République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherchescientifique

N° Attribué par la bibliothèque

____

Année univ.: 2019/2020

Sur les problèmes impulsifs

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Amina-Amel ADDADI[1]

Sous la direction de

Dr. Fatima DIB

Soutenu le 14/09/2020 devant le jury composé de

Dr H.ABESS	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr F. DIB	E.S.S.A - Tlemcen	Encadreur
Dr N. BEKKOUCHE	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr S. BENMANOUSR	E.S.M - Tlemcen	Examinateur

[1] . E-mail : amelamina98@hotmail.com

Dédicas

C'est avec une trés grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :

A mon trés cher père *Addadi Khelifa*. Je voudrais te remercier pour ton amour, ta générosité, ta compréhension... Ton soutien fut une lumière dans tout mon parcours. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour l'estime et le respect que j'ai toujours eu pour toi.

A ma trés cheŕe mère, je dis grand merci pour son amour, son sens du sacrifice et ses prières. Sans elle, je n'en serais pas là. Mes frères Mohammed , Aniss et Sofiane et ma soeur oumelkhir. A tous les membres de ma famille, petits et grands.

A mes chers amies Abdelli marwa et djebli rafika qui m'ont beaucoup aidées durant ces années d'études.

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Addadi Amina Amel.

Remerciement

Tout d'abord je tiens à remercier Dieu, le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force, l'intelligence et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je remercie Madame Dib Fatima, en tant que directrice de mémoire, elle m'a soutenue et guidée dans mon travail et m'a aidée à trouver des solutions pour avancer.

Je voudrai également remercier les membres de mon jury . Mme H. Labess en tant que présidente de jury, Mme N. Bekkouche et Mme S. Benmansour en tant qu'examinatrices de mémoire.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques, qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.

Addadi Amina Amel.

Table des matières

Notations

$C(I)$	espace des fonctions continues sur .
$C^1(I)$	espace des fonctions continues et dérivables sur I.
$AC(I)$	espace des fonctions absolument continues sur I.
$C_0^\infty(I)$	espace des fonctions indéfinement différentiables et à supports compacte sur I.
$L^p(I)$	$= \{u : I \to \mathbb{R}$ mesurable sur I et; $\int_I \lvert u\rvert^p dx < +\infty\}$ avec $1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(I)$	$= \{u : I \to \mathbb{R}$ mesurable,; $\exists M > 0/\lvert u(x)\rvert \leq M \; p.p.x \in I\}$.
$W^{1,p}(I)$	espace de Sobolev des fonctions de $L^p(I)$dont les dérivées sont également dans $L^p(I)$.
$L^p_{loc}(I)$	espace des fonctions localement L^p-intégrable sur I.
$\lvert u\rvert_p$	$= \left[\int_I \lvert u(x)\rvert^p dx\right]^{1/p} = \lvert u\rvert_{L^p}$.
$f_n \to f$	dénote que la suite $\{f_n\}$converge vers f en norme .
$f_n \rightharpoonup$	dénote que la suite $\{f_n\}$converge faiblement vers f.
$Supp(u)$	support de la fonction u.
$\langle .,.\rangle$	crochet de dualité entre X et son dual
X'	Dual topologique.
$u^{(i)}$	dérivée d'ordre i de u.
$p.p.$	presque partout.
$i.e.$	c'est-à-dire.

$\hookrightarrow$ si X et Y sont deux espaces normés, on écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.

$\hookrightarrow\hookrightarrow$ signifier que $X \subset Y$ et que l'injection canonique de X dans Y est compacte.

$\overline{\mathbb{R}}$ $= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Introduction Générale

0.1 Introduction

Les équations différentielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique et sont d'une grande utilité dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels.
La dynamique de nombreux processus évolutifs de divers domaines tels que la dynamique des populations, la théorie du contrôle, la physique, la biologie et la médecine, subissent des changements brusques à certains moments comme le tremblement de terre, la récolte, les chocs, etc. Ces perturbations peuvent être bien approchées comme un changement instantané d'états ou impulsions.
Ces processus sont modélisés par des équations diférentielles dites impulsives. Elles ont étés introduites pour la première fois, en 1960, par Milman et Myshkis [12].
Sur la base de leurs travaux, plusieurs monographies ont été publiées par de nombreux auteurs comme Samoilenko et Perestyuk [17], *Lakshmikantham et al* [9], *et Benchohra et al* [2]. *Différentes approches ont été appliquées pour étudier l'existence de solutions pour les équations différentielles impulsives : les théorèmes des points fixes*[6], *la théorie du degré topologique* [4], *La méthode des sous et sur-*

solutions [5].

Récemment, certains auteurs ont appliqué de manière créative la méthode variationnelle pour traiter des problèmes impulsifs,($voir$[4, 7, 18]).

Ainsi la méthode variationnelle, qui est un outil trés puissant dans l'étude des équations différentielles ordinaires ainsi que les équations différentielles aux dérivées partielles, ouvre une nouvelle approche pour faire face aux problèmes de discontinuité tels que les impulsions.

L'origine de cette méthode remonte à P. Fermat, à qui l'on doit les fondements du calcul variationnel, et à ses successeurs Newton et Leibniz etc.., qui ont été motivés par des problèmes d'optimisation (pour plus de détails voir [4] *).*

Cette méthode consiste à la construction d'une fonctionnelle réelle définie sur un espace de Banach convenable, les points critiques de cette fonctionnelle constituent les solutions de l'équation différentielle associée.

0.2 Présentation

Dans ce mémoire, nous discutons l'existence de solutions pour une classe d'équations différentielles du second ordre du type;

$$-u''(t) + g(t)u'(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), t \neq t_j, 0 < t < T, \tag{1}$$

avec les conditions de Dirichlet

$$u(0) = u(T) = 0, \tag{2}$$

et les conditions impulsives

$$\Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)),\ j = 1, 2, ..., p. \tag{3}$$

Où $\lambda \in \mathbb{R}$, *T est une constante positive arbitraire,* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Delta u'(t_j) = u'(t_j^+) - u'(t_j^-)$ *avec* $u'(t_j^\pm) = \lim_{t \to t_j^\pm} u'(t)$ *;* $t_j, j = 1, 2, ..., p$ *sont les instants où les impulsions se produisent ;* $0 < t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, *les fonctions* $I_j, (j = 1, 2, ..., p)$, *g et f satisfont certaines hypothèses spécifiées ci-dessous.*

Ce travail est constituée de trois chapitres répartis comme suit :

Chapitre 1 : intitulé ***" Préliminaires ", comprend un rappel de quelques défnitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle, un aperçu sur sur les méthodes variationnelles et leur applications.***

Chapitre 1 : intitulé ***"Formulation variationnelle pour problèmes impulsifs"*** *où, nous étudions l'existence de solutions du problème* $(1) - (3)$ *où la fonction g est nulle. Ce chapitre est inspiré largement de l'article de J.J. Nieto,D. O'Rgan[14], et est divisé en deux parties :*

La première partie est consacrée à la ***"formulation variationnelle d'un problème impulsif linéaire "****. Nous considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = \sigma(t),\ t \neq t_j,\ 0 < t < T, \\ u(0) = u(T) = 0, \\ \Delta u'(t_j) = d_j,\ j = 1, 2, ..., p, \end{cases} \tag{4}$$

où les $I_j(u(t_j)) = d_j,\ j = 1, 2, ..., p$ *sont des constantes.*

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, nous montrons sous des hypothèses *suffisantes l'existence d'une solution unique pour le problème* (4).

Dans la seconde partie, nous exposons la ***"formulation variationnelle d'un problème impulsif nonlinéaire "****. Nous considérons alors le problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), \ t \neq t_j, \ 0 < t < T, \\ u(0) = u(T) = 0 \\ \Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \ j = 1, 2, ..., p, \end{cases} \tag{5}$$

où la nonlinéairité f *et les fonctions* I_j, $j = (1, 2, ..., p)$ *sont continues. Par une minimisation directe, nous montrons l'existence d'au moins une solution pour le problème* (5).

Chapitre 3 : intitulé ***"Formulation variationnelle pour problèmes impulsifs amortie"*** *où, nous étudions l'existence de solutions du problème* $(1) - (3)$ *où la fonction* g *est non nulle. Ce chapitre s'appuit sur l'article* [13], *, il est divisé aussi en deux parties :*

La première partie est consacrée à la ***"formulation variationnelle d'un problème impulsif linéaire amorti"****. Nous considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) + g(t)u'(t) + \lambda u(t) = \sigma(t), \ t \neq t_j, \ 0 < t < T, \\ u(0) = u(T) = 0, \\ \Delta u'(t_j) = d_j, \ j = 1, 2, ..., p. \end{cases} \tag{6}$$

En utilisant toujours le théorème de Lax-Milgram, nous montrons l'existence d'une solution unique pour le problème (6).

Dans la seconde partie, nous exposons la ***"formulation variationnelle d'un problème impulsif nonlinéaire amorti"****. Nous considérons alors le problème* *suivant :*

$$\begin{cases} -u''(t) + g(t)u'(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), \ t \neq t_j, \ 0 < t < T, \\ u(0) = u(T) = 0, \\ \Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \ j = 1, 2, ..., p. \end{cases} \tag{7}$$

Par une minimisation directe, nous montrons sous des hypothèses suffisantes l'existence d'au moins une solution pour le problème (7).

Nous terminons par une ***Conclusion*** *où nous présentons une synthèse du travail effectué.*

Chapitre 1

Préliminaires et Outils de Base

1.1 Les opérateur sur les espaces de Banach

1.1.1 Quelques notion de convergence

Soit E et F deux espaces de Banach.

Définition 1.1. ***(convergence d'une suite)*** *On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de E converge (en norme) vers x_0 tel que $x_0 \in E$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_E = 0$,et on écrit $x_n \to x_0$ dans E*

Définition 1.2. ***(Espace dual)*** *La classe des fonctionnelles linéaires et bornées définies sur E, sera notée par E'.*
On munit E' de la norme

$$\|\varphi\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\|_E \leq 1} | \langle \varphi, x\rangle |, \text{ pour } \varphi \in E'$$

E' muni de cette norme est un espace de Banach et nous avons l'inégalité

$$| \langle \varphi, x\rangle | \leq \|\varphi\|_{E'} \|x\|_E, \forall \varphi \in E' \text{ et } x \in E.$$

Exemple 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $p \leq 1 < +\infty$*

On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \left(\int_\Omega \mid f(x)dx \mid^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$$

On note

$$\mid f \mid_{L^p(\Omega)} = \mid f \mid_p = \left(\int_\Omega \mid f(x)dx \mid^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $1 < p < +\infty$ On a :

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega) \text{ tel que } \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$$

(Pour plus détails voir [2])

Définition 1.3. ***(Convergence faible)*** *On dit qu'une suite $(x_n) \subset E$ converge faiblement vert x si*

$$\forall \varphi \in E', \langle \varphi, x_n \rangle \to \langle \varphi, x \rangle$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$

Remarque 1.1. *L'implication inverse n'est en général pas vraie.*

Proposition 1.1. [3]*Soit (x_n) une suite de E. On a*

1. *Si $x_n \to x$, alors $x_n \rightharpoonup x$.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\|_E \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \inf \|x_n\|_E$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ et $\varphi_n \to \varphi$ dans E', alors $\langle \varphi_n, x_n \rangle \to \langle \varphi, x \rangle$.*

Proposition 1.2. [3] *Lorsque E est de dimension finie, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Définition 1.4. *Soit A un ensemble de E,On a* *i. Si toute suite de A contient une sous suite faiblement convergente alors l'ensemble A est dit faiblement pré-compact.*

ii. Si toutes les limites faibles sont dans A, alors A est dit faiblement compact.

Remarque 1.2. [3] *Soit E un espace de Banach,E' son dual et E'' son bidual. On considére l'injection canonique $i : E \longrightarrow E''$ définie par :*

$$\langle ix, \varphi \rangle_{E'',E'} = \langle \varphi, x \rangle_{E',E} \quad \forall x \in E \ , \ \forall \varphi \in E'$$

i est linéaire et c'est une isométrie .

Définition 1.5. *On dit que E est réflexif si l'isométrie canonique i est surjective de E sur E'' .On note $i(E) = E''$.*

Exemple 1.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$*

1. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est réflexif.*
2. *Un espace de Hilbert est réflexif.*
3. *Les espaces L^p pour $1 < p < \infty$ sont réflixif.*

(Pour plus détails voir [3])

Théorème 1.1. *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.*

Corollaire 1.1. *Si E est un espace de Banach réflexif alors toute suite bornée $(x_n) \subset E$ avec $\|x_n\|_E \leq M$, contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in E$ vérifiant $\|x\|_E \leq M$.*

1.1.2 Semi-continuité inférieure

La semi-continuité inférieure est une propriété trés importante en optimisation, notamment, pour les problèmes de minimisation.

Définition 1.6. *Une fonctionnelle $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (respectivement faiblement semi-continue inférieurement) si $\forall (x_n) \subset E$ ona :*

$$x_n \to x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n) \geq \varphi(x_0)$$

$$\text{(resp. } x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n) \geq \varphi(x_0))$$

Exemple 1.3. *La fonctionnelle φ qui définie sur un espace de Hilbert telle que $\varphi(x) = \|x\|_H$ est (f.s.c.i). En effet, soient $x_0 \in H$ et (x_n) telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, alors*

$$(x_n, x_0) \to (x_0, x_0) = \|x_0\|_H^2$$

De plus

$$0 \leq (x_n - x_0, x_n - x_0) = \|x_n\|_H^2 - 2(x_n, x_0) + \|x_0\|_H^2$$

On en déduit que

$$\|x_n\|_H^2 \geq 2(x_n, x_0) - \|x_0\|_H^2$$

Ceci montre que

$$\lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|_H \geq \|x_0\|_H$$

i.e

$$\lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n) \geq \varphi(x_0)$$

1.1.3 Fonctions convexes

Définition 1.7. [3] ***(Ensemble convexe)***

On dit qu'une partie K de E est convexe si :

$$\forall x, y \in K \;,\; \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in K.$$

Définition 1.8. [3] ***(Fonction convexe)***

Lorsque K est convexe et $\varphi : K \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle φ est dite convexe si $\forall x, y \in K$ et $\forall \lambda \in [0,1]$ elle vérifie :

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$$

Définition 1.9. [3] ***(Fonction strictement convexe)***

On dit que φ est strictement convexe si :

$$\forall x, y \in K, \text{ avec } x \neq y \quad \forall \lambda \in]0,1[, \quad \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

Corollaire 1.2. [3] *Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe, alors φ est (f.s.c.i) si seulement si elle est (s.c.i).*

1.2 Espace de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre un bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées parctielles. Dans ce qui suit, nous introduisons quelques rappels concernant ces espaces, d'analyse fonctionnelle où la plupart des résultats sont énoncés sans démonstration.

Soit $I =]a,b[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$ (pas forcément borné) ,et $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.10. [3]***(L'espace Sobolev** $W^{1,p}(I)$**)***

L'espace Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ , tel que } \int_I u\phi' = -\int_I g\phi \quad \forall \phi \in C_c^1(I)\}$$

On munit cet espace de la norme suivante :

Si $1 < p \leq \infty$,

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (|u|_{L^p} + |u'|_{L^p})^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$,

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \max(|u|_{L^\infty}, |u'|_{L^\infty}).$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I)$$

muni du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2}$$

et de sa norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.3. [3] *L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est :*

1. *Un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$
2. *Réflexif pour* $1 < p < \infty$
3. *Séparable pour* $1 \leq p < \infty$
4. *Un espace de Hilbert séparable si* $p = 2$

Définition 1.11. ***(L'espace** $W_0^{1,p}(I)$**)***

Soit $1 \leq p < \infty$ on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de C_c^1 dans $W^{1,p}(I)$. Si $p = 2$, on note $W_0^{1,2}(I) = H_0^1(I)$. On a

$$H_0^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b);\ u(a) = u(b) = 0\}$$

Remarque 1.3. *L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$; l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.*

Définition 1.12. *Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Définition 1.13. *(Norme de $W^{m,p}$)*

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et H^m du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

Où $D^\alpha u$ dénote la dérivée à l'ordre α de u.

Proposition 1.4. [3] ***(Inégalité de Poincaré)***

Soit I un intervalle borné et p tel que $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante C qui dépend seulement de I et p, de sorte que pour chaque fonction u de l'espace $W_0^{1,p}$,

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p}.$$

Définition 1.14. ***(Fonctions absolument continues)***

Soit I un intervalle bornée. une fonction u est dite absolument continue sur I (AC(I)), si étant donné $\epsilon > 0$, il existe des $\delta > 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} |u(y_i) - u(x_i)| < \epsilon$$

pour toute suite finie d'intervalle disjoints $\{[x_i, y_i]; i = 1, \cdots, n\}$ *de* I,

avec $\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \delta$.

Théorème 1.2. [3] *Si* I *est borné, on a :*

$$W^{1,1}(I) = AC(I)$$

Théorème 1.3. [3] ***(Théorème d'injection)***

Il existe une constante C *(dépendante seulement de* $mes(I) \leq \infty$*) telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

ce qui équivaut à dire : $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ *avec l'injection continue pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

De plus,lorsque I *est borné on a*

(i) $W^{1,p}(I) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{I})$ *pour* $1 < p \leq \infty$.

(ii) $W^{1,1}(I) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I)$ *pour* $1 \leq q < \infty$.

1.3 Applications différentiables

Dans cette partie, E *et* F *sont deux espaces de Banach,* Ω *désigne un ouvert de* E *et* f *une application définie sur* Ω *à valeurs dans* F.

Définition 1.15. ***(Dérivée directionnelle)***

Soit $a \in \Omega$ *et* $h \in E$. *On appelle, si elle existe, dérivée directionnelle de* f *en* a, *la quantité :*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = f'(a, h) \quad \forall h \in E.$$

Définition 1.16. ***(Gâteaux-différentiabilité)***

Si la dérivée directionnelle de f *en* a *existe pour tout* h *de* E*, et si la fonction* $h \to f'(a,h)$ *est linèaire continue, alors* f *est dite Gâteaux-différentiable en* a*. On notera :* **la G-dérivée de f en a par** $Df(a)$.

Définition 1.17. ***(Fréchet-différentiabilité)***

L'application f *est appelée Fréchet-différentiable en* $a \in \Omega$ *si elle est Gâteaux-différentiable et si la G-dérivée* $Df(a)$ *vérifie :*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + W(a,h) \quad \forall h \in E.$$

avec

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|W(a,h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Proposition 1.5. *Si* f *est Fréchet différantiable en* a*, alors elle est Gâteaux-différentiable en ce point. La réciproque est fausse.*

Remarque 1.4.
1. *Si* f *est Fréchet différantiable au point* a *alors* f *est continue au point* a.
2. *Le cas inverse n'est pas toujours vrai.*

1.4 Résultats des minimisation

1.4.1 Points extrêmes

Définition 1.18. *Soit* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle. On dit que* u *est un extrémum de* φ *si* $u \in E$ *et s'il existe un voisinage* U *de* u *dans* E *tel que :*

$$\forall v \in U, \quad \varphi(u) \leq \varphi(v) \ \ (\varphi \text{ est minimale en } u)$$

$$\forall v \in U, \quad \varphi(u) \geq \varphi(v) \;\; (J \text{ est maximale en } u)$$

Définition 1.19. ***(Point critique)*** *Soit $\Omega \in E$ un ouvert de φ.*

$u \in \Omega$ est dite point critique de φ si et seulement si les dérivées partielles de φ en u existent et sont nulles ($\varphi'(u) = 0$). Si u n'est pas un point critique alors on dit qu'il est un point réguliér.

Définition 1.20. ***(Valeur critique)*** *Soit la valeur $c \in \mathbb{R}$.*

On dit que c est une valeur critique de φ, s'il existe $u \in \Omega$ tel que $\varphi(u) = c$ et $\varphi'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique alors on dit qu'elle est une valeur régulière.

1.4.2 Théorèmes de minimisation

Définition 1.21. *Une suite minimisante d'une fonctionnelle $\varphi : E \to]-\infty, +\infty[$ est une suite (x_n) telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n) = \inf_E \varphi$$

Théorème 1.4. [11] *Soient E un espace de Banach réflexif, et φ une fonctionnelle définie sur E telle que*

1). $\lim_{\|x\|_E \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. (coercivité)

2). φ est (f.s.c.i).

alors φ est bornée inférieurement sur E et atteint sa borne inférieure en un point x_0. De plus si φ est Gâteaux différentiable en x_0, alors $D\varphi(x_0) = 0$

Corollaire 1.3. *La fonctionnelle φ atteint son infinimum si elle est coercive, convexe et (s.c.i).*

Théorème 1.5. *Soit la fonctionnelle* $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *convexe. Alors* $x_0 \in E$ *est un minimum de* φ *ssi* x_0 *est un point critique de* φ.

Dans le cas où la fonction φ *est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint. Pour les fonctionnelles convexes, un résultat classique est donné par le théorème* $(voir[\ 3], page\ 46)$.

1.4.3 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram joue un rôle important pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible pour des problmes linéaires. Nous rappelons d'abord quelques résultats pour bien comprendre la définition de ce théorème.

Formes linéaires et bilinéaires *Soit* H *un espace de Hilbert et* H' *son dual.*

Définition 1.22. *On appelle forme linéaire sur* H *une application linéaire sur* H *à valeur dans* $\mathbb{R}$. *Une forme lináire* l *vérifie donc les propriétés suivantes :*

a). $\langle l, \lambda v\rangle = \lambda\langle l, v\rangle \quad \forall v \in H$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

b). $\langle l, v_1 + v_2\rangle = \langle l, v_1\rangle + \langle l, v_2\rangle \quad \forall v_1, v_2 \in H$.

Définition 1.23. *La forme lináire* l *sur l'espace de Hilbert* H *muni de la norme* $\|.\|_H$ *est dite* ***continue*** *s'il existe une constante* C *telle que :*

$$|\langle l, v\rangle| \leq C\|v\|_H \ \forall v \in H.$$

Définition 1.24. *L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert H est appleé* ***espace dual*** *de H et noté* H'.

Définition 1.25. *Une **forme bilinéaire** sur un espace de Hilbert H est une application*

$$a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R},$$

vérifiant

1. $a(\lambda u_1 + \mu u_2, \omega) = \lambda a(u_1, \omega) + \mu a(u_2, \omega)\,; \quad \forall u_1, u_2, \omega \in H,$ *et* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. $a(u, \lambda \omega_1 + \mu \omega_2) = \lambda a(u, \omega_1) + \mu a(u, \omega_2)\,; \quad \forall \omega_1, \omega_2, u \in H,$ *et* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Définition 1.26. *Une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est dite :*

1). ***Continue*** *s'il existe une constante C telle que :*

$$|a(u,u)| \leq C\|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$$

2). ***Coercive*** *s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :*

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H$$

3). ***Symétrique*** *si :*

$$a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u, v \in H$$

Exemple 1.4. *L'application a définie par :*

$$a(u,v) = \int_I u(t)v(t)dt$$

est une forme bilinéaire symétrique et continue sur $L^2(I)$. La bilinéarité est en effet triviale à démontrer, la continuité découle de l'inégalité de Cauchy-Schawrz :

$$|a(u,v)| \leq |\int_I u(t)v(t)dt| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \quad \text{avec } C = 1$$

Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.6. *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme biliéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\phi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que :*

$$a(u,v)=\langle\phi,v\rangle \quad \forall v\in H.$$

De plus, si $a(.,.)$ est symétrique alors u est caractérisé par :

$$\begin{cases} u\in H \\ \frac{1}{2}a(u,u)-\langle\phi,u\rangle=\min_{v\in H}\{\frac{1}{2}a(v,v)-\langle\phi,v\rangle\} \end{cases}$$

Autrement dit, la fonctionnelle $\varphi : H\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-\langle\phi,v\rangle$$

atteint son minimum en u.

Notons que :

- $\|u\|_H\leq\|\frac{1}{\alpha}\phi\|_{H'}$
- *L'application $T_u : H\to\mathbb{R}$ définie par :*

$$T_u(v)=a(u,v)$$

est une forme linéaire continue sur H et $\|T_u\|_{H'}\leq C$

- *L'opérateur solution $S : H'\to H, S\phi=u$, est un opérateur linéaire et borné.*

1.4.4 Théorie des points critiques

Si φ n'est pas convexe, elle n'a pas besoin d'atteindre son infimum. Toute fois, le résultat d'Ekeland $(voir[\ 7], page\ 51)$ montre l'existence de points qui sont presque des minimum. Une condition de compacité qui est habituellement employée pour prouver l'existence de points stationnaires est la condition de Palais-Smale (P-S), pour une fonction $\varphi\in C^1$:

Définition 1.27. ***Condition de (P-S)*** *Toute suite $x_j\in E$ telle que : $|\varphi(x_j)|<M$ et $\varphi'(x_j)\to 0$ en norme dans E' (l'espace dual de E) admet une sous-suite*

fortement convergence , où $\varphi'(x)$ représente la dérivée de φ en x, et un élément du dual E' l'espace des fonctions linéaires continues sur E. Une telle fonction atteint toujours son infimum.

Lemme 1.1. *Soit φ une fonction réelle de classe C^1 définie sur un espace de Banach E satisfaisant la condition (P-S) et bornée inférieurement. Alors φ atteint un minimum en un certain point x_0 de E.*

Pour une fonction qui n'est pas bornée, chercher ses points critiques revient à chercher des points selles de la fonctionnelle associée au problème étudié. Ces points sont déterminés par des arguments de type minimax. Ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col et ses variantes.

1.5 Problème linéaire sans impulsion

*(**Application du théorème de Lax-Milgram**)*

Nous prenons comme modèle un problème linéaire de Dirichlet, et nous présentons d'abord quelques résultats généraux.

Dans l'espace Sobolev $H_0^1(0,T)$, on considère le produit scalaire suivant :

$$(u,v) = \int_0^T u'(t)v'(t)dt$$

induisant la norme

$$\|u\|_{H_0^1(0,T)} = \left[\int_0^T (u'(t))^2 dt\right]^{1/2}.$$

Le produit scalaire

$$(u,v) = \int_0^T u(t)v(t)dt + \int_0^T u'(t)v'(t)dt.$$

induit la norme équivalente

$$\|u\|_{H_0^1(0,T)} = \left[\int_0^T u^2(t)dt\right]^{1/2} + \left[\int_0^T (u'(t))^2 dt\right]^{1/2}.$$

Une conséquence de l'inégalié de Poincaré est :

$$\left[\int_0^T u^2(t)dt\right]^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left[\int_0^T (u'(t))^2 dt\right]^{1/2}.$$

Ici, $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{T^2}$ *est la première valeur propre du problème de Dirichlet*

$$-u''(t) = \lambda u(t),\ t \in [0,T]; \quad u(0) = u(T) = 0$$

Soit $T > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma \in L^2(0,T)$. *Considérons l'équation du second ordre*

$$-u''(t) + \lambda u(t) = \sigma(t) \quad p.p\ t \in [0,T] \tag{1.1}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = u(T) = 0 \tag{1.2}$$

Par une solution classique de (1.1) *et* (1.2), *nous désignons une fonction* $u \in H^2(0,T)$ *satisfaisant* (1.1) *pour p.p* $t \in [0,T]$ *et les conditions de Dirichlet* (1.2). *Ainsi,* $u \in H_0^1(0,T)$.

Une solution faible de (1.1) *et* (1.2) *est une fonction* $u \in H_0^1(0,T)$ *telle que*

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt = \int_0^T \sigma(t)v(t)dt, \tag{1.3}$$

pour tout $v \in H_0^1(0,T)$. *Définissons :*

$$a : H_0^1(0,T) \times H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) = \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt.$$

et

$$l : H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}, \quad l(v) = \int_0^T \sigma(t)v(t)dt.$$

Nous voyons que (1.3) *est équivalent au problème qui consiste à trouver* $u \in H_0^1(0,T)$ *tel que*

$$a(u,v) = l(v),\ \forall v \in H_0^1(0,T) \tag{1.4}$$

Il est évident que l *est linéaire et bornée :*

soit $u \in H_0^1(0,T)$

$$\begin{aligned} |l(v)| &= |\int_0^T \sigma(t)u(t)dt| \\ &\leq \left[\int_0^T \sigma(t)^2\right]^{1/2} \left[\int_0^T u(t)^2 dt\right]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\sigma\|_{L^2(0,T)} \|u\|_{H_0^1}(0,T) \end{aligned}$$

et que a *est bilinéaire, symétrique et continue :*

Soit u *et* v *deux éléments de* $H_0^1(0,T)$ *on a*

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= |\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt| \\ &\leq \left[\int_0^T u'^2(t)dt\right]^{1/2} \left[\int_0^T v'^2(t)dt\right]^{1/2} + \lambda \left[\int_0^T u^2(t)dt\right]^{1/2} \left[\int_0^T v^2(t)dt\right]^{1/2} \\ &\leq \left[\int_0^T u'^2(t)dt\right]^{1/2} \left[\int_0^T v'^2(t)dt\right]^{1/2} + \frac{\lambda}{\lambda_1} \left[\int_0^T u'^2(t)dt\right]^{1/2} \left[\int_0^T v'^2(t)dt\right]^{1/2} . \\ &\leq (1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}) \|u\|_{H_0^1(0,T)} \|v\|_{H_0^1(0,T)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, si$\lambda > -\lambda_1$ *alors* a *est coercive, en effet : en utilisant l'inégalité de Poincaré (**Proposition** 1.2) nous avons,*

$$\lambda \int_0^T u^2(t)dt \geq min(0, \frac{\lambda}{\lambda_1}) \int_0^T u'^2(t)dt,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^T u'^2(t)dt + \lambda \int_0^T u^2(t)dt &\geq \int_0^T u'^2(t)dt + min(0, \frac{\lambda}{\lambda_1}) \int_0^T u'^2(t)dt \\ &\geq \alpha \int_0^T u'^2(t)dt \\ &\geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(0,T)} \end{aligned}$$

où, $\alpha = 1 + min(0, \frac{\lambda}{\lambda_1})$*, d'où il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que pour tout* $u \in H_0^1(0,T)$ *nous avons*

$$a(u,v) \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(0,T)} \tag{1.5}$$

Selon le théorème de Lax-Milgram, nous obtenons l'existence d'une solution faible de (1.1) *et* (1.2)*. En vertu de la théorie de la régularité, la solution faible est aussi une solution classique. En effet, nous avons*

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt = \int_0^T (\sigma(t) - \lambda u(t))\, v(t)dt, \qquad \forall v \in H_0^1(0,T),$$

alors $u' \in H_0^1(0,T)$ *(car :* $\sigma - \lambda u \in L^2(0,T)$*) c'est-à-dire* $u \in H_0^1(0,T)$*.*
Par ailleurs, en utilisant le fait que a *est symétrique, nous pouvons dire que la solution faible minimise la fonctionnelle* $\varphi : H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) = \frac{1}{2}\int_0^T v'(t)^2dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T v(t)^2dt - \int_0^T \sigma(t)v(t)dt.$$

Ainsi, une solution faible $u \in H_0^1(0,T)$ *est un point critique de* φ*, c'est-à-dire* $\varphi'(u) = 0$*. Réciproquement si* $u \in H_0^1(0,T)$ *est une point critique de* J*, alors* u *est effectivement une solution faible.*

Chapitre 2

Formulation variationnelle pour problèmes impulsifs

(D'aprés : J. J. Nieto and D. O'Regan. [14]*)*

2.1 Introduction

Beaucoup de problèmes peuvent être compris et résolus en termes de minimisation d'une fonctionnelle, généralement liée à l'énergie, dans un espace approprié de fonctions. Par exemple, une solution du problème aux limites de Dirichlet

$$-u''(t) = \sigma(t), t \in [0, T];\ u(0) = u(T) = 0$$

minimise l'énergie

$$E(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^T u'^2(t)dt - \int_0^T \sigma(t)u(t)dt.$$

Le but de ce travail est de montrer la structure variationnelle sous-jacente à une équation différentielle impulsive. Nous prenons comme modèle un problème de Dirichlet avec des impulsions et nous montrons que les solutions du problème impulsif minimisent la fonctionnelle (énergie). Aussi, les points critiques de cette fonctionnelle sont en effet des solutions du problème impulsif.

Le chapitre est organisé comme suit :

dans la section 1, nous exposerons la formulation variationnelle d'un problème linéaire de Dirichlet avec des impulsions dans la dérivée. Le résultat présenté dans cette partie, incluant un exemple, peut être vu comme élémentaire, mais crucial pour révéler clairement qu'un problème impulsif peut avoir une structure variationnelle.

Dans la section 2 nous considérons le problème non linéaire de Dirichlet correspondant. Nous prouverons l'existence de solutions en utilisant le résultat standard de minimisation.

2.2 Formulation variationnelle d'un problème impulsif linéaire

Considérons le problème impulsif suivant :

$$(LP)\begin{cases} -u''(t)+\lambda u(t)=\sigma(t) \quad p.p\ t\in[0,T] \\ u(0)=u(T)=0; \\ \Delta u'(t_j)=d_j \end{cases}$$

où

$$\Delta u'(t_j)=u'(t_j^+)-u'(t_j^-)=d_j, \quad j=1,2,....,p \tag{2.1}$$

sont des constantes.

Pour $u\in H^2(0,T)$, nous avons u et u' sont toutes les deux absolument continues et $u''\in L^2(0,T)$. Donc $\Delta u'(t_j)=u'(t^+)-u'(t^-)=0$ pour tout $t\in[0,T]$.

Si $u\in H_0^1(0,T)$ alors u est absolument continue et $u'\in L^2(0,T)$. Dans ce cas les dérivées unilatérales $u'(t^-)$ et $u'(t^+)$ peuvent ne pas exister.

En conséquence, nous aurons besoin d'introduire un concept différent de solutions.

Définition 2.1. *Supposons que $u\in C(0,T)$ satisfait les conditions de Dirichlet (1.2). Par ailleurs, supposons que pour tout $j=1,2,...,p$; $u_j=u_{|(t_j,t_{j+1})}$ est telle que $u_j\in H^2(t_j,t_{j+1})$. On dit que u est une solution classique du problème (LP) si elle satisfait (1.1) p.p. sur $[0,T]$, les limites $u'(t_j^+),u'(t_j^-),j=1,2,...,p$ existent et satisfont (2.1).*

Maintenant donnons une structure variationnelle pour notre problème impulsif linéaire. Prenons $v\in H_0^1(0,T)$ et multiplions (1.1) par v et intégrons sur $[0,T]$:

$$-\int_0^T u''(t)v(t)dt+\lambda\int_0^T u(t)v(t)dt=\int_0^T \sigma(t)v(t)dt$$

Le calcul du premier terme donne :

$$-\int_0^T u''(t)v(t)dt = \sum_{j=0}^{j=p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u''(t)v(t)dt$$

et

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} u''(t)v(t)dt = u'(t_{j+1}^-)v(t_{j+1}^-) - u'(t_j^+)v(t_j^+) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} u'(t)v'(t)dt$$

Donc

$$\begin{aligned} -\int_0^T u''(t)v(t)dt &= \sum_{j=1}^{j=p} \Delta u'(t_j)v(t_j) + u'(0)v(0) - u'(T)v(T) + \int_0^T u'(t)v'(t)dt \\ &= \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j) + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt = \int_0^T \sigma(t)v(t)dt$$

Soit la forme bilinéaire : $a : H_0^1(0,T) \times H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$a(u,v) = \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt, \qquad (2.2)$$

et l'opérateur linéaire $l : H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}$ *par :*

$$l(v) = \int_0^T \sigma(t)v(t)dt - \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j) \qquad (2.3)$$

Ainsi, une solution faible au problème impulsif (LP) est une fonction $u \in H_0^1(0,T)$ *telle que* $a(u,v) = l(v)$ *pour tout* $v \in H_0^1(0,T)$.

Lemme 2.1. *Si* $u \in H_0^1(0,T)$ *est une solution faible de (LP), alors* u *est une solution classique de (LP).*

Preuve 2.1. *Nous avons,* $u(0) = u(T) = 0$ *puisque* $u \in H_0^1(0,T)$.

Pour $j \in 1, 2, ..., p$, *choisissons* $v \in H_0^1(0,T)$ *avec* $v(t) = 0$ *pour tout* $t \in [0, t_j] \cup [t_{j+1}, T]$.

Alors

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(t)v(t)dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sigma(t)v(t)dt$$

Ceci implique que $-u''(t) = -\lambda u(t) + \sigma(t)$ *p.p sur* (t_j, t_{j+1}). *Donc* $u_j \in H^2(t_j, t_{j+1})$ *et* u *vérifie* (1.1) *p.p sur* $[0,T]$. *Maintenant, en multipliant par* $v \in H_0^1(0,T)$ *et en intégrant entre* 0 *et* T, *nous obtenons*

$$-\int_0^T u''(t)v(t)dt = -\lambda \int_0^T u(t)v(t)dt + \int_0^T \sigma(t)v(t)dt$$

et

$$-\sum_{j=1}^{j=p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u''(t)v(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sigma(t)v(t)dt = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0,T)$$

alors

$$\sum_{j=1}^{j=p} \Delta u'(t_j)v(t_j) + \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sigma(t)v(t)dt = 0$$

Comme u *est une solution faible, alors :*

$$\sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j) + \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sigma(t)v(t)dt = 0$$

et par conséquent

$$\sum_{j=1}^{j=p} \Delta u'(t_j)v(t_j) = \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j) \quad \forall v \in H_0^1(0,T)$$

Donc $\Delta u'(t_j) = d_j$, *pour tout* $j = 1, 2, ..., p$ *et les conditions impulsives de* (2.1) *sont satisfaites. Ce qui achève la démonstration.*

Théorème 2.1. *Si $\lambda > -\lambda_1$ alors le problème impulsif de Dirichlet (LP) a une solution faible unique $u \in H_0^1(0,T)$ pour tout $\sigma \in L^2(0,T)$. De plus , $u \in H^2(0,T)$ et u est une solution classique et u minimise la fonctionnelle (2.5), et par conséquent c'est un point critique de (2.5).*

Preuve 2.2. *Les formes a et l définies respectivement en (2.2) et en (2.3) sont continues, en effet :*
soit $u \in HH_0^1(0,T)$

$$\begin{aligned} |l(u)| &= |\textstyle\int_0^T \sigma(t)u(t)dt - \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p} d_j u(t_j)| \\ &\leq \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\sigma\|_{L^2(0,T)} \|u\|_{H_0^1(0,T)} + \sum_{j=1}^{j=p} |d_j| \sup_{t\in[0,1]} |u(t)| \\ &\leq \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\sigma\|_{L^2(0,T)} \|u\|_{HH_0^1(0,T)} + \beta \sum_{j=1}^{j=p} |d_j| \|u\|_{H_0^1(0,T)} \quad \textit{car } \|u\|_{C[0,T]} \leq \beta \|u\|_{H_1^0(0,T)} \\ &\leq \left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\sigma\|_{L^2(0,T)} + \beta \sum_{j=1}^{j=p} |d_j| \right) \|u\|_{HH_0^1(0,T)}. \end{aligned}$$

et a est coercive si $\lambda > -\lambda_1$.

*En effet : en utilisant l'inégalité de Poincaré (**Proposition** 1.2) nous avons,*

$$\lambda \int_0^T u^2(t)dt \geq min(0, \tfrac{\lambda}{\lambda_1}) \int_0^T u'^2(t)dt,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^T u'^2(t)dt + \lambda \int_0^T u^2(t)dt &\geq \int_0^T u'^2(t)dt + min(0, \tfrac{\lambda}{\lambda_1}) \int_0^T u'^2(t)dt \\ &\geq \alpha \int_0^T u'^2(t)dt \\ &\geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(0,T)} \end{aligned}$$

où, $\alpha = 1 + min(0, \frac{\lambda}{\lambda_1})$, d'où il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(0,T)$ nous avons

$$a(u,v) \geq \alpha \|u\|^2_{H^1_0(0,T)} \tag{2.4}$$

En utilisant la théorème de Lax Miligram, le problème (LP) admet une solution faible unique. De plus a est symétrique donc cette unique solution minimise la fonctionnelle : $\varphi : H^1_0(0,T) \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u'(t))^2 dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u^2(t)dt - \int_0^T \sigma(t)u(t)dt - \sum_{j=1}^{j=p} d_j u(t_j) \tag{2.5}$$

Il est clair que φ *est différantiable en tout* $u \in H^1_0(0,T)$ *et*

$$\begin{aligned} \varphi'(u)(v) &= \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt - \int_0^T \sigma(t)v(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} d_j v(t_j) \\ &= a(u,v) - l(v) \end{aligned}$$

Ainsi, un point critique de φ *, définie par (2.5), nous donne une solution faible du problème impulsif (LP). En utilisant le lemme 2.1, le problème (LP) admet une solution classique.*

Exemple 2.1. *Prenons* $t \in (0,T), d_1 \in \mathbb{R}$ *et considérons le problème de Dirichlet suivant :*

$u''(t) = 0, p.p\ t \in (0,T); \quad u(0) = u(T) = 0$

avec l'implusion :

$\Delta u'(t_1) = d_1$*. La solution sur* $[0,t_1)$ *est donnée par* $u(t) = \alpha t$ *,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, parce que* $u(0) = 0$*.*

Pour $t \in (t_1,T], u(t) = \beta t + \gamma, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*. En utilisant la condition* $u(T) = 0$*, nous avons*

$$\beta T + \gamma = 0 \tag{2.6}$$

Par la continuité de u en t_1 nous obtenons

$$\alpha t_1 = \beta t_1 + \gamma \tag{2.7}$$

et la condition impulsive en t_1

$$\beta - \alpha = d_1 \tag{2.8}$$

Le système (2.6), (2.7) et (2.8) avec les inconnues α, β et γ a une solution unique. Si $d_1 = 0$ alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $u = 0$ qui est la solution du problme de Dirichlet dans le cas non impulsif.

Si $T = 1, t_1 = \frac{1}{3}$, et $d_1 = 1$, alors

$$\begin{cases} u(t) = \frac{2}{3}t, \quad t \in [0, \frac{1}{3}]; \\ u(t) = \frac{-1}{3}t + \frac{1}{3}, \quad t \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

2.3 Formulation variationnelle d'un problème impulsif nonlinéaire

Considérons le problème de Dirichlet non linéaire

$$(NP) \begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), \ p.p \ t \in [0, T] \\ u(t) = u(t) = 0; \\ \Delta u'(t_j) = d_j \end{cases}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue , et $I_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1, 2, ..., p$ sont continues. Nous désignerons ce problème impulsif par (NP).

La présence des impulsions nous conduit à donner à une solution du problème (NP) la définition de la solution suivante :

Définition 2.2. *Supposons que $u \in C(0,T)$ satisfait les conditions de Dirichlet (1.2). Par ailleurs, supposons que pour tout $j = 1, 2, ..., p$; $u_j = u_{|(t_j,t_{j+1})}$ est telle que $u_j \in H^2(t_j, t_{j+1})$. On dit que u est une solution classique du problème (NP) si elle satisfait l'équation $-u''(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t))$ p.p. sur $[0,T]$, les limites $u'(t_j^+), u'(t_j^-), j = 1, 2, ..., p$ existent et satisfont les conditions impulsives de (NP).*

Multiplions l'équation $-u''(t)+\lambda u(t) = f(t, u(t))$ par $v \in H_0^1(0,T)$ et intégrons entre 0 et T, on obtient :

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt = -\sum_{j=0}^{j=p} I_j(u(t_j))v(t_j) + \int_0^T f(t, u(t))v(t)dt$$

Définition 2.3. *Une solution faible de (NP) est une fonction $u \in H_0^1(0,T)$ telle que $\forall\ v \in H_0^1(0,T)$:*

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt = -\sum_{j=0}^{j=p} I_j(u(t_j))v(t_j) + \int_0^T f(t, u(t))v(t)dt$$

Lemme 2.2. *Si $u \in H_0^1(0,T)$ est une solution faible de (NP), alors u est une solution classique de (NP).*

Preuve 2.3. *Évidemment $u(0) = u(T) = 0$ car $u \in H_0^1(0,T)$, d'aprés la définition de la solution faible, on a :*

$$\int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} I_j(u(t_j))v(t_j) - \int_0^T f(t, u(t))v(t)dt = 0 \tag{2.9}$$

Pour $j \in 0, 1, 2, ..., p$, choisissons $v \in H_0^1(0,T)$ telle que $v(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_j] \cup [t_{j+1}, T]$, alors :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(t)v(t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, u(t))v(t)dt = 0. \tag{2.10}$$

D'après la définition de la dérivée faible, (2.10) *implique que :*

$$-u''(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)) \tag{2.11}$$

D'où $u \in H^2(t_j, t_{j+1})$ *et* u *satisfait l'équation différentielle dans (NP). Par intégration de* (2.9)*, on a :*

$$-\sum_{j=1}^{p} \Delta u'(t_j)v(t_j) + u'(T)v(T) - u'(0)v(0) + \sum_{j=1}^{p} I_j(u(t_j))v(t_j) +$$
$$\int_0^T \left(-u''(t) + \lambda u(t) - f(t, u(t))\right) v(t)dt = 0$$

Combinons cela avec (2.11)*, on obtient :*

$$\sum_{j=1}^{j=p} \left(\Delta u'(t_j) - I_j(u(t_j))\right) v(t_j) = 0$$

Alors $\Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)) \quad$ *pour tout* $j \in 1, 2, ..., p$*. Ceci achève la preuve du lemme.*

Soit

$$F(t, u) = \textstyle\int_0^u f(t, \xi)d\xi$$

la primitive de f *et considérons la fonctionnelle* $\varphi : H_0^1(0, T) \to \mathbb{R}$*, définie par*

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u'(t))^2 dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T u^2(t)dt + \sum_{j=0}^{j=p} \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T F(t, u(t))dt \tag{2.12}$$

Proposition 2.1. *La fonctionnelle* $\varphi : H_0^1(0, T) \to \mathbb{R}$ *définie par* (2.12) *est continûment différentiable, et faiblement semi-continue inférieurement. De plus, les points critiques de* φ *sont les solutions faibles du problème (NP).*

Preuve 2.4. *D'après les hypothèses, f et $I_j, j = 1, 2, .., p$, sont continues donc φ est différentiable et $\varphi' : H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}$ est définie par :*

$$\varphi'(u)(v) = \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)v(t)dt + \sum_{j=0}^{j=p} I_j(u(t_j))v(t_j) - \int_0^T f(t,u(t))v(t)dt$$

En effet, soit u, h deux éléments de $H_0^1(0,T)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\varphi(u+\xi h)-\varphi(u)}{\xi} = \int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)h(t)dt + \sum_{j=0}^{j=p} \frac{1}{\xi}\left(\int_0^{u(t_j)+\xi h(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt\right)$$
$$- \int_0^T \left(\frac{F(t,u(t)+\xi h(t)) - F(t,u(t))}{\xi}\right)dt + \frac{\xi}{2}\left(\int_0^T h'(t)^2 dt + \lambda \int_0^T h^2(t)dt\right)$$

Alors en utilisant la formule des accroissements finis, nous avons

$$\int_0^{u(t_j)+\xi h(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt = \xi h(t_j) I_j(u(t_j) + \theta h(t_j))$$

avec $|\theta| \leq |\xi|$ comme I_j est continue nous avons :

$$\frac{1}{\xi}\left(\int_0^{u(t_j)+\xi h(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt\right) \to h(t_j)I_j(u(t_j)) \text{ quand } \xi \to 0.$$

Ainsi, en utilisant la formule des accroissements finis, nous avons

$$\frac{F(t,u(t)+\xi h(t)) - F(t,u(t))}{\xi} = f(t, u(t) + \theta h(t))h(t)$$

Donc

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(u+\xi h) - \varphi(u)}{\xi} = \int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)h(t)dt + \sum_{j=0}^{j=p} h(t_j)I_j(u(t_j))$$
$$- \int_0^T f(t,u(t))h(t)dt$$

Posons

$$\varphi'(u)h = \int_0^T u'(t)h'(t)dt + \lambda \int_0^T u(t)h(t)dt + \sum_{j=0}^{j=p} h(t_j)I_j(u(t_j)) - \int_0^T f(t,u(t))h(t)dt.$$

Ceci montre que les points critiques de φ représentent les solutions faibles de (NP).

Pour montrer que φ est faiblement semi-continue inférieurement, soit (u_k) une *suite faiblement convergente vers* u *dans* $H_0^1(0,T)$. *Alors* $\|u\|_{H_0^1(0,T)} \leq \lim_{k\to+\infty} \inf \|u_k\|_{H_0^1(0,T)}$ [*voir proposition*1.1].

Nous avons que (u_k) *converge uniformément vers* u *sur* $[0,T]$, [*voir théorème* 1.3].

Alors

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\int_0^T u_k^2(t)dt + \sum_{j=0}^{j=p}\int_0^{u_k(t_j)} I_j(j)dt - \int_0^T F(t,u_k(t_j))dt\right) =$$

$$\tfrac{\lambda}{2}\textstyle\int_0^T u^2(t)dt + \displaystyle\sum_{j=0}^{j=p}\int_0^{u(t_j)} I_j(j)dt - \int_0^T F(t,u(t_j))dt$$

On en déduit que : $\varphi(u) \leq \lim_{k\to+\infty} \inf \varphi(u_k)$.

Théorème 2.2. *Supposons que* f *est bornée et que les fonctions impulsives* I_j *sont bornées. Si de plus* $\lambda > -\lambda_1$, *Alors il existe un point critique de* φ, *et le problème (NP) possède au moins une solution .*

Preuve 2.5. *Prenons* $M > 0$ *et* $M_j > 0, j = 1,2,..,p$ *tels que*

$$|f(t,u)| \leq M \text{ pour tout } \quad t \in [0,T]\times\mathbb{R}$$

et

$$|I_j(u)| \leq M_j, \text{ pour tout } \quad u \in \mathbb{R}, j = 1,2,..,p$$

En utilisant le fait que $\lambda > -\lambda_1$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $u \in H_0^1(0,T)$

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} + \sum_{j=0}^{j=p}\int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T F(t,u(t_j))dt \\
&\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} - \sum_{j=0}^{j=p} M_j|u(t_j)| - M\int_0^T u(t)dt \\
&\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} + \beta\sum_{j=0}^{j=p} M_j\|u\|_{H_0^1(0,T)} - \beta TM\|u\|_{H_0^1(0,T)} \\
&\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} + c\|u\|_{H_0^1(0,T)}
\end{aligned}$$

où $c = \beta \sum_{j=0}^{j=p} M_j - \beta T M$, *est une constante positive.*
Ceci implique que

$$\lim_{\|u\|_{H_0^1(0,T)} \to +\infty} \varphi(u) = +\infty,$$

et φ *est coercive.*

Or φ *est faiblement semi continue inférieurement, donc d'après théorème* 1.4, φ *a un minimum qui représente une solution faible du problème (NP). En utilisant le lemme* 2.2, *le problème (NP) admet une solution classique.*

Chapitre 3

Formulation variationnelle d'un problème impulsif de Dirichlet amorti

(D'aprés : Juan J. Nieto. [13]*)*

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons une formulation variationnelle pour un problème de Dirichlet amorti avec des impulsions et le concept d'une solution faible pour un tel problème.
En utilisant dans la première partie, le théorème de Lax-Miligram de manière appropriée, nous prouvons l'existence d'une solution faible unique qui est précisément le point critique d'une fonctionnelle. Cette structure variationnelle sous-jacente au problème linéaire impulsif nous permettra d'étudier dans la seconde partie le problème non linéaire correspondant.

3.2 Formulation variationnelle d'un problème impulsif linéaire amorti

Considérons le problème linéaire impulsif amorti suivant :

$$(LPA)\begin{cases} -u''(t) + g(t)u'(t) + \lambda u(t) = \sigma(t) \quad p.p\ t \in [0, T] \\ u(t) = u(t) = 0; \\ \Delta u'(t_j) = d_j\ j = 1, 2, .., p \end{cases}$$

où $\sigma \in C[0, T]$, $g \in C[0, T]$ *et* $d_j\ j = 1, 2, .., p$ *sont des constantes.*

Remarque 3.1. *On a :* $e^{-\|g\|_{L^1}} \leq e^{G(t)} \leq e^{\|g\|_{L^1}}$, *où* $G(t) = -\int_0^t g(s)ds$, $t \in [0, T]$.
En effet,

$$\begin{aligned} |G(t)| = |\int_0^t g(s)ds| &\leq |\int_0^T g(s)ds| \\ &\leq \int_0^T |g(s)|ds \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} |G(t)| \leq \|g\|_{L^1} &\Leftrightarrow -\|g\|_{L^1} \leq G(t) \leq \|g\|_{L^1} \\ &\Leftrightarrow e^{-\|g\|_{L^1}} \leq e^{G(t)} \leq e^{\|g\|_{L^1}} \end{aligned}$$

Pour ce problème linéaire de Dirichlet amorti (LPA), la structure variationnelle due à la présence du terme amorti $g(t)u'$ n'est pas apparente. Cependant, nous pouvons contourner ce problème en multipliant $-u''(t)+g(t)u'(t)+\lambda u(t) = \sigma(t)$ par le facteur intégrant $e^{G(t)}$. En effet,

$$-e^{G(t)}u''(t) + g(t)e^{G(t)}u'(t) + \lambda e^{G(t)}u(t) = e^{G(t)}\sigma(t), \tag{3.1}$$

on voit que : $e^{G(t)}u''(t) + g(t)e^{G(t)}u'(t) = \left(e^{G(t)}u'(t)\right)'$, *alors l'équation (3.1) devient :*

$$-\left(e^{G(t)}u'(t)\right)' + \lambda e^{G(t)}u(t) = e^{G(t)}\sigma(t). \tag{3.2}$$

Maintenant, multiplions (3.2) par $v \in H_0^1(0,T)$ et intégrons sur $[0,T]$:

$$-\int_0^T \left(e^{G(t)}u'(t)\right)' v(t)dt + \lambda \int_0^T e^{G(t)}u(t)v(t)dt = \int_0^T e^{G(t)}\sigma(t)v(t)dt$$

Le calcul du premier terme donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(e^{G(t)}u'(t)\right)' v(t)dt &= \sum_{j=0}^{j=p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(e^{G(t)}u'(t)\right)' v(t)dt \\ &= \sum_{j=0}^{j=p} e^{G(t)}u'(t)v(t) \mid_{t_j}^{t_{j+1}} - \sum_{j=0}^{j=p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt \\ &= -\sum_{j=1}^{j=p} e^{G(t_j)}\Delta u'(t_j)v(t_j)dt - \sum_{j=0}^{j=p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt \\ &= -\sum_{j=1}^{j=p} e^{G(t_j)}d_j v(t_j) - \int_0^T e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_0^T e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T e^{G(t)}u(t)v(t)dt = -\sum_{j=1}^{j=p} e^{G((t_j)}d_j v(t_j) + \int_0^T e^{G(t)}\sigma(t)v(t).$$

D'où, on définit $A : H_0^1(0,T)\times H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}$ et $L : H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$A(u,v) = \int_0^T e^{G(t)} u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T e^{G(t)} u(t)v(t)dt,$$
$$L(v) = -\sum_{j=1}^{j=p} e^{G((t_j)} d_j v(t_j) + \int_0^T e^{G(t)}\sigma(t)v(t)dt.$$

Évidemment, A est continue et symétrique, et en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Hölder, on obtient la continuité de L. En effet :
Soit $u \in H_0^1(0,T)$, on a

$$\begin{aligned}
|L(u)| &= |\int_0^T e^{G(t)}\sigma(t)u(t)dt - \sum_{j=1}^{j=p} e^{G(t_j)} d_j u(t_j)| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e^{\|g\|}\|\sigma\|_{L^2(0,T)}\|u\|_{H_0^1(0,T)} + e^{\|g\|}\sum_{j=1}^{j=p}|d_j| \sup_{t\in[0,1]}|u(t)| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e^{\|g\|}\|\sigma\|_{L^2(0,T)}\|u\|_{H_0^1(0,T)} + e^{\|g\|}\beta\sum_{j=1}^{j=p}|d_j|\|u\|_{H_0^1(0,T)} \\
&\le \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e^{\|g\|}\|\sigma\|_{L^2(0,T)} + e^{\|g\|}\beta\sum_{j=1}^{j=p}|d_j|\right)\|u\|_{H_0^1(0,T)}.
\end{aligned}$$

En conséquence nous définissons une solution faible de (LPA) comme une fonction $u \in H_0^1(0,T)$ telle que :

$$A(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(0,T).$$

Lemme 3.1. *Si $u \in H_0^1(0,T)$ est une solution faible de (LPA), alors u est une solution classique de (LPA).*

Preuve 3.1. *Elle se fait de manière identique à celle du lemme* 2.1.

Théorème 3.1. *Supposons que $\sigma \in C[0,T]$ et $g \in C[0,T]$. Si de plus $\lambda > -\lambda_1$, alors le problème linéaire amorti (LPA) a une solution unique. Une telle solution est donnée comme étant l'élément $u \in H_0^1(0,T)$ minimisant la fonctionnelle φ : $H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(v) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)}(v(t))'dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T e^{G(t)}v^2(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} e^{G((t_j)}d_jv(t_j)$$
$$-\int_0^T e^{G(t)}\sigma(t)v(t)dt.$$

Preuve 3.2. *La forme bilinéaire A est coercive, en effet :*

$$\begin{aligned} A(u,u) &= \int_0^T e^{G(t)}u'^2(t)dt + \lambda\int_0^T e^{G(t)}u(t)^2dt \\ &\geq e^{-\|g\|}\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} + e^{-\|g\|}\lambda\int_0^T u(t)^2dt \\ &\geq e^{-\|g\|}\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} + e^{-\|g\|}min(0,\frac{\lambda}{\lambda_1})\int_0^T (u'(t))^2dt \\ &\geq e^{-\|g\|}\left(1+min(0,\frac{\lambda}{\lambda_1})\right)\|u\|^2_{H_0^1(0,T)}. \end{aligned}$$

Selon le théorème de Lax-Miligram, le problème (LPA) admet une unique solution faible. En utilisant le fait que A est symétrique, nous avons que l'unique solution faible minimise la fonctionnelle φ. En utilisant le lemme 3.1, *le problème (LPA) admet une solution classique.*

3.3 Formulation variationnelle d'un problème impulsif non linéaire amorti

Considérons le problème de Dirichlet non linéaire

$$(NPA)\begin{cases} -u''(t)+g(t)u'(t)+\lambda u(t) = f(t,u(t)); \quad t\in[0,T] \\ \Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j^-)), \quad j=1,2,...,p \\ u(0)=u(T)=0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Où $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, et les fonctions $I_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sont continues.
En multipliant la première équation de (NPA) par $e^{G(t)}$ pour obtenir la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} -\left(e^{G(t)}u'(t)\right)' + \lambda e^{G(t)}u(t) = e^{G(t)}f(t,u(t)); \quad t \in [0,T] \\ \Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j^-)), \quad j = 1,2,...,p, \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Évidemment, les solutions de (3.4) *sont des solutions du problème (NPA).*

Soit $H_0^1(0,T)$ *l'espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H_0^1(0,T)} = \int_0^T e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T e^{G(t)}u(t)v(t)dt,$$

induisant la norme

$$\|u\|_{H_0^1(0,T)} = \left(\int_0^T e^{G(t)}|u'(t)|^2dt + \lambda \int_0^T e^{G(t)}|u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 3.1. *On dit que la fonction* $u \in H_0^1(0,T)$ *est une solution faible du problème (NPA) si :*

$$\int_0^T e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T e^{G(t)}u(t)v(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} e^{G((t_j)}I_j(u(t_j))v(t_j) - \int_0^T e^{G(t)}f(t,u(t))v(t)dt = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(0,T).$$

Maintenant, Considérons la fonctionnelle $\varphi : H_0^1(0,T) \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\phi(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} + \sum_{j=1}^{p} e^{G(t_j)} \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T e^{G(t)}F(t,u(t))dt,$$

où la fonction

$$F(t,u) = \int_0^u f(t,\xi)d\xi,$$

est la primitive de f*. En utilisant la continuité de* f *et* I_j*, on a* $\phi \in C^1(H_0^1(0,T),\mathbb{R})$*.*

Pour tout $v \in H_0^1(0,T)$ *on a :*

$$\phi'(u)(v) = \int_0^T e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt + \lambda \int_0^T e^{G(t)}u(t)v(t)dt + \sum_{j=1}^{j=p} e^{G((t_j)}I_j(u(t_j))v(t_j) - \int_0^T e^{G(t)}f(t,u(t))v(t)dt.$$

D'après la définition 3.1 *les solutions faibles du problème (NPA) correspondent aux points critiques de* ϕ.

Lemme 3.2. *Si* $u \in H_0^1(0,T)$ *est une solution faible de (NPA), alors* u *est une solution classique de (NPA).*

Preuve 3.3. *Évidemment* $u(0) = u(T) = 0$ *car* $u \in H_0^1(0,T)$, *d'aprés la définition de la solution faible, on a :*

$$\int_0^T e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt+\lambda\int_0^T e^{G(t)}u(t)v(t)dt+\sum_{j=1}^{j=p} e^{G((t_j)}I_j(u(t_j))v(t_j)-\int_0^T e^{G(t)}f(t,u(t))v(t)dt = 0 \tag{3.5}$$

Pour $j = 0,1,2,...,p$, *choisissons* $v \in H_0^1(0,T)$ *telle que* $v(t) = 0 \quad \forall t \in [0,t_j] \cup [t_{j+1},T]$, *alors :*

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{G(t)}u'(t)v'(t)dt + \lambda\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{G(t)}u(t)v(t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{G(t)}f(t,u(t))v(t)dt = 0. \tag{3.6}$$

D'après la définition de la dérivée faible, (3.6) *implique que :*

$$-\left(e^{G(t)}u'(t)\right)' + \lambda e^{G(t)}u(t) = e^{G(t)}f(t,u(t)). \tag{3.7}$$

D'où $u \in H^2(t_j,t_{j+1})$ *et* u *satisfait l'équation dans (NPA). Par intégration de* (3.5), *on a :*

$$-\sum_{j=1}^{p} e^{G(t_j)}\Delta u'(t_j)v(t_j)+e^{G(t)}u'(T)v(T)-e^{G(0)}u'(0)v(0)+\sum_{j=1}^{p} e^{G(t_j)}I_j(u(t_j))v(t_j)+$$
$$\int_0^T \left(-\left(e^{G(t)}u'(t)\right)' + \lambda e^{G(t)}u(t) - e^{G(t)}f(t,u(t))\right)v(t)dt = 0.$$

Combinons cela avec (3.7), *on obtient :*

$$\sum_{j=1}^{j=p} e^{G(t)} \left(\Delta u'(t_j) - I_j(u(t_j))\right) v(t_j) = 0.$$

Alors $\Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j))$ *pour tout* $j \in 1, 2, ..., p$.

Théorème 3.2. *Supposons que* f *et* I_j *sont continues et bornées.*

Si de plus $\lambda > -\lambda_1$*, alors le problème (NPA) admet au moins une solution.*

Preuve 3.4. *Montrons que* $\phi(u)$ *est faiblement semi continue inférieurement.*

Soient $(u_n) \subset H_0^1(0,T), u \in H_0^1(0,T)$*, telles que* $u_n \rightharpoonup u$*, alors* u_n *converge uniformément vers* u *sur* $[0,T]$ *et* $u_n \to u$ *dans* $L^2(0,T)$*, et en combinant le fait que* $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|u\|$*, nous avons*

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \phi(u_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(0,T)} + \sum_{j=1}^{p} e^{G(t_j)} \int_0^{u_n(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T e^{G(t)} F(t, u_n(t))dt \right) \\
&\geq \tfrac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(0,T)} + \sum_{j=1}^{p} e^{G(t_j)} \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T e^{G(t)} F(t, u(t))dt \\
&= \phi(u)
\end{aligned}$$

alors ϕ *est faiblement semi continue inférieurement.*

Ensuite, passons à démontrer que φ *est coercive. Prenons*

$M > 0$ *et* $M_j > 0, j = 1, 2, .., p$ *tels que*

$$|f(t,u)| \leq M \text{ pour tout } \quad t \in [0,T] \times \mathbb{R}$$

et

$$|I_j(u)| \leq M_j, \text{ pour tout } \quad u \in \mathbb{R}, j = 1, 2, .., p$$

Pour tout $u \in H_0^1(0,T)$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\phi(u) &\geq \tfrac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(0,T)} + \sum_{j=0}^{j=p} e^{G(t_j)} \int_0^{u(t_j)} I_j(t)dt - \int_0^T e^{G(t)} F(t,u(t))dt \\
&\geq \tfrac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(0,T)} - e^{\|g\|} \sum_{j=0}^{j=p} M_j|u(t_j)| - e^{\|g\|} M \int_0^T u(t)dt \\
&\geq \tfrac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(0,T)} + e^{\|g\|}\beta \sum_{j=0}^{j=p} M_j\|u\|_{H^1_0(0,T)} - e^{\|g\|}\beta TM\|u\|_{H^1_0(0,T)} \\
&\geq \tfrac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(0,T)} + c\|u\|_{H^1_0(0,T)},
\end{aligned}$$

où $c = e^{\|g\|}\beta \sum_{j=0}^{j=p} M_j - e^{\|g\|}\beta TM$*, est une constante positive. D'où*

$$\lim_{\|u\|_{H^1_0(0,T)} \to +\infty} \phi(u) = +\infty.$$

Ceci nous donne la coercivité de ϕ*.*

On déduit d'aprés le théorème 1.4 *que la fonctionnelle* ϕ *a un minimum qui est une solution faible du problème (NPA). En utilisant le lemme* 3.2*, le problème (NPA) admet une solution classique.*

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux questions d'existence de solutions pour des problèmes associés à des équations différentielles du second ordre, sous l'effet d'impulsions.
Deux types de problèmes aux limtes de Dirichlet ont été étudiés. Le premier est associé à des équations différentielles sans terme amorti tandis que le second traite le cas amorti. Dans chaque type de problèmes nous avons considèrè les deux cas : linéaire et non linéaire et nous avons montré la structure variationnelle sous-jacente à une équation différentielle impulsive dans chaque cas.
L'approche utilisée est variationnelle basée sur l'application du théorème de Lax Milgram (dans le cas linéaire) et sur une minimisation directe (dans le cas non linéaire).

Bibliographie

[1]] D. Bainov and P. Simeonov, Systems with Impulse Effect, Stability, Theory and Applications, Ellis Horwood, Chichester, 1989.

[2] M. Benchohra, J. Henderson and S. Ntouyas, Theory of Impulsive Differential Equations, Contemporary Mathematics and Its Applications, vol. 2. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris (1983)

[4] H.Chen and J. Li, Variational approach to impulsive differential equations with Dirichlet boundary conditions, Boundary Value Problems, 2010, (2010),16 pages.

[5] L. Chen and J. Sun, Nonlinear boundary value problem of first order impulsive functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 318(2), (2006), 726-741.

[6] J.Chu and J. J. Nieto, Impulsive periodic solutions of first-order singular differential equations, Bulletin of the London Mathematical Society, 40(1), (2008), 143-150.

[7] *J. B. Hiriart-Urruty, Du calcul différentiel au calcul variationnel : Un Aperçu de l'évolution de P. Fermat à nos jours. Version écrite d'un exposé à la journée FERMAT organisée á l'hôtel d'Assézat de Toulouse en octobre 2004, sous l'égide de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, pages 1-16.*

[8] *O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag France, Paris, 1993.*

[9] *V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Theory of impulsive differential equations, World Scientific, Singapore, (1989).*

[10] *J. Mawhin, Critical Point Theory and Application to nonlinear Differential Equations, Lectures given at the VIGRE Minicourse on Variational Methodsand nonlinear PDE, University of Utah, May 28-June 8, 2002.*

[11] *J. Mawhin and M. Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, vol.74, Springer, NewYork, NY, USA, 1989.*

[12] *V. Milman, A. Myshkis, On stability of motion in the presence of impulses, Sibirskii Mathematical J., 1, No. 11, (1960), 233-237 (in Russian).*

[13] *J. J. Nieto, Variational formulation of a damped Dirichlet impulsive problem, Applied Mathematics Letters, 23(8), (2010), 940-942.*

[14] *J. J. Nieto and D. O'Regan, Variational Approach to Impulsive Differential Equations, Nonlinear Analysis : Real World Applications, 10(2), (2009), 680- 690.*

[15] *D. Qian and X. Li, Periodic solutions for ordinary differential equations with sublinear impulsive effects, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 303(1), (2005), 288-303.*

[16] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Application to Differential Equations ; conference board of the mathematical sciences regional conference series in mathematics number 65.

[17] A. M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, Impulsive differential equation, World Scientific, Singapore, 1995

[18] J. Sun and D. O'Regan, Impulsive periodic solutions for singular problems via variational methods, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 86, (2012), 193-204.

[19] E.W.C. Van Groesen, Variational methods for nonlinear operator equations, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1979).

[20] M. Struwe, Variational Methods : Application to nonlinear partial Differential Equations and Hamiltonian systems, 3. ed., Berlin, Spinger, 2000.

[21] J. Xiao, J.J. Nieto, Variational approach to some damped Dirichlet nonlinear impulsive differential equations, J. Franklin Inst. 348(2), (2011), 369-377.

[22] J. Zhou, H. Chen, B. O. M. Almuaalemi, Existence and Multiplicity of Solutions for Some Damped Dirichlet Nonlinear Impulsive Differential Equations , differ. Equ. Dyn. Syst., 24(2), (2016), 135-148.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la recherche de solutions pour des problèmes de Dirichlet associés à des équations différentielles linéaires et non linéaires du second ordre, sous l'effet d'impulsions.
L'approche utilisée, est variationnelle basée sur le théorème de Lax-Miligam dans le cas linéaire et sur une minimisation directe dans le cas non linéaire.

Mots clés : Equation différentielle du second ordre, problème de Dirichlet impulsif, méthode variationnelle.

Abstract

In this thesis, we study the existence of solutions for impulsive Dirichlet problems associated to linear and nonlinear second-order differential equations.
We use variational approach, based on Lax-Miligram theorem in the linear case, and on a direct minimisation in the nonlinear case.

Key words: second order differential equation, impulsive Dirichlet problem, variational method.

ملخص

ناقشنا في هذه المذكرة اشكالية وجود الحلول لصنف من المسائل الحدية لدريكلي المرتبطة بالمعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية الخاضعة لنبضات٠ وقد تم ذلك باستخدام أساليب التغيرات٠

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، مسائل دريكلي ذات نبضات، أساليب التغيرات٠

.