



N° Attribué par la bibliothèque

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Année univ.: 2019/2020



# Résultats d'existence via une approche variationnelle pour certaines classes d'EDP elliptiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saïda - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

**Habbaz Oussama**<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Dr Safia Benmansour**

Soutenue le 14/09/2020 devant le jury composé de

|                      |                                    |             |
|----------------------|------------------------------------|-------------|
| <b>M. Hamou Dida</b> | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Président   |
| <b>S. Benmansour</b> | ESM - Tlemcen                      | Encadreur   |
| <b>F.Z. Mostefai</b> | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |
| <b>F. Dib</b>        | ESSA - Tlemcen                     | Examinateur |

---

1. e-mail : habbazoussama61@gmail.com

## **Remerciements**

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement ma directrice de recherche Dr. Safia Benmasour d'avoir accepté de m'encadrer afin de réaliser ce travail de recherche, de me guider par ses précieux conseils, et surtout d'avoir pris patience vis-à-vis de mes défauts méthodologiques.

Par la même occasion, je remercie du fond du cœur les membres du jury d'avoir accepté de lire et d'évaluer ce modeste travail.

Je n'oublierai, par devoir, mes enseignants de m'avoir appris tant de choses, afin d'être ce que je suis.

Je remerci tous ceux qui m'ont aidé afin que ce mémoire voie le jour.

Merci à Tous.

## **Dédicaces**

Ce travail est dédié :

A mes chers parents, mon frère et mes sœurs qui m'ont donné un énorme soutien.

A ma femme et surtout mon cher fils Anes.

A tous mes amis.

A ceux qui m'aiment.

# Table des Matières

|                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Notations</b>                                                               | <b>3</b>  |
| <b>Introduction</b>                                                            | <b>5</b>  |
| <b>1 Préliminaires:</b>                                                        | <b>10</b> |
| 1.1 Rappels sur les équations aux dérivées partielles elliptiques . . . . .    | 10        |
| 1.2 Point critique . . . . .                                                   | 11        |
| 1.3 La condition de Palais-Smale . . . . .                                     | 11        |
| 1.4 Rappels sur quelques espaces fonctionnels . . . . .                        | 12        |
| 1.5 Espaces de Sobolev . . . . .                                               | 13        |
| 1.5.1 Espaces de Sobolev d'ordre "1" . . . . .                                 | 14        |
| 1.5.2 Espaces de Sobolev d'ordre "m" . . . . .                                 | 15        |
| 1.6 Injections de Sobolev . . . . .                                            | 15        |
| 1.7 Principe variationnel d'Ekeland . . . . .                                  | 17        |
| 1.8 Théorème du Col (Mountain Pass Theorem) . . . . .                          | 17        |
| <b>2 Existence des solutions pour un problème elliptique sous critique</b>     | <b>19</b> |
| 2.1 Formulation variationnelle : . . . . .                                     | 19        |
| 2.2 Conditions géométriques: . . . . .                                         | 20        |
| 2.3 Condition de Palais-Smale globale . . . . .                                | 22        |
| <b>3 Existence des solutions pour des problèmes elliptiques sous critiques</b> |           |

|                                            |           |
|--------------------------------------------|-----------|
| <b>non homogènes du type Kirchhoff</b>     | <b>26</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .                 | 26        |
| 3.2 Résultats préliminaires . . . . .      | 29        |
| 3.3 Preuve du théorème principal . . . . . | 33        |

--

# Notations

- $\mathbb{R}^N$ : L'espace Euclidien de dimension  $N$ .
- Si  $x, y \in \mathbb{R}^N$  alors  $x.y$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^N$ , c-à-d:  
 $x = (x_1, \dots, x_N)$  et  $y = (y_1, \dots, y_N)$  alors  $x.y = \sum_{i=1}^N x_i.y_i$ .
- Si  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $|x| = \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{1/2}$ .
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$  est un multi-indice.
- $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$ .
- $\delta_a$  la masse de Dirac au point  $a$ .
- $\delta_\infty$  la masse de Dirac à l'infini.
- $X$  un espace métrique.
- $u_n \rightharpoonup u$  faiblement dans  $V$  (où  $V$  est un espace de Banach).
- $u_n \rightarrow u$  fortement dans  $V$ .
- $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ .
- $\partial\Omega$  le bord de  $\Omega$ .
- $B(x, r)$  est la boule dans  $\mathbb{R}^N$  de centre  $x$  et de rayon  $r$  notée  $B_x^r$ .
- $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)^t$  est le gradient de la fonction  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .

- $\Delta u$  est le laplacien de la fonction  $u$ :  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , c-à-d :  $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$ .
- $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^p \nabla u)$  est le p-laplacien.
- $C_0^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ .
- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  complétion de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  par rapport à la norme  $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ .
- $H_0^1(\Omega)$  est la fermeture de l'espace  $C_0^\infty(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .
- $H^{-1}$  est le dual topologique de  $H_0^1(\Omega)$ .
- $H_\mu$  est la fermeture de l'espace  $C_0^\infty(\Omega)$  par rapport à la norme 
$$\|u\| := \left( \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \mu |x|^{-2} u^2) dx \right)^{1/2}.$$
- $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$  est l'exposant critique de Hardy-Sobolev avec  $0 \leq s < 2$ .
- $2^*(0) = 2^*$  est l'exposant critique de Sobolev.
- $\bar{\mu} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$  est la meilleure constante de Hardy.
- On note les normes de  $L^s(\Omega)$ , ( $1 \leq s < \infty$ ) et  $H^{-1}$  par  $\|\cdot\|_s$  et  $\|\cdot\|_-$ .
- $o_n(1)$  est toute quantité qui tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.
- $\mathcal{O}(\varepsilon^t)$  est toute quantité telle que  $|\mathcal{O}(\varepsilon^t)|/\varepsilon^t < C$ ,  $C > 0$  constante.
- $C([0, 1], V)$  est l'espace des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $V$ .
- $C^k([0, 1], V)$  est l'espace des fonctions de classe  $C^k$  de  $[0, 1]$  dans  $V$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

# Introduction

Avant de présenter le travail qui a été réalisé à l’occasion du mémoire de master 2, nous allons faire une introduction générale, afin de mettre en lumière le caractère général de notre sujet.

Les équations aux dérivées partielles “EDP en abrégé” correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique par exemple en mécanique des fluides: équations de Navier-Stokes, en électromagnétisme: équations de Maxwell et en mécanique quantique: équation de Schrödinger... etc. D’une manière générale, la modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution des équations aux dérivées partielles.

En fait, une EDP n’est autre qu’une relation entre une fonction de plusieurs variables et ses dérivées qui s’écrit sous la forme suivante:

$$F(x, u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}) = 0$$

où  $m$  est le degré de l’équation.

Soit la fonction à deux variables  $u(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont des variables indépendantes, une équation aux dérivées partielles linéaire d’ordre 2 à coefficients constants s’écrit :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = g(x, y),$$

où  $a, b, c, d, e$  et  $f$  sont des constantes et  $g$  est une fonction à deux variables.

On peut les classer en trois grandes familles :

Si  $b^2 - ac > 0$  alors l’équation est de type “hyperbolique”.

Si  $b^2 - ac = 0$  alors l'équation est de type "parabolique".

Si  $b^2 - ac < 0$  alors l'équation est de type "elleptique".

On peut illustrer ces trois catégories par les exemples physiques suivants :

1) Equation hyperbolique: elle caractérise la propagation des ondes dans un milieu continu (unidimensionnel) et obéit à l'équation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

où  $u(x, t)$  peut désigner une variable scalaire comme la densité locale  $\rho(x, t)$  ou une variable vectorielle comme la vitesse locale  $v(x, t)$ .

2) Equation parabolique: elle exprime la diffusion de particules dans un milieu continu et obéit à l'équation suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

où  $D$  est la constante de diffusion et  $\rho(x, t)$  la densité locale instantanée des particules diffusantes.

3) Equation elliptique : en dimensions deux, l'exemple le plus connu est le potentiel induit par une densité de charges électriques.

Les EDP sont donc des outils mathématiques dont l'importance prime par le fait de modéliser des phénomènes naturels, pour cette raison, elles demeurent fortement sollicitées dans différents contextes tels que : physique, mécanique, chimie, biologie, sociologie,...

Dans les dernières années, beaucoup d'attention a été accordée aux EDP, à plus forte raison les problèmes elliptiques dont la résolutions de quelques classes fait l'objet principal de ce mémoire. Nous y abordons aussi l'étude de l'existence de solutions pour une classe de problèmes elliptiques non locaux, dont l'intérêt découle du fait qu'ils interviennent dans la modélisation mathématique de plusieurs phénomènes naturels physiques et biologiques, et dans ce sillage, nous citons les problèmes de type Kirchhoff, qui se caractérisent par la présence d'une intégrale sur le domaine en entier qui fait que l'équation

ne soit pas une identité ponctuelle d'où son caractère non local.

La méthode sollicitée dans ce mémoire, pour la résolution de ces problèmes, est l'approche variationnelle. Plus précisément, en faisant intervenir ces méthodes, nous allons prouver l'existence des solutions pour quelques problèmes elliptiques mais pas n'importe lesquelles, plutôt ceux possédant une structure variationnelle permettant leur résolution dans cette oblique, précisons que ce n'est tous les problèmes elliptiques qui détiennent cette caractéristique..

Ce mémoire comprend trois chapitres à savoir

Le premier est préliminaire et contient des notions et outils de base dont on fera fréquemment usage par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons l'existence des solutions pour un problème elliptique sous critique faisant usage du théorème de Passe-Montagne avec condition de Palais-Smale.

Nous considérons le problème suivant

$$(p_2) \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2} u, \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p < \frac{2N}{N-2}$ .

Le résultat principal de cette partie est donné par le théorème suivant :

**Théorème 0.1** *Le problème  $(p_2)$  admet une solution non triviale pour  $2 < p < \frac{2N}{N-2}$ .*

Pour prouver le résultat précédent, nous avons eu recours à la formulation variationnelle qui consiste à chercher une solution au sens faible  $u$ , c'est-à-dire :

$$\int \nabla_u \nabla_\varphi = \int |u|^{p-2} u \varphi \, dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

et  $u$  un point critique de la fonctionnelle d'énergie qui correspond au problème  $(p_2)$  et qui est donnée par l'expression suivante

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} \int |u|^p dx$$

pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Pour montrer l'existence de la solution, nous avons utilisé le théorème de Passe-Montagne.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'existence des solutions pour le problème elliptique non local du type Kirchhoff suivant

$$\begin{cases} - (a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b) \Delta u = |u|^{p-2} u + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $\Omega$  est un domaine borné et régulier de  $\mathbb{R}^3$ ,  $4 < p < 6$ ,  $a$  et  $b$  sont des constantes positives,  $\lambda$  un paramètre positif et  $f$  appartient à  $H^{-1}(\Omega)$ .

Avant de donner notre résultat principal, nous avons besoin de préciser les valeurs suivantes.

Soient

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{ab(p-4)}}{2(p-1)\|f\|} \left[ \frac{2S_p^{\frac{p}{2}}\sqrt{3ab}}{(p-1)} \right]^{\frac{2}{p-2}}. \\ \lambda_2 &= \frac{b(p-2)}{2(p-1)\|f\|_-} \left[ \frac{bS_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right]^{p-1}. \end{aligned}$$

et  $\lambda_* = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Et notre résultat principal est illustré par le théorème suivant.

**Théorème 0.2** *Pour tout  $0 < \lambda < \lambda_*$ , le problème (2.1) admet au moins deux solutions positives.*

Rappelons que l'intérêt majeur de cette partie réside dans la multiplicité qui n'est pas du tout évidente à cause de la présence du terme non local. Précisons que pour avoir la multiplicité, nous avons utilisé la fameuse décomposition de la variété de Nehari,

cette dernière nous a permis de contourner le problème majeur heurté lors de l'utilisation du principe variationnel d'Ekeland qui exige que la fonctionnelle d'énergie soit bornée inférieurement dans l'espace servant de cadre fonctionnel dans lequel s'effectue la recherche des solutions. En outre, cette décomposition nous permet de conclure la distinction des solutions.

# Chapitre 1

## Préliminaires:

Nous rappelons dans cette partie quelques définitions de base dont on fera usage fréquemment dans les parties suivantes. A savoir la notion des points critiques ainsi que la condition de Palais-Smale. On y trouvera aussi le principe variationnel d'Ekeland et le Lemme du Col (Mountain Pass Theorem). Le chapitre s'achève par des injections de Sobolev des espaces en question, qu'on estime essentielles pour la suite de notre travail.

### 1.1 Rappels sur les équations aux dérivées partielles elliptiques

Les équations de type elliptique interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires c'est-à-dire n'évoluant pas au cours du temps. L'équation de Poisson en est un prototype

$$-\Delta u = f.$$

Dans cette équation, l'inconnue est  $u(x)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$  et  $f$  étant une fonction donnée. Ce type d'équation se retrouve dans des problèmes complexes issus par exemple, de la modélisation des semi-conducteurs.

Nous savons pertinemment que les méthodes variationnelles dépendent de la théorie

des points critiques que nous allons de suite, introduire.

## 1.2 Point critique

Soient  $V$  un espace de Banach,  $J \in C^1(V, \mathbb{R})$  et  $J'(u) : V \longrightarrow V'$ , ici il s'agit des dérivées au sens de Fréchet.

**Définition 1.1** *On dit que  $u \in V$  est un point critique de  $J$  si  $J'(u) = 0$ . Sinon,  $u$  est dit un point régulier.*

*On dit que  $c \in \mathbb{R}$  est une valeur critique de  $J$  s'il existe un point critique  $u$  de  $J$  tel que  $J(u) = c$ . Sinon,  $c$  est dite une valeur régulière.*

La notion du point critique peut être interprétée comme minimum local d'une fonctionnelle, mais en général ceci ne se produit qu'en présence d'une certaine propriété de compacité.

## 1.3 La condition de Palais-Smale

Pour exprimer la compacité des suites minimisantes, ou de façon générale des suites qui convergent vers un point et qu'on espère montrer que c'est un point critique, on a souvent recours à la condition de Palais-Smale (P-S en abrégé).

**Définition 1.2** *Soit  $V$  un espace de Banach et  $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On dit que  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale, si toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $V$  telle que*

$$J(u_n) \text{ est bornée dans } V \quad \text{et} \quad J'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } V'$$

*possède une sous-suite convergente .*

*On dit que  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale au niveau  $c$   $((P - S)_c$  en abrégé) pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , si toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $V$  telle que*

$$J(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } V \quad \text{et} \quad J'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } V'$$

possède une sous-suite convergente .

**Remarque 1.1** [10] Si  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale en  $c \in \mathbb{R}$ , alors une conséquence importante est que l'ensemble:

$$K(c) = \{u \in V : J(u) = c \text{ et } J'(u) = 0\}$$

est compact.

Si  $J$  vérifie  $(P - S)$ , alors  $J$  vérifie  $(P - S)_c$  pour tout  $c \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 1** La fonction  $J(u) = \exp(u)$  définie sur  $\mathbb{R}$  ne vérifie pas la condition de Palais-Smale en 0.

Très souvent dans la pratique, on montre qu'une suite de Palais-Smale est bornée. Ceci nous permet, dans un espace réflexif, d'en extraire une sous suite faiblement convergente que l'on espère converger fortement grâce à une certaine injection compacte.

**Remarque 1.2** Lorsque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  est une suite qui vérifie la condition de Palais-Smale et que  $u_n \longrightarrow u$ , il est souvent facile de montrer que  $J'(u) = 0$ . Si  $u \neq 0$ , on obtient alors un point critique non triviale. C'est souvent plus simple que de montrer que  $u_n \longrightarrow u$ .

## 1.4 Rappels sur quelques espaces fonctionnels

**Définition 1.3** Soit  $(V, \|\cdot\|_V)$  un espace normé, on dit que  $V$  est de "Banach" si pour toute suite de Cauchy  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ , il existe  $a \in V$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \in V$ .

**Exemple 2** Les espaces  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^N$  munis de leurs normes usuelles sont des espaces de Banach.

**Définition 1.4** [1] Soit  $V$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on considère l'injection canonique

$$\begin{aligned} J &: V \longrightarrow V'' \\ x &\rightarrow J(x)(f) = f(x), \end{aligned}$$

$J$  : est linéaire continue ,  $\|J\| = \|x\|$  .

Un espace normé est dit "réflexif" si  $J$  est surjective.

**Proposition 1.1** Un espace de Banach  $V$  est dit "réflexif" si et seulement si tout fermé borné de  $V$  est faiblement compact.

**Définition 1.5** [1] Soit  $V$  un espace normé, on dit que  $V$  est "séparable" s'il existe  $F$  dénombrable tel que  $\overline{F} = V$ .

## 1.5 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels. Ils doivent leur nom au mathématicien Russ "Serguei Lvovitch Sobolev" (1908-1989). Un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois. Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev, ainsi ils constituent un cadre fonctionnel adéquat et sont particulièrement adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'EDP[9].

**Définition 1.6** [3] Soient  $p$  un élément de  $[1, +\infty[$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ; on appelle espace de Lebesgue, l'espace vectoriel des (classes de ) fonctions numériques  $u$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ , qui sont mesurables au sens de Lebesgue et on note  $L^p(\Omega)$ , l'ensemble :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable , } \int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour  $p = +\infty$ , on note

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \sup_{\Omega} \text{ess} |u| < +\infty \right\},$$

que l'on munit de la norme  $\|u\|_\infty = \sup_{\Omega} \text{ess} u$ .

### 1.5.1 Espaces de Sobolev d'ordre "1"

**Définition 1.7** Soient  $p$  un élément de  $[1, +\infty[$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ; on appelle espace de Sobolev d'ordre "1" qu'on note  $W^{1,p}(\Omega)$ , l'ensemble:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \text{pour tout } 1 \leq i \leq N, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Si  $p = 2$ , on pose  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ . Ce dernier est dit aussi espace de Hilbert d'ordre "1" car sa norme provient d'un produit scalaire.  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  est la dérivée partielle d'ordre "1" de  $u$  au sens des distributions.

**Théorème 1.1** Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ , on a les propriétés suivantes :

(1) L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme

$$u \longrightarrow \|u\| = \begin{cases} 1 \leq p < +\infty, & \left( \|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ p = +\infty, & \max \left( \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, i = \overline{1, N} \right). \end{cases}$$

(2)  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) \longrightarrow (u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx.$$

(3)  $W^{1,p}(\Omega)$  est "réflexif" pour tout  $1 < p < +\infty$ .

(4)  $W^{1,p}(\Omega)$  est "séparable" pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .

### 1.5.2 Espaces de Sobolev d'ordre "m"

**Définition 1.8** [3] Soient  $p$  un élément de  $[1, +\infty[$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  et  $m$  un entier tel que  $m \geq 2$ ; on appelle espace de Sobolev d'ordre "m" qu'on note  $W^{m,p}(\Omega)$ , l'ensemble:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega) \mid 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  est un multi-indice de longueur  $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$ . Ou encore

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \mid \text{pour tout } i, 1 \leq i \leq N, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \right\}.$$

Si  $p = 2$ , on pose  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ .

#### Propriétés

(1) L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$u \longrightarrow \|u\| = \begin{cases} 1 \leq p < +\infty, & \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ p = +\infty, & \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{cases}$$

(2)  $W^{m,p}(\Omega)$  est "réflexif" pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .

(3)  $W^{m,p}(\Omega)$  est "séparable" pour tout  $1 < p < +\infty$ .

## 1.6 Injections de Sobolev

**Définition 1.9**  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$

$$si \begin{cases} W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \\ et J : u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ est continue.} \end{cases}$$

**Théorème 1.2** [3] (Sobolev-Gaafard-Niremborg)

Soit  $p \in [1, N[$ , alors  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ , où  $p^*$  est le conjugué de  $p$  calculé par la formule suivante

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

De plus, il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

**Remarque 1.3**  $p^* \in ]p, +\infty[$ .

**Corollaire 1.1** Soit  $1 \leq p < N$ , alors  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $q \in [p, p^*]$ . De plus l'injection est continue.

**Théorème 1.3**  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ , pour tout  $q \in [2, +\infty[$ .

**Lemme 1.1** Si  $\Omega$  est un ouvert borné et  $1 \leq q \leq p < +\infty$ , alors  $L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  (injection continue).

**Lemme 1.2** Supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un domaine ouvert borné,  $2^* = \frac{2N}{N-2}$  et

$1 \leq p \leq 2^*$ . Alors il existe une constante positive  $\tilde{C}$  telle que

$$\left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \tilde{C} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } u \in C_0^\infty(\Omega).$$

L'injection  $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ , est compacte si  $p < 2^*$ .

**Proposition 1.2** (Inégalité de Cauchy-schwarz)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^2(\Omega)$ , on a

$$\|f \cdot g\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

## 1.7 Principe variationnel d'Ekeland

Le principe variationnel d'Ekeland est un théorème d'analyse mathématique découvert par Ival Ekeland, il garantit la possibilité de trouver des suites minimisantes sous certaines conditions sur la fonctionnelle.

**Théorème 1.4** [6] Soient  $(V, d)$  un espace métrique complet et  $J : V \rightarrow [0, +\infty[$  une fonctionnelle bornée inférieurement  $c$ -à- $d$

$$c = \inf_V J > -\infty.$$

$\varepsilon$  un réel strictement positif, et  $x$  un point de  $V$  tel que

$$J(x) \leq \varepsilon + \inf(J(V)).$$

Alors, pour tout  $\delta > 0$ , il existe un point  $y$  de  $V$  tel que

- 1)  $J(y) \leq J(x)$ .
- 2)  $d(x, y) \leq \delta$ .
- 3) pour tout  $z \in V \setminus \{y\}$   $J(z) > J(y) - \frac{\varepsilon}{\delta} d(y, z)$ .

**Corollaire 1.2** [6] Si  $V$  est un espace de Banach et  $J \in C^1(V, \mathbb{R})$  est bornée inférieurement, alors il existe une suite minimisante  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $J$  dans  $V$  telle que

$$J(u_n) \rightarrow \inf_V J \quad \text{et} \quad J'(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{dans } V' \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

## 1.8 Théorème du Col (Mountain Pass Theorem)

La théorie des points critiques a subi une impulsion nouvelle en 1973 avec la parution d'un article d'Ambrosetti et Rabinowitz dans lequel figurait le célèbre lemme du Col qui est considéré comme un outil important et puissant pour montrer l'existence d'un point critique d'une fonctionnelle.

**Lemme 1.3** [5] Soient  $V$  un espace de Banach réel et  $J \in C^1(V, \mathbb{R})$  une fonctionnelle satisfaisant la condition de Palais-Smale. Supposons que

(1) Il existe des constantes  $p, \alpha > 0$  telles que  $J(u) \geq \alpha$  pour tout  $u$  telles que  $\|u\|_V = p$ .

(2) Il existe  $\sigma \in V$ , avec  $\|\sigma\|_V > p$  telles que  $J(\sigma) \leq J(0)$ .

Soit

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], V) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \sigma\}.$$

On a

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)) \geq \alpha$$

est une valeur critique de  $J$ .

# Chapitre 2

## Existence des solutions pour un problème elliptique sous critique

Dans ce chapitre, nous étudierons l'existence des solutions pour un problème elliptique sous critique moyennant le Théorème de Passe-Montagne avec condition de Palais-Smale. Nous constaterons que cette partie va illustrer les difficultés qui se présenteront à nous lors de l'étude du cas non local qui va suivre immédiatement. En effet, nous nous rendrons compte que la convergence forte s'obtient aisément lorsque le problème est sous critique.

Nous considérons le problème suivant :

$$(p_2) \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2} u, \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p < \frac{2N}{N-2}$ .

Notre résultat est donné par le théorème suivant :

**Théorème 2.1** *Le problème  $(p_2)$  admet une solution non triviale pour  $2 < p < \frac{2N}{N-2}$ .*

### 2.1 Formulation variationnelle :

On cherche une solution au sens faible  $u$ , c'est-à-dire :

$$\int \nabla_u \nabla_\varphi = \int |u|^{p-2} u \varphi \, dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$u$  est un point critique de la fonctionnelle d'énergie associée au problème  $(p_2)$  suivant

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} \int |u|^p \, dx$$

pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$

## 2.2 Conditions géométriques:

On va montrer que les conditions géométriques du Théorème de Passé-Montagne sont satisfaites.

**Lemme 2.1** *Il existe  $\alpha, \rho > 0$  et  $v \in H_0^1(\Omega)$  tels que*

$$i) \, I(u) \geq \alpha \quad \text{si} \quad \|u\| = \rho$$

$$ii) \, \|v\| > \rho \quad \text{et} \quad I(v) < \alpha$$

**Preuve:** i) Faisant intervenir l'inégalité de Sobolev on a

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} \int |u|^p \\ &\geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{1}{p} c_1 \|u\|^p \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{c_1}{p} \|u\|^p. \end{aligned}$$

puisque  $p > 2$  donc il existe  $\rho > 0$  assez petit et  $\alpha > 0$  tels que

$$I(u) \geq \alpha \quad \|u\| = \rho$$

ii) Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\|v\| = 1$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$I(tv) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{t^p}{p} \int |v|^p.$$

En faisant tendre  $t$  vers  $-\infty$  ; alors

$$I(tv) \rightarrow -\infty ; \text{ car } p > 2$$

Donc il existe  $t_0$  assez grand ( $t_0 > \rho$ ) tel que  $I(t_0v) < 0$  et pour  $\tilde{u} = t_0v$  la condition (ii) est vérifiée.

Par le lemme 2.1 et comme  $I(0) = 0$  alors par le Théorème de Passe-Montagne on a l'existence d'une suite  $(u_n)$  telle que

$$I(u_n) \rightarrow c$$

et

$$\langle I(u_n, u_n) \rangle \rightarrow 0$$

où  $c$  est défini par

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \Gamma} I(u)$$

et

$$\Gamma = \{ \gamma \in (C([0, 1]); H_0^1(\Omega)), \gamma(0) = 0; \gamma(1) = \tilde{u} \}$$

■

Maintenant, on va montrer que  $u_n$  converge fortement dans  $H_0^1(\Omega)$  vers une fonction  $u_0$  non triviale. A cet effet, nous introduisons la condition de Palais-Smale.

## 2.3 Condition de Palais-Smale globale

**Lemme 2.2** *Soit  $(u_n)$  une suite de Palais-Smale de niveau  $c$  alors on peut extraire une sous suite qui converge fortement dans  $H_0^1(\Omega)$  vers une fonction non nulle pour tout  $c \in \mathbb{R}$ .*

**Preuve:** On a

$$C + o(1) = I(u_n) = \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{1}{p} \int |u_n|^p dx \dots (1)$$

$$o(1) = \|u_n\|^2 - \int |u_n|^p dx \dots (2)$$

Alors

$$\begin{aligned} C + o(1) &= I(u_n) - \frac{1}{p} \langle I'(u_n), u_n \rangle \\ &\geq \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right] \|u_n\|^2 \end{aligned}$$

comme  $p > 2$ , on déduit que  $(u_n)$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Quitte à extraire une sous suite, on obtient:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \\ u_n &\rightarrow u_0 \text{ dans } L_0^1(\Omega) \text{ (car } p < 2^* = \frac{2N}{N-2}) \\ u_n &\rightarrow u_0 \text{ p.p dans } \Omega \end{aligned}$$

On a,

$$\int \nabla u_n \nabla \varphi - \int |u_n|^{p-2} u_n \cdot \varphi \rightarrow \int \nabla u_0 \nabla \varphi - \int |u_0|^{p-2} u_0 \varphi$$

$$\langle I'(u_0), \varphi \rangle = 0$$

$$\langle I'(u_0), u_0 \rangle \dots (*)$$

pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . On pose

$$v_n = u_n - u_0$$

On en déduit que

$$v_n \rightharpoonup 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

$$v_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^p(\Omega)$$

$$v_n \rightarrow 0 \text{ p.p dans } \Omega$$

En vertu du lemme de Brezis-Leib [5], on aura

$$\int |u_n|^p dx = \int |u_0|^p dx + \int |v_n|^p dx + o_n(1) \dots (3)$$

Et comme  $v_n \rightarrow 0$  dans  $H_0^1(\Omega)$  alors

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \int |\nabla(v_n + u_0)|^2 dx + o_n(1). \\ &= \int |\nabla v_n|^2 dx + \int |\nabla u_0|^2 dx + 2 \int \nabla v_n \nabla u_0 dx \\ &= \|v_n\|^2 + \|u_0\|^2 + o_n(1) \dots (4) \end{aligned}$$

En combinant ce qui précède, on obtient

$$o_n(1) = [\|v_n\|^2 + \|u_0\|^2] - \int |u_0|^p + \int |v_n|^p dx$$

$$= [\|v_n\|^2 - \int |v_n|^p] + [\|u_0\|^2 - \int |u_0|^p dx]$$

$$o_n(1) = \|v_n\|^2 - \int |v_n|^p$$

On a  $\int |v_n|^p \rightarrow 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^2 = 0$  donc

$$v_n \rightarrow 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

D'autre part de (1) on a

$$c + o_n(1) = \frac{1}{2}[\|v_n\|^2 + \|u_0\|^2] - \frac{1}{p} \int |v_n + u_0|^p dx.$$

$$= I(u_0) + I(v_n)$$

Passant à la limite on obtient :

$$c = I(u_0) = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 - \frac{1}{p} \int |u_0|^p dx \dots (5)$$

Posons  $\|u_0\|^2 - \int |u_0|^p dx \dots (*)$  Multipliant l'équation (5) par (2) et retranchant (\*) nous obtenons

$$2c = \frac{p-2}{p} \int |u_0|^p dx$$

d'où  $u_0 \neq 0$ , passant à la limite on conclut que

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } u_0 \neq 0. \blacksquare$$

Par les lemmes précédents, on a la condition de Palais-Smale globale et les conditions géométriques du Théorème de Passe-Montagne qui sont vérifiées. Donc on obtient un point critique  $u_0$  de  $I$  satisfaisant  $I(u) = I(|u|)$ , ie  $u \geq 0$ .

# Chapitre 3

## Existence des solutions pour des problèmes elliptiques sous critiques non homogènes du type Kirchhoff

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence et surtout la multiplicité des solutions pour le problème elliptique du type Kirchhoff suivant

$$\begin{cases} - (a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b) \Delta u = |u|^{p-2} u + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $\Omega$  est un domaine borné et régulier de  $\mathbb{R}^3$ ,  $4 < p < 6$ ,  $a$  et  $b$  sont des constantes positives,  $\lambda$  un paramètre positif et  $f$  appartient à  $H^{-1}(\Omega)$ .

A l'origine, l'équation de Kirchhoff en dimension une fut introduite en 1883 par Kirchhoff lui même [4].

Le problème (2.1) représente l'homologue stationnaire de l'équation hyperbolique du type Kirchhoff

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u) \quad (2.2)$$

qui donne la description mathématique des vibrations d'une corde élastique tendue. Pour plus d'informations, on peut consulter [11], [7]. On utilise la méthode variationnelle pour montrer que le problème stationnaire (2.1) correspondant à (2.2) possède des solutions positives dans le cas sous critique. Avant de donner notre résultat principal, mettons en place ce qui suit.

Soient

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{ab(p-4)}}{2(p-1)\|f\|} \left[ \frac{2S_p^{\frac{p}{2}}\sqrt{3ab}}{(p-1)} \right]^{\frac{2}{p-2}}. \\ \lambda_2 &= \frac{b(p-2)}{2(p-1)\|f\|_-} \left[ \frac{bS_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right]^{p-1}. \end{aligned}$$

et  $\lambda_* = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Nous sommes en mesure de donner notre résultat.

**Théorème 3.1** [12] *Pour tout  $0 < \lambda < \lambda_*$ , le problème (2.1) admet au moins deux solutions positives.*

On définit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (2.1) par

$$I_{\lambda}(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{p} |u|_p^p - \lambda \int f u^+, \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Où  $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$  avec  $M(t) = at + b$  ( $M(0) = 0$ ).

Il est clair que  $I_{\lambda}$  soit bien définie et de classe  $C^1$  sur  $H_0^1(\Omega)$  et ses points critiques sont des solutions faibles du problème (2.1), ceci veut dire qu'un point  $u \in H_0^1(\Omega)$  est dit

solution faible du problème (2.1) s'il satisfait

$$(a \|u\|^2 + b) \int \nabla u \nabla v - \int |u|^{p-2} uv - \lambda \int f v = 0, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Faisant intervenir l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$|u|_p^p \leq S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p, \text{ avec } S_p = \inf \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2}$$

on aura alors

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{a}{4} \|u\|^4 + \frac{b}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p - \lambda \int f u^+ \\ &\geq \frac{a}{4} \|u\|^4 + \frac{b}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p - \lambda \|f\|_- \|u\|. \end{aligned}$$

Constatons que pour  $p > 4$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_\lambda(tu) = -\infty$ ,  $I_\lambda$  n'est donc pas bornée inférieurement sur  $H_0^1(\Omega)$ . Afin de contourner cela, on introduit la variété de Nehari définie par

$$N_\lambda := \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \langle I'_\lambda(u), u \rangle = 0\}.$$

En fait, l'ensemble  $N_\lambda$  est lié au comportement de l'application  $h_u(t) := I_\lambda(tu)$  pour  $t \in \mathbb{R}^*$  et  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ . Ces applications sont communément dites application "fibering" et ce sont Dràbek et Pohozaev qui en furent les instigateurs. Pour plus de détails, nous prions le lecteur de consulter [5,2,9].

On a

$$h_u''(t) = 3at^2 \|u\|^4 + b \|u\|^2 - (p-1)t^{p-2} |u|_p^p.$$

Ceci nous incitera à décomposer  $N_\lambda$  en trois sous-ensembles disjoints

$$\begin{aligned} N_\lambda^+ &:= \{u \in N_\lambda : h_u''(1) > 0\}, \\ N_\lambda^0 &:= \{u \in N_\lambda : h_u''(1) = 0\}, \end{aligned}$$

et

$$N_{\lambda}^{-} := \{u \in N_{\lambda} : h_u''(1) < 0\},$$

qui correspondent aux minima locaux, points d'inflexion et maxima locaux de  $I_{\lambda}$  respectivement.

## 3.2 Résultats préliminaires

Commençons par donner le résultat suivant, dont la preuve est similaire à celle donnée dans [4].

**Lemme 3.1** *Supposons que  $u_0$  soit un minimiseur local de  $I_{\lambda}$  dans  $N_{\lambda}$  et que  $u_0 \notin N_{\lambda}^0$ . Alors  $I'_{\lambda}(u_0) = 0$  dans  $H_0^{-1}(\Omega)$ .*

Les lemmes suivants interviendront dans la démonstration de notre résultat principal.

**Lemme 3.2** *Pour tout  $0 < \lambda < \lambda_*$ , on a  $N_{\lambda}^0 = \emptyset$ .*

**Preuve:** Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe  $u \in N_{\lambda}^0$  i.e

$$3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 = (p-1) |u|_p^p.$$

On a  $u$  vérifie

$$(a \|u\|^2 + b) \int \nabla u \nabla v - \int |u|^{p-2} uv - \lambda \int f v = 0 \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Donc pour  $u = v$ , on obtient

$$\begin{aligned} (a \|u\|^2 + b) \int (\nabla u)^2 - \int |u|^{p-2} u^2 - \lambda \int f u^+ &= 0 \\ a \|u\|^4 + b \|u\|^2 - \int |u|^p - \lambda \int f u^+ &= 0 \\ a \|u\|^4 + b \|u\|^2 - |u|_p^p - \lambda \int f u^+ &= 0. \end{aligned}$$

On sait que

$$\left( \sqrt{3a} \|u\|^2 - \sqrt{b} \|u\| \right)^2 \geq 0.$$

De ceci et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3ab} \|u\|^3 &\leq 3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 \\ &\leq (p-1) |u|_p^p \\ &\leq (p-1) S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2\sqrt{ab(p-4)(p-2)} \|u\|^3 &\leq a(p-4) \|u\|^4 + b(p-2) \|u\|^2 \\ &\leq \lambda(p-1) \|f\|_- \|u\| \end{aligned}$$

il en resulte

$$\begin{aligned} \left( \frac{2S_p^{\frac{p}{2}} \sqrt{3ab}}{(p-1)} \right)^{\frac{1}{(p-3)}} &\leq \|u\| \leq \left( \frac{\lambda(p-1) \|f\|_-}{2\sqrt{ab(p-4)(p-2)}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{et} \quad \left( \frac{bS_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right)^{\frac{1}{(p-2)}} &\leq \|u\| \leq \left( \frac{\lambda(p-1) \|f\|_-}{b(p-2)} \right). \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que  $0 < \lambda < \lambda_*$ . ■

**Lemme 3.3** *Pour tout  $0 < \lambda < \lambda_*$  et  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ , il existe un unique  $t^+ = t^+(u) \geq$*

$t_{\max}^u$  tel que  $t^+u \in N_\lambda^-$ , et  $I_\lambda(t^+u) = \max_{t \geq t_{\max}^u} I_\lambda(tu)$ .

De plus, si  $\int f u^+ > 0$ , il existe une unique  $t^- = t^-(u) \leq t_{\max}^u$  tel que  $t^-u \in N_\lambda^+$  et  $I_\lambda(t^-u) = \min_{0 \leq t \leq t_{\max}^u} I_\lambda(tu)$ .

**Preuve:** Posons  $h'_u(t) = H_u(t) - \lambda \int f u^+$  où  $H_u(t) = a \|u\|^4 t^3 + b \|u\|^2 t - |u|_p^p t^{p-1}$ . On a  $H_u(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_u(t) = -\infty$ , alors  $H_u(t)$  atteint son maximum au point  $t_{\max}^u$ , elle est croissante sur  $]0, t_{\max}^u[$  et décroissante sur  $]t_{\max}^u, \infty[$ . Et le résultat suivra immédiatement.

■

**Lemme 3.4** *La fonctionnelle  $I_\lambda$  est coercive et bornée inférieurement dans  $N_\lambda$ .*

**Preuve:** On sait que pour  $u \in N_\lambda$ , on a

$$a \|u\|^4 + b \|u\|^2 = |u|_p^p + \lambda \int f u^+.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{a}{4} \|u\|^4 + \frac{b}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p - \lambda \int f u^+ \\ &= \frac{a}{4} \|u\|^4 + \frac{b}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} (a \|u\|^4 + b \|u\|^2) - \lambda \frac{(p-1)}{p} \int f u^+ \\ &\geq \frac{1}{2p} \|u\|^2 \left[ \frac{a(p-4)}{2} \|u\|^2 + b(p-2) \right] - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \|u\| \\ &\geq \frac{b(p-2)}{2p} \|u\|^2 - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \|u\|. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $I_\lambda$  est coercive et bornée inférieurement sur  $N_\lambda$ . ■

**Lemme 3.5** *Pour tout  $0 < \lambda < \lambda_*$  et  $u \in N_\lambda$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et une fonction différentiable  $t : B_0^\varepsilon \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$  tels que  $t(0) = 1$ ,  $t(v)(u - v) \in N_\lambda$  pour  $\|v\| < \varepsilon$  et*

$$\langle t'(0), v \rangle = \frac{2(2a \|u\|^2 + b) \int \nabla u \nabla v - pb \int |u|^{p-2} uv - \int f v}{3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 - (p-1) |u|_p^p}.$$

**Preuve:** Définissons l'application  $F : \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , par :

$$F(s, w) = as^3 \|u - w\|^4 + bs \|u - w\|^2 - s^{(p-1)} |u - w|_p^p - \int f(u - w)^+.$$

Puisque  $F(1, 0) = 0$  et

$$\frac{\partial F}{\partial s}(1, 0) = 3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 - (p-1) |u|_p^p \neq 0$$

en appliquant le théorème des fonctions implicites au point  $(1, 0)$ , on obtient le résultat de ce lemme. ■

**Lemme 3.6** *Pour tout  $0 < \lambda < \lambda_*$ , il existe deux suites minimisantes  $(u_n) \subset N_\lambda^+$  et  $(v_n) \subset N_\lambda^-$  telles que*

- (i)  $I_\lambda(u_n) < c_0 + \frac{1}{n}$  et  $I_\lambda(w_1) \geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{n} \|w_1 - u_n\|$  pour tout  $w_1 \in N_\lambda^+$ .
- (ii)  $I_\lambda(v_n) < c_1 + \frac{1}{n}$  et  $I_\lambda(w_2) \geq I_\lambda(v_n) - \frac{1}{n} \|w_2 - v_n\|$  pour tout  $w_2 \in N_\lambda^-$ .

**Preuve:** Il est clair que  $I_\lambda$  est bornée inférieurement dans  $N_\lambda$ , alors en appliquant le principe variationnel d'Ekeland, on obtient des suites minimisantes  $(u_n) \subset N_\lambda^+$  et  $(v_n) \subset N_\lambda^-$  qui vérifient (i) et (ii) respectivement. ■

Avant de passer à la démonstration de notre théorème, donnons à présent un résultat de compacité inhérent à la condition de Palais-Smale. A cet effet, rappelons que  $(u_n)$  est dite suite de Palais-Smale pour  $I_\lambda$  si

$$I_\lambda(u_n) \text{ est bornée dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

**Lemme 3.7** *Toute suite de Palais-Smale de  $I_\lambda$  bornée dans  $H_0^1(\Omega)$  possède une sous suite fortement convergente.*

**Preuve:** Soit  $(u_n)$  une suite de Palais-Smale de  $I_\lambda$  bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ , et comme  $H_0^1(\Omega)$  est un espace réflexif alors quitte à en extraire une sous suite qu'on notera encore  $(u_n)$ ,

il existe  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega)$$

et par l'injection compacte de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^s(\Omega)$

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ fortement dans } L^s(\Omega) \text{ pour tout } 4 < s < 6,$$

$$u_n \rightarrow u \text{ p.p sur } \Omega.$$

Ce qui implique que

$$\int (\lambda f + |u_n|^{p-2} u_n)(u_n - u_0) \rightarrow 0$$

et puisque

$$I'_\lambda(u_n)(u_n - u_0) \rightarrow 0$$

on conclut alors que

$$(a \|u_n\|^2 + b) \int \nabla u_n \nabla (u_n - u_0) \rightarrow 0$$

d'où  $u_n \rightarrow u_0$  fortement dans  $H_0^1(\Omega)$ . ■

### 3.3 Preuve du théorème principal

Définissons  $c_\lambda^+ = \inf_{u \in N_\lambda^+} I_\lambda(u)$  et  $c_\lambda^- = \inf_{v \in N_\lambda^-} I_\lambda(v)$ . On a les résultats suivants.

**Proposition 3.1** *Pour tout  $0 < \lambda < \lambda_*$ , on a*

$$(i) \ c_\lambda^+ < 0,$$

$$(ii) \ c_\lambda^- > c_\lambda^+ > 0.$$

En particulier  $c_\lambda^+ = \inf_{v \in N_\lambda} I_\lambda(v)$ .

**Preuve:** (i) Soit  $u \in N_\lambda^+$  on a

$$3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 - (p-1) |u|_p^p > 0$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} \lambda(p-1) \int f u^+ &> a(p-4) \|u\|^4 + b(p-2) \|u\|^2 \\ &\geq b(p-2) \|u\|^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{a}{4} \|u\|^4 + \frac{b}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p - \lambda \int f u^+ \\ &= \frac{a}{4} \|u\|^4 + \frac{b}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} (a \|u\|^4 + b \|u\|^2) - \lambda \frac{(p-1)}{p} \int f u^+ \\ &\leq \frac{b(p-2)}{2p} \|u\|^2 - \lambda \frac{(p-1)}{p} \int f u^+ \\ &\leq -\frac{b(p-2)}{2p} \|u\|^2 < 0. \end{aligned}$$

on déduit que  $c_\lambda^+ < 0$ . ■

(ii) Soit  $u \in N_\lambda^-$ . La preuve de ce point s'établira en deux parties.

Partie 1: Pour  $\lambda_* = \lambda_2$ , on a

$$\begin{aligned} b \|u\|^2 &\leq 3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 \\ &< (p-1) |u|_p^p \\ &< (p-1) S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} b &< (p-1)S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^{p-2} \\ \|u\| &> \left( \frac{bS_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right)^{\frac{1}{(p-2)}} \quad \text{pour tout } u \in N_\lambda^-. \end{aligned}$$

Par conséquent, on aura

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{\|u\|^2}{2p} \left[ \frac{a(p-4)}{2} \|u\|^2 + b(p-2) \right] - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \|u\| \\ &\geq \|u\| \left[ \frac{a(p-4)}{4p} \|u\|^3 + \frac{b(p-2)}{2p} \|u\| \right] - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \|u\| \\ &\geq \|u\| \left[ \frac{b(p-2)}{2p} \|u\| - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \right] \\ &> \left( \frac{bS_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right)^{\frac{1}{(p-2)}} \left[ \frac{b(p-2)}{2p} \left( \frac{bS_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right)^{\frac{1}{(p-2)}} - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \right]. \end{aligned}$$

Le résultat devient évident dès que  $\lambda < \lambda_*$ .

Partie 2 : Pour  $\lambda_* = \lambda_1$ , on a

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3ab} \|u\|^3 &\leq 3a \|u\|^4 + b \|u\|^2 \\ &< (p-1)S_p^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|u\| > \left( \frac{2\sqrt{3ab}S_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right)^{\frac{1}{(p-3)}} \quad \text{pour tout } u \in N_\lambda^-.$$

Par conséquent, on aura

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &\geq \frac{\|u\|^2}{2p} \left[ \frac{a(p-4)}{2} \|u\|^2 + b(p-2) \right] - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \|u\| \\
&\geq \|u\| \left[ \frac{b(p-2)}{2p} \|u\| - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \right] \\
&> \left( \frac{2\sqrt{3ab}S_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right)^{\frac{1}{(p-3)}} \left[ \frac{b(p-2)}{2p} \left( \frac{2\sqrt{3ab}S_p^{\frac{p}{2}}}{(p-1)} \right)^{\frac{1}{(p-3)}} - \lambda \frac{(p-1)}{p} \|f\|_- \right].
\end{aligned}$$

A partir du Lemme 3.4, on a l'existence des deux suites minimisantes  $(u_n) \subset N_\lambda^+$  et  $(v_n) \subset N_\lambda^-$  qui d'après le Lemme 3.6 convergent fortement vers  $u_1$  et  $u_2$  respectivement donc  $u_1 \in N_\lambda^+$  et  $u_2 \in N_\lambda^-$  avec  $I_\lambda(u_1) = c_\lambda^+$  et  $I_\lambda(u_2) = c_\lambda^-$ . Du fait que  $I_\lambda(|u|) = I_\lambda(u)$  pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$  et de la proposition précédente ainsi que du Lemme 3.2, on obtient deux solutions positives du problème qui sont distinctes car  $N_\lambda^+$  et  $N_\lambda^-$  sont disjoints.

# Bibliographie

- [1] A. Ouahab, Analyse Fonctionnelle, cours Master Equations aux Dérivées Partielles et Applications EDPA, Université de Sidi Bel-Abbes, (2018).
- [2] C. M. Chu, Multiplicity of positive solutions for Kirchhoff type problem involving critical exponent and sign-changing weight functions, Boundary Value Problems (2014) 1-19.
- [3] C-M. Marle, Distributions Espace de Sobolev Applications, Marie Thérèse Lacroix-Sonnier, ellipses.
- [4] G. Kirchhoff, Mechanik. Teubner. Leipzig (1883).
- [5] H. Brezis and E. Lieb, A. Relation between pointwise convergence of functionals, Proc. Amer Math. Soc. 88- 486. (1983).
- [6] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (324-353).
- [7] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris (1969).
- [8] J. Rochat, Les espace de Sobolev, Ecole Polytechnique, Fédérale de Lausanne.
- [9] K.J. Brown, Y. Zhang, The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight functions, J. Differential Equations. 193 (2003) 481-499.

- [10] L. Mok, Introduction à la théorie des points critiques. Application à l'étude de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires, Université Mira de Bejaia, (2015)
- [11] M. Chipot, Elements of Nonlinear Analysis, Birkhauser Advanced Texts, (2000).
- [12] S. Benmansour, Multiplicité des solutions pour des problèmes de Kirchhoff avec exposant critique de Sobolev, thèse de Doctorat, Université de Tlemcen, (2015).
- [13] Y. Chen, Y.C. Kuo, T.F. Wu, The Nehari manifold for a Kirchhoff type problems with critical exponent and sign changing functions, J. Differential Equations. 250 (2011) 1876-1908.