République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Structures de Jacobi sur un algébroïde de Lie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Géométrie différentielle

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie différentielle

par

Kamel eddine Mokhtari [1]

Sous la direction de

Ahmed zeglaoui

Soutenue le 15/09/2020 devant le jury composé de

H. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
R. Nasri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : kamel.em@yahoo.com

بسم الله الرحمن الرحيم

اللهم صل على سيدنا محمد وسلم

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، وبفضله تتنزل الخيرات والبركات وترفع الدرجات، وبتوفيقه تتحقق المقاصد والغايات، وبذكره تتوالى الرحمات وتهذب العقبات . الحمد لله الذي أهلنا لخير العمل وأفضل الفضل، الحمد لله الذي برحمته اهتدى المهتدون وبعدله وحكمته ضل الضالون، الحمد لله الذي جعل الحمدَ مفتاحًا لذكره، وجعل الشكرَ سببًا للمزيد من فضله.

الحمد والشكر لله الذي كتب لنا إتمام هذا الخير

STRUCTURES DE GACOBI SUR UN ALGÉBROÏDE DE LIE

PAR

KAMEL-EDDINE MOKHTARI

LES OPÉRATIONS :

$\circ$: Compositions.

$\oplus$: Somme directe.

$\otimes$: Produit tensoriel.

$\wedge$: Produit extérieures.

$\langle\ ,\ \rangle$: Crochet de dualité.

i : Produit intérieur.

LES SYMBOLES :

x : Point.

M : Variété différentiable.

U : Ouvert

f, g, h : Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

a, b, c : Une sections de $\mathcal{A}$.

p, q, r : Un élément de $\mathbb{Z}$.

$\alpha, \beta, \gamma, \eta, \theta, \omega, \Omega$: Forme différentielle.

$\mathcal{X}^p(M)$: L'espace des champs de tenseurs contravariants de degré p, antisymétriques, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

TM : Fibré tangent.

T_xM : Fibré vectoriel associé au point x.

T^*M : Fibré cotangent .

T^*_xM : Dual de T_xM la fibré vectoriel associé au point x.

$\mathcal{X}^1(M)$: L'espace des champs de vecteurs .

$\mathcal{C}^\infty(M)$: L'espace des fonctions différentiables.

$\mathcal{X}(M)$: L'algébres extérieures des champs de tenseurs contravariants, antisymétrie sur M.

$\{\ ,\ \}$ Crochet de Jacobi ou le crochet de Poisson .

Λ, Π : Champs de 2-tenseurs antisymétrique.

$E, X, Z, P, Q, R, \xi, \zeta$: Champs de vecteurs .

Π : A-champs de deux vecteurs (A-tonsure de Poisson).

$[\ ,\ ]$: Crochet de Schouten-Nyenhuis ou le crochet de Lie.

$\phi, \rho, \rho^*, \sharp, \sharp_\Omega, \flat, \flat_\Omega, \rho_\Pi, \rho_{\omega,\theta}, \rho_{\Pi,\xi}$: Applications .

(M, Λ, E) : Variété de Jacobi.

(M, ω) : Variété symplectique .

(M,Π) : Variété de Poisson.
$(M,\{.,.\})$:Variété de Poisson.
(T_xM,ω_x) : L'espace vectoriel symplectique.
$(C^\infty(M,\mathbb{R},\{.,.\})$: Algébre de Poisson .
$\mathcal{A}$: Fibré vectoriel.
$\Gamma(\mathcal{A})$: L'espace des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{A}$.
$(\mathcal{A},[,],\rho)$: Algébroïde de Lie .
$(TM,,[,],\mathrm{id}_M)$: Algébroïde (fibré) tangent .
$(T^*M,[,],\rho)$ le Algébroïde (fibré) cotangent.
$\mathcal{A}_x$: Fibre de $\mathcal{A}$ (espace vectoriel) au-dessus x.
$(\mathcal{A},\rho,M)$: Fibré vectoriel.
$(\mathcal{A}^*,\rho^*,M)$: Dual de fibré vectorielle $(\mathcal{A},\rho,M)$.
$\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$: Produit tensoriel de fibré vectoriel.
$(\bigwedge^p\mathcal{A},\rho,M)$,$(\bigwedge^p\mathcal{A}^*,\rho^*,M)$: p produit extérieur de fibré vectoriel.
$\Gamma(\mathcal{A}^p)$: L'espace de section de $(\bigwedge^p\mathcal{A},\rho,M)$.
$\Gamma(\mathcal{A}^{*^p})$: L'espace de section de $(\bigwedge^p\mathcal{A}^*,\rho^*,M)$.
$\mathcal{L}$: La dérivé de Lie.
$\mathcal{L}_\rho(a)$: La dérivé de Lie de a telle que a est une sections de $\mathcal{A}$ et $\rho:\mathcal{A}\to M$.
d_ρ : A-dérivée extérieure.
$(\mathcal{A},[,],\rho,\Pi)$: Algébroïde de Lie-Poisson .
$[\,,\,]_\Pi$: Crochet de Koszul associé à Π, dans $\Gamma(\mathcal{A}^*)$.
$(\mathcal{A}^*,[,]_\Pi,\rho_\Pi)$: Algébroïde de Lie .
J_Π : Le Jabobianteur de le pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*,[,]_\Pi,\rho_\Pi)$.
$\sharp_\Omega$: Isomorphisme inverse de l'isomorphisme de fibre vectorielle $\flat_\Omega$.
(Π,ξ) : Structure de Jacobi sur le pré-algébroïde $(\mathcal{A},[,],\rho)$.
(Ω,η) : Structures cosymplectiques sur $\mathcal{A}$.
(Ω,η) : Structure de Contact.
$[\,,\,]^\lambda_{\Pi,\xi}$: Crochet dont $\Gamma(\mathcal{A}^*)$.
$(\rho_{\Pi,\xi},[\,,\,]^\lambda_{\Pi,\xi})$: Structure de pré-algébroïde sur le fibré dual de $\mathcal{A}$.
$(\mathcal{A}^*,[\,,\,]^\lambda_{\Pi,\xi},\rho_{\Pi,\xi})$: Pré-algébroïde associé au triplet (Π,ξ,λ).
$(\mathcal{A},[,],\rho,\Omega)$ un pré-algébroïde symplectique.
$(\mathcal{A}^*,[\,,\,]^\lambda_{\Pi,\xi},\rho_{\Pi,\xi})$: Algébroïde de Lie .
$(\mathcal{A},[,],\rho,\eta)$: Pré-algébroïde-Contact .
$(\mathcal{A}^*,[,]^\eta_{\Pi,\xi},\rho_{\Pi,\xi})$: Pré-algébroïde de Lie .

$(\mathcal{A}, [,], \rho, \omega, \theta)$: Pré-algébroïde localement conformément symplectique.
$(\mathcal{A}, [,], \rho, \exp^f \omega)$: Pré-algébroïde symplectique.
$(\mathcal{A}^*, [,]^\theta_{\Pi,\xi}, \rho_{\Pi,\xi})$: Pré-algébroïde de Lie.
$(\mathcal{A}^*, [,]^\theta_{\omega,\theta}, \rho_{\omega,\theta})$: Pré-algébroïde de Lie .

LES APPLICATIONS :

$\phi : M_1 \longrightarrow M_2$
$\rho : \mathcal{A} \to M.$
$\rho : \mathcal{A} \to TM.$
$\rho^* : \mathcal{A}^* \longrightarrow T^*M$
$\rho_x : \mathcal{A}_x \to T_xM$
$\Omega^\flat : TM \to T^*M$
$\Lambda^\sharp = (\Omega^\flat)^{-1} : T^*M \to TM.$
$\flat_\omega : TM \to T^*M$
$\{\ ,\ \} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$
$[\ ,\ ] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$
$[\ ,\ ] : \Gamma(\mathcal{A}) \times \Gamma(\mathcal{A}) \to \Gamma(\mathcal{A})$
$\sharp_\Pi : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}$
$\rho_\Pi : \mathcal{A}^* \to TM$
$\flat_\Omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$
$\sharp_{\Pi,\xi} : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}$
$\rho_{\Pi,\xi} : \mathcal{A}^* \to TM$
$\rho_{\omega,\theta} : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}$

Table des matières

0.1 Introduction

En 1780, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) donne les concepts de base de la géométrie symplectique. Né de la volonté d'une formulation mathématique naturelle de la mécanique classique, elle est à la rencontre de la géométrie différentielle et des systèmes dynamiques

Au fil du temps, ces concepts ont évolué pour devenir un peu plus indépendants, grâce notamment aux travaux de William Rowan Hamilton $(1805-1865)$, Siméon Denis Poisson $(1781-1840)$, Carl Jacobin $(1804-1851)$, Gaston Darboux $(1842-1917)$, Sophus Lie $(1842-1899)$, Henri Poincaré $(1854-1912)$, André Lichnerowicz $(1915-1999)$,...

Dans ce travail, nous intéressons à étudie de structure de Jacobi qui représentée par Les variétés de Jacobi ont à introduite séparément par A. Lichnerowicz et A. Kirillov. Les variété de Jacobi généralisent à la fois les variétés de Poisson, les variétés de contact et les variétés loca-lement conformément symplectiques. Et d'autre part, la l' algébroïde de Lie ou d'algébre de Lie-Rinehart généralise à la fois, le faisceau des champs de vecteurs sur une variété et les algébres de Lie de dimension finie. Les variétés de Poisson et les variétés munies d'une action de groupe fournissent de nom-breux exemples algébroïde de Lie. Le but de ce travail est de d'étudier les structures de Jacobi que connues sur un algébroïde de Lie :
Ce travail est organisé comme suite

- Le chapiter 1 débute avec la définition de crochet du Schouten-Nijenhuis des champs des multivecteurs. En suite, on définit les variétés de Jacobi et on cite des exemples comme variétés symplectiques , variétés de Poisson, les variétés de Contact, et les variétés localement conformément symplectiques.
- Le deuxiéme est consacré à l'étude des algébroïde de Lie avec des

exemples et leurs propriétés élémentaires

- Ce qui nous permet du chapiter 3 de parler du calcule différentielle sur un algébroïde de lie introduit par C.M Marle
- Dans le quatrième et dernier chapitre, ou parler des structures de Jacobi sur un algébroïde de Lie on commence par la notion d'algébroïde de Lie-Poisson, en suite introduit les structures de pré-algébroïdes de Lie associées à un algébroïde de Lie-Jacobi. Nous examinons plus particulièrement aux cas des algébroïde de Lie de Contact et aux algébroïdes de Lie localement conformément symplectique

À la fin du dernier chapitre, nous avons terminé le dernier épisode de ce travail et nous avons rapproché le concept de base de ce sujet

Chapitre 1

Variété de Jacobi

1.1 Le crochet de Schouten-Nijenhuis

1.1.1 Champs des multivecteurs

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et M est une variété différentiable, on noté $\mathcal{X}^p(M)$ l'espace des champs de tenseurs contravariants de degré p, antisymétriques, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- On rappelle qu'un élément P de $\mathcal{X}^p(M)$ est une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré vectoriel $\wedge^p(TM)$
- Pour tout point $x \in M$, P_x est un élément de l'espace $\wedge^p(T_xM)$ des formes p-multilinéaires alternées sur l'espace vectorielle cotangent $\wedge^p(T_x^*M)$
- L'espace $\mathcal{X}^1(M)$ est l'ensemble des champs de vecteurs différentiables, de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur la variété M.

Pour $p > 1$, les éléments de $\mathcal{X}^p(M)$ sont parfois appelés p-multivecteurs. Par convention, on pose :

$$\mathcal{X}^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$$

On noté

$$\mathcal{X}(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^p(M)$$

On sait d'ailleurs qu'en raison de l'antisymétrie, on a

$$\mathcal{X}^p(M) = \{0\} \, si \;\; p > n.$$

On peut donc écrire

$$\mathcal{X}(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \mathcal{X}^p(M)$$

On sait qu'il existe sur $\mathcal{X}(M)$ une loi de composition interne appelée produit extérieur, et notée $(P, Q) \mapsto P \wedge Q$. qui en fait une algébre associative graduée $\mathbb{Z}_2$ -commutative[1]. Le produit extérieur d'un élément P de $\mathcal{X}^p(M)$ et un élément Q de $\mathcal{X}^q(M)$ est un élément $P \wedge Q$ de $\mathcal{X}^{p+q}(M)$. on définit la formule telle que $\alpha_1, ..., \alpha_{p+q}$ sont des éléments de $T_x^* M$

$$(P \wedge Q)_x(\alpha_1, ..., \alpha_{p+q}) = \sum_{\sigma \in s(p,q)} \epsilon(\sigma) P_x(\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(p)}) Q_x(\alpha_{\sigma(p+1)}, ..., \alpha_{\sigma(p+q)})$$

$S(p, q)$ désigne l'ensemble des permutations σ de $1, ..., p+q$ qui respectent l'ordre relatif des p premiers et des q derniers éléments, c'est-*à*-dire qui vérifient

$$\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(p), \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < ... < \sigma(p+q)$$

o*ù* a noté $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ

1.1.2 Crochet de Schouten-Nijenhuis

Le crochet de Schouten-Nijenhuis est un prolongement naturel de la notion du crochet de Lie de deux champ de vecteurs, opérant sur $\mathcal{X}(M)$

1. Algébre associative graduée $\mathbb{Z}_2$ si, pour tous p et $q \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathcal{X}^p$ et $y \in \mathcal{X}^q$, on a $xy = (-1)^{pq} yx$.

Théorème 1.1 : Soit M est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et $\mathcal{X}(M)$ l'algébres extérieures des champs de tenseurs contravariants, antisymétrie sur M , alors il existe un application appelée crochet de Schouten-Nijenhuis

$$[\ ,\ ] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \tag{1.1}$$

vérifiant les propriétés suivantes :
$\forall P, Q, R \in \mathcal{X}(M)$, telle que $P \in \mathcal{X}^p(M)$ et $Q \in \mathcal{X}^q(M)$ et $R \in \mathcal{X}^r(M)$

1•

$$[\mathcal{X}^p(M), \mathcal{X}^q(M)] \subset \mathcal{X}^{p+q-1}(M)$$

2• l'antisymétrie :

$$[P, Q] = (-1)^{pq} [Q, P] \tag{1.2}$$

3• Formule de Leibniz :

$$[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{pq+r} Q \wedge [P, R] \tag{1.3}$$

4• Identité de Jacobi graduée :

$$(-1)^{p(r-1)} [P, [Q, R]] + (-1)^{q(p-1)} [Q, [R, P]] + (-1)^{r(q-1)} [R, [P, Q]] = 0 \tag{1.4}$$

Soit M est une variété différentiable de classe C^{∞} et $\mathcal{X}^i(M)$ est une espace de i-vecteur (i,e :champs de tenseurs contravariants de degré i, antisymétriques, de type $(i, 0)$), on définit l'opérateur dérivée de Lie $\mathcal{L}_x$ qui :

$$(\mathcal{L}_X Q)(x_0) = \frac{d}{dt} |_{t=0} \{exp(-tX)_* Q(exptX(x_0)\}$$

$(x_0 \in M, Q \in \mathcal{X}^q(M))$, et comme $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ telle que $X, Y \in \mathcal{X}^1(M)$;

par conséquent : il est naturel de définit
$\forall X_1, ..., X_p \in \mathcal{X}^1(M)$ l'opération

$$[X_1 \wedge ... \wedge X_p, Q] = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} X_1 \wedge ... \wedge \hat{X}_i \wedge ... \wedge X_p \wedge [X_i, Q]\,, \tag{1.5}$$

où $[X_i, Q] \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}_X Q$ et le chapeau ˆ dénoté l'absence du facteur correspondant , donc en utilisant (1.5) pour la démonstration

Démonstration

le (type locale) de (1.1) signifie que pour $x_0 \in M, [P,Q](x_0)$ ne dépend que la restriction des champs P, Q dans une voisinage de x_0
suppose que Q de (1.5) est $Q = Y_1 \wedge ... \wedge Y_p \quad (Y_i \in \mathcal{X}^1 M)$, alors

$$L_X(Y_1 \wedge ... \wedge Y_p) = \sum_{j=1}^{q} Y_1 \wedge ... \wedge [X, Y_j] \wedge ... \wedge Y_p$$

le produit par la formule (1.5)

$$[X_1 \wedge ... \wedge X_p, Y_1 \wedge ... \wedge Y_q] = (-1)^{p+1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge ... \wedge \hat{X}_i \wedge ... \wedge X_p \wedge \tag{1.6}$$
$$\wedge Y_1 \wedge ... \wedge Y_j \wedge ... \wedge Y_q.$$

de plus, si on noté $X_1 \wedge ... \wedge X_p = P$, Il en résulte de mémé que (1.6) peut être interprété comme

$$[X_1 \wedge ... \wedge X_p, Y_1 \wedge ... \wedge Y_q] = (-1)^{pq} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} Y_1 \wedge ... \wedge \hat{Y_j} \wedge ... \wedge Y_q \wedge [Y_j, P]\,. \tag{1.7}$$

où $[Y, P] = \mathcal{L}_Y P$.
Donc, prenons quelques éléments arbitraires $x_0 \in M, P \in \mathcal{X}^p(M), Q \in \mathcal{X}^q(M)$, par la technique connue de la partition de l'unité, si $p, q > 1$, ile un ouvert U voisinage de x_0 où :

$$P/U = (X_1 \wedge ... \wedge X_p)/U\,, Q/U = (Y_1 \wedge ... \wedge Y_q)/U \tag{1.8}$$

Pour certains champs des vecteurs, $X_1 \wedge ... \wedge X_p, Y_1 \wedge ... \wedge Y_q$, dons M, cela permet l'évidement de prendre (1.6) comme définition de l'opération de crochet générale $[P,Q](x_0)$, et à couse de (1.5) et (1.7), cette opération ne dépende que P et Q, et pas du choix des décomposition (1.8), il est également clair que c'est la façon unique de définir un crochet (type locale) ou (1.5) .

Par ailleurs, si $p = q = 0$ nous définirons que $[P, Q] = 0$, et si $Q > 1$, $q = 0 \Rightarrow [P, Q] = [Q, P]$ de (1.5) qui est facilement considéré comme équivalent à $[P, Q](\alpha_2, ..., \alpha_{p-1}) = P(dQ, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1})$, pour toute les 1-forme l'invariance de $\alpha_2, ..., \alpha_{p-1}$, cette montre l'invariance de $[P, Q]$, dans le ça particulier considéré.
Encore les mémés formules $(1.5), (1.6)$ et (1.7) impliquent évidement (1.2) alors (1.3) est une conséquence directe de (1.7) et en fait celle

$$\mathcal{L}_X(Q \wedge R) = (\mathcal{L}_X Q) \wedge R + Q \wedge (\mathcal{L}_X R)$$

si on met juste $P = X_1 \wedge ... \wedge X_p$
finalement (1.4) sera obtenue prenant la

$$P = X_1 \wedge ... \wedge X_p \,, Q = Y_1 \wedge ... \wedge Y_q \,, R = Z_1 \wedge ... \wedge Z_r$$

et en calculant crochet de (1.6) une annulation on prudent de terme, en utilisant particulier

$$[X_i, [Y_j, Z_k]] + [Y_j, [Z_k, X_i]] + [Z_k, [X_i, Y_j]] = 0$$

pour voir le résulte, si certain p, q, k disparaitre les résultats sont mémé plus facile, nous laissons les détails au depuis les écrire est longue mais technique seulement, le calcul se déroule comme suit :

$$[Q, R] = (-1)^{q+1} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{j+k} [Y_j, Z_k] \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \hat{Y}_j \wedge ... \wedge Y_q \wedge Z_1 \wedge ... \wedge \hat{Z}_k \wedge ... \wedge Z_r;$$

$$[P, [Q, R]] = (-1)^{p+q} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{j+k+i+1} [X_i, [Y_j, Z_k]] \wedge$$

$$\wedge X_1 \wedge ... \wedge \hat{X}_i \wedge ... \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \hat{Y}_j \wedge ... \wedge Y_q \wedge Z_1 \wedge ... \wedge \hat{Z}_k \wedge ... \wedge Z_k +$$

$$+(-1)^q \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{j+k+i+1}([X_i, Y_s] \wedge [Y_j, Z_k] - [X_i, Y_s] \wedge [Y_s, Z_k]) \wedge$$

$$\wedge X_1 \wedge ... \wedge \hat{X}_i \wedge ... \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \hat{Y}_s \wedge ... \wedge \hat{Y}_j \wedge ... \wedge Y_q \wedge \wedge Z_1 \wedge ... \wedge \hat{Z}_k \wedge ... \wedge Z_p -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{t<k=1}^{r} (-1)^{j+k+i+1}([X_i, Z_t] \wedge [Y_j, Z_k] - [X_i, Z_k] \wedge [Y_s, Z_t]) \wedge$$

$$\wedge X_1 \wedge ... \wedge \hat{X}_i \wedge ... \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \wedge \hat{Y}_j \wedge ... \wedge ... \wedge Y_q \wedge Z_1 \wedge ... \wedge \hat{Z}_t \wedge ... \wedge \hat{Z}_k \wedge ... \wedge Z_r.$$

puis permutation cyclique.

Remarque 1.2

1) Une autre définition de crochet de Schouten-Nijenhuis peuvent être obtenus comme suit :

$$(i(X_1 \wedge ... \wedge X_k)\omega)(...) = \omega(X_1, ..., X_k, ...), \tag{1.9}$$

où ω est une fourme différentiel, et qui définit $i(P)\omega$, $\forall P \in A^k(M)$. Puis un calcul algébrique basé sur (1.6) donne

$$i([P,Q])\omega = (-1)^{q(p+1)} i(P)d(i(Q)\omega) + +(-1)^p i(Q)d(i(P)\omega) - i(P \wedge Q)d\omega, \tag{1.10}$$

$\forall P \in \mathcal{X}^p(M)$, $\forall Q \in \mathcal{X}^q(M)$, $\forall \omega \in \Omega^{p+q-1}(M)$. Clairement, (1.10) peut également être utilisée comme définition de le crochet. Nous préférons prouver(1.10) plus tard (proposition (1.1)) par un calcul différent.

1.2 Variété de Jacobi

Définition 1.3 : Une structure de Jacobi sur une variété M est définie par une application bilinéaire sur $\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M)$, appelée le crochet de Jacobi et noté

$$(f, g) \mapsto \{f, g\}$$

telle que :

pour $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$
i) l'antisymétrie :

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

ii) l'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

iii) Le crochet est local, i.e, le support de $\{f, g\}$ est contenu dans l'intersection le support de f et g

Remarque 1.4 : toute variété admet cette structure est appelée variété de Jacobi

Proposition 1.5 :

Soit M est une variété différentiable, on considéré sur M une champs de 2-tenseurs antisymétrique Λ et un champs de vecteurs E

a)
$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) + \langle fdg - gdf, E\rangle \,.\, f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) \tag{1.11}$$

b)
$$[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda \;\;,\;\; [E, \Lambda] = \mathcal{L}_E\Lambda = 0 \tag{1.12}$$

o*ù* [,] est le crochet de Schouten-Nyenhuis, lorsqu'elles condition (1.12) sont satisfaites, on dit que le couple (Λ, E) définit sur M une structure de Jacobi et que (M, Λ, E) et une variété de Jacobi, Le crochet de (1.11) s'appeler crochet de Jacobi

Remarque 1.6 : Dans les cas particulier ou E est identiquement nul sur M les conditions (1.12) se réduisent à

$$[\Lambda, \Lambda] = 0$$

Morphisme de Jacobi :

Soient (M_1, Λ_1, E_1) et (M_2, Λ_2, E_2) deux variétés de Jacobi et $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ une application différentiable, On dit que $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ est une morphisme de Jacobi si Λ_1 et E_1 sont projetables par ϕ sur M_2 et pour projections, respectivement, Λ_2, E_2 i.e

$$\phi_* \Lambda_1 = \Lambda_2 \quad , \quad \phi_* E_1 = E_2.$$

lorsque $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ est une morphisme de Jacobi, on dit que les structures (Λ_1, E_1) et (Λ_2, E_2) sont équivalantes.

1.3 Exemple de variété de Jacobi

1.3.1 Variétés symplectiques

Définition 1.7 : Une forme symplectique sur une variété différentiable M est une 2-forme différentielle Ω fermée (c'est-à-dire vérifiant $d\Omega = 0$) et partout non dégénérée (c'est-à-dire partout de rang égal à la dimension de M). Une variété M munie d'une forme symplectique Ω est appelée variété symplectique et notée (M, Ω).

Propriétés élémentaires

i) Soit (M, Ω) une variété symplectique, $\forall x \in M$, on dit que T_xM l'espace vectoriel tangent en x , muni de la forme bilinéaire Ω_x ,

(T_xM, Ω_x) est un espace vectoriel symplectique [2].
la dimension de M est paire ($dimM = 2n$).

ii) L'espace $\mathbb{R}^{2n}$(coordonnées $x_1, ..., x_{2n}$), muni de la 2-forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{i+n} \wedge x^i$$

est une variété symplectique

iii) Sur une variété différentiable de dimension 2, toute 2-forme différentielle est automatiquement fermée. Par suite, toute variété différentiable de dimension 2 orientable peut être munie d'une structure symplectique.

Remarque 1.8 : Soit (M, Ω) une variété symplectique, l'application d'un fibré

$$\Omega^\flat : TM \to T^*M \ \ , \ \ \Omega^\flat(X) = -i(X)\Omega.$$

comme Ω est non dégénérée, on noté $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$.
On appelée le crochet de poisson de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est définit par :

$$\{f, g\} = \Omega(\Lambda^\sharp(df), \Lambda^\sharp(dg)) = \left\langle dg, \Lambda^\sharp(df)\right\rangle = -\left\langle df, \Lambda^\sharp dg\right\rangle.$$

comme il satisfait l'identité de Jacobi, on dit que les variétés symplectiques est une cas particulière de variété de Jacobi

1.3.2 Variété de Poisson

Le crochet de Poisson :

Définition 1.9 : Soit (M, Ω) une variété symplectique, a tout couple de fonctions différentiables (f, g) sur M, on associé la fonction

$$\{f, g\} = i(X_f)dg \ ,$$

2. Un espace vectoriel V muni d'une forme symplectique Ω, est appelé espace vectoriel symplectique et noté (V, Ω)

où X_f le champ de vecteur hamiltonien associé à f, défini par $i(X_f)\Omega = -df$. On dit $\{f, g\}$ est le crochet de Poisson des fonctions f et g :

Proposition 1.10 : Le crochet de Poisson a les propriétés suivantes :

On a, pour tout couple de fonctions différentiables (f, g), en notant X_f X_g le champ de vecteurs à f et g hamiltonien

1) Le crochet de Poisson est une application bilinéaire

2)

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g)$$

3) Vérifie la formule de Leibniz :

$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}$$

4) le champ hamiltonien $X_{\{f,g\}}$:

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$$

5) Vérifie l'identité de Jacobi :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Démonstration

1) Par définition

2)

$$\{f, g\} = i(X_f)dg = -i(X_g)df = -i(X_g)_(X_f)\Omega = \Omega(X_f, X_g)$$

3)

$$\{f, g_1 g_2\} = i(X_f)d(g_1 g_2) = i(X_f)d(g_1)g_2 + g_1 i(X_f)d(g_2) = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}$$

4)

$$[X_f, X_g] h = X_f(X_g h) - X_g(X_f h) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f,g\}} h$$

5)

$$\{\{f, g\}, h\} = [X_f, X_g] h$$

$$\{\{g,h\},f\} = -\{f,\{g,h\}\} = -X_f \cdot (X_g h)$$

$$\{\{h,f\},g\} = \{g,\{h,f\}\} = X_g \cdot (X_f h)$$

En ajoutant, on obtient

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

.

Définition 1.11 : Une structure de Poisson sur une variété différentiable M est définie par la donnée d'une application de $\mathcal{C}^\infty(M)$ dans $\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M)$, notée $(f,g) \mapsto \{f,g\}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1) L'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(M)$ muni de cette application comme loi de composition est une algébre de Lie. Autrement dit, cette application est bilinéaire, antisymétrique

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

et vérifie l'identité de Jacobi

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \, f,g \in C^\infty(M)$$

.

2) Elle vérifie la formule de Leibniz :

$$\{f,g_1 g_2\} = \{f,g_1\} g_2 + g_1 \{f,g_2\}$$

$$\{f_1 f_2,g\} = \{f_1,g\} f_2 + f_1 \{f_2,g\}$$

On dit que $(M, \{.,.\})$ est appelée variété de Poisson, et l'algébre de Lie $(C^\infty(M, \mathbb{R}, \{.,.\})$ est appelée algébre de Poisson de $(M, \{.,.\})$.

Remarque 1.12 : Soit (M, Λ, E) est une variété de Jacobi et E est une champs des vecteurs, identique nul en appelle la variété de Poisson noté (M, Λ), une variété de Jacobi est une variété de Poisson si seulement si le crochet de Poisson est un dérivation, en particulier que la variété symplectique de exemple (1) est une variété de Poisson, le 2-tenseurs Λ associé morphisme de fibrés vectoriel

$$\Lambda^\sharp : TM \to T^*M$$

telle que $\langle \eta, \Lambda^\sharp \xi \rangle = \Lambda(\xi, \eta)$.

1.3.3 Variété de Contact

Définition 1.13 : Soit M est une variété différentiable dimension impair $(2n + 1)$, on appelle structure de Contact sur M, la donnée d'une 1-forme par tout no nul η sur M

$$\eta \wedge (d\eta)^{\wedge n} \neq 0$$

une appelle variété différentiable dimension impair munie d'une forme de Contact η est une variété de Contact
Remarque 1.14 : En particulier, $\eta \wedge (d\eta)^{\wedge n} \neq 0$ est un forme de volume sur M, associée une variété de Contact est orientable. Aussi le rang de $d\eta$ est $2n$ sur l'algèbre de Grassmann T_x^*M à chaque point $x \in M$, et donc nous avons un sous-espace de dimension 1 , $\{X \in T_xM / d\eta(X, T_xM) = 0\}$, dont $\eta \neq 0$ et qui est complémentaire au sous-espace définie par $\eta = 0$. Par conséquent le choix de ξ_x dans ce sous-espace normalisée par $\eta\xi_x = 1$, nous avons un champ de vecteurs global ξ satisfaisant

$$i_\xi d\eta = o \quad , \quad \eta(\xi) = 1.$$

ξ est appelé le champ de vecteur caractéristique ou le champ de Reeb de la structure de Contact η.
En utilisant la formula de Cartan[3] on obtient immédiatement,

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0 \quad , \quad \mathcal{L}_\xi d\eta = 0$$

On noté $\mathcal{D}$ la distribution de Contact ou sous-fibré définie par le sous-espace $\mathcal{D}_x = \{\xi_x \in T_x M : \eta_x(\xi_x) = 0\}$.
Remarque 1.15 : Le sens de la condition $\eta \wedge (d\eta)^{\wedge n} \neq 0$, est que le sous-fibré de Contact est aussi loin d'être intégrable que possible, en particulier, $\mathcal{D}$ tourne comme un seul mouvement sur la variété. Pour un sous-fibré défini par une 1-forme η d'être intégrable, il faut et il suffit que $\eta \wedge (d\eta)^{\wedge n} \neq 0$.
Théorème 1.16 : Soit η une 1-forme sur une variété différentiable M^n en supposons que $\eta \wedge (d\eta)^{\wedge n} \neq 0$ et $(d\eta)^{\wedge(p+1)} \equiv 0$ sur M^n. par suite, il existe un système de coordonnées pour chaque point $(x^1, ..., x^p, y^1, y^{n-p})$de telle sorte que $\eta = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$, Ainsi, sur chaque point d'une variété de Contact (M^{2n+1}, η)il existe des coordonnées (x^i, y^i, z) ,$i = 1, ..., n$ telle que $\eta = dz - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$
Exemples

1) $\mathbb{R}$ est une variété de Contact, munie d'une forme de Contact :

$$\eta = dz + \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

avec (x, y, z) système de coordonnées sur $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{R}^{2n+1}$est une variété de Contact, munie d'une forme de Contact :

3. $\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

avec $(x^i, y^i, z^i), i = 1, ..., n$ système de coordonnées sur $\mathbb{R}^{2n+1}$

3) La variété M^3 munie d'une 1-forme $\eta = (x+y)dx$, n'est pas une variété de Contact, avec (x, y, z) système de coordonnées surM^3 .

Remarque 1.17 : Soit M est une variété différentiable dimension impair $(2n+1)$ munie d'une 1-forme Cantact η telle que maintenant elle disparaît, si E le champ de Reeb i,e : l'unique champ de vecteur sur M telle que

$$i(E)\eta = 1,\ i(E)d\eta = 0$$

si $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ est une morphisme de fibrés vectoriels, telle que pour chaque $\xi \in T^*M$

$$i(\Lambda^\sharp \xi)\eta = 0 \quad , \quad i(\Lambda^\sharp \xi)d\eta = -(\xi \langle \xi, E \rangle \eta).$$

On défini le 2-tenseur Λ par

$$\Lambda(\xi, \eta) = \left\langle \eta, \Lambda^\sharp \xi \right\rangle = -\left\langle \xi, \Lambda^\sharp \eta \right\rangle$$

avec ξ, η deux élément de T^*M qui à la même fibré, alors Λ et E définie un structure de Jacobi sur M, détermine par 1-forme Cantact η

1.3.4 Variété localement conformément symplectique

Soit M une variété différentielle de dimension paire $2n \geq 4$.

Définition 1.18 : Une structure localement conformément symplectique sur M est un couple (ω, θ) composé d'une 1-forme différentielle fermée

θ d'une 2-forme différentielle non dégénérée ω sur M telles que

$$d\omega + \theta \wedge \omega = 0$$

Remarque 1.19 : Dans le cas particulier ou la forme θ est exacte, i. e. $\theta = df$, on dit que (ω, df) est conformément symplectique, ce qui est équivalent à $e^f\omega$ est symplectique

Variété de Jacobi associée à une variété localement conformément symplectique :
La proposition ci-dessous montre que la donnée d'une variété localement conformément symplectique est équivalent à la donnée d'une variété de Jacobi dont le champ de bivecteurs sous-jasent est non dégénéré.
Supposons que $\omega \in \Omega^2(M)$ est une 2-forme non dégénérée et soit $\theta \in \Omega^1(M)$. Supposons que le couple (Λ, E) est associé au couple (ω, θ) c'est-à-dire qu'on a $i_{\sharp_\Lambda(\alpha)}\omega = -\alpha$ pour tout $\alpha \in \Omega^1(M)$, et $i_E\omega = -\theta$. Autrement dit,

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \omega(\sharp_\omega(\alpha), \sharp_\omega(\beta))$$

o*ù* $\sharp_\omega$ est l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme de fibrés vectoriels $\flat_\omega : TM \to T^*M$, $\flat_\omega(X) = i_X\omega$,et $E = \sharp_\omega(\theta)$. Nous avons le résultat suivant

Lemme 1.20 : Quels que soient les champs de vecteurs $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, si $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$ sont les 1-formes différentielles telles que $X = \sharp_\Lambda\alpha$, $Y = \sharp_\Lambda\beta$, $Z = \sharp_\Lambda\gamma$, alors on a

1. $\Lambda(\alpha, \beta) = \omega(\sharp_\omega(\alpha), \sharp_\omega(\beta))$
   $(d\omega + \theta \wedge \omega)(X, Y, Z) = (\frac{1}{2}[\Lambda, \Lambda] - E \wedge \Lambda)(\alpha, \beta, \gamma)$.
2. $\mathcal{L}_\omega(X, Y) = -\mathcal{L}_E\Lambda(\alpha, \beta)$

Démonstration : En utilisant l'identité $\Lambda(\alpha, \beta) = \omega(X, Y)$ et l'identité (2), il vient

$$\omega([X, Y], Z) = \gamma([X, Y]) = -\frac{1}{2}[\Lambda, \Lambda](\alpha, \beta, \gamma) - \Lambda([\alpha, \beta]_\Lambda, \gamma)$$

d'où, avec un calcul direct, l'on déduit

$$d\omega(X, Y, Z) = \frac{1}{2}[\Lambda, \Lambda](\alpha, \beta, \gamma)$$

Par ailleurs, remarquons que $\theta(X) = i_X\omega(X) = i_X\omega(E) = -\alpha(E)$, de mémé $\theta(Y) = -\beta(E)$ et $\theta(Z) = -\gamma(E)$, d'où $\theta \wedge \omega(X, Y, Z) = -E \wedge \Lambda(\alpha, \beta, \gamma$.

D'où, avec (3), la première assertion du lemme. Pour la deuxième assertion, il suffit de remarquer que
on a

$$\Lambda(\mathcal{L}_E\alpha,\beta) = -\mathcal{L}_E\alpha(Y) = -E(\alpha(Y)) + \alpha(\mathcal{L}_E Y) = E(\omega(X,Y)) - \omega(X,\mathcal{L}_E Y)$$

Proposition 1.21 : Le couple (ω,θ) est une structure localement conformément symplectique si et seulement si le couple (Λ, E) est une structure de Jacobi.

Démonstration : De l'assertion 1. du lemme 1.1 on déduit que l'identité $d\omega + \theta\wedge\omega = 0$ est satisfaite si et seulement l'identité $[\Lambda,\Lambda] = 2E\wedge\Lambda$ l'est, et si l'une des deux est satisfaite alors, en utilisant la formule de Cartan, on obtient que

$$\mathcal{L}_E\omega = d(i_E\omega) + i_E d\omega = -d\theta - i_E(\theta\wedge\omega) = -d\theta,$$

donc, avec l'assertion 2. du lemme 1.1, que $\mathcal{L}_E\Lambda = 0$ si et seulement si $d\theta = 0$.

Chapitre 2

Algébroïde de Lie

Les champs de vecteurs sur une variété différentiable M forment une algébre de Lie $\mathcal{X} = \mathcal{X}(M)$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, mais de plus c'est un module sur la $\mathbb{R}$-algébre $A = \mathcal{C}^\infty(M)$ (associative et commutative) formée des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M. Les deux structures sont liées par une relation du type « Leibniz »

$$[a, fb] = f[a, b] + \mathcal{L}_a(f) \cdot b$$

(a et b sont des champs de vecteurs, f une fonction et $\mathcal{L}$ la dérivée de Lie). Cela conduit à la définition d'une algébre de Lie-Rinehart $\mathcal{X}$ sur le couple $(\mathbb{R}, A)$, où $\mathcal{L}$ désigne un homomorphisme de l'algébre de Lie $\mathcal{X}$ (sur $\mathbb{R}$) dans l'algébre de Lie des $\mathbb{R}$-dérivations de A satisfaisant à (1) et

$$\mathcal{L}_{fa}(g) = f \cdot \mathcal{L}_a(g)$$

(f et g sont des éléments de A).

2.1 Définition et Exemples

Définition 2.1 : Un algébroide de Lie sur une variété M est un fibré vectoriel $\mathcal{A}$ de base M, muni des données suivantes :

a) Une structure d'algébre de Lie réelle sur l'espace $\Gamma(\mathcal{A})$ des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{A}$.
b) Un homomorphisme de fibrés vectoriels $\rho : \mathcal{A} \to TM$.
L'identité à respecter est la suivante :

$$[a, fb] = f[a, b] + \mathcal{L}_a^\rho(f) \cdot b$$

telle que $\mathcal{L}_a^\rho(f) = \rho(a)f = \mathcal{L}_{\rho(a)}f$

si a, b sont des sections de $\mathcal{A}$, et f une fonction (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur M.

Dans ces conditions, ρ définit un homomorphisme d'algébres de Lie réelles de $\Gamma(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{X}(M)$.

Naturellement, $\Gamma(\mathcal{A})$ est une $(\mathbb{R}, C^\infty(M))$-algébre de Lie-Rinehart

Remarque 2.2 : Pour simplification dénote l'algébroïde de Lie par $(\mathcal{A}, [,] , \rho)$. telle que $\rho : \mathcal{A} \to M$

Définition 2.3

a) Un algébroïde alterné $(\mathcal{A}, [,] , \rho)$ est un pré-algébroïde de Lie si

$$\rho([a, b]) = [\rho(a), \rho(b)] \qquad \forall a, b \in \Gamma(\mathcal{A})$$

et un algébroïde de Lie si $(\Gamma(\mathcal{A}), [,])$ est une algébre de Lie, c'est-à-dire si

$$[a, [b, c]] + [a, [b, c]] + [a, [b, c]] \quad \forall a, b, c \in \Gamma(\mathcal{A})$$

b) Un algébroïde de Lie est un pré-algébroïde de Lie. D'un autre côté, un pré-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [,] , \rho)$ dont l'ancre ρ est un isomorphisme est un algébroïde de Lie isomorphe à l'algébroïde tangent $(TM, , [,] , \mathrm{id}_M)$ de M.

Lemme 2.4 : Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un algébroïde de Lie, alors l'application ancre ρ et une l'homomorphisme de l'algébroïde de Lie :

$$\rho\,[a,b] = [\rho a, \rho b] \;\forall a, b \in \Gamma(\mathcal{A}) \tag{2.1}$$

Démonstration : d'après identité de Jacobi et la règle de Leibniz, on trouve

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & [[a,b], fc] + [[b,fc], a] + [[fc,a], b] \\ & = & f\,[[a,b], c] + (\rho\,[a,b]\,(f))c \\ & & +f\,[[b,c], a] - (\rho a(f))\,[b,c] + (\rho b(f))\,[c,a] - (\rho a(\rho b(f)))c \\ & & +f\,[[c,a], b] - (\rho(f))\,[c,a] - (\rho a(f))\,[c,b] + (\rho b(\rho a(f)))\gamma \\ & = & ((\rho\,[a,b] - [\rho a, \rho b])(f))c \end{array}$$

$a, b, c \in \Gamma(\mathcal{A})$ et f est une fonction, on conclut que $\rho\,[a,b] = [\rho a, \rho b]$.

Remarque 2.5 : La condition (2.1) est une propriété fondamentale des algébroïdes de Lie, et est souvent considérée comme faisant partie de la définition d'un algèbroïde de Lie, bien qu'il soit une conséquence des autres conditions.

Exemple 1 : Un algébre de Lie peut être considéré comme un algébroïde de Lie sur un point

Exemple 2 : Soit (M, Π) est une variété de Poisson, il y a une nature la structure de l'algebroide de Lie $(T^*M, [,], \rho)$ le fibré cotangent de M, dont l'application d'ancre $\rho : T^*M \to TM$ est une usuel application d'ancre de Π, $\langle \rho\alpha, \beta\rangle = \Pi(\alpha, \beta)$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma(TM^*)$, et dont le crochet de Lie est :

$$\begin{array}{rcl} [\alpha, \beta]_\Pi & = & \mathcal{L}_{\rho\alpha}\beta - \mathcal{L}_{\rho\beta}\alpha - \mathrm{d}\Pi(\alpha, \beta) \\ & = & \mathrm{d}(\Pi(\alpha, \beta)) + i_{\rho\alpha}\mathrm{d}\beta - i_{\rho\beta}\mathrm{d}\alpha \end{array}$$

Ce qui précède le crochet de Lie sur 1-forme différentiel de (M, Π). Il est immédiat que le crochet à faire la régler de Leibniz en effet :

$$\begin{array}{rcl} [\alpha, f\beta]_\Pi & = & \mathrm{d}(f(\Pi(\alpha, \beta))) + i_{\rho\alpha}\mathrm{d}(f\beta) - f i_{\rho\beta}\mathrm{d}\alpha \\ & = & f\,[\alpha, \beta] + \Pi(\alpha, \beta)\mathrm{d}f + i_{\rho\alpha}(\mathrm{d}f \wedge \beta) \\ & = & f\,[\alpha, \beta] + ((\rho\alpha)(f))\beta. \end{array}$$

Le crochet satisfait vérifie l'identité de Jacobi. Si $\alpha = \mathrm{d}f$, $\beta = \mathrm{d}g$, $\gamma = \mathrm{d}h$ sont 1-forme exact, par la définition $[\mathrm{d}f, \mathrm{d}g] = \mathrm{d}\{f, g\}$ et donc, et l'identité de Jacobi de $(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g, \mathrm{d}h)$ appliquer l'identité de Jacobi de (f, g, h) à propos le crochet de Poisson. Plus général pour 1-forme, on peut utiliser la régler de Leibniz réduire au cas où le 1-forme exact. $(T^*M, [,], \rho)$ est appelée l'algébroïde cotangent de (M, Π).

2.2 Algèbre d'isotropie

Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un algébroïde de Lie sur la variété M. Pour tout point $x \in M$, on noté que $\mathcal{A}_x$ le fibré de $\mathcal{A}$ au-dessus x, et Ker ρ_x le noyau de l'application ancre

$$\rho_x : \mathcal{A}_x \to T_x M$$

le noyau Ker ρ_x a un naturelle de la structure d'algébre de Lie, définie comme suit.

$\forall a_x, b_x \in$ Ker ρ_x, noté que a, b des sections arbitraires de $\mathcal{A}$ dont la valeur à x est a_x et b_x respectivement,on pose :

$$[a_x, b_x] = [a, b]\,(x)$$

Ci-dessus le crochet sur Ker ρ_x est bien définie. En effet, si $\widetilde{a}$ est une section de $\mathcal{A}$ avec $\widetilde{a}(x) = a_x$, en suite, localement, il y a des fonctions $f_1, ..., f_n$ sur M qui disparaît à x et a base $a_1, ..., a_n$ sur $\mathcal{A}$ telle que $\widetilde{a} - a = \sum f_i a_i$. d'après la régle de Leibniz on trouve $[\widetilde{a}, b]\,(z) - [a, b]\,(z) = \sum f_i(z)\,[a_i, b_i]\,(z) - \sum(\rho b)(f_i)(z) a_i(z) = 0$, parce que $f_i(z) = 0$ et $\rho b(x) = 0$.
Le noyau Ker ρ_x avec sa naturelle le crochet de Lie est appelé algèbre

d'isotropie de $\mathcal{A}$ à x.

2.3 Morphismes d'algébroïdes de Lie

Définition 2.6 : Soient $(\mathcal{A}\, [,]\, , \rho)$, $(\mathcal{A}', [,]\, , \rho')$ deux algébroïde de Lie un morphisms d' algébroïde de Lie est une morphisme de fibré vectoriel $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ (i.e., est un application linéaire en fibré lisse), qui est un compatible avec l'application ancre et le crochet de Lie.

Proposition 2.7 :

a) On noté la projection de ϕ à M par même lettre $\phi : M \to M'$. le compatibilité de ϕ avec l'application ancre signifie que

$$\rho(\phi(a)) = (\phi)_*(\rho a) \ , \forall a \in \mathcal{A}.$$

b) Le compatibilité de ϕ avec le crochet de Lie signifie que pour tout section a, b de $\mathcal{A}$ avec décomposition

$$\phi \circ a = \sum_i f_i(a'_i \circ \phi),\ \phi \circ b = \sum_i g_i(b'_i \circ \phi),$$

où g_i, f_i des fonction sur M et a'_i, b'_i des section de $\mathcal{A}'$, on trouve

$$\phi \circ [a, b] = \sum_{ij} f_i g_i([a'_i, b'_i] \circ \phi) + \sum_j (\rho a(g_j))(b'_i \circ \phi) - \sum_j (\rho b(f_j))(a'_j \circ \phi)$$

En particulier, si les section a', b' de $\mathcal{A}'$ telle que

$$\phi \circ a = b' \circ \phi,\ \phi \circ b = b' \circ \phi,$$

alors nous avons aussi

$$\phi \circ [a, b] = [a', b'] \circ \phi$$

Exemple 1 : Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ un algébroïde de Lie alterné sur M, l'application ancre $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow TM$ est un morphisme d' algébroïde de Lie $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ à isomorphe à l' algébroïde tangent de M.

Exemple 2 : Soit $(\mathcal{A} \to M, [,], \rho)$ un algébroïde de Lie alterné sur M et $x \in M$. L'inclusion de l'application à partir de l'algébre isotrope ker ρ_x de x est un morphisme d'algébroïde de Lie

Exemple 3 : Soient deux algébroïdes de Lie $\mathcal{A}_1$ sur M_1 et $\mathcal{A}_2$ sur M_2, nous pouvons définir leur produit direct l'algébroide de Lie par $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ et produit direct de dual par $\mathcal{A}_1^* \times \mathcal{A}_2^*$. La projection natural de $\mathcal{A}_1 \times A_2$ sur $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ est un morphisme d'algébroïde de Lie

Chapitre 3

Calcul différentielle sur un algébroïde de Lie

3.1 Produit extérieur de fibré vectoriel et le dual

3.1.1 Fibrés vectoriels

Soit M une variété différentiel, un fibré vectoriel $(\mathcal{A}, \rho, M)$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de rang n sur M est la donnée d'un espace vectoriel réel $\mathcal{A}_x$ de dimension n dépendant continument de $x \in M$, telle que $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow M$ une application continue et une structure d'espace vectoriel réel sur chaque fibré $\mathcal{A}_x = \rho^{-1}(x)$.

Dual de fibrés vectoriels : Soit $(\mathcal{A}, \rho, M)$ est un fibré vectorielle sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, noté le dual de fibré vectorielle par $(\mathcal{A}^*, \rho^*, M)$, qui $\mathcal{A}_x^* = {\rho^*}^{-1}(x)$ le fibré associé à un point $x \in M$ est un dual de fibré vectoriel $\mathcal{A}_x = \rho^{-1}(x)$ de $(\mathcal{A}, \rho, M)$, i.e ; l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{A}_x$.

Pour chaque point $x \in M$, le couplage de dualité $\mathcal{A}_x^* \times \mathcal{A}_x \to \mathbb{K}$ dénoté que

$$(\eta, v) \mapsto \langle \eta, v \rangle \, .$$

Exemple 1 : Le fibré trivial de rang n sur M est $M \times \mathbb{R}^n$ avec la structure d'espace vectoriel constante sur $\mathbb{R}^n$. Les sections du fibré trivial s'identifient aux applications $M \to \mathbb{R}^n$.

Exemple 2 : Le fibré tangent d'une variété de classe $\mathcal{C}^k$ est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Ses sections sont les champs de vecteurs sur la variété.

Produit tensoriel de fibré vectoriel : Soient $(\mathcal{A}_1, \rho_1, M)$ et $(\mathcal{A}_2, \rho_2, M)$ deux fibré vectoriel au-dessus de M.

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \{(x, \zeta) \setminus x \in M \;\; et \;\; \zeta \in (\mathcal{A}_1)_x \otimes (\mathcal{A}_2)_x\}$$

. $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ est une fibré vectoriel au-dessus de M, le rang est le produit des rang de $\mathcal{A}_1$ et de $\mathcal{A}_2$.

Remarque 3.1 : Soit $(\mathcal{A}, \rho, M)$ est une fibré vectoriel de rang= k, et $(\mathcal{A}^*, \rho^*, M)$ le dual. pour chaque $p \in \mathbb{Z}$,$(\bigwedge^p \mathcal{A}, \rho, M)$ et $(\bigwedge^p \mathcal{A}^*, \rho^*, M)$ leurs p produit extérieur.

Pour chaque $x \in M$, considérons les espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradées

$$\bigwedge \mathcal{A}_x = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \bigwedge^p \mathcal{A}_x,$$

et

$$\bigwedge \mathcal{A}_x^* = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \bigwedge^p \mathcal{A}_x^*.$$

Nous allons dire que les éléments de $\bigwedge^p \mathcal{A}_x^*$ appelée forme multilinéaire en x, et les éléments de $\bigwedge \mathcal{A}_x$ appelée multivecteurs en x.

3.1.2 Puissances extérieur des fibrés vectoriels

Soit $(\mathcal{A}, \rho, M)$ est une fibré vectoriel de rang k. Pour chaque entier $p > 0$, on noté $(\bigwedge^p \mathcal{A}, \rho, M)$ le p produit extérieur de $(\mathcal{A}, \rho, M)$ est une fibré vectoriel sur M que la fibré $\bigwedge^p \mathcal{A}_x$. sur chaque point $x \in M$, est une p produit extérieur de la fibré correspondent $\mathcal{A}_x = \rho^{-1}(x)$ de $(\mathcal{A}, \rho, M)$.

Nous rappelons que $\bigwedge^p \mathcal{A}_x$ peut être identifié de façon canonique l'espace vectorielle de p-multilinéaire antisymétrie sur $\mathcal{A}_x^*$ dual de $\mathcal{A}_x$.

De même, pour tout entier $p > 0$, on note $(\bigwedge^p \mathcal{A}^*, \rho^*, M)$ le $p - ieme$ puissance extérieur du fibré $(\mathcal{A}^*, \rho^*, M)$ dual de $(\mathcal{A}, \rho, M)$.

Pour $p = 1$, $(\bigwedge^1 \mathcal{A}, \rho, M)$ est tout simplement la fibré $(\mathcal{A}, \rho, M)$, et de même qui $(\bigwedge^1 \mathcal{A}^*, \rho^*, M)$ est la fibré $(\mathcal{A}^*, \rho^*, M)$. Pour p strictement supérieur à le rang k de $(\mathcal{A}, \rho, M)$, $(\bigwedge^p \mathcal{A}, \rho, M)$ et $(\bigwedge^p \mathcal{A}^*, \rho^*, M)$ est une fibré triviale sur M

Pour $p = 0$, en trouve que

$$(\bigwedge^0 \mathcal{A}, \rho, M) = (\bigwedge^0 \mathcal{A}^*, \rho^*, M) = (M \times \mathbb{K}, p_1, M).$$

telle que $P_1 : M \times \mathbb{K} \to M$

Enfin, nous considérons que pour $p < 0$, $(\bigwedge^p \mathcal{A}, \rho, M)$ et $(\bigwedge^p \mathcal{A}^*, \rho^*, M)$ est un fibré trivial sur M

Quelques opérations dans l'espaces vectorielles graduées

i) **Produit extérieur :** Soit $x \in M, p, q \in \mathbb{Z}$, $P \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x$, et $Q \in \bigwedge^q \mathcal{A}_x$, il existe $P \wedge Q \in \bigwedge^{p+q} \mathcal{A}_x$ un produit extérieur de P et Q définie par les formules suivantes :
   - Si $p < 0$, puis $P = 0$, donc, pour tout $Q \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x$, $P \wedge Q = 0$. de même, si $q < 0$, puis $Q = 0$, donc, pour tout $P \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x$, $P \wedge Q = 0$.
   - Si $p = 0$, puis P est une scalaire ($P \in \mathbb{K}$), alors pour tout $Q \in \bigwedge^q \mathcal{A}_x$, $P \wedge Q = PQ$, le produit usuel de Q par le scalaire P. de même, pour $q = 0$, puis Q est une scalaire ($Q \in \mathbb{K}$), alors pour tout $P \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x$, $P \wedge Q = PQ$, le produit usuel de P par le scalaire Q .
   - Si $p \geqslant 1$ et $q \leqslant 1$, $P \wedge Q$, considéré comme un $(p+q)$ forme multilinéaire sur $\mathcal{A}_x^*$, est donné par la formule, telle que $\eta_1, ..., \eta_{p+q} \in \mathcal{A}_x^*$

$$P \wedge Q(\eta_1, ..., \eta_{p+q}) = \sum_{\sigma \in s(p,q)} \epsilon(\sigma) P(\eta_{\sigma(1)}, ..., \eta_{\sigma(p)}) Q(\eta_{\sigma(p+1)}, ..., \eta_{\sigma(p+q)})$$

où $S(p,q)$ désigne l'ensemble des permutations σ de $1, ..., p+q$ qui respectent l'ordre relatif des p premiers et des q derniers éléments, c'est-à-dire qui vérifient

$$\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(p), \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < ... < \sigma(p+q)$$

et $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ

De même, pour chaque $x \in M$, p et $q \in \mathbb{Z}$, $\xi \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x^*$ et $\eta \in \bigwedge^q \mathcal{A}_x^*$, alors $\xi \wedge \eta \in \bigwedge^{p+q} \mathcal{A}_x^*$ un produit extérieur de P et Q. Elle est définie par les formules indiquées ci-dessus, le seul changement étant l'échange des rôles de $\mathcal{A}_x$ et $\mathcal{A}_x^*$.

Le produit extérieur est associative et $\mathbb{Z}_2$-commutative pour chaque $x \in M$, p, q et $r \in \mathbb{Z}$, $P \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x$, $R \in \bigwedge^r \mathcal{A}_x$, et $Q \in \bigwedge^q \mathcal{A}_x$.

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \ Q \wedge P = (-1)^{pq} P \wedge Q,$$

et de même, pour $\xi \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x^*$, $\eta \in \bigwedge^q \mathcal{A}_x^*$ et $\zeta \in \bigwedge^r \mathcal{A}_x^*$.

$$\xi \wedge (\eta \wedge \zeta) = (\xi \wedge \eta) \wedge \zeta, \quad \eta \wedge \xi = (-1)^{pq} \xi \wedge \eta,$$

.

ii) **Produit intérieur de forme et vecteur :** Soit $x \in M$, $v \in \mathcal{A}_x$, $p \in \mathbb{Z}$, $\eta \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x^*$, alors il existe $i(v)\eta \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x^*$, appelée Produit intérieur de η par v, défini par les formules suivantes.
  - Pour $p \leq 0$, $i(v)\eta = 0$, de puis $\bigwedge^p \mathcal{A}_x^* = \{0\}$.
  - Pour $p = 1$

$$i(v)\eta = \langle \eta, v \rangle \ \in \mathbb{K}$$

- Pour $p > 1$, $i(v)\eta$ est une $(p-1)$-forme multilinéaire sur $\mathcal{A}_x$, telle que, pour tous $v_1, ..., v_{p-1} \in \mathcal{A}_x$

$$i(v)\eta(v_1, ..., v_{p-1}) = \eta(v, v_1, ..., v_{p-1}).$$

iii) **Produit intérieur de forme et multivecteurs :** Pour chaque $x \in M$ et $v \in \mathcal{A}_x$, nous avons défini dans (ii) le produit intérieur $i(v)$ est une dérivation de degré -1 de l'algèbre extérieur $\bigwedge \mathcal{A}_x^*$ de forme à x. Par définition, pour chaque multivecteurs $P \in \bigwedge \mathcal{A}_x$, $i(P)$ le produit intérieur. Supposons tout d'abord que P est homogène de degré p i.e., $P \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x$

- Pour chaque $p < 0$, $\bigwedge^p \mathcal{A}_x = \{0\}$, alors $i(P) = 0$
- Pour chaque $p = 0$, $\bigwedge^0 \mathcal{A}_x = \mathbb{K}$, alors p est une scalaire, pour tout $\eta \in \bigwedge \mathcal{A}_x^*$,

$$i(P)\eta = P\eta$$

- Pour chaque $p > 1$ et $P \in \bigwedge^p \mathcal{A}_x$ décomposé, i.e.,

$$P = P_1 \wedge ... \wedge P_p \;\; , \;\; P_i \in E_x, \; 1 \leq i \leq p.$$

en trouve

$$i(P_1 \wedge ... \wedge P_p) = i(P_1) \circ ...i(P_p).$$

iv) **Produit intérieur par un produit extérieur :** Il est facile de voir que pour chaque P et $Q \in \bigwedge \mathcal{A}_x$

$$i(P \wedge Q) = i(P) \circ i(Q)$$

.

3.2 L'algèbre extérieur de sections

Soit $(\mathcal{A}, \rho, M)$ est un fibré vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on notée le dual du fibré vectoriels par $(\mathcal{A}^*, \rho^*, M)$, pour chaque $p > 1$, soit $(\bigwedge^p \mathcal{A}, \rho, M)$

et $(\bigwedge^p \mathcal{A}^*, \rho^*, M)$ sont des p-produit extérieur.
Pour chaque $p \in \mathbb{Z}$ nous allons dénoté que

$\Gamma(\mathcal{A}^p)$ l'espace de section de $(\bigwedge^p \mathcal{A}, \rho, M)$

$\Gamma(\mathcal{A}^{*^p})$ l'espace de section de $(\bigwedge^p \mathcal{A}^*, \rho^*, M)$

Nous allons noté $\Gamma(\mathcal{A}^p)$ et $\Gamma(\mathcal{A}^{*^p})$ par somme directe

$$\Gamma(\mathcal{A}) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathcal{A}^p) \quad \Gamma(\mathcal{A}^*) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \Gamma(\mathcal{A}^{*^p})$$

Remarque 3.2 :

1. Pour $p < 0$ et $p > k$ on trouve que $\Gamma(\mathcal{A}^p) = \Gamma(\mathcal{A}^{*^p}) = \{0\}$
2. Pour $p = 0$, $\Gamma(\mathcal{A}^0)$ et $\Gamma(\mathcal{A}^{*^0})$ sont l'espace $C^\infty(M)$

3.3 La dérivé de lie

Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ un algébroïde de Lie, pour chaque section a, il existe une dérivation de degré 0 de l'algèbre extérieur $\Gamma(\mathcal{A}^*)$, appelée la dérivé de Lie de a noté qui $\mathcal{L}^\rho(a)$.

Proposition 3.3 : Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ un algébroïde de Lie, pour chaque section $a \in \Gamma(\mathcal{A}^1)$ de fibré vectoriel $(\mathcal{A}, \rho, M)$, il existe unique endomorphisme de degré 0 de l'algèbre gradée des formes extérieurs $\Gamma(\mathcal{A}^*)$, appelée la dérivé de Lie de a noté $\mathcal{L}^\rho(a)$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

i) Pour chaque fonction $f \in \Gamma(\mathcal{A}^{*^0}) = \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\mathcal{L}^\rho_a f = \mathcal{L}_{\rho(a)} f = \rho(a) f$$

où $\mathcal{L}^\rho_a$ noté qui l'usuel dérivé de lie de champs de vecteur $\rho(a)$.

ii) Pour chaque forme $\eta \in \Gamma(\mathcal{A}^{*^p})$ de degré $p > 0$, $\mathcal{L}^\rho_a \eta$ est une forme défini qui la formule, où $a_1, ..., a_p$ des section de $(\mathcal{A}, \rho, M)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a^\rho \eta(a_1, ..., a_p) &= \mathcal{L}^\rho(\eta(a_1, ..., a_p)) \\ &\quad - \textstyle\sum_{i=1}^p \eta(a_1, ..., a_{i-1}, [a, a_i], a_{i+1}, ..., a_p).\end{aligned}$$

Démonstration :

Clairement que (i) définie à une fonction $\mathcal{L}_a^\rho f \in \Gamma(\mathcal{A}^{*^p}) = \mathcal{C}^\infty(M)$, pour f et $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\mathcal{L}_a^\rho \eta(fg) = (\mathcal{L}_a^\rho f)g + f(\mathcal{L}_a^\rho\ g). \qquad (*)$$

Maintenant (ii) définit à une application $(a_1, ..., a_p) \to (\mathcal{L}_a^\rho \eta)(a_1, ..., a_p$ sur $\Gamma(\mathcal{A}^p)$, avec des valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(M)$. Pour chaque fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\mathcal{L}_a^\rho \eta(fa_1, a_2, ..., a_p) = f(\mathcal{L}_a^\rho \eta)(a_1, a_2, ..., a_p) \qquad (**)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a^\rho \eta(fa_1, a_2, ..., a_p) &= \mathcal{L}^\rho(\eta(fa_1, a_2, ..., a_p)) \\ &\quad - \eta([a, fV_1], a_2, ..., a_p) \\ &\quad - \textstyle\sum_{i=1}^p \eta(a_1, ..., a_{i-1}, [a, a_i], a_{i+1}, ..., a_p).\end{aligned}$$

En utilisant $(*)$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a^\rho \eta(fa_1, a_2, ..., a_p) &= \mathcal{L}^\rho(\eta(fa_1, a_2, ..., a_p)) \\ &= (\mathcal{L}_a^\rho f)\eta(a_1, a_2, ..., a_p) \\ &\quad + f\mathcal{L}_a^\rho(\eta(a_1, a_2, ..., a_p)).\end{aligned}$$

Utilisation de la propriété de l'ancre, nous avons aussi

$$[a, fa_1] = (\rho(a)f)a_1 + f[a, a_1] = (\mathcal{L}_a^\rho f)a_1 + f[a, a_1].$$

Égalité $(**)$ suit immédiatement.

Définition 3.4 : On dit que la d_ρ la A-dérivée extérieure, analogue a la différentielle extérieure des formes différentielles, associées à l'algébroide de Lie $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ comme suit : pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$d_\rho f(a) = \mathcal{L}_a^\rho f = \rho(a) f$$

et, pour $k \geq 1$ et $\eta \in \Gamma(\bigwedge^k \mathcal{A}^*)$, nous avons établi que

$$\begin{aligned} d_\rho \eta(a_0, ..., a_k) &= \textstyle\sum_k^{i=0} (-1)^i \rho(a_i) \cdot \eta(a_0, ..., \widehat{a}_i, ..., a_k) \\ &\quad + \textstyle\sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \eta([a_i, a_j], a_0, ..., \widehat{a}_i, ..., \widehat{a}_j, ..., a_k). \end{aligned} \tag{3.1}$$

La A-dérivée de Lie, le A-différentiel extérieur et le produit intérieur satisfont formule Cartan, i.e, pour $a \in \Gamma(A)$, nous avons

$$\mathcal{L}_a^\rho = i_a \circ d_\rho + d_\rho \circ i_a \tag{3.2}$$

Proposition 3.6 : La dérivée de Lie possède les propriétés suivantes :

1. Pour chaque a et $b \in \Gamma(\mathcal{A}^1)$

$$\mathcal{L}_a^\rho(b) = [a, b].$$

2. Pour $a \in \Gamma(\mathcal{A}^1)$ et $a_1 \wedge ... \wedge a_p \in \Gamma(\mathcal{A}^p)$

$$\mathcal{L}_a^\rho(a_1 \wedge ... \wedge a_p) = \sum_{i=1}^{p} a_1 \wedge ... \wedge a_{i-1} \wedge [a, a_i] \wedge a_{i+1} \wedge ... \wedge a_p.$$

3. Pour chaque $a \in \Gamma(\mathcal{A}^1)$, $\mathcal{L}_\rho(a)$ est une dérivée se degré 0 de L'algèbre extérieur $\Gamma(\mathcal{A})$. Cela signifie que pour tous P et $Q \in \Gamma(\mathcal{A})$

$$\mathcal{L}_a^\rho(P \wedge Q) = (\mathcal{L}_a^\rho P) \wedge Q + P \wedge \mathcal{L}_a^\rho Q$$

Démonstration :

1. Soit a et $b \in \Gamma(\mathcal{A}^1)$, $\eta \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$. Nous pouvons écrire
$$\begin{array}{rcl} \eta(\mathcal{L}^{\rho}_{a}b) & = & \rho(a)\cdot\eta(b) - \mathcal{L}^{\rho}_{a}\eta(b) \\ & = & \eta([a,b]) \end{array}$$
Nous avons prouvé la propriété 1.
2. La preuve est similaire à celle de la propriété 1
3. Quand $P = a_1 \wedge ... \wedge a_p$ et $Q = b_1 \wedge ... \wedge b_q$ sont des éléments homogènes de décomposition dans $\Gamma(\mathcal{A})$, la proposition 3 est une conséquence facile de 2.

La validité de la propriété 3 pour tous P et $Q \in \Gamma(\mathcal{A})$ s'obtient par linéarité .

Définition 3.5 : Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ un algébroïde de Lie et $\mathcal{A}$ est un fibré vectoriel de base la variété M. On noté $(\mathcal{A}^*\ [,], \rho^*)$ le duel d'un algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [,], \rho)$, associer à une application linéaire $\rho^* : \mathcal{A}^* \longrightarrow T^*M$ appelée application d'ancre, et $[\,,\,]$ le crochet de Lie sur $\Gamma(\mathcal{A}^*)$ l'espace des section de $\mathcal{A}^*$

3.4 Crochet de Schouten-Nijenhuis

Théorème 3.7 : Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ un algébroide de Lie et $\mathcal{A}$ est un fibré vectoriel de base la variété M et soit $\Gamma(\mathcal{A})$ l'algèbre extérieur des sections de $(\mathcal{A}, \rho, M)$ alors il existe un crochet $[\ ,\ ]$ appelée crochet de Schouten-Nijenhuis

$$[\ ,\ ] : \Gamma(\mathcal{A}) \times \Gamma(\mathcal{A}) \to \Gamma(\mathcal{A}) \tag{3.3}$$

vérifiant les propriétés suivantes :
$\forall P, Q, R \in \Gamma(\mathcal{A})$, telle que $P \in \Gamma(\mathcal{A}^p)$ et $Q \in \Gamma(\mathcal{A}^q)$ et $R \in \Gamma(\mathcal{A}^r)$

1•

$$[P, Q] = -(-1)^{pq}\,[Q, P] \tag{3.4}$$

2•

$$[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{pq+r} Q \wedge [P, R] \tag{3.5}$$

3•

$$\begin{aligned}(-1)^{p(r-1)}\,[P,[Q,R]] &+ (-1)^{q(p-1)}\,[Q,[R,P]] \\ &+ (-1)^{r(q-1)}\,[R,[P,Q]] \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.6}$$

Démonstration

Soit $\mathcal{L}_a^\rho(b) = [a, b]$ telle que $a, b \in \Gamma(\mathcal{A}^1)$.

en définir l'opération telle que $\forall a_1, ..., b_p \in \Gamma(\mathcal{A}^1)$

$$[a_1 \wedge ... \wedge a_p, b] = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} a_1 \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge a_p \wedge [a_i, b]\,, \tag{3.7}$$

où $\mathcal{L}_{a_i}^\rho(b) \overset{\text{def}}{=} [a_i, b]$ et le chapeau $\hat{}$ dénote l'a absence du correspondant facteur,

suppose que Q de (3.7) est $Q = b_1 \wedge ... \wedge b_p$ $(b_i \in \Gamma(\mathcal{A}^1))$, de puis

$$\mathcal{L}_\rho(P)(b_1 \wedge ... \wedge b_p) = \sum_{j=1}^{q} b_1 \wedge ... \wedge [P, b_j] \wedge ... \wedge b_p$$

formule (3.7) le produit

$$[a_1 \wedge ... \wedge a_p, b_1 \wedge ... \wedge b_p] = (-1)^{p+1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{i+j}\, [a_i, b_j]\, a_1 \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge a_p \wedge \\ \wedge b_1 \wedge ... \wedge b_j \wedge ... \wedge b_q. \tag{3.8}$$

de plus, si dénoté $a_1 \wedge ... \wedge a_p = P$, Il en résulte de même que (3.8) peut être interprété comme

$$[a_1 \wedge ... \wedge a_p, b_1 \wedge ... \wedge b_q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} b_1 \wedge ... \wedge \hat{b_j} \wedge ... \wedge b_q \wedge [b_j, P]\,. \tag{3.9}$$

En cor les mêmes formules $(3.7),(3.8)$et (3.9) impliquent évidement (3.4) alors (3.5) est une conséquence directe de (3.9) et en fait celle

$$\mathcal{L}^{\rho}(a)(Q\wedge R)=(\mathcal{L}^{\rho}(a)Q)\wedge R+Q\wedge(\mathcal{L}^{\rho}(a)R)$$

si on met juste $P=a_1\wedge...\wedge a_p$
finalement (3.6) sera obtenue prenant la

$$P=a_1\wedge...\wedge a_p\,,Q=b_1\wedge...\wedge b_q\,,R=c_1\wedge...\wedge c_r$$

et en calculant crochet ce maire vie (3.8) une annulation on prudent de terme, en utilisant particulier

$$[a_i,[b_j,c_k]]+[b_j,[c_k,a_i]]+[c_k,[a_i,b_j]]=0.$$

Pour voir le résulte, si certain p,q,k disparaitre les résultats sont mémé plus facile, nous laissons les détails au depuis les écrire est longue mais technique seulement, le calcul se déroule comme suit :

$$[Q,R]=(-1)^{q+1}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k}\,[b_j,c_k]\wedge b_1\wedge...\wedge\hat{b_j}\wedge...\wedge b_q\wedge c_1\wedge...\wedge\hat{c_k}\wedge...\wedge c_r;$$

$$[P,[Q,R]]=(-1)^{p+q}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k+i+1}\,[a_i,[b_j,c_k]]\wedge$$

$$\wedge a_1\wedge...\wedge\hat{a_i}\wedge...\wedge a_p\wedge b_1\wedge...\wedge\hat{b_j}\wedge...\wedge b_q\wedge c_1\wedge...\wedge\hat{c_k}\wedge...\wedge c_k+$$

$$+(-1)^q\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{j+k+i+1}([a_i,b_s]\wedge[b_j,c_k]-[a_i,b_s]\wedge[b_s,c_k])\wedge$$

$$\wedge a_1 \wedge ... \wedge \hat{a_i} \wedge ... \wedge a_p \wedge b_1 \wedge ... \wedge \hat{b_s} \wedge ... \wedge \hat{b_j} \wedge ... \wedge b_q \wedge c_1 \wedge ... \wedge \hat{c_k} \wedge ... \wedge c_p -$$

$$-\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{t<k=1}^{r} (-1)^{j+k+i+1}([a_i, c_t] \wedge [b_j, c_k] - [a_i, c_k] \wedge [b_s, c_t])\wedge$$

$$\wedge a_1 \wedge ... \wedge \hat{a_i} \wedge ... \wedge a_p \wedge b_1 \wedge ... \wedge \hat{b_j} \wedge ... \wedge b_q \wedge c_1 \wedge ... \wedge \hat{c_k} \wedge ... \wedge c_r.$$

puis permutation cyclique.

Chapitre 4

Structures de Jacobi sur un algébroïde de Lie

4.1 Algébroïde de Lie-Poisson

Un pré-algébroïde de Lie-Poisson $(\mathcal{A}, [,], \rho, \Pi)$ est un pré-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ équipé d'un A-champs de deux vecteurs Π qui satisfait $[\Pi, \Pi] = 0$, Nous disons aussi que Π est un A-tonsure de Poisson.

Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est une préalgébroïde sur M. À tout A-champs de deux vecteur Π nous sommes associés deux morphisme de fibré vectoriel $\sharp_\Pi : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}$ et $\rho_\Pi : \mathcal{A}^* \to TM$ définis que

$$\beta(\sharp_\Pi(\alpha)) = \Pi(\alpha, \beta) \quad et \quad \rho_\Pi = \rho \circ \sharp_\Pi \tag{4.1}$$

et le crochet $[\,,\,]_\Pi$ dans $\Gamma(\mathcal{A}^*)$ définie que

$$[\alpha, \beta]_\Pi = \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\beta)}\alpha - d_\rho(\Pi(\alpha, \beta)), \tag{4.2}$$

appelé le crochet de Koszul associé à Π. Par conséquent, avec le champs de deux vecteurs Π dans $\mathcal{A}$ nous associé une structure pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, [,]_\Pi, \rho_\Pi)$ sur $\mathcal{A}^*$ la dual de $\mathcal{A}$.

Proposition 4.1 : Soit $\Pi \in \Gamma(\bigwedge^2 \mathcal{A})$. Pour tout $Q \in \Gamma(\bigwedge^q \mathcal{A})$, nous avons

$$d_{\rho_\Pi} Q = -[\Pi, Q].$$

Preuve :

En particulier avec $Q = \Pi$, utilisation de la formule (3.1) pour la différentiel $d_{\rho\Pi}$ nous trouvons identité

$$[\Pi, \Pi](\alpha, \beta, \gamma) = -\oint \rho_\Pi(\alpha) \cdot \Pi(\beta, \gamma) + \oint \Pi([\alpha, \beta]_\Pi, \gamma), \tag{4.3}$$

où le symbole $\oint$ signifie la somme cyclique en α, β, γ. En utilisant cette identité, nous obtenons le théorème suivent qui donne la torsion de pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, \rho_\Pi, [,]_\Pi)$, i.e. par défaut pour le pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, [,]_\Pi, \rho_\Pi)$ pour être presque un algébroïde de Lie.

Théorème 4.2 : Nous avons l'identité

$$\gamma(\sharp_\Pi([\alpha, \beta]_\Pi) - [\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)]) = \frac{1}{2}[\Pi, \Pi](\alpha, \beta, \gamma) \tag{4.4}$$

Par conséquent, si $(\mathcal{A}, [,], \rho, \Pi)$ est un presque algébroïde de Lie de poisson, le pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, [,]_\Pi, \rho_\Pi)$ associé à est un presque algébroïde de Lie .

preuve : pour $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$, on pose

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(\sharp_\Pi([\alpha, \beta]_\Pi) - [\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)]).$$

Il est clair que nous avons $\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = -\Phi(\beta, \alpha, \gamma)$, i.e. Φ est antisymétrique sur les deux premières variables.

Maintenant, depuis $\gamma(\sharp_\Pi([\alpha, \beta]_\Pi)) = -[\alpha, \beta]_\Pi(\sharp_\Pi(\gamma))$, par (4.2) on a

$$\gamma(\sharp_\Pi([\alpha, \beta]_\Pi) = -\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta(\sharp_\Pi(\gamma)) + \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\beta)}\alpha(\sharp_\Pi(\gamma)) + d_\rho(\Pi(\alpha, \beta))(\sharp_\Pi(\gamma)),$$

et donc

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha, \beta, \gamma) \quad = \quad & \rho_\Pi(\alpha) \cdot \Pi(\beta, \gamma) + \rho_\Pi(\beta) \cdot \Pi(\gamma, \alpha) + \rho_\Pi(\gamma) \cdot \Pi(\alpha, \beta) \\ & -\alpha([\sharp_\Pi(\beta), \sharp_\Pi(\gamma)]) - \beta([\sharp_\Pi(\gamma), \sharp_\Pi(\alpha)]) - \gamma([\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)]).\end{aligned}$$

d'où nous déduisons, d'une part, que $\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = -\Phi(\beta, \alpha, \gamma)$, et d'autre part, en utilisant l'identité (4.3) et la définition du l'application Φ, que

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma) = -[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma) + \Phi(\alpha,\beta,\gamma) + \Phi(\beta,\gamma,\alpha) + \Phi(\gamma,\alpha,\beta).$$

D'où, depuis Φ est une application alternée alors,

$$[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma) = 2\Phi(\alpha,\beta,\gamma).$$

Remarque 4.3 : Une forme symplectique sur un pré-algébroïde de Lie $(\mathcal{A},[,],\rho)$ *où* une A-forme symplectique, est une $A-2$-forme $\Omega \in \Gamma(\bigwedge^2 \mathcal{A}^*)$ non dégénérée telle que $d_\rho\Omega = 0$. Nous appelons que $(\mathcal{A},[,],\rho,\Omega)$ un pré-algébroïde symplectique. Soit $(\mathcal{A},[,],\rho)$ un pré-algébroïde, et soit une $A-2$-forme non dégénérée $\Omega \in \Gamma(\bigwedge^2 \mathcal{A}^*)$ dans $\mathcal{A}$, $\sharp_\Omega$ est une isomorphisme inverse de l'isomorphisme de fibre vectorielle $\flat_\Omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$, $\flat_\Omega(a) = -i_a\Omega$, et Π est une A-champs de deux vecteur définit par

$$\Pi(\alpha,\beta) = \Omega(\sharp_\Omega(\alpha),\sharp_\Omega(\beta)).$$

Nous avons $\sharp_\Pi = \sharp_\Omega$, et en utilisant les formules (4.3) et (4.4), nous obtenons l'identité

$$[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma) = 2d_\rho\Omega(\sharp_\Omega(\alpha),\sharp_\Omega(\beta),\sharp_\Omega(\gamma)).$$

Par conséquent, Π est un A-tenseur de poisson si et et seulement si Ω est une A-forme symplectique.

on noté J_Π le Jabobianteur de le pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*,[,]_\Pi,\rho_\Pi)$, i.e.,

$$J_\Pi(\alpha,\beta,\gamma) = \oint [[\alpha,\beta]_\Pi,\gamma]_\Pi,$$

pour $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$. Le résultat suivant donne un algébroïde de Lie $(\mathcal{A},[,],\rho)$ avec un A-champs de deux vecteur Π le Jacobia de pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*,[,]_\Pi,\rho_\Pi)$, i.e. par défaut pour est un algébroïde de Lie $(\mathcal{A}^*,[,]_\Pi,\rho_\Pi)$.

Théorème 4.4 : Supposons que $(\mathcal{A},\rho,\Pi)$ est un algébroïde de Lie. alors

$$J_\Pi(\alpha,\beta,\gamma) = \oint \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi([\alpha,\beta]_\Pi)-[\sharp_\Pi(\alpha),\sharp_\Pi(\beta)]}\gamma - \oint d_\rho(\Pi(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta,\gamma) + \Pi(\beta,\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\gamma))$$

preuve D'abord, par (4.2), pour $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$, nous avons

$$[d_\rho(\Pi(\alpha,\beta)),\gamma]_\Pi = \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi([d_\rho(\Pi(\alpha,\beta)))}\gamma - \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\gamma)}(d_\rho(\Pi(\alpha,\beta))) - d_\rho(\Pi(d_\rho(Pi(\alpha,\beta)),\gamma)).$$

Depuis $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un algébroïde de Lie, donc un pré-algébroïde de Lie, nous avons

$$\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\gamma)}(d_\rho(\Pi(\alpha,\beta))) = d_\rho(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\gamma)}(\Pi(\alpha,\beta))) = d_\rho(\rho_\Pi(\gamma)\cdot\Pi(\alpha,\beta))$$

et depuis

$$\Pi(d_\rho(\Pi(\alpha,\beta)),\gamma) = -d_\rho(\Pi(\alpha,\beta))(\sharp_\Pi(\gamma)) = -\rho_\Pi(\gamma)\cdot\Pi(\alpha,\beta),$$

nous déduisons cela

$$[d_\rho(\Pi(\alpha,\beta)),\gamma]_\Pi = \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(d_\rho(\Pi(\alpha,\beta))}\gamma$$

Par conséquent, d'ici (4.2), nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} [[\alpha,\beta]_\Pi,\gamma] & = & \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi([\alpha,\beta]_\Pi)}\gamma - \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\gamma)}(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta) + \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\gamma)}(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\beta)}\alpha) \\ & & -d_\rho[\Pi(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta,\gamma) + \Pi(\gamma,\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\beta)}\alpha)] \end{array} \tag{4.5}$$

Depuis $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un algébroïde de Lie, on a

$$\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\gamma)}(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta) - \mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\gamma)}\beta) = \mathcal{L}^\rho_{[\sharp_\Pi(\gamma),\sharp_\Pi(\alpha)]}\beta$$

Par conséquent, en prenant la somme cyclique en α, β, γ des deux côtés de l'égalité (4.5) nous obtenons le résultat.

Corollaire 4.5 : Si $(\mathcal{A}, [,], \rho, \Pi)$ est un algébroïde de Lie-Poisson, dans $(\mathcal{A}^*, [,]_\Pi, \rho_\Pi)$ un algébroïde de Lie.

Preuve : Nous devons prouver que $J_\Pi = 0$. Depuis $[\Pi,\Pi] = 0$ par théorème 4.2 et le théorème au-dessus de nous

$$J_\Pi(\alpha,\beta,\gamma) = -\oint d_\rho(\Pi(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta,\gamma) + \Pi(\beta,\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\gamma)).$$

Pour tout α, β, γ nous avons

$$\begin{array}{rcl} \Pi(\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta,\gamma) & = & -\mathcal{L}^\rho_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta(\sharp_\Pi(\gamma)) \\ & = & -\rho\Pi(\alpha)(\beta(\sharp\Pi(\gamma))) + \beta([\sharp_\Pi(\alpha),\sharp_\Pi(\beta)]) \\ & = & \rho_\Pi(\alpha)\cdot\Pi(\beta,\gamma) - \beta([\sharp_\Pi(\gamma),\sharp_\Pi(\alpha)])). \end{array}$$

substitution dans l'expression de J_Π, nous obtenons

$$J_\Pi(\alpha, \beta, \gamma) = -2d_\rho[\oint \rho_\Pi(\alpha) \cdot \Pi(\beta, \gamma) - \oint \alpha(\sharp_\Pi(\gamma), \sharp\Pi(\alpha)])].$$

Depuis $[\Pi, \Pi] = 0$, par (4.3) et le théorème 4.2, il s'ensuit que $J_\Pi = 0$.

Remarque 4.6 : Quand $\mathcal{A}$ est un algébroïde de Lie tangent $\mathcal{A} = TM$, $(\mathcal{A}^*, [,]_\Pi, \rho_\Pi)$ est un algébroïde de Lie cotangent de variété de Poisson (M, Π).

4.2 Structures de Jacobi presque sur un algébroïde de Lie

Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un algébroïde de Lie sur M. Soit Π une A-champs deux vecteurs et ξ est un A-champs de vecteurs, On dit que la paire (Π, ξ) est une structures de Jacobi sur $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ si les identités suivantes sont satisfaites

$$[\Pi, \Pi] = 2\xi \wedge \Pi$$

et

$$[\xi, \Pi] = \mathcal{L}^\rho_\xi \Pi = 0$$

Remarque 4.7 : Le structure de Jacobi (Π, ξ) dont $\xi = 0$ est juste un structure de Poisson.
Si $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un presque un algébroïde de Lie , l'image direct de Π par le morphisme d'ancrage $\rho_* : \Gamma(\bigwedge^* \mathcal{A}) \to \Gamma(\bigwedge^* TM)$ est une Compatibilité de Le crochet de Schouten-Nijenhuis et en particulier, nous avons

$$\rho_* [\Pi, \Pi] = [\rho_*\Pi, \rho_*\Pi]$$

et

$$\rho_* [\xi, \Pi] = [\rho_* \xi, \rho_* \Pi] .$$

Par conséquent, une structure de Jacobi (Π, ξ) sur presque un algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ induite une structure de Jacobi $(\rho_* \Pi, \rho_* \xi)$ sur la variété M. Le crochet de Jacobi correspondant sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty(M)$ est donné par

$$\{\varphi, \psi\} = \rho_* \Pi(d_\rho \varphi, d_\rho \psi) + \varphi \mathcal{L} \rho_* \xi - \psi \mathcal{L}_{\rho_* \xi} \varphi$$

i.e

$$\{\varphi, \psi\} = \Pi(d_\rho \varphi, d_\rho \psi) + \varphi \mathcal{L} \xi^\rho - \psi \mathcal{L}^\rho_\xi \varphi$$

Pour $\xi = 0$, le A-tonsure de poisson Π induit a tonsure de poisson $\rho_* \Pi$ sur M, le crochet de poisson correspondant sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty(M)$ est donné par $\{\varphi, \psi\} = \Pi(d_\rho \varphi, d_\rho \psi)$.

4.2.1 Pré-algébroïdes associée à le paire (Π, ξ)

Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un pré-algébroïde, Soit Π est une A-champ deux vecteurs et ξ est un A-champ de vecteurs. Au le couple (Π, ξ) nous associons le morphismes de fibrés vectoriels $\sharp_{\Pi,\xi} : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}$ et $\rho_{\Pi,\xi} : \mathcal{A}^* \to TM$ définit par

$$\sharp_{\Pi,\xi}(\alpha) = \sharp_\Pi(\alpha) + \alpha(\xi)\xi \quad et \quad \rho_{\Pi,\xi} = \rho \circ \sharp_{\Pi,\xi}(\alpha) \tag{4.6}$$

Pour tout section λ de fibré vectoriel $\mathcal{A}^*$, considérer le crochet $[\,,\,]^\lambda_{\Pi,\xi}$ dont $\Gamma(\mathcal{A}^*)$ définit par

$$[\alpha, \beta]^\lambda_{\Pi,\xi} = [\alpha, \beta]_\Pi + \alpha(\xi)(\mathcal{L}^\rho_\xi \beta - \beta) - \beta(\xi)(\mathcal{L}^\rho_\xi \alpha - \alpha) - \Pi(\alpha, \beta)\lambda \tag{4.7}$$

Le couple $(\rho_{\Pi,\xi}, [\,,\,]^\lambda_{\Pi,\xi})$ induite une structure de pré-algébroïde sur le fibré dual de $\mathcal{A}$. Nous appelons $(\mathcal{A}^*, [\,,\,]^\lambda_{\Pi,\xi}, \rho_{\Pi,\xi})$ le pré-algébroïde associé au triplet (Π, ξ, λ). Dans le cas particulier où $\xi = 0$ et $\lambda = 0$, on a pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, [\,,\,]^{\lambda}_{\Pi}, \rho_{\Pi})$ associé dans §4.1 au A-champ de 2 vecteurs Π.

Théorème 4.8 : Supposons que (Π, ξ) est une structure de Jacobi sur le pré-algébroïde $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ et $\lambda \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$. Nous avons

$$\sharp_{\Pi,\xi}\left([\alpha, \beta]^{\lambda}_{\Pi,\xi}\right) - [\sharp_{\Pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\Pi,\xi}(\beta)] = \Pi(\alpha, \beta)(\xi - \sharp_{\Pi,\xi}(\lambda)),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$.

Preuve : La preuve est la même que dans le cas classique de l'algèbroïde tangent $\mathcal{A} = TM$. Utiliser le théorème 4.2.

Corollaire 4.9 Suppose que $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ dans le théorème ci-dessus est presque un est un algébroïde de Lie. Si $\xi - \sharp_{\Pi,\xi}(\lambda) \in \mathrm{Ker}\ \rho$, puis le pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, [\,,\,]^{\lambda}_{\Pi,\xi}, \rho_{\Pi,\xi})$ est un presque algébroïde, i.e., nous avons

$$\rho_{\Pi,\xi}([\alpha, \beta]^{\lambda}_{\Pi,\xi}) = [\rho_{\Pi,\xi}(\alpha), \rho_{\Pi,\xi}(\beta)]\,,$$

pour tous A-formes α et β. L'inverse est également vrai si $\Pi \neq 0$.

Preuve : En appliquant ρ à l'identité dans le théorème ci-dessus, nous obtenons l' identité suivante :

$$\rho_{\Pi,\xi}([\alpha, \beta]^{\lambda}_{\Pi,\xi}) - [\rho_{\Pi,\xi}(\alpha), \rho_{\Pi,\xi}(\beta)] = \Pi(\alpha, \beta)\rho(\xi - \sharp_{\Pi,\xi}(\lambda))$$

cela donne la torsion de pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, [\,,\,]^{\lambda}_{\Pi,\xi}, \rho_{\Pi,\xi})$, i.e. par défaut pour qu'il soit presque l'algébroïde de Lie .
Le résultat suivant donne un l'algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ le jacobianteur $J^{\lambda}_{\Pi,\xi}$, de le pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, [\,,\,]^{\lambda}_{\Pi,\xi}, \rho_{\Pi,\xi})$.

$$J^{\lambda}_{\Pi,\xi}(\alpha, \beta, \gamma) = \oint \left[[\alpha, \beta]^{\lambda}_{\Pi,\xi}, \gamma\right]^{\lambda}_{\Pi,\xi},$$

Théorème 4.10 : Supposons que $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un algébroïde de Lie. Nous avons

$$\begin{aligned} J^{\lambda}_{\Pi,\xi}(\alpha, \beta, \gamma) \;&=\; \oint \mathcal{L}^{\rho}_{(\frac{1}{2}[\Pi,\Pi]-\xi\wedge\Pi)(\alpha,\beta,.)}\gamma + [(2\xi \wedge \Pi - [\Pi, \Pi])(\alpha, \beta, \gamma) + \oint \gamma(\xi)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Pi(\alpha, \beta)]\lambda \\ &\quad + d_{\rho}(2\xi \wedge \Pi - [\Pi, \Pi])(\alpha, \beta, \gamma)) - \oint \gamma(\xi)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}([\,,\,]_{\Pi})(\alpha, \beta) \\ &\quad + \oint(\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\gamma - \gamma)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Pi(\alpha, \beta) + \oint \Pi(\alpha, \beta)(\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\gamma - [\lambda, \gamma]^{\lambda}_{\Pi,\xi}), \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}([\,,\,]_{\Pi})(\alpha, \beta) = \mathcal{L}^{\rho}_{\xi}([\alpha, \beta]_{\Pi}) - [\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\alpha, \beta]_{\Pi} - [\alpha, \mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\beta]_{\Pi}$.

preuve : Un calcul long mais direct utilisant $(4.2),(4.3),(4.6)$ *et* (4.7) donne

$$\begin{aligned} J^{\lambda}_{\Pi,\xi}(\alpha,\beta,\gamma) &= J_{\Pi}(\alpha,\beta,\gamma)-\oint\gamma(\xi)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}([\,,\,]_{\Pi})(\alpha,\beta)+\oint(\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\gamma-\gamma)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Pi(\alpha,\beta)\\ &\quad-\oint\gamma(\xi)[\alpha,\beta]_{\Pi}+((2\xi\wedge\Pi-[\Pi,\Pi])(\alpha,\beta,\gamma)+\oint\gamma(\xi)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Pi(\alpha,\beta))\lambda\\ &\quad+\oint\Pi(\alpha,\beta)[\gamma,\lambda]^{\lambda}_{\Pi,\xi}\end{aligned}$$

Par le Théorème 4.4 nous avons

$$J^{\lambda}_{\Pi,\xi}(\alpha,\beta,\gamma)=\oint\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}([\alpha,\beta]_{\Pi})-[\sharp_{\Pi}(\alpha),\sharp_{\Pi}(\beta)]}\gamma-\oint d_{\rho}(\Pi(\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\alpha)}\beta,\gamma)+\Pi(\beta,\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\alpha)}\gamma))$$

D'une part, depuis que (4.4) nous avons

$$\begin{aligned}\sharp_{\Pi}([\alpha,\beta]_{\Pi})-[\sharp_{\Pi}(\alpha),\sharp_{\Pi}(\beta)] &= (\tfrac{1}{2}[\Pi,\Pi]-\xi\wedge\Pi)(\alpha,\beta,.)+\alpha(\xi)\sharp_{\Pi}(\beta)-\beta(\xi)\sharp_{\Pi}(\alpha)\\ &\quad+\Pi(\alpha,\beta)\xi,\end{aligned}$$

Il s' agit de

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}([\alpha,\beta]_{\Pi})-[\sharp_{\Pi}(\alpha),\sharp_{\Pi}(\beta)]}\gamma &= \mathcal{L}^{\rho}_{(\frac{1}{2}[\Pi,\Pi]-\xi\wedge\Pi)(\alpha,\beta,.)}\gamma+\alpha(\xi)\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\beta)}\gamma-\beta(\xi)\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\alpha)}\gamma\\ &\quad+\gamma(\xi)d_{\rho}(\Pi(\alpha,\beta))+\Pi(\beta,\gamma)d_{\rho}(\alpha(\xi))+\Pi(\gamma,\alpha)d_{\rho}(\beta(\xi))\\ &\quad+\Pi(\alpha,\beta)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\gamma.\end{aligned}$$

Prendre la somme cyclique en α,β,γ des deux côtés, nous avons

$$\begin{aligned}\oint\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}([\alpha,\beta]_{\Pi})-[\sharp_{\Pi}(\alpha),\sharp_{\Pi}(\beta)]}\gamma &= \oint\mathcal{L}^{\rho}_{(\frac{1}{2}[\Pi,\Pi]-\xi\wedge\Pi)(\alpha,\beta,.)}\gamma+\oint\gamma(\xi)[\alpha,\beta]_{\Pi}\\ &\quad+2d_{\rho}((\xi\wedge\Pi)(\alpha,\beta,\gamma))+\oint\Pi(\alpha,\beta)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\gamma.\end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons

$$\Pi(\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\alpha)}\beta,\gamma)=-\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\alpha)}\beta(\sharp_{\Pi}(\gamma))=\rho_{\Pi}(\alpha)\cdot\Pi(\beta,\gamma)-\beta([\sharp_{\Pi}(\gamma),\sharp_{\Pi}(\alpha)]),$$

et ensuite, par (4.4),

$$\Pi(\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\alpha)}\beta,\gamma)=\rho_{\Pi}(\alpha)\cdot\Pi(\beta,\gamma)-\Pi([\gamma,\alpha]_{\Pi},\beta)+\frac{1}{2}[\Pi,\Pi](\gamma,\alpha,\beta).$$

D'où

$$\Pi(\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\alpha)}\beta,\gamma)+\Pi(\beta,\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_{\Pi}(\alpha)}\gamma)=2\rho_{\Pi}(\alpha)\cdot\Pi(\beta,\gamma)-\Pi([\gamma,\alpha]_{\Pi},\beta)-\Pi([\alpha,\beta]_{\Pi},\gamma)+[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma),$$

et en prenant la somme cyclique sur les deux côtés on obtient

$$\begin{aligned}\oint(\Pi(\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta,\gamma)+\Pi(\beta,\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_\Pi(\alpha)}\gamma)) &= 2\oint(\rho_\Pi(\alpha)\cdot\Pi(\beta,\gamma)-\Pi([\alpha,\beta]_\Pi,\gamma))\\ &\quad +3[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma),\end{aligned}$$

et par conséquent, par (4.3),

$$\oint(\Pi(\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_\Pi(\alpha)}\beta,\gamma)+\Pi(\beta,\mathcal{L}^{\rho}_{\sharp_\Pi(\alpha)}\gamma))=[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma).$$

Remplacement dans l'expression de J_Π au-dessus

$$\begin{aligned}J_\Pi(\alpha,\beta,\gamma) &= \oint\mathcal{L}^{\rho}_{(\frac{1}{2}[\Pi,\Pi]-\xi\wedge\Pi)(\alpha,\beta,.)}\gamma+\oint\gamma(\xi)[\alpha,\beta]_\Pi+\oint\Pi(\alpha,\beta)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\gamma\\ &\quad +d_\rho((2\xi\wedge\Pi-[\Pi,\Pi])(\alpha,\beta,\gamma)).\end{aligned}$$

Dans reste seulement pour remplacer cela dans l'expression de $J^{\lambda}_{\Pi,\xi}$ pour obtenir le résultat.

Corollaire 4.11 : Supposons que (Π,ξ) est une structure de Jacobi sur un algébroïde de Lie $(\mathcal{A},[,],\rho)$. Si λ satisfait à la propriété :

$$\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\alpha=[\lambda,\alpha]^{\lambda}_{\Pi,\xi}\quad tout\ \ \alpha,\in\Gamma(\mathcal{A}^*)$$

donc $(\mathcal{A}^*,[\,,\,]^{\lambda}_{\Pi,\xi},\rho_{\Pi,\xi})$ est un algébroïde de Lie .

Preuve : Il suffit de prouver que $J^{\lambda}_{\Pi,\xi}=0$. Du théorème ci-dessus, nous voyons que

$$J^{\lambda}_{\Pi,\xi}(\alpha,\beta,\gamma)=-\oint\gamma(\xi)\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}([\,,\,]_\Pi)(\alpha,\beta).$$

Un calcul direct donne

$$\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}([\,,\,]_\Pi)(\alpha,\beta)=\mathcal{L}^{\rho}_{[\xi,\sharp_\Pi(\alpha)]-\sharp_\Pi(\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\alpha)}\beta-\mathcal{L}^{\rho}_{[\xi,\sharp_\Pi(\beta)]-\sharp_\Pi(\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\beta)}\alpha-d_\rho(\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Pi(\alpha,\beta)).$$

comme $\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Pi=0$, alors $\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}([\,,\,]_\Pi)(\alpha,\beta)=0$.

4.3 Algébroïde de Lie-Contact

4.3.1 Structures cosymplectiques sur un pré-algébroïde de Lie

Soit $(\mathcal{A},[,],\rho)$ est un pré-algébroïde de Lie ou le fibré vectoriel $\mathcal{A}$ de rang impair $2n+1$. Par le Structures cosymplectiques sur $\mathcal{A}$ on veut dire une paire (Ω, η) de 1-forme η et 2-forme Ω dont $\mathcal{A}$ telle que la $2n+1$-forme $\eta \wedge \Omega$ est partout différent de zéro. Il est donc clair que Ω est de rang $2n$, et comme dans le cas classique, qu'il y a une unique section ξ dans $\mathcal{A}$ telle que

$$i_\xi \Omega = 0 \quad et \quad i_\xi \eta = 1 \tag{4.8}$$

Nous appelons le A-champs de vecteur ξ le section de Reeb ou l'élément fondamentalà la structure cosymplectique (Ω, η) nous associons une paire (Π, ξ) où ξ est une section de Reeb et Π est une A-champ de deux vecteur, appelé le A-champs de deux vecteurs fondamental, défini par

$$\Pi(\alpha, \beta) = \Omega(\sharp_{\Omega,\eta}(\alpha), \sharp_{\Omega,\eta}(\beta)),$$

où $\sharp_{\Omega,\eta}$ est un l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme de fibré vectoriel $\flat_{\Omega,\eta} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ définit par

$$\flat_{\Omega,\eta}(a) = -i_a\Omega + \eta(a)\eta.$$

Lemme 4.12 : Nous avons que $\sharp_{\Pi,\xi} = \flat_{\Omega,\eta}$.
Preuve : Soient $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$ et soient a, b telle que $\alpha = \flat_{\Omega,\eta}(a)$ et $\beta = \flat_{\Omega,\eta}(b)$. Notons que $\alpha(\xi) = \flat_{\Omega,\eta}(a)(\xi) = i_\xi\Omega(a) + \eta(a)\eta(\xi) = \eta(a)$ et de même $\beta(\xi) = \eta(b)$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \beta(\sharp_{\Pi,\xi}(\alpha)) &= \Pi(\alpha, \beta) + \alpha(\xi)\beta(\xi) \\ &= \Omega(a, b) + \eta(a)\eta(b) \\ &= \flat_{\Omega,\eta}(b)(a) \\ &= \beta(\sharp_{\Omega,\eta}(\alpha)). \end{aligned}$$

Ainsi $\sharp_{\Pi,\xi} = \flat_{\Omega,\eta}$.
Proposition 4.13 : Soit (Ω, η) une structures cosymplectiques sur $\mathcal{A}$ et soit (Π, ξ) la paire fondamentale associée. Soient a, b, c des A-champs de vecteurs et soient $\alpha = \flat_{\Omega,\eta}(a)$, $\beta = \flat_{\Omega,\eta}(b)$ et $\gamma = \flat_{\Omega,\eta}(c)$. nous avons

1. $(\frac{1}{2}[\Pi, \Pi] - \xi \wedge \Pi)(\alpha, \beta, \gamma) = (d_\rho\Omega + \eta \wedge (d_\rho\eta - \Omega - \mathcal{L}^\rho_\xi\Omega))(a, b, c.)$
2. $\mathcal{L}^\rho_\xi\Pi(\alpha, \beta) = (\eta \wedge \mathcal{L}^\rho_\xi\eta - \mathcal{L}^\rho_\xi\Omega)(a, b)$.

Preuve : Notons que depuis que $\alpha(\xi) = \eta(a)$, $\beta(\xi) = \eta(b)$, $\gamma(\xi) = \eta(c)$ et, par le lemme au-dessus on a, $\sharp_{\Omega,\eta} = \sharp_{\Pi,\xi}$, il s' agit de
$\sharp_\Pi(\alpha) = a - \eta(a)\xi$, $\sharp_\Pi(\beta) = b - \eta(b)\xi$ et $\sharp_\Pi(\gamma) = c - \eta(c)\xi$.

Faisons maintenant quelques calculs. Premièrement, nous avons

$$\begin{array}{rcl}[\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)] & = & [a,b] - \eta(a)[\xi, b] + \eta(b)[\xi, a] \\ & & (\rho(b)(\eta(a)) - \rho(a)(\eta(b)) + \eta(a)\rho(\xi)(\eta(b)) - \eta(b)\rho(\xi)(\eta(a)))\xi.\end{array}$$

En appliquant η et le fait que $\eta(\xi) = 1$, nous avons

$$\begin{array}{rcl}\eta([\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)]) & = & \eta([a,b]) - \rho(a)(\eta(b)) + \rho(b)(\eta(a)) \\ & & \eta(a)\mathcal{L}^\rho_\xi \eta(b) - \eta(b)\mathcal{L}^\rho_\xi \eta(a),\end{array}$$

et donc

$$\eta([\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)]) = (\eta \wedge \mathcal{L}^\rho_\xi \eta - d_\rho \eta)(a,b). \tag{4.9}$$

Aussi, en utilisant $i_\xi \Omega = 0$, nous avons

$$\begin{array}{rcl}\Omega([\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)], \sharp_\Pi(\gamma)) & = & -i_{\sharp_\Pi(\gamma)}\Omega([\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)]) \\ & = & -i_c\Omega([\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)]) \\ & = & (\gamma - \eta(c)\eta)([\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)]),\end{array}$$

et ensuite, en utilisant (4.4) et la relation (4.9) au-dessus, on a

$$\begin{array}{rcl}\Omega([\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta)], \sharp_\Pi(\gamma)) & = & -\frac{1}{2}[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma) + \Pi([\alpha,\beta]_\Pi, \gamma) \\ & & -\eta(c)(\eta \wedge \mathcal{L}^\rho_\xi \eta - d_\rho \eta)(a,b).\end{array}$$

D'autre part, nous avons clairement

$$\rho(\sharp_\Pi(\alpha)) \cdot \Omega(\sharp_\Pi(\beta), \sharp_\Pi(\gamma)) = \rho_\Pi(\alpha) \cdot \Pi(\beta, \gamma).$$

Utilisant les deux relations ci-dessus et de l'identité (2.3), nous avons

$$d_\rho\Omega(\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta), \sharp_\Pi(\gamma)) = \frac{1}{2}[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma) - \eta \wedge d_\rho\eta(a,b,c).$$

Observons aussi que comme $i_\xi\Omega = 0$, en utilisant la formule Cartan nous avons

$$d_\rho\Omega(a,b,c) = d_\rho\Omega(\sharp_\Pi(\alpha), \sharp_\Pi(\beta), \sharp_\Pi(\gamma)) + \eta \wedge \mathcal{L}^\rho_\xi\Omega(a,b,c).$$

Enfin, il ressort des deux identités ci-dessus que

$$\frac{1}{2}[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma) = (d_\rho\Omega + \eta\wedge(d_\rho - \mathcal{L}^\rho_\xi\Omega))(a,b,c).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\xi\wedge\Pi(\alpha,\beta,\gamma) = \eta\wedge\Omega(a,b,c)$ pour obtenir la première assertion de la proposition. Faisons maintenant la preuve du deuxième. D'une part, nous avons

$$\mathcal{L}^\rho_\xi\Pi(\alpha,\beta) = \rho(\xi)\cdot\Pi(\alpha,\beta) - \Pi(\mathcal{L}^\rho_\xi\alpha,\beta) - \Pi(\alpha,\mathcal{L}^\rho_\xi\beta). \qquad (4.10)$$

D'un autre part, nous avons

$$\Pi(\mathcal{L}^\rho_\xi\alpha,\beta) = -\mathcal{L}^\rho_\xi\alpha(\sharp_\Pi(\beta)) = \rho(\xi)\cdot\Pi(\alpha,\beta) + \alpha([\xi,\sharp_\Pi(\beta)]),$$

et comme nous avons $\Pi(\alpha,\beta) = \Omega(a,b)\,,\sharp_\Pi(\beta) = b - \eta(b)\xi$ et $\alpha(\xi) = \eta(a)$, il s'en suit que

$$\begin{array}{rcl}\Pi(\mathcal{L}^\rho_\xi\alpha,\beta) & = & \rho(\xi)\cdot\Omega(a,b) + \alpha([\xi,b]) - \eta(a)\rho(\xi)(\eta(b)) \\ & = & \rho(\xi)\cdot\Omega(a,b) + \alpha([\xi,b]) - \eta(a)\eta([\xi,b]) - \eta(a)\mathcal{L}^\rho_\xi(b).\end{array}$$

comme $\alpha = \flat_{\Omega,\eta}(a)$, et $\alpha([\xi,b]) - \eta(a)\eta([\xi,b]) = -i_a\Omega([\xi,b])$, alors

$$\Pi(\mathcal{L}^\rho_\xi\alpha,\beta) = \rho(\xi)\cdot\Omega(a,b) - \Omega(a,[\xi,b]) - \eta(a)\mathcal{L}^\rho_\xi\eta(b)$$

Échange α et β nous avons aussi

$$\Pi(\alpha,\mathcal{L}^\rho_\xi\beta) - \Pi(\mathcal{L}^\rho_\xi\alpha,\beta) = \rho(\xi)\cdot\Omega(a,b) - \Omega(a,[\xi,b]) + \eta(b)\mathcal{L}^\rho_\xi\eta(a).$$

Remplacement dans (4.10), nous obtenons

$$\mathcal{L}^\rho_\xi\Pi(\alpha,\beta) = -\rho(\xi)\cdot\Omega(a,b)\Omega(a,[\xi,b]) + \Omega([\xi,a],b) + \eta(a)\mathcal{L}^\rho_\xi(b) - \eta(b)\mathcal{L}^\rho_\xi\eta(a)$$

ce qui prouve la deuxième affirmation de la proposition.

4.3.2 Algébroïde de Lie-Contact

Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ un pré-algébroïde le fibré vectoriel $\mathcal{A}$ de rang impair $2n+1$. Une structure de Contact sur $\mathcal{A}$ est la donnée une A-forme η de degré 1 telle que la A-forme $\eta \wedge (d_\rho \eta)^{\wedge n}$ de degré $2n+1$ ne s'annule jamais. Donc, la structure de Contact sur $\mathcal{A}$ est un structures cosymplectiques (Ω, η) dons $\mathcal{A}$ avec $\Omega = d_\rho \eta$. Si $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est un pré-algébroïde et η est une structure de Contact sur $\mathcal{A}$ nous appelons que $(\mathcal{A}, [,], \rho, \eta)$ est un pré-algébroïde-Contact .

Soit (Ω, η) une structure cosymplectique sur le pré-algébroïde $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ et soit ξ la section de Reeb associée. Par les relations (4.8) et la formule Cartan (3.2) nous avons :

$$\mathcal{L}^\rho_\xi \Omega = i_\xi(d_\rho \Omega) \quad et \quad \mathcal{L}^\rho_\xi \eta = i_\xi(d_\rho \eta). \tag{4.11}$$

Si $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est une algébroïde de Lie et η est une structure de Contact sur $\mathcal{A}$, i.e. presque structures cosymplectiques (Ω, η) sur $\mathcal{A}$ telle que $\Omega = d_\rho \eta$, comme nous avons $d_\rho(d_\rho \eta) = 0$ et $i_\xi(\Omega) = 0$, s'ensuit que

$$\mathcal{L}^\rho_\xi \Omega = \mathcal{L}^\rho_\xi (d_\rho \eta) \quad et \quad \mathcal{L}^\rho_\xi \eta = 0. \tag{4.12}$$

Le théorème suivant dit que sur un algébroïde de Lie la structure de Contact sont précisément la structure de Jacobi (Π, ξ) telle que $\xi \wedge \Pi^n$ est partout non nulle.

Théorème 4.14 : Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ une algébroïde de Lie. Soit (Ω, η) est une presque structure cosymplectique sur $\mathcal{A}$ et (Π, ξ) la paire fondamentale associée. La paire (Ω, η) est une structure de Contact si et seulement si la paire (Π, ξ) est une structure de Jacobi sur $(\mathcal{A}, [,], \rho)$.

preuve : Supposons que $\Omega = d_\rho \eta$. le fait que (Π, ξ) est une structure de Jacobi est une conséquence directe de proposition 4.3.6 et la relations (4.12) ci-dessus. Inversement, en suppose que (Π, ξ) est une structure de Jacobi sur $\mathcal{A}$. comme $\mathcal{L}^\rho_\xi \Pi = 0$, par la deuxième affirmation de la Proposition4.3.6, il s'ensuit que

$$\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Omega = \eta \wedge \mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\eta. \tag{4.13}$$

Par la deuxième relation dans (4.11), pour tout $a \in \Gamma(\mathcal{A})$ nous avons

$$\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\eta(a) = i_{\xi}(d_{\rho}\eta)(a) = \eta \wedge i_{\xi}(d_{\rho}\eta)(\xi, a) = \eta \wedge \mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\eta(\xi, a),$$

et ensuite, par (4.13) et la première relation dans (4.11), il s' en suit que

$$\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\eta(a) = \mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Omega(\xi, a) = i_{\xi}(d_{\rho}\Omega)(\xi, a) = 0.$$

D'où, $\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\eta = 0$, et par (4.13) encore, il s' en suit que $\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Omega = 0$. Maintenant, puisque nous avons aussi $[\Pi, \Pi] = 2\xi \wedge \Pi$, par la première affirmation de la Proposition 4.3.6, il souvient que $d_{\rho}\Omega + \eta \wedge (d_{\rho}\eta - \Omega) = 0$, et donc, pour tous $a, b \in \Gamma(\mathcal{A})$, on a

$$d_{\rho}\Omega(\xi, a, b) + \eta \wedge (d_{\rho}\eta - \Omega)(\xi, a, b) = 0.$$

D'autre part, comme $d_{\rho}\Omega(\xi, a, b) = i_{\xi}(d_{\rho}\Omega)(a, b) = \mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Omega(a, b) = 0$ et $i_{\xi}(d_{\rho}\eta) = \mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\eta = 0$, et par la relations (4.8), nous avons

$$d_{\rho}\Omega(\xi, a, b) + \eta \wedge (d_{\rho}\eta - \Omega)(\xi, a, b) = (d_{\rho}\eta - \Omega)(a, b).$$

Par conséquent $(d_{\rho}\eta - \Omega)(a, b) = 0$.

Remarques 4.15 :

1. Si $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ dans le théorème ci-dessus n'est qu'un pré-algébroïde de Lie, nous voyons de la preuve que le fait (Π, ξ) est une structure de Jacobi implique toujours (Ω, η) est structure de Contact.
2. Une algébroïde de Lie-contact $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ nous associons naturellement un structure d'algébroïde de Lie sur le fibré dual $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$ comme suit. Soit (Π, ξ) la structure de Jacobi associée à la forme de Contact η. on pose $\flat_{\eta} = \flat_{\Omega,\eta}$ et $\sharp_{\eta} = \sharp_{\Omega,\eta} = \flat_{\eta}^{-1}$ avec $\Omega = d_{\rho}\eta$. Par le lemme 4.12, nous avons $\sharp_{\Pi,\xi} = \sharp_{\eta}$, donc $\sharp_{\Pi,\xi}$ est un isomorphisme satisfaisant $\sharp_{\Pi,\xi}(\eta) = \xi$, et donc par le théorème 4.2 un isomorphisme satisfaisant

$$\sharp_{\Pi,\xi}([\alpha, \beta]^{\eta}_{\Pi,\xi}) = [\sharp_{\Pi}(\alpha), \sharp_{\Pi}(\beta)].$$

Par conséquent, le pré-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}^*, [,]^{\eta}_{\Pi,\xi}, \rho_{\Pi,\xi})$ est un algébroïde de Lie isomorphique à l'algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [,], \rho)$. Si on met $\rho_\eta = \rho \circ \sharp_\eta$ et $[\,,\,]_\eta = [\,,\,]^{\eta}_{\Pi,\xi}$ l'algébroïde de Lie $(\mathcal{A}^*, [,]_\eta, \rho_\eta)$ peut être appelé l'algébroïde de Lie dual de l'algébroïde de Lie Contact $(\mathcal{A}, [,], \rho, \eta)$.

4.3.3 Algébroïde de Lie à une variété localement conformément symplectique

Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ un pré-algébroïde sur M. une structure localement conformément symplectique sur $(\mathcal{A}, [,], \rho)$ est la donnée d'une pair (ω, θ) composée d'un 1-forme fermé θ et d'un 2-forme ω sur $\mathcal{A}$ non dégénérée telle que

$$d_\rho \omega + \theta \wedge \omega = 0.$$

Nous disons aussi que $(\mathcal{A}, [,], \rho, \omega, \theta)$ est une pré-algébroïde localement conformément symplectique. Dans ou θ exacte, i.e. $\theta = d_\rho f$ pour une fonction $f \in C^\infty(M)$, on dit que $(\mathcal{A}, [,], \rho, \omega, \theta)$ est une pré-algébroïde conformément symplectique, ce qui est équivalent d'un que $(\mathcal{A}, [,], \rho, \exp^f \omega)$ une pré-algébroïde symplectique.
Soit ω une 2-forme non dégénérée sur $\mathcal{A}$ et soit $\theta \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$. Au le couple (ω, θ) nous associons une paire de champ de A-tenseurs contravariants (Π, ξ) comme suit :

$$\Pi(\alpha, \beta) = \omega(\sharp_\omega(\alpha), \sharp_\omega(\beta)) \quad et \quad \xi = \sharp_\omega(\theta),$$

o*ù* $\sharp_\omega$ est l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme de fibré vectoriel $\flat_\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$, $\flat_\omega(a) = -i_a\omega$. Clairement Π est non dégénéré et $\sharp_\Pi = \sharp_\omega$. donc nous avons une correspondance individuelle entre la paire (ω, θ) et la paire (Π, ξ) avec Π est non dégénéré. Nous récupérons la paire (ω, θ) par les relations

$$\omega(a,b)=\Pi(\sharp_\Omega^{-1}(a),\sharp_\Omega^{-1}(b)) \quad et \quad \theta=\sharp_\Pi^{-1}(\xi).$$

Nous avons les points suivants :

Propositions 4.16 : Soit $(\mathcal{A},[,],\rho)$ une pré-algébroïde de Lie. Soient (ω,θ) et (Π,ξ) deux paires comme ci-dessus. Soient a,b,c les A-champs de vecteurs et soit $\alpha=\flat_\omega(a)$, $\beta=\flat_\omega(b)$ et $\gamma=\flat_\omega(c)$. Nous avons

1. $(\frac{1}{2}[\Pi,\Pi]-\xi\wedge\Pi)(\alpha,\beta,\gamma)=(d_\rho\omega+\theta\wedge\omega)(a,b,c)$.
2. $\mathcal{L}_\xi^\rho\Pi(\alpha,\beta)=-\mathcal{L}_\xi^\rho\omega(a,b)$

Preuve : Utilisation de l'identité (4.4) , on a

$$\omega([a,b],c)=\gamma([a,b])=-\frac{1}{2}[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma)+\Pi([\alpha,\beta]_\Pi,\gamma).$$

Nous avons aussi $\rho(a)\cdot\omega(b,c)=\rho_\Pi(\alpha)\cdot\Pi(\beta,\gamma)$. Par conséquent, par un calcul direct utilisant identité (4.3), nous obtenons

$$d_\rho\omega(a,b,c)=\frac{1}{2}[\Pi,\Pi](\alpha,\beta,\gamma).$$

par ailleurs, notons que $\theta(a)=-i_\xi\omega(a)=i_a\omega(\xi)=-\alpha(\xi)$, de même $\theta(b)=-\beta(\xi)$ et $\theta(c)=-\gamma(\xi)$, ainsi $\theta\wedge\Omega(a,b,c)=-\xi\wedge\Pi(\alpha,\beta,\gamma)$. D'où, avec (4.14), nous montrons la première affirmation de la proposition. Pour la deuxième affirmation, il suffit de noter que

$$\Pi(\mathcal{L}_\xi^\rho\alpha,\beta)=-\mathcal{L}_\xi^\rho\alpha(b)=-\rho(\xi)(\alpha(b))+\alpha(\mathcal{L}_\xi^\rho b)=\rho(\xi)\cdot\omega(a,b)-\omega(a,\mathcal{L}_\xi^\rho b).$$

Le théorème suivant montre que les structures localement conforméments symplectiques sont précisément ceux associée à une structure de Jacobi (Π,ξ) avec un Π champ deux vecteur sous-jacent par tout non dégénéré

Théorème 4.17 : La paire (ω,θ) définie une structure localement conformément symplectique si seulement si la paire (Π,ξ) définie une structure Jacobi sur $(\mathcal{A},[,],\rho)$.

Preuve : De la première affirmation de la Proposition 4.16 nous déduisons que l' identité $d_\rho\omega+\theta\wedge\omega=0$ est satisfait si et seulement si l'identité

$[\Pi, \Pi] = 2\xi \wedge \Pi$, et si l' une des deux est satisfaite puis, en utilisant la formule Cartan, on obtient

$$\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\omega = d_{\rho}(i_{\xi}\omega) + i_{\xi}d_{\rho}\omega = -d_{\rho}\theta - i_{\xi}(\theta \wedge \omega) = -d_{\rho}\theta,$$

et ensuite, avec l'affirmation 2. de la proposition 4.16 que $\mathcal{L}^{\rho}_{\xi}\Pi = 0$ si et seulement si $d_{\rho}\theta = 0$.

Remarque 4.18 : Soit $(\mathcal{A}, [,], \rho, \omega, \theta)$ un pré-algébroïde localement conformément symplectique et soit (Π, ξ) la structure de Jacobi. comme nous avons que $\sharp_{\Pi,\xi}(\theta) = \sharp_{\Pi}(\theta) + \theta(\xi)\xi = \sharp_{\Pi}(\theta) = \xi$, par le théorème 4.8, nous avons

$$\sharp_{\Pi,\xi}([\alpha, \beta]^{\theta}_{\Pi,\xi}) = [\sharp_{\Pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\Pi,\xi}(\beta)].$$

D'autre part, le morphisme de fibrés vectoriels $\sharp_{\Pi,\xi}$ est un isomorphisme. En effet, comme nous avons $\sharp_{\Pi,\xi}(\alpha) = \sharp_{\Pi}(\alpha + \alpha(\xi)\xi)$ et comme le champ de deux vecteur Π est non dégénéré, alors $\sharp_{\Pi,\xi}(\alpha) = 0$ implique $\alpha = -\alpha(\xi)\theta$, ainsi $\alpha(\xi) = -\alpha(\xi)\theta(\xi) = 0$, et donc $\alpha = 0$. Par conséquent, tout comme dans la situation de Contact, le pré-algébroïde $(\mathcal{A}^*, [,]^{\theta}_{\Pi,\xi}, \rho_{\Pi,\xi})$ est une algébroïde de Lie isomorphe l'algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [,], \rho)$. Si nous avons mis $\rho_{\omega,\theta} = \rho_{\Pi,\xi}$ et $[\,,\,]_{\omega,\theta} = [\,,\,]^{\theta}_{\Pi,\xi}$, pré-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}^*, [,]^{\theta}_{\omega,\theta}, \rho_{\omega,\theta})$ peut être appelée dual pré-algébroïde de un pré-algébroïde localement conformément symplectique $(\mathcal{A}, [,], \rho, \omega, \theta)$.

Bibliographie

[1] A.Gonzalez, Action hamiltonienne d'un tore sur une variété localement conformément symplectique.

[2] C.-M. Marle, On Jacobi manifolds and Jacobi bundles, in "Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems", Séminaire Sud Rhodanien de Géométrie 'a Berkeley (1989), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 20, Springer-Verlag, New York, 1991, pp 227-246.

[3] C.-M. Marle,Variétés symplectiques et variétés de Poisson,Université Pierre et Marie Curie,Année universitaire 1998-1999

[4] C.-M. Marle, Calculus on Lie algebroids, Lie groupoids and Poisson manifolds.Disser-tationes Mathematicae, Vol. 457, Institute of Mathematics, PolishAcademy of Sciences, 2008.

[5] D.E.Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Progress in Mathematics Vol. 203, Birkhauser, Boston, 2002.

[6] I. Vaisman, Lectures on the geometry of Poisson manifolds Progress in Mathematics

[7] J.P.Dufour Nguyen Tien,Poisson Structures and Their Normal Forms Zung ,Volume 242 Birkhäuser Verlag

[8] Y. Aït Amrane, A. Zeglaoui, Compatibility of Riemannian structures and Jacobi structures.