)$$

Où  $a > 0$  et  $c$  réel,  $a$  une courbure sectionnelle positive  $K = k^2$

**Remarque 3.11** *à la fin de cette section, nous faisons un commentaire sur l'équation. (3.16) mettant l'accent sur le cas où la courbure en coupe est constante. Dans ce cas, en prenant la dérivée de (3.16), on obtient*

$$0 = 2r(x^2)r'(x^2) + r''(x^2) \quad (3.17)$$

Si nous introduisons la primitive  $\mathcal{X}(x^2) = \int r(x^2)dx^2$ , on peut remarquer que

$$(r'(x^2) \exp(2\mathcal{X}(x^2)))' = \exp(2\mathcal{X}(x^2))(r''(x^2) + 2r(x^2)r'(x^2)) = 0$$

on trouve une forme équivalente de (3.17) dans

$$r'(x^2) \exp(2\mathcal{X}(x^2)) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### 3.2.1 Gradient soliton de Ricci en dimension 2

Étant donné que les composants de la Hessien sont

$$\begin{aligned} f_{,11} &= \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2} - \Gamma_{11}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2} + \frac{g'(x^2)}{2} \frac{\partial f}{\partial x^2} \\ f_{,12} &= f_{,21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{g'(x^2)}{2g(x^2)} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ f_{,22} &= \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2} \end{aligned}$$

on obtient le résultat en

**Théorème 3.12** *Considérons le collecteur  $M = \mathbb{R}^2$ , munie de la métrique de diagonale tapez  $\bar{g}$ , où  $\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(g(x^2), 1)$ , avec  $g$  fonction positive, de classe  $C^\infty$ . Si les conditions suivantes sont remplies*

$$(R) \quad \begin{cases} \frac{(g'(x^2) - 2g(x^2)g''(x^2))}{4g(x^2)} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2} + \frac{g'(x^2)}{2} \frac{\partial f}{\partial x^2} = \rho g(x^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{g'(x^2)}{2g(x^2)} \frac{\partial f}{\partial x^1} = 0 \\ \frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g^2(x^2)} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^2)^2} = \rho \end{cases}$$

alors,  $(\mathbb{R}^2, \bar{g})$  est un gradient de Ricci soliton ayant  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  comme fonction potentielle.

Nous souhaitons illustrer ce résultat par quelques études de cas. A propos de ça, nous devons obtenir des informations plus détaillées à partir des Eqs (R). Ces informations sont incluses dans le contenu des trois étapes suivantes :

1. Après les deux premières étapes, nous trouverons une forme générale pour la fonction potentielle. (voir la formule (3.23))
2. Après la troisième étape, nous obtiendrons une relation entre la composante  $g$  dans  $\bar{g}$  et la constante réelle  $\rho$ . (voir Eq (3.29))

**Étape 1 :** Nous transformons la deuxième équation en (R) de telle sorte que nous obtenons une forme pratique pour  $\frac{\partial^2 f}{\partial(x^2)^2}$ . un sera utilisé plus tard pour transformer la troisième équation en (R).

indiquer  $\frac{\partial f}{\partial x^1} = h$  et on trouve  $\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x^2} = \frac{g'(x^2)}{2g(x^2)}$ . Après une intégration en respectant  $x^2$ , on retourne notre notation et on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = a(x^1) \sqrt{g(x^2)} \quad (3.18)$$

Nous fixons  $A(x^1) = \int a(x^1) dx^1$  et intégrons (3.18) par rapport à  $x^1$ . On obtient

$$f(x^1, x^2) = \sqrt{g(x^2)} A(x^1) + b(x^2) \quad (3.19)$$

En prenant la dérivée par rapport à  $x_2$ , nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = A(x^1) \frac{g'(x^2)}{2\sqrt{g(x^2)}} + b'(x^2) \quad (3.20)$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} = A(x^1) \frac{2g(x^2)g''(x^2) - (g'(x^2))^2}{4g(x^2)\sqrt{g(x^2)}} + b''(x^2) \quad (3.21)$$

**Etape 2 :** Nous utilisons la forme de la dérivée seconde dans (3.21), et transformons la troisième équation en (R).

On obtient

$$\frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g^2(x^2)} + A(x^1) \frac{2g(x^2)g''(x^2) - (g'(x^2))^2}{4g(x^2)\sqrt{g(x^2)}} + b''(x^2) = \rho$$

et la résolution par rapport à  $A(x^1)$ , nous obtenons

$$A(x^1) = \frac{4g(x^2)\sqrt{g(x^2)}}{2g(x^2)g''(x^2) - (g'(x^2))^2} \left( \rho - b''(x^2) - \frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g^2(x^2)} \right)$$

Ici, le côté gauche est une fonction sur  $x^1$  uniquement, tandis que le second est une fonction sur  $x^2$  uniquement. Il existe donc une vraie constante  $c$ , telle que

$$\begin{cases} A(x^1) = c \\ \frac{4g(x^2)\sqrt{g(x^2)}}{2g(x^2)g''(x^2) - (g'(x^2))^2} \left[ \rho - b''(x^2) - \frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g^2(x^2)} \right] = c \end{cases} \quad (3.22)$$

En utilisant l'ancienne équation de (3.22), nous obtenons une forme générale pour la fonction potentielle. C'est

$$f(x^1, x^2) = c\sqrt{g(x^2)} + b(x^2) \quad (3.23)$$

**Etape 3 :** En utilisant (3.20) et la forme de la fonction potentielle dans (3.23), nous transformons la première équation dans (R).

On obtient

$$\frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g(x^2)} + \frac{g'(x^2)}{2} \left[ c \frac{g'(x^2)}{2\sqrt{g(x^2)}} + b'(x^2) \right] = \rho g(x^2)$$

et résolvant par rapport à  $b(x^2)$ , il s'ensuit

$$b'(x^2) = \frac{2\rho g(x^2)}{g'(x^2)} - c \frac{g'(x^2)}{2\sqrt{g(x^2)}} - \frac{g'(x^2)}{2g(x^2)} + \frac{g''(x^2)}{g'(x^2)} \quad (3.24)$$

En prenant la dérivée dans la relation trouvée ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} b''(x^2) &= 2\rho \frac{((g'(x^2))^2 - g(x^2)g''(x^2))}{(g'(x^2))^2} - \frac{c(2g(x^2)g''(x^2) - (g'(x^2))^2)}{4g(x^2)\sqrt{g(x^2)}} \\ &\quad - \frac{g(x^2)g''(x^2) - (g'(x^2))^2}{2g^2(x^2)} + \frac{g'''(x^2)g'(x^2) - (g''(x^2))^2}{(g'(x^2))^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Par contre, à partir de la deuxième équation de (3.22), nous avons

$$b''(x^2) = \rho - \frac{(g'(x^2))^2 - 2g(x^2)g''(x^2)}{4g^2(x^2)} - c \frac{2g(x^2)g''(x^2) - (g'(x^2))^2}{4g(x^2)\sqrt{g(x^2)}} \quad (3.26)$$

Les bonnes pièces dans les équations. (3.25) et (3.26) sont égaux, alors on obtient

$$2\rho \frac{(g'(x^2))^2 - g(x^2)g''(x^2)}{(g'(x^2))^2} + \frac{3(g'(x^2))^2 - 4g(x^2)g''(x^2)}{4g^2(x^2)} + \frac{g'''(x^2)g'(x^2) - (g''(x^2))^2}{(g'(x^2))^2} = \rho \quad (3.27)$$

mais

$$\begin{aligned} \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)' &= \frac{g''(x^2)g(x^2) - (g'(x^2))^2}{g^2(x^2)} = \frac{-4g''(x^2)g(x^2) + 4(g'(x^2))^2}{-4g^2(x^2)} \\ &= \frac{3(g'(x^2))^2 - 4g''(x^2)g(x^2)}{-4g^2(x^2)} - \frac{(g'(x^2))^2}{-4g^2(x^2)} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{3(g'(x^2))^2 - 4g''(x^2)g(x^2)}{4g^2(x^2)} = - \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)' - \frac{1}{4} \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)^2$$

Maintenant, nous utilisons l'équation (3.27) et nous obtenons

$$2\rho \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)' - \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)' - \frac{1}{4} \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)^2 + \left( \frac{g''(x^2)}{g(x^2)} \right)' = \rho$$

et sa forme équivalente

$$2\rho \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)' + \left( \frac{g''(x^2)}{g'(x^2)} - \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)' - \frac{1}{4} \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)^2 = \rho$$

Nous transformons l'équation ci-dessus comme

$$2\rho \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)' + \left( \frac{g^2(x^2) \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)^2}{g(x^2)g'(x^2)} \right)' - \frac{1}{4} \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)^2 = \rho$$

et il s'ensuit

$$2\rho \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)' + \left( \frac{\left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)'}{\frac{g'(x^2)}{g(x^2)}} \right)' - \frac{1}{4} \left( \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \right)^2 = \rho$$

Si nous introduisons la fonction

$$h(x^2) = \frac{g'(x^2)}{g(x^2)} \quad (3.28)$$

nous trouvons

$$2\rho \left( \frac{1}{h(x^2)} \right)' + \left( \frac{h'(x^2)}{h(x^2)} \right)' - \frac{1}{4} h^2(x^2) = \rho$$

ou, sous une forme équivalente

$$\left( \frac{2\rho + h'(x^2)}{h(x^2)} \right)' = \rho + \frac{h^2(x^2)}{4} \quad (3.29)$$

L'objectif de l'étude de cas suivante est de discuter de quelques solutions de l'équation précédente. (3.29).

**Étude de cas :** Nous recherchons des solutions de la forme  $h(x^2) = \beta(x^2)^\alpha$ , en (3.29), pour quelques constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans ce cas, par substitution, notre équation devient

$$\left( \frac{2\rho + \alpha\beta(x^2)^{\alpha-1}}{\beta(x^2)^\alpha} \right)' = \rho + \frac{\beta^2(x^2)^{2\alpha}}{4}$$

Après quelques arrangements, on trouve

$$\left( \frac{2\rho}{\beta}(x^2)^{-\alpha-1} - \alpha(x^2)^{-1} \right)' = \rho + \frac{\beta^2(x^2)^{2\alpha}}{4}$$

où

$$\frac{2\alpha}{\beta}(-\alpha)(x^2)^{-\alpha-1} - \alpha(x^2)^{-2} = \rho + \frac{\beta^2(x^2)^{2\alpha}}{4}$$

Maintenant, pour  $\alpha = -1$ , nous obtenons

$$\frac{2\rho}{\beta} + (x^2)^{-2} = \rho + \frac{\beta^2}{4}(x^2)^{-2} \quad (3.30)$$

Nous identifions les coefficients de  $(x^2)^{-2}$  dans Eq. (3.28), et nous obtenons  $\beta^2 = 4$ , donc  $\beta = \pm 2$  et deux sous-cas sont valables.

**Le sous-cas :  $\beta = 2$ .** La relation ci-dessus est valable (voir figure 3.1) pour tout  $\rho$ , donc  $h(x^2) = 2(x^2)^{-1}$ . Remplacement dans Eq. (3.28), par intégration, nous trouvons  $\ln g(x^2) = 2 \ln x^2 + \ln \gamma$ , avec  $\gamma > 0$ , et  $g(x^2) = \gamma(x^2)^2$ . Maintenant, en utilisant la forme de  $b'$  dans l'équation. (3.24), après un calcul simple, on obtient

$$b'(x^2) = \rho x^2 - c\sqrt{\gamma} \Rightarrow b(x^2) = \frac{\rho}{2}(x^2)^2 - c\sqrt{\gamma}x^2 + \delta$$

Enfin, profitant de la forme de la fonction  $f$  trouvée dans l'équation. (3.23), nous obtenons

$$f(x^1, x^2) = \frac{\rho}{2}(x^2)^2 + \delta \quad (3.31)$$

et nous avons obtenu une preuve de ce résultat.

**Proposition 3.13** *La variété Riemannienne  $(\mathbb{R}^2, \bar{g})$*

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(\gamma(x^2)^2, 1), \quad \gamma > 0$$

*est un gradient de Ricci soliton ayant pour fonction potentielle (3.31), pour tout réelle  $\gamma$*

**Le sous-cas :  $\beta = -2$ .** De (3.30) il suit  $\rho = 0$  et  $h(x^2) = -2(x^2)^{-1}$ . En remplaçant dans (3.28), on obtient  $g(x^2) = \delta(x^2)^{-2}$ . Maintenant, en utilisant la forme de  $b'$  dans (3.24), après un calcul simple, nous obtenons

$$b'(x^2) = c\sqrt{\delta}(x^2)^{-2} - 2(x^2)^{-1} \Rightarrow b(x^2) = -c\sqrt{\delta}(x^2)^{-1} - 2 \ln x^2 + \theta$$

et

$$f(x^1, x^2) = -2 \ln x^2 + \theta, \quad x^2 > 0 \quad (3.32)$$

Par conséquent, nous avons une preuve de ce résultat.

**Proposition 3.14** *Si  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  alors la variété Riemannienne  $(M, \bar{g})$  est un soliton de Ricci stable en gradient ayant (3.32) comme fonction potentielle.*

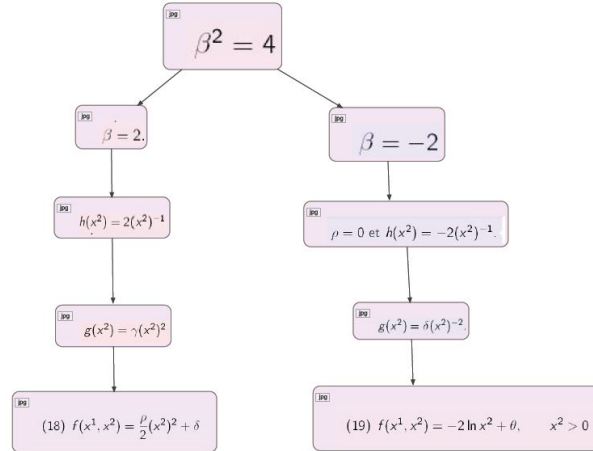


FIG. 3.1 –

Nous continuons nos réflexions dans cette section en mettant l'accent sur deux classes de solitons de Ricci triviaux.(voir figure 3.2)

**Classe 1 :** Comme solution de (3.29), nous avons trouvé la fonction  $h(x^2) = -tg(\frac{x^2}{2})$ , lorsque  $\rho = \frac{1}{4}$ . Dans ce cas,  $g(x^2) = \cos^2 \frac{x^2}{2}$  produit la fonction potentielle  $f(x^1, x^2) = k$ , avec  $k$  une vraie constante.

**Classe 2 :** Comme solution de (3.29), nous avons également trouvé la fonction  $h(x^2) = 1$ , lorsque  $\rho = \frac{1}{4}$ . Dans ce cas,  $g(x^2) = \exp(x^2)$  produit la fonction potentielle  $f(x^1, x^2) = k$ , avec  $k$  une vraie constante.

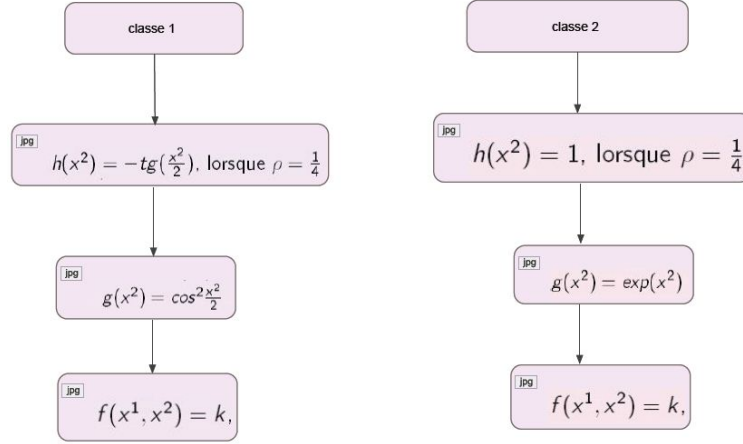


FIG. 3.2 –

Pour obtenir le résultat général, notons  $H$  une primitive de la fonction  $h$  dans Eq. (3.28), solution de l'équation. (3.29), et remarquez que  $g(x^2) = \exp(H(x^2))$ . Puis, profitant de la forme de la fonction  $b'$  dans (3.24), à partir de (3.23) nous obtenons la forme générale de la fonction potentielle

$$f(x^1, x^2) = 2\rho \int \frac{g(x^2)}{g'(x^2)} dx^2 + \ln \frac{|g'(x^2)|}{\sqrt{g(x^2)}} \quad (3.33)$$

Ces arguments nous permettent de dire

**Théorème 3.15** *La variété Riemannienne  $(\mathbb{R}^2, \bar{g})$*

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(g(x^2), 1)$$

où la fonction  $g$  est donnée par (3.29), est un gradient de Ricci soliton ayant (3.33) comme fonction potentielle.

Dans ce qui suit, nous spécialiserons le résultat dans le théorème (3.15) pour obtenir quelques exemples illustratifs.(voir figure 3.3)

**Exemple 3.16** *Remarquons que la fonction  $h(x^2) = \frac{4}{\sinh(2x^2)}, x^2 > 0$  vérifie l'équation (3.29) pour  $\rho = 0$ . Une fonction primitive de la fonction  $h$  peut être trouvée en changeant la variable comme  $H(x^2) = \ln(\tanh^2 x^2)$ . Donc  $g(x^2) = \tanh^2 x^2$  et par (3.33), on obtient la fonction potentielle*

$$f(x^1, x^2) = -\ln \cosh x^2 + \ln 2, \quad x^2 > 0 \quad (3.34)$$

**Proposition 3.17** *Si  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , puis la variété Riemannienne  $(M, \bar{g})$*

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(\tanh^2 x^2, 1)$$

est un soliton de Ricci à gradient constant ayant (3.34) comme fonction potentielle.

Le résultat de la proposition (3.17) est remarquable, car le soliton trouvé ici est précisément "Hamilton cigar" en coordonnées polaires.(voir exemple (3.5))

**Exemple 3.18** *Comme ci-dessus, la fonction  $h(x^2) = -\frac{4}{\sinh(2x^2)}, x^2 > 0$ , satisfait l'équation (3.29) pour  $\rho = 0$  la primitive de la fonction  $h$  est  $H(x) = \ln(\coth^2 x^2)$ . ca suit  $g(x^2) = \coth^2 x^2$  et par (3.33). On obtient la fonction potonentiel*

$$f(x^1, x^2) = \ln 2 - 2 \ln \sinh(x^2), \quad x^2 > 0 \quad (3.35)$$

**Proposition 3.19** Si  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , la variété Riemannienne  $(M, \bar{g})$

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(\coth^2 x^2, 1)$$

est un soliton de Ricci à gradient constant ayant (3.35) comme fonction potentielle.

Pour les exemples (3.20) et (3.22), supposons  $x^2 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

**Exemple 3.20** La fonction  $h(x^2) = \frac{4}{\sin^2 2x^2}$  vérifie l'équation (3.29) pour  $\rho = 0$ . La primitive de la fonction  $h$  est  $H(x^2) = \ln(\tan^2 x^2)$  ce qui suit  $g(x^2) = \tan^2 x^2$  et par (3.33). On obtient la fonction potentielle

$$f(x^1, x^2) = \ln 2 - 2 \ln \cos x^2 \quad (3.36)$$

**Proposition 3.21** Si  $M = \mathbb{R} \times ]0, \frac{\pi}{2}[$ , la variété Riemannienne  $(M, \bar{g})$

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(\tan^2 x^2, 1)$$

est un soliton de Ricci à gradient stable ayant (3.36) comme fonction potentielle.

**Exemple 3.22** La fonction  $h(x^2) = -\frac{4}{\sinh^2 2x^2}$  vérifie l'équation (3.29) pour  $\rho = 0$ . La primitive de la fonction  $h$  est  $H(x^2) = \ln(\cot^2 x^2)$ . Ce qui suit  $g(x^2) = \cot^2 x^2$  et par (3.33). On obtient la fonction potentielle

$$f(x^1, x^2) = \ln 2 - 2 \ln \sin x^2 \quad (3.37)$$

**Proposition 3.23** Si  $M = \mathbb{R} \times ]0, \frac{\pi}{2}[$ , la variété riemannienne  $(M, \bar{g})$

$$\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(\cot^2 x^2, 1)$$

est un soliton de Ricci à gradient stable ayant (3.37) comme fonction potentielle.

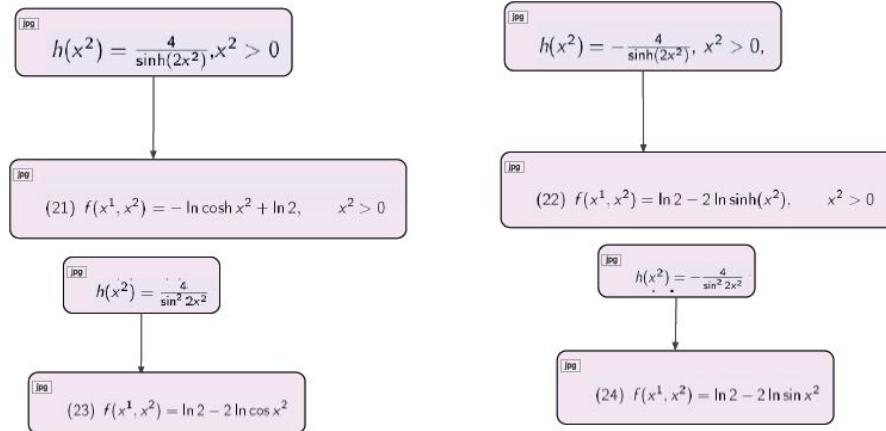


FIG. 3.3 –



## classification des solitons de Ricci à gradient stable

Dans la section précédente nous avons trouvé une large classe de solitons de Ricci à gradient à 2 dimensions et nous avons spécialisée nos résultats pour discuter quelques étude de cas. Dans cette partie nous continuons naturellement notre travail en fournissant des résultats de classification pour la sous classe des solitons de Ricci à gradient stable.

Nous déterminerons la classe des solitons de Ricci à gradient stable sur notre variété riemannienne  $(M, \bar{g})$ . A cet égard, nous spécialiserons le résultat dans le théorème (3.15) avec  $\rho = 0$  dans (3.29).

Si considérons la fonction  $h(x^2) = \frac{2}{r(x^2)}$ , alors pour  $\rho = 0$ , Eq (3.29) devient

$$rr'' - (r')^2 + 1 = 0 \quad (3.38)$$

Nous prenons la dérivée dans (3.38) et obtenons  $rr''' - r'r'' = 0$ , ce qui fait  $(\frac{r''}{r})' = 0$ . Donc,

$$r'' = \delta r, \quad \text{pour quelque réel constant } \delta \quad (3.39)$$

**Etude du première cas :**  $\delta > 0$ . Si nous mettons  $\sqrt{\delta} = \theta, \theta > 0$  alors la solution générale de (3.39) est  $r(x^2) = c_1 \exp(-\theta x^2) + c_2 \exp(\theta x^2)$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes réelles (non nulles). Nous retournons à (3.38), et trouvons  $4\theta^2 c_1 c_2 = -1$ . Maintenant, nous pouvons exprimer  $r$  par rapport à  $c_1$ , et en utilisant (3.28), nous trouvons

$$g(x^2) = \left( \frac{\exp(\theta x^2) + 2\theta c_1}{\exp(\theta x^2) - 2\theta c_1} \right)^2, \quad \theta > 0 \quad (3.40)$$

où la fonction  $g$  est définie sur un intervalle  $I$ , fixé par la condition  $\exp(\theta x^2) - 2\theta c_1$ . Enfin, par le théorème (3.15), nous trouvons le potentiel

$$f(x^1, x^2) = \ln 2 + \ln |4\theta^2 c_1| + \ln \frac{\exp(\theta x^2)}{(\exp(\theta x^2) - 2\theta c_1)^2}, \quad (x^1, x^2) \in \mathbb{R} \times I \quad (3.41)$$

En utilisant ce contexte, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

**Théorème 3.24** *Si  $M = \mathbb{R} \times I$ , alors la variété Riemannienne*

$$(M, \bar{g}), \quad \bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(g(x^2), 1),$$

*avec  $g$  donné par (3.40), est un soliton de Ricci à gradient stationnaire ayant pour fonction potentielle (3.41), pour certains réels  $c_1$  et  $\theta$  positif.*

Dans ce cas, la courbure sectionnelle est

$$K = \frac{\theta c_1 \exp(2\theta x^2) - \exp(\theta x^2) + \frac{1}{4\theta c_2}}{\exp(\theta x^2)(c_1 \exp(-\theta x^2) + c_2 \exp(\theta x^2))^2} \quad (3.42)$$

**Le premier sous-cas :**  $c_2 > 0$ . Il suit  $K > 0$ . Mais à partir de la condition satisfaite par I, il suit  $c_1 < 0$ , donc l'intervalle I dans le théorème (3.24) est  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que le collecteur est  $M = \mathbb{R}^2$  (cigare Hamilton), ayant une courbure positive.

**Le deuxième sous-cas :**  $c_2 < 0$ . il suit  $K < 0$ . Mais de la condition satisfaite par I, il suit  $x^2 \neq \frac{1}{\theta} \ln \frac{1}{2\theta(-c_2)}$  donc l'intervalle I dans le théorème (3.24) pourrait être choisi comme  $I = (\frac{1}{\theta} \ln \frac{1}{2\theta(-c_2)}, +\infty)$ , et la variété a une courbure négative (voire figure 3.4)

Dans ce qui suit, nous spécialiserons le résultat énoncé dans le théorème (3.24) pour obtenir quelques exemples illustratifs.

Pour  $\theta = 2$  et  $c_1 = \frac{-1}{4}$  dans (3.40) et (3.41) respectivement, on trouve  $g(x^2) = \tanh^2 x^2$  et la fonction potentielle

$$f(x^1, x^2) = -2 \ln \cosh x^2 + \ln 2, \quad x^2 > 0 \quad (3.43)$$

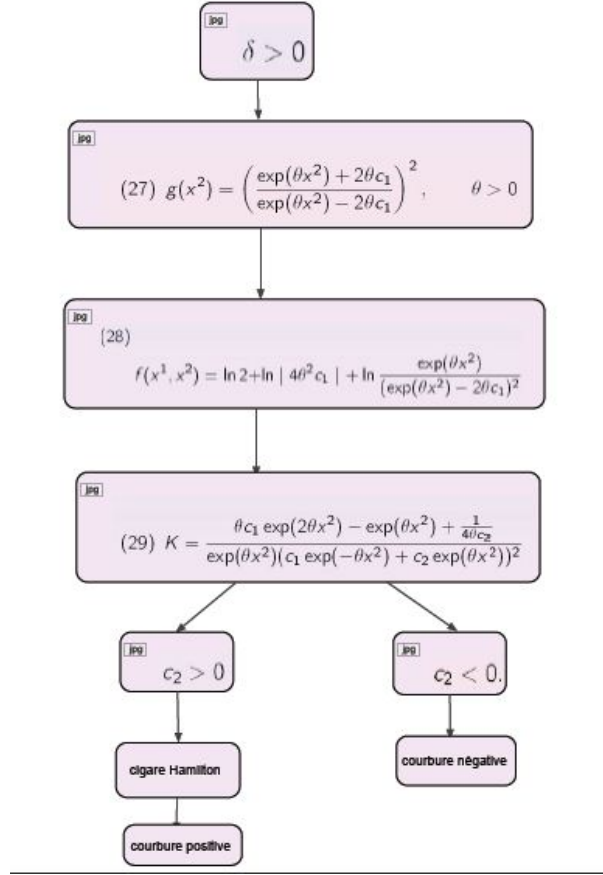


FIG. 3.4 –

**Corollaire 3.25** Si  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , alors la variété Riemannienne

$$(M, \bar{g}), \quad \bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(\tanh^2 x^2, 1),$$

est un soliton de Ricci à gradient constant ayant (3.43) comme fonction potentielle.

Le résultat du corollaire (3.25) est remarquable, puisque le soliton trouvé ici n'est que «cigare Hamilton» en coordonnées polaires.

Pour  $\theta = 2$  et  $c_1 = \frac{1}{4}$  dans (3.40) et (3.41) respectivement, on trouve  $g(x^2) = \coth^2 x^2$  et la fonction potentielle

$$f(x^1, x^2) = \ln 2 - 2 \ln \sinh x^2, \quad x^2 > 0 \quad (3.44)$$

**Proposition 3.26** Si  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , alors la variété Riemannienne

$$(M, \bar{g}), \quad \bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(\coth^2 x^2, 1),$$

est un soliton de Ricci à gradient constant ayant (3.44) comme fonction potentielle.

**Etude du deuxième cas :  $\delta < 0$ .** Si nous mettons  $\sqrt{-\delta} = \theta, \theta > 0$ , alors le général la solution de (3.39) est  $r(x^2) = c_1 \cos(\theta x^2) + c_2 \sin(\theta x^2)$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes réelles.

Nous retournons à (3.38), et trouvons  $c_1^2 + c_2^2 = \frac{1}{\theta^2}, \theta > 0$

Dans ce cas, la courbure sectionnelle est

$$K = \frac{\theta(-c_1 \sin \theta x^2 + c_2 \cos \theta x^2) - 1}{(c_1 \sin \theta x^2 + c_2 \cos \theta x^2)^2} \quad (3.45)$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient  $K \leq 0$ , avec égalité si et seulement si  $\frac{\sin \theta x^2}{-c_1} = \frac{\cos \theta x^2}{c_2}$ , où  $c_1, c_2 \neq 0$  c'est  $x^2 = \frac{1}{\theta} \arctan \frac{c_1}{c_2}$ . Par conséquent,  $K < 0$  On voit que la composante  $g$  dans  $\bar{g}$  est donnée par

$$\ln |g(x^2)| = \int \frac{2}{c_1 \cos(\theta x^2) + c_2 \sin(\theta x^2)} dx^2 \quad (3.46)$$

La primitive de (3.46) peut être exprimée sous une forme plus pratique en utilisant une substitution trigonométrique  $\tan \frac{\theta y}{2} = t$ . Nous trouvons

$$\ln |g(x^2)| = \frac{2}{\theta} \int \frac{1}{-c_1 t^2 + 2c_2 t + c_1} dt \quad (3.47)$$

**Le premier sous-cas :**  $c_1 = 0$ . Par conséquent,  $c_2 = \pm \frac{1}{\theta}$  et  $g(x^2) = \tan^{\pm 2} \frac{\theta x^2}{2}$  là où nous supposons  $x^2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Si considérons  $g(y) = \tan^2 \frac{\theta x^2}{2}$ , alors il suit la fonction potentielle

$$f(x^1, x^2) = \ln \theta - 2 \ln \cos \frac{\theta x^2}{2} \quad (3.48)$$

**Proposition 3.27** Si  $M = \mathbb{R} \times (0, \frac{\pi}{2})$ , alors la variété Riemannienne

$$(M, \bar{g}), \quad \bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag} \left( \tan^2 \frac{\theta x^2}{2}, 1 \right),$$

est un soliton de Ricci à gradient constant ayant (3.48) comme fonction potentielle.

Si l'on considère  $g(t) = \cot^2 \frac{\theta x^2}{2}$ , alors il suit la fonction potentielle

$$f(x^1, x^2) = \ln \theta - 2 \ln \left| \sin \frac{\theta x^2}{2} \right| \quad (3.49)$$

**Proposition 3.28** Si  $M = \mathbb{R} \times (0, \frac{\pi}{2})$ , alors la variété Riemannienne

$$(M, \bar{g}), \quad \bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag} \left( \cot^2 \frac{\theta x^2}{2}, 1 \right),$$

est un soliton de Ricci à gradient constant ayant (3.49) comme fonction potentielle.

**Le deuxième sous-cas :**  $c_1 \neq 0$ . Après un calcul technique, on trouve

$$g(x^2) = \left( \frac{\tan \frac{\theta x^2}{2} - \frac{c_2 - \frac{1}{\theta}}{c_1}}{\tan \frac{\theta x^2}{2} - \frac{c_2 + \frac{1}{\theta}}{c_1}} \right)^2, \quad c_1^2 + c_2^2 = \frac{1}{\theta^2} \quad (3.50)$$

et la fonction potentielle

$$f(x^1, x^2) = \ln \frac{2}{|c_1|} - 2 \ln \left| \sin \frac{\theta x^2}{2} - \frac{c_2 + \frac{1}{\theta}}{c_1} \cos \frac{\theta x^2}{2} \right| \quad (3.51)$$

où  $y$  appartient à un intervalle fixé de manière à exister à la fois les fonctions  $g$  et  $f$ . Remarquez que, dans ce cas, nous pouvons choisir  $M = \mathbb{R} \times \left( \frac{2}{\theta} \arctan \frac{c_2 + \frac{1}{\theta}}{c_1}, +\infty \right)$ . (voir figure 3.5)

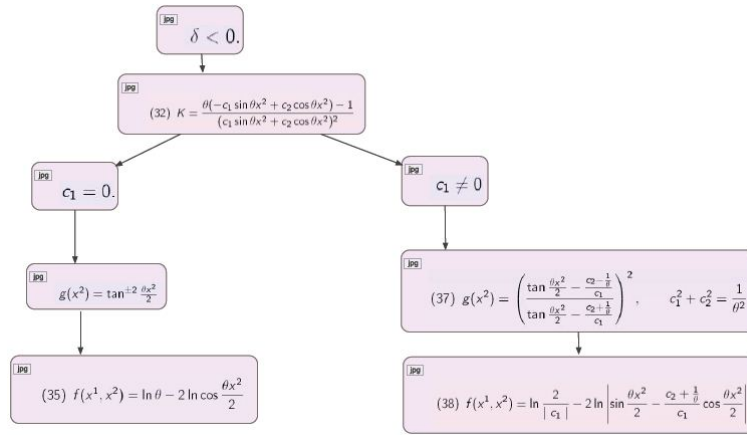


FIG. 3.5 –

**Etude du troisième cas :**  $\delta = 0$ . La solution générale de (3.39) est  $r(x^2) = ax^2 + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles. Nous retournons à (3.38), et trouvons  $a = \pm 1$

**Le premier sous-cas :**  $a = -1$ . Il suit  $g(x^2) = (x^2 - b)^2$  et la fonction potentielle  $f(x^1, x^2) = \ln 2$ . Le soliton est trivial et d'ailleurs Ricci plat puisque tout  $R_{ij}$  disparaît.

**Le deuxième sous-cas :** il suit  $g(x^2) = (x^2 - b)^{-2}$  et la fonction potentielle  $f(x^1, x^2) = \ln 2 - 2 \ln |x^2 - b|$ .

Puisque la métrique est définie par la condition  $x^2 \neq b$ , nous pouvons choisir  $M = \mathbb{R} \times (b, +\infty)$ . Dans ce cas, la courbure de section est négative.(voir figure 3.6)

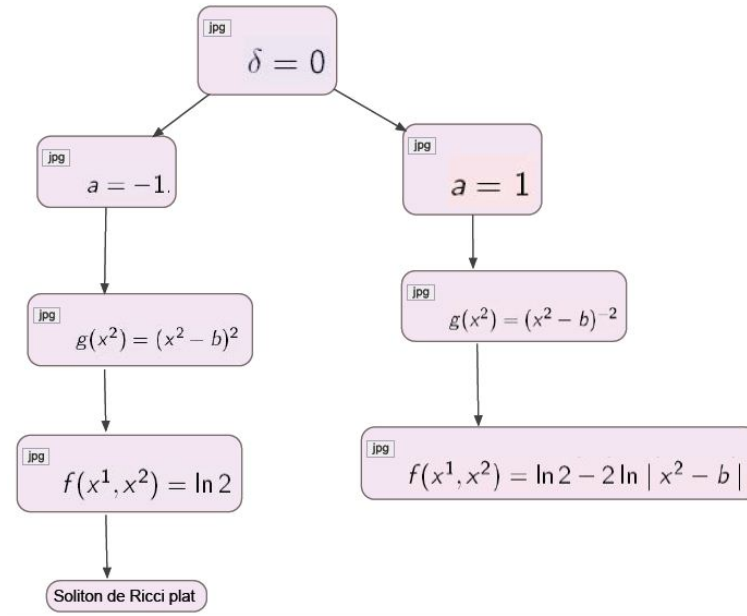


FIG. 3.6 –

**Remarque 3.29** Les courbes géodésiques de cette variété sont des solutions des équations suivantes

$$\begin{cases} (x^1)''(t) + \frac{g'(x^2(t))}{g(x^2(t))} (x^1)'(t)(x^2)'(t) = 0, \\ (x^2)''(t) - \frac{1}{2}g'(x^2(t))((x^1)'(t))^2 = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Le système (3.52) peut être utilisé pour étudier l'intégralité de nos variétés. à cet égard, nous transformons la première équation en (3.52), et obtenons

$$(x^1)'(t) = \frac{c}{g(x^2(t))}, \quad c > 0. \quad (3.53)$$

Par (3.53) dans la première équation de (3.52), on obtient

$$(x^2)''(t) - \frac{1}{2}g'(x^2(t)) \left( \frac{c}{g(x^2(t))} \right)^2 = 0 \quad (3.54)$$

Profitant de (3.53) et (3.54), nous pouvons décider de l'exhaustivité de nos nouvelles variétés.

**Exemple 3.30** Si  $\delta = 0$  et  $a = -1$ , on trouve  $g(x^2) = \frac{1}{(x^2-b)^2}$ ,  $x^2 \neq b$ . Dans ce cas, à partir de (3.54), on obtient

$$x^2(t) = b + c_1 \cos ct + c_2 \sin ct, \quad (3.55)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes d'intégration. De plus, après un calcul simple, à partir de (3.53), nous obtenons

$$x^1(t) = k + \frac{c}{2} (c_1^2 + c_2^2) t + \frac{c_1^2 - c_2^2}{4} \sin 2ct - \frac{c_1 c_2}{2} \cos 2ct \quad (3.56)$$

avec  $k$  une constante d'intégration.

La solution  $\gamma(t) = (x^1(x^2), x^2(t))$ , avec  $x^1$  dans (3.56) et  $x^2$  dans (3.55) est définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$ , donc le collecteur est complet, avec une courbure sectionnelle négative.

# Conclusion

Dans plusieurs travaux antérieurs, le professeur Constantin Udriste a considéré l'étude de la variété Riemannienne  $M = \mathbb{R}^2$  dotée de métriques de type diagonal de la forme  $\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(g(x^2), 1)$ , où  $g$  est positif fonction de la classe  $C^\infty$ , en fonction de la première variable uniquement. Par exemple, dans la monographie, il a prouvé que cette classe de variétés a une courbure nulle.

Ce travail rend compte des efforts pour introduire une étude de la variété Riemannienne  $M = \mathbb{R}^2$  doté d'une métrique de type diagonal de la forme  $\bar{g}(x^1, x^2) = \text{diag}(g(x^2), 1)$ , où  $g$  est une fonction positive, de Classe  $C^\infty$ , en fonction de la variable  $x^2$  uniquement. Nous avons souligné le rôle de la métrique  $\bar{g}$  dans la détermination des variétés ayant une courbure de section négative, nulle ou positive. Dans ce cadre, nous avons trouvé une large classe de solitons de Ricci á gradient. Enfin, nous avons spécialisé ces résultats pour discuter de quelques études de cas illustratives  $2D$ .

Notre étude étend naturellement certains résultats des professeurs Constantin Udriste et Richard S. Hamilton, inclus dans la monographie et dans l'article de recherche respectivement. Dans la continuité de ce travail, il unifie et développe d'avantage certains résultats suggérant des liens entre la géométrie différentielle et les sciences appliquées.

# Bibliographie

- [1] McInerney Andrew, First Steps in Differential Geometry Riemannian, Contact, Symplectic. Springer ; 2013 edition (July 10, 2013).
- [2] Gabriel Bercu, Mihale Postolache, Classes of gradient Ricci solitons, International journal of Geometric Methods in Modern physics vol 9 No 4 (2011) 783-796, World scientific publishing company.
- [3] Gabriel Bercu, Mihale Postolache, Classification of steady Gradient Ricci solitons on two-manifolds, International journal of Geometric Methods in Modern physics vol 8 No 5 (2012) 1250049 (9 pages), World scientific publishing company.
- [4] Laurent Bessières, conjecture de Poincaré : la preuve de R. hamilton et G. Perelman, Institut Fourier, Université Joseph Fourier 38402 Saint Martin-d'Hères
- [5] A.M. Cherif Géométrie semi-Riemannienne Cours M2 – 2015. Université de Mascara. [http://www.cu-relizane.dz/ETD/images/Cours-TD/cherifi/Cherif PolycopierFinal.pdf](http://www.cu-relizane.dz/ETD/images/Cours-TD/cherifi/Cherif%20PolycopierFinal.pdf).
- [6] Bunnet Chow, Dan Knopf, Mathematical Surveys Monographs volume 110, The Ricci flow : An introduction.
- [7] Bunnet Chow, Sun-chin chu, David Glickenstein, Christien Guenther, James Isemberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, Lei Ni, Mathematical Surveys Monographs volume 135, The Ricci flow : technique and application, Part I : Geometric Aspects.
- [8] Jennifer Cox, The Riemann curvature Tensor, Capstone papers 3.
- [9] M. Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne et l'Analyse Harmonique, Géométrie Différentielle Master M1 et M2, Publications du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane 2017.
- [10] Sandra Gavino Fernandez, The geometry of Lorentzian Ricci solitons, Publicaciones del Departamento de Geometria y topologia, Universidade de Santiago de Compostela 2012.
- [11] Eduardo Garcia-Rio and Demir N. Kupeli, Mathematics and its applications Semi-Riemannian Maps and their applications.
- [12] Richard Hamilton, A compactness property for solutions of the Ricci flow,, American journal of Mathematics, 117, 545-572, 1992.
- [13] S. Kobayashi, K. Nomizu Foundations of differential geometry, Vol. I (Interscience Publishers, New York, 1963).
- [14] Jeffrey M. Lee, Manifolds and Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, Volume 107
- [15] Thierry MASSON, Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions, <http://science.thilucmic.fr/>.
- [16] B.O'Neill Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1983.

- [17] Hans Ringström, A brief introduction to Semi-Riemannian geometry and general relativity. [https://www.kth.se/social/files/5548d4f9f276545b801115d3/May\\_5\\_Semi\\_Riemannian\\_Geometry.pdf](https://www.kth.se/social/files/5548d4f9f276545b801115d3/May_5_Semi_Riemannian_Geometry.pdf).
- [18] P.Topping, Lectures on the Ricci flow, Manuscript Notices.