



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année univ.: 2018/2019



# Courbes magnétiques sur les variétés de Walker

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

**Semmache Rabab**<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Dr.H.M.Dida**

Soutenue le 14/07/2019 devant le jury composé de

<b>Pr. F.Hathout</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
<b>Dr.H.M.Dida</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
<b>Mlle.H. Abbas</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
<b>Mr. A.Zeglaoui</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

---

1. e-mail : roujisemmache@gmail.com

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude :  
À ma très chère mère j'aimerai toujours te remercier pour tous  
Ce que tu as fais jusqu'à notre jours là pour assurer notre éducation  
Chère mère j'avoue vraiment  
Que tu a été et tu sera la lumière qui guide mes routes et qui m'emmène aux chemins  
De la réussite, c'est grâce à toi que je doit toute ma réussite.  
Mon chère père, pour ta patience, t' amour, ta soutien et t'  
Encouragements.  
À toute ma famille pour l'amour et le respect qu'ils m'ont toujours accordé.  
À mon cher fiancé K.Chadli  
Je leur souhaite tout le succès... tout le bonheur  
À mon cher frère et à sa chère épouse  
Je leur souhaite tout le succès... tout le bonheur  
À mes très chère amies Mahdjouba et Hayat  
Pour une sincérité si merveilleuse... jamais oubliable, en leur souhaitant  
Tout le succès tout le bonheur.  
Sans oublier tous les professeurs que ce soit du  
Primaire, du moyen, du secondaire et de l'enseignement supérieur  
À toute personne  
Qui m'a aidée à franchir un horizon dans ma vie.*

## *Remerciement*

Au terme de la rédaction de ce mémoire, je remercie ALLAH qui m'a toujours donné la patience et le courage durant ces longues années d'études, et la force d'accomplir ce modeste travail.

Je remercie sincèrement mon directeur de mémoire, Monsieur M.Dida, pour son soutien scientifique, ainsi que pour ses judicieux conseils et ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je souhaite également à remercier chaque membres du jury en commençant par le professeur F.Hathout, M elle H.Abbas et Mr. A.Zeglaoui, pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mon vifs remerciements à toutes ma famille surtout mes parents, fiancé et frère pour leur soutien, prières et encouragements. Je tiens à remercier tous mes amis (e) et mes collègues et surtout ceux avec qui on a passé une période agréable à l'université de Doctor Moulay Tahar.

Je remercie tous les professeurs qui nous ont enseignés et qui par leur compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences dans la réalisation de ce mémoire.

MERCI À TOUS.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la géométrie Riemannienne</b>	<b>5</b>
1.1	Variétés différentielles . . . . .	5
1.1.1	Définitions . . . . .	5
1.1.2	Applications différentiables . . . . .	8
1.1.3	Espace tangent en un point . . . . .	10
1.1.4	Fibré tangent . . . . .	11
1.1.5	Champ de vecteurs . . . . .	12
1.1.6	Fibré cotangent . . . . .	13
1.1.7	Crochet et Algèbre de Lie . . . . .	14
1.1.8	Derivée de Lie . . . . .	15
1.2	Métrique Riemannienne sur une variété . . . . .	16
1.2.1	Connexion linéaire . . . . .	18
1.2.2	Tenseur de torsion . . . . .	19
1.2.3	Connexion de Levi-Civita . . . . .	20
1.2.4	Tenseur de courbure . . . . .	22
1.2.5	Géodésiques et Transport parallèle . . . . .	22
1.3	Quelques opérateurs différentiels . . . . .	25
1.3.1	Opérateur star de Hodge . . . . .	25
1.3.2	Divergence d'un champ de vecteurs . . . . .	26
1.3.3	Forme Volume . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Variétés pseudo-Riemanniennes</b>	<b>29</b>
2.1	Métriques semi-Riemanniennes . . . . .	29
2.2	Variétés Lorentziennes . . . . .	31
2.2.1	Espace de Minkowski $\mathbb{E}_1^3$ . . . . .	31

<b>3</b>	<b>Variété de Walker de dimension 3</b>	<b>36</b>
3.1	Produit Vectoriel . . . . .	37
3.2	Connexion de Levi-Civita . . . . .	38
3.3	Courbes géodésiques sur les 3-variétés de Walker . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Courbes magnétiques de Killing sur les variétés de Walker</b>	<b>43</b>
4.1	Champ de Killing sur une variété (Pseudo)-Riemannienne . . . . .	43
4.2	Courbes magnétiques sur une variété (Pseudo)-Riemannienne . . . . .	47
4.2.1	Champs magnétiques sur $(M^3, g)$ . . . . .	48
4.2.2	Champs magnétiques de Killing sur $(M^3, g)$ . . . . .	50
4.2.3	Courbe magnétique de Killing sur $(\mathbb{E}^3, \langle, \rangle)$ . . . . .	51
4.3	Champ de Killing sur les 3-variétés de Walker . . . . .	51
4.3.1	Courbes magnétiques de Killing sur les 3-variétés de Walker . . . . .	54

# Introduction

En mathématiques pures et appliquées, on rencontre souvent des espaces qui ressemblent localement à  $\mathbb{R}^n$ , dans le sens où ils peuvent être paramétrés localement par  $n$  coordonnées : par exemple, la sphère à  $n$  dimensions  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Le concept d'espaces qui ressemblent localement à  $\mathbb{R}^n$  est formalisé par la définition de variétés topologiques : des espaces topologiques localement homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$ . Les variétés différentiables sont définies en tant que variétés topologiques dont les changements de coordonnées sont lisses.

Les propriétés métriques de  $\mathbb{R}^n$  (distances et angles) sont déterminées par les coordonnées cartésiennes canoniques. Dans une variété généralement différentiable, cependant, il n'y a pas de telles coordonnées pour définir les distances et les angles, il faut ajouter plus de structure en choisissant un 2-champ de tenseur spécial, appelé métrique Riemannienne. Cette idée a été introduite par Riemann dans son exposé d'habilitation de 1854 intitulé «On the hypotheses which underlie geometry», à la suite de la découverte (vers 1830) de la géométrie non Euclidienne par Gauss, Bolyai et Lobachevsky.

L'étude des métriques indéfinies a donnée naissance à la géométrie pseudo-Riemannienne. Une partie de l'univers peut être représentée par les modèles établis via la géométrie Lorentzienne qui représente un cas particulier de la géométrie pseudo-Riemannienne. Plus explicitement, les variétés Lorentziennes sont des variétés lisses qui sont fournies avec la métrique Lorentzienne. Ces variétés sont exploitées comme modèles cosmologiques pour expliquer les phénomènes se produisant sur l'échelle des planètes tels que le Big Bang et l'expansion de l'univers. Néanmoins, il est possible que plusieurs métriques engendrent la même connexion. Cette non-unicité est étudiée pour les métriques de signature arbitraire et pour les métriques de Lorentz. Il est connu que l'existence d'un champ de lignes parallèles sur une variété Riemannienne donne lieu à une décomposition locale de la variété en tant que produit direct. Cette propriété s'étend aux variétés semi-Riemanniennes chaque fois que le champ de ligne est non dégénéré. Cependant, les conséquences géométriques de l'existence d'un champ de ligne dégénéré parallèle ne sont pas encore bien comprises. Une de ces variétés intéressantes sont les variétés pseudo-Riemanniennes qui admettent un champ de ligne dégénéré parallèle. Walker a étudié ces variétés en 1950. Motivé par son travail, une variété semi-riemannienne qui admet un champ de ligne dégénéré parallèle s'appelle une variété de Walker (voir [17]).

La première section du chapitre 1 sera réservée aux notions générales et préliminaires de variétés différentielles, conçues de manière à rendre ce travail aussi autonome que possible. Il ne contiendra aucun résultat nouveau, mais présentera un travail de synthèse pour le chapitre 2.

La seconde section initie l'étude de la géométrie Riemannienne. On présente les métriques Riemannienne en tant que champs de tenseurs déterminant un produit interne dans chaque espace tangent.

Cela conduit naturellement à un certain nombre de concepts, tels que la longueur d'un vecteur (ou une courbe), et la forme volume Riemannienne. La section 3 traite la différenciabilité des champs de vecteurs. Ce concept nécessite également l'introduction d'une structure supplémentaire, appelée connexion affine. elle fournit une notion de parallélisme des vecteurs le long des courbes, et par conséquent des géodésiques, c'est-à-dire des courbes dont le vecteur tangent est parallèle, une notion que l'on verra la dernière section. Les variétés Riemanniennes sont équipées d'une connexion affine spéciale, appelée connexion de Levi-Civita, dont les propriétés géodésiques minimisent la distance.

Au second chapitre de ce mémoire nous introduisons quelques notions générales de géométrie pseudo-Riemannienne. Nous y définissons en particulier la géométrie Lorentzienne. Nous définissons l'espace métrique Lorentzien  $E_1^3$ , le troisième chapitre de ce mémoire sera consacré à l'introduction des variétés  $(M^3, g_f)$  de Walker, c'est-à-dire une variété lorentzienne tridimensionnelle admettant un champ de lignes dégénérés parallèles. Les variétés de Walker sont décrites en termes de coordonnées locales  $x, y, z$  et une fonction  $f = f(x, y, z)$ . Si la variété est stricte, alors elle peut être caractérisée par  $f = f(y, z)$ . Nous calculons, ainsi, les connexions d'une variété tridimensionnelle de Walker arbitraire. Enfin, dans la dernière partie, nous nous intéressons aux géodésiques d'une variété de Walker  $(M^3, g_f)$ , en particulier celles à composante constante ou linéaire.

Dans le quatrième et dernier chapitre de ce mémoire nous développons avec beaucoup de détails l'objectif essentiel qui consiste à étudier les courbes magnétiques de Killing sur les variétés de Walker, afin de classer les courbes de Killing correspondantes. À cet effet, nous nous concentrons sur les variétés de Walker de dimension trois, désignées par  $M_f^3$ , Dans un premier temps, nous classifions les champs de vecteurs de Killing sur ces espaces. Pour l'existence d'un tel champ de vecteurs,  $\partial_x$  est de Killing sur  $M_f^3$ , si et seulement si cette variété de Walker est stricte, c'est l'intérêt de la première section.

Les géodésiques peuvent être considérés comme un type particulier de trajectoires magnétiques, à obtenir dans le cas où le champ magnétique s'annule, notamment lorsque la particule chargée se déplace seulement sous l'effet de la gravité. Sur les variétés pseudo-Riemanniennes, les géodésiques de type lumière sont d'un intérêt particulier. Si une variété de Walker  $M_f^3$  admet un champ de vecteur unitaire de type espace, normal à une courbe de type lumière  $\gamma$  (c'est-à-dire  $\gamma$  est une courbe intégrale de  $\xi^\perp$ ), après un reparamétrage,  $\gamma$  est une géodésique. De plus, lorsque  $M_f^3$  est doté d'un champ vectoriel de Killing  $V$ , nous obtenons les courbes magnétiques correspondant à  $V$  en considérant les courbes intégrales de type espaces ou temps de  $V^\perp$ . Enfin, nous caractérisons les trajectoires magnétiques normales associées au champ de vecteurs Killing  $\partial_x$  sur  $M_f^3$ , et obtenons quelques exemples de courbes magnétiques de Killing sur de tels variétés.

# Chapitre 1

## Introduction à la géométrie Riemannienne

### 1.1 Variétés différentielles

Intuitivement, une variété est une généralisation des courbes et des surfaces à des dimensions plus élevées. elle est localement Euclidien, chaque voisinage d'un point, appelé carte, est homéomorphe à un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Les coordonnées sur une carte permettent d'effectuer des calculs comme dans un espace Euclidien, de sorte que de nombreux concepts de  $\mathbb{R}^n$ , tels que la différentiabilité, les dérivations ponctuelles, les espaces tangents et les formes différentielles, sont transférés à une variété. De façon informelle, une variété de dimension  $n$  est un espace topologique localement homéomorphe à un espace Euclidien de dimension  $n$ . Ainsi les variétés différentielles sont des espaces topologiques admettant un recouvrement par des ouverts homéomorphes à des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et dont les intersections de à deux ouverts sont compatibles selon un sens qu'il reste à définir.

#### 1.1.1 Définitions

**Définition 1.1** *Un atlas de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , et de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée d'un ensemble de couple  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tel que :*

(i)  $\forall i \in I$ ,  $U_i$  est un ouvert de  $X$  et  $\varphi_i$  est un homéomorphe de  $U_i$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

(ii)  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ .

(iii)  $\forall i, j \in I$ ,  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  est un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme.

**Remarque 1.2** (i)  $\forall i, j \in I$ ,  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Le couple  $(U_i, \varphi_i)$  est une carte de l'atlas.

(iii) Si  $x \in U_i$ ,  $(U_i, \varphi_i)$  est une carte en  $x$ .

(iv) Le  $n$ -uplet  $\varphi_i(x) = (\varphi_{i_1}(x), \dots, \varphi_{i_n}(x))$  représente les coordonnées locales de  $x$  associées à la carte  $(U_i, \varphi_i)$ .

(v) L'application  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  est nommée application de changement de cartes.

**Définition 1.3** Deux atlas de classe  $C^p$  sur  $X$  sont compatibles si leur réunion est encore un atlas de classe  $C^p$  sur  $X$ , il s'agit d'une relation d'équivalence. L'atlas maximal est obtenu en considérant la réunion de tous les atlas compatibles (qui est encore compatible).

**Remarque 1.4** (i) Pour vérifier que deux atlas sont compatibles il suffit donc de vérifier qu'étant données une carte  $(U, \varphi)$  du premier atlas et une carte  $(V, \psi)$  du second atlas, l'application de transition  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  est un  $C^p$ -difféomorphisme.

(ii) Tout atlas est donc contenu dans un unique atlas maximal pour l'inclusion.

**Exemple 1.5** 1.  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable de dimension  $n$ .

2. La sphère  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est une variété différentiable de dimension  $n$ .

3. L'ensemble des matrices carré  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  d'ordre  $n$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  est une variété de dimension  $n^2$ .

4. Le produit de deux variétés est une variété de dimension somme des deux dimension par exemple le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  est une variété différentielle de dimension 2.

**Définition 1.6** Une variété différentielle de classe  $C^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est la donnée d'un espace topologique  $M$  séparé à base dénombrable et d'un atlas maximal sur  $M$  de classe  $C^p$  et de dimension  $n$ .

**Exemple 1.7** la sphère  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Soient  $N = (1, 0, \dots, 0)$  et  $S = (-1, 0, \dots, 0)$ . Posons  $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  et  $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ . On construit la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^n$  sur l'hyperplan équatorial  $H = \{x_0 = 0\} \simeq \mathbb{R}^n$  par rapport à  $N$  en associant à tout point  $x \in U_N$  l'intersection de  $(N_x)$  et de  $H$ . De même pour la projection stéréographique par rapport à  $S$ . Après calculs on obtient

$$i_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad i_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \frac{1}{(1-x_0)}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{1}{(1+x_0)}(x_1, \dots, x_n)$$

Il s'agit d'homéomorphismes d'inverses

$$\begin{aligned}
 i_N^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_N \\
 y &\longmapsto \left( \frac{1}{\|y\|^2+1} \right) (\|y\|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n), \\
 i_S^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_S \\
 y &\longmapsto \left( \frac{1}{\|y\|^2+1} \right) (-\|y\|^2 + 1, 2y_1, \dots, 2y_n).
 \end{aligned}$$

et l'application de changement de cartes est donnée par

$$\begin{aligned}
 i_S \circ i_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\
 y &\longmapsto \frac{y}{\|y\|^2}
 \end{aligned}$$

(voir Fig.1 et 2).

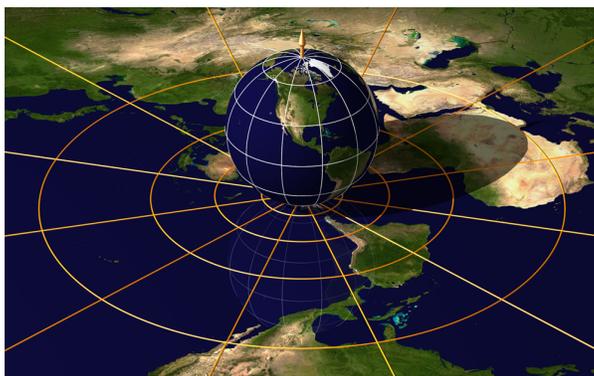


Fig.1

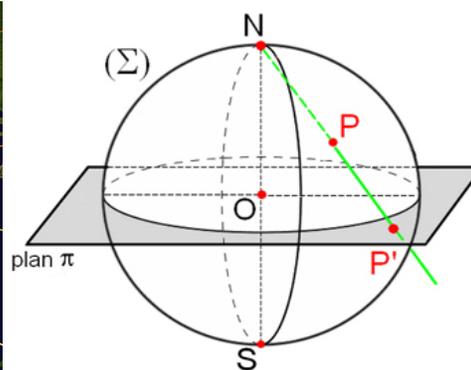


Fig.2

**Exemple 1.8** (espace projectif réel  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ). Le  $(n+1)$ -uplet  $x = (x_0, \dots, x_n)$  est un système de coordonnées homogènes de  $p(x)$ . Il sera commode de noter  $[x] = [(x_0, \dots, x_n)]$  le point de coordonnées homogènes  $x$ . Nous allons munir  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  d'un atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  et donc en faire une variété. Posons  $V_i = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$  ( $0 \leq i \leq n$ ) et définissons les applications  $\Phi_i$  par :

$$\begin{aligned}
 \Phi_i : V_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
 (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)
 \end{aligned}$$

où le signe  $\widehat{\phantom{x}}$  signifie que le terme correspondant est omis. Ce sont des applications continues et  $\Phi_i(x) = \Phi_i(y)$  si et seulement si  $p(x) = p(y)$ . D'après les propriétés de la topologie quotient,  $U_i = \Phi_i(V_i)$  est un ouvert de  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  et  $\Phi_i$  passe au quotient et donne une application bijective et continue  $\varphi_i$  de  $U_i$

dans  $\mathbb{R}^n$ . Explicitement,

$$\varphi_i(p(x)) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

L'application réciproque est donnée par :  $\varphi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = p(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1})$ , ce qui montre que  $\varphi_i$  est un homéomorphisme de  $U_i$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Les fonctions de transition  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  sont bien des difféomorphismes de  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  sur  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ , car pour  $y_j \neq 0$  on a

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = \left( \frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \dots, \frac{\widehat{y_j}}{y_j}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_j} \right)$$

Nous avons ainsi une structure de variété lisse sur  $P^n\mathbb{R}$  (voir Fig.3).

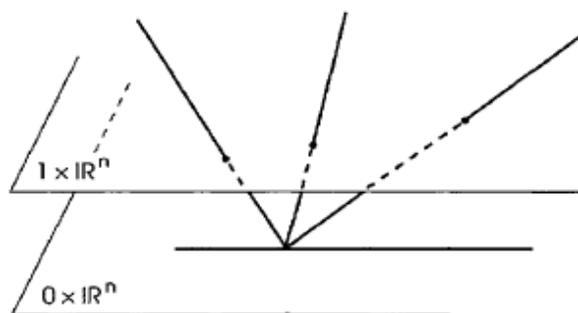


Fig.3

### 1.1.2 Applications différentiables

Nous ne savons faire du calcul différentiel que sur des ouverts d'espaces vectoriels normés. L'intérêt des variétés est de pouvoir faire du calcul différentiel localement en se ramenant à des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  via les cartes. D'où la définition suivante.

**Définition 1.9** Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés différentielles de classe  $\mathcal{C}^p$  est dite de classe  $\mathcal{C}^p$  en  $x \in M$  s'il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $x$  et une carte locale  $(V, \psi)$  de  $N$  en  $f(x)$  telles que  $f(U) \subset V$  et que l'application  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$  en  $\varphi(x)$ .

**Définition 1.10** Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés différentielles est dite de classe  $\mathcal{C}^p$  si elle l'est en tout point de  $M$ .

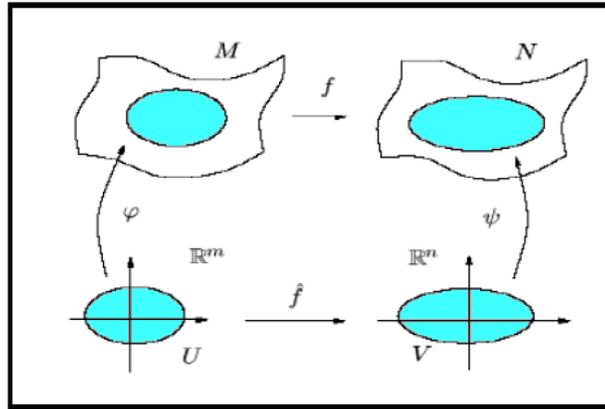


Fig.4

**Remarque 1.11** 1. En particulier une application de classe  $\mathcal{C}^p$  en  $x$  est continue en  $x$  (localement  $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ ).

2. Une application lisse est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  entre variétés lisses.

3. On peut remplacer l'hypothèse  $f(U) \subset V$  par  $f$  continue de sorte à ce que  $f^{-1}(V)$  soit un ouvert.

4. La définition est cohérente du fait de la régularité des applications de changement de cartes, elle ne dépend pas du choix des cartes.

**Lemme 1.12** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue entre deux variétés. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ .

2. Il existe un atlas  $\mathcal{U}$  de  $M$  et un atlas  $\mathcal{V}$  de  $N$  tels que pour toutes cartes  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{U}$  et  $(V, \psi)$  de  $\mathcal{V}$  :  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est  $\mathcal{C}^p$ .

3. Pour toutes cartes  $(U, \varphi)$  de  $M$  et  $(V, \psi)$  de  $N$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est  $\mathcal{C}^p$ .

**Remarque 1.13** Il suffit donc de vérifier l'aspect  $\mathcal{C}^p$  sur un atlas définissant la structure différentielle.

Le théorème de composition des applications de classe  $\mathcal{C}^p$  se généralise aux applications de classe  $\mathcal{C}^p$  entre deux variétés :

**Théorème 1.14** Soient  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow P$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^p$  entre variétés différentielles alors  $g \circ f : M \rightarrow P$  est encore de classe  $\mathcal{C}^p$ .

### 1.1.3 Espace tangent en un point

Soient  $M$  une variété différentielle et  $c : I \rightarrow M$  une application de classe  $\mathcal{C}^p$ . Posons

$$C_m^M = \{c : I \rightarrow M \mid 0 \in I \text{ et } c(0) = m\}$$

où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $m \in M$ . Deux courbes  $c_1$  et  $c_2$  de  $C_m^M$  sont tangentes en  $m$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $m$  tel que  $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$ . Cette condition ne dépend pas du choix de la carte. En effet ; si  $(V, \psi)$  est une autre carte alors

$$(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_1)'(0) = d_\varphi(m)(\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c_1)'(0))$$

On a donc défini une relation d'équivalence sur  $C_m^M$ , d'où

**Définition 1.15** Une classe d'équivalence est un vecteur tangent à  $M$  en  $p$  et on nomme espace tangent à  $M$  en  $p$  l'espace quotient noté  $T_p M$ .

**Remarque 1.16** 1. Si  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $p \in U$  alors  $T_p U = T_p M$ .

2. Soient  $p \in M$  et  $p' \in M'$  alors  $T_{(p,p)}(M \times M') = T_p M \oplus T_{p'} M'$ .

**Définition 1.17** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable entre variétés différentielles, alors pour tout  $p \in M$  l'application

$$\begin{aligned} C_p^M &\longrightarrow C_{f(p)}^N \\ c &\longmapsto f \circ c \end{aligned}$$

passse au quotient en une application linéaire  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , nommée différentielle de  $f$  en  $p$  (ou application linéaire tangente de  $f$  en  $p$ ).

**Proposition 1.18** 1. Si  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow P$  sont deux applications différentiables entre variétés alors  $\forall p \in M$ ,  $T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f$ .

2. Si  $f : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme alors  $T_p f$  est un isomorphisme et  $(T_p f)^{-1} = T_{f(p)}(f^{-1})$ .

**Exemple 1.19** espace tangent de  $\mathbb{S}^n$  en un point

Considérons  $\mathbb{S}^n$  comme une sous variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Si  $x \in \mathbb{S}^n$  alors  $T_x \mathbb{S}^n \simeq \ker T_x f = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x \mid y) = 0\}$  où

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto x_0^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned}$$

(voir Fig.5).

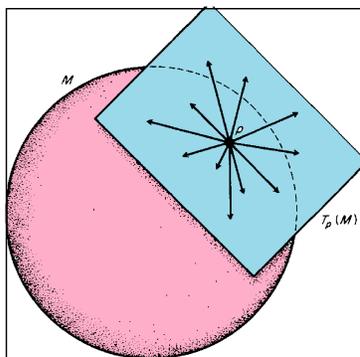


Fig.5

### 1.1.4 Fibré tangent

Nous allons voir que l'ensemble des espaces tangents d'une variété admet une structure de fibré vectoriel. Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$  et de classe  $\mathcal{C}^p, p > 0$ , on note  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  et si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  on pose  $TU = \bigcup_{p \in M} T_p U = \bigcup_{p \in M} T_p M$ . L'application

$$\phi : (p, \xi) \rightarrow (\varphi(p), T_p \varphi(\xi))$$

est une bijection de  $TU$  dans  $\varphi(U) \times \mathbf{R}^n$  (on rappelle que  $T_p \varphi$  ne dépend pas de  $p$  mais que de  $U$  et que  $T_p \varphi(U)$  donne les coordonnées de  $\xi$  dans la base usuelle). Si  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  est l'atlas maximal de  $M$ , on munit  $TU$  d'une topologie en imposant les conditions suivantes :

1. Les  $TU_i$  sont des ouverts.
2. Les  $\phi_i$  sont des homéomorphismes.

Ainsi,  $\Omega \in TM$  est un ouvert si et seulement si  $\forall i : \phi_i(\Omega \cap TU_i)$  est un ouvert de  $\varphi_i(U_i) \times \mathbf{R}^n$ . L'application

$$\begin{aligned} \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbf{R}^n \\ (y, v) &\longmapsto ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), T_y(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(v)) \end{aligned}$$

est un  $\mathcal{C}^p$ -difféomorphisme. Par conséquent  $TM$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$  et de dimension  $2n$  pour l'atlas  $\{(TU_i, \phi_i)\}$  (voir Fig.6).

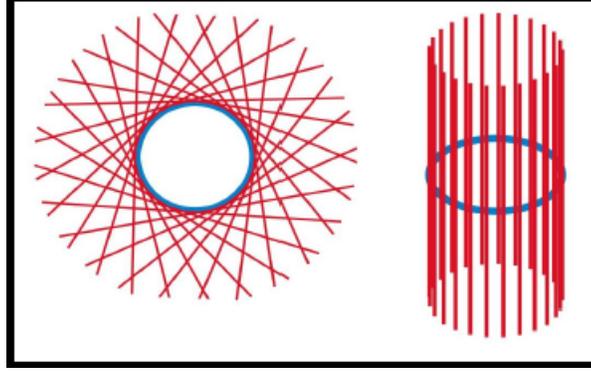


FIG. 1-1 – Fig.6

### 1.1.5 Champ de vecteurs

Une section de  $TM$  est une application  $X : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi \circ X$  soit l'identité sur  $M$ . C'est à dire pour tout  $p \in M$ , nous associons un  $X(p) \in T_pM$ . Une telle section  $X$  de classe  $C^\infty$ , sera appelé **champ de vecteurs** sur  $M$ . Un champ de vecteur est donc une application qui à tout point de la variété  $M$  associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété), de façon  $C^\infty$ . cette dernière hypothèse équivaut à ce point, si  $X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$  est de classe  $C^\infty$ , les fonctions  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  soient  $C^\infty$  sur l'ouvert de la carte locale. Nous notons  $\mathfrak{X}(M)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $M$ .

**Exemple 1.20** La formule  $X_{(x,y)} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ , définit un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  (voir Fig.7).

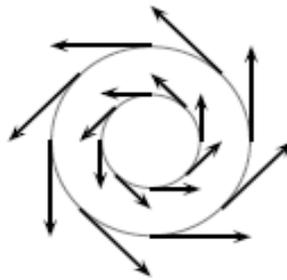


Fig.7

Un champ de vecteurs  $X$  est une différentiable si et seulement si, à toute fonction différentiable  $f \in C^\infty(M)$ , la fonction

$$\begin{aligned} Xf : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (X.f)_p = X_p(f) \end{aligned}$$

est différentiable. La fonction  $Xf$  est appelée dérivation de  $f$  le long de  $X$ . Ainsi on peut voir  $X \in \mathfrak{X}(M)$  comme un opérateur linéaire  $X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Prenons maintenant deux champs de vecteurs  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . En général, les opérateurs  $X \circ Y$  et  $Y \circ X$  impliqueront des dérivées d'ordre 2 et ne correspondront pas à des champs de vecteurs. Cependant, le commutateur  $X \circ Y - Y \circ X$  définit un champ de vecteur.

**Proposition 1.21** *Soit deux champs de vecteurs différentiables  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  sur une variété lisse  $M$ , il existe un unique champ de vecteurs différentiable  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  tel que*

$$Zf = (X \circ Y - Y \circ X).f$$

pour toute fonction différentiable  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

### 1.1.6 Fibré cotangent

Soient  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  passant par  $p$  ( $p \in M$ ), en définie l'application linéaire

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto df_p(v) = v(f) \end{aligned}$$

On appelle  $T_p^*M$  l'espace cotangent à  $M$  au point  $p$ .

**Remarque 1.22** 1. *Soit  $(U, x)$  une carte locale contenant le point  $p$  et  $(\partial_1, \dots, \partial_{np})$  la base locale, alors les différentielles  $(dx_p^1, \dots, dx_p^n)$  forment une base dual pour  $T_p^*M$*

$$dx_p^i(\partial_{jp}) = \delta^{ij}$$

alors le fibré cotangent à  $M$  est définie par  $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ .

2. *Une section sur  $T^*M$  est une application,  $w : M \rightarrow T^*M$  ( $w$  est appelé un champ de covecteur ou une forme différentielle),*

3.  *$T^*M$  est un ensemble de champ de covecteur ou une forme différentielle,*

4. *La différentielles est un  $\mathcal{C}^\infty(f)$  champ de covecteur définie par*

$$\begin{aligned} df : M &\longrightarrow T^*M \\ p &\longmapsto df(p) = df_p \end{aligned}$$

5. *Localement, soit  $(U, x)$  une carte et  $w$  un champ de covecteur alors, il existe  $(w^i)_{i=1, \dots, n}$   $n$  fonctions réelles de classe  $\mathcal{C}^\infty$   $w_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $w = w_i dx^i$ .*

### 1.1.7 Crochet et Algèbre de Lie

**Définition 1.23** Une algèbre de Lie est un espace vectoriel  $V$  muni d'une opération bilinéaire  $[\cdot, \cdot]$  qu'on appelle crochet de Lie, qui a les propriétés suivantes :

1. le crochet est antisymétriques :  $[a, b] = -[b, a]$ , pour tout  $a, b \in V$ ,
2. le crochet satisfait l'identité de Jacobi :  $[[a, b], c] + [[c, a], b] + [[b, c], a] = 0$  pour tout  $a, b, c \in V$ .

Par conséquent, on a

**Corollaire 1.24** Les champs de vecteurs  $\mathfrak{X}(M)$  forment une algèbre de Lie, avec le crochet

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad f \in C^\infty(M)$$

qui vaut en coordonnées locales

$$[X, Y]_{|U} = \sum (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ou bien  $[V, W] = (VW^j - WV^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$ .

**Preuve.** pour tout  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , on a :  $V = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $W = \sum W^j \frac{\partial}{\partial x^j} = W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , si  $f \in C^\infty(M)$ , alors  $[V, W]f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} [V, W]f &= V^i \frac{\partial}{\partial x^i} (W^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) - W^j \frac{\partial}{\partial x^j} (V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}) \\ &= V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + V^i W^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - W^j V^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + V^i W^j (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}) \\ &= V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \end{aligned}$$

remplaçant  $j$  par  $i$  et  $i$  par  $j$  dans le seconde terme, on aura

$$\begin{aligned} [V, W]f &= V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= (V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}) \frac{\partial f}{\partial x^j} \end{aligned}$$

■

**Remarque 1.25** Si  $V = \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $W = \frac{\partial}{\partial x^j}$  i.e.  $V^i = 1$  et  $W^j = 1$ , alors  $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}]f = 0$ .

### 1.1.8 Dérivée de Lie

Nous voulons maintenant généraliser le fait qu'un champ de vecteurs  $X$  soit une dérivation sur  $\mathcal{D}(C^\infty(M))$ , en étendant cette dérivation aux tenseurs et aux formes. Cette dérivation portera le nom de dérivée de Lie dans la direction  $X$  et sera notée  $\mathcal{L}_X$ . Elle ne modifiera pas le type du tenseur auquel elle s'applique (un vecteur est envoyé sur un vecteur, une  $r$ -forme sur une  $r$ -forme...).

Il y a plusieurs approches possibles (toutes équivalentes) à cette définition. La première approche est algébrique : on se donne des règles de calcul qui permettent d'atteindre tous les tenseurs et toutes les formes. La seconde est analytique : on se donne l'expression de cette dérivée dans des coordonnées locales (voir [18]).

#### Approche algébrique

Sur les fonctions, nous posons  $\mathcal{L}_X f = X(f) = \langle df, X \rangle$ , qui n'est autre que l'action de  $X$  sur  $f$  en tant que dérivation. Sur les champs de vecteurs, nous posons  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$  pour  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Pour définir  $\mathcal{L}_X$  sur les tenseurs, nous nous donnons les règles suivantes :

1.  $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = T \otimes (\mathcal{L}_X S) + (\mathcal{L}_X T) \otimes S$ ;
2.  $\mathcal{L}_X$  commute avec la contraction des tenseurs ;
3.  $\mathcal{L}_X$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire (i.e.) pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$   $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  on a  $\mathcal{L}_{aX+bY} = a \mathcal{L}_X + b \mathcal{L}_Y$

Sur les formes différentielles,  $\mathcal{L}_X$  est donc définie par la méthode précédente. Cependant, une autre approche algébrique est possible. Pour cela, nous devons définir le produit intérieur  $i_X$  sur les formes différentielles. Pour  $\omega \in \Lambda^r(M)$ , nous définissons  $i_X \omega \in \Lambda^{r-1}(M)$  par

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1})$$

on a, alors, les propriétés suivantes :

1.  $i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X \omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_X \eta$  (i.e.)  $i_X$  est une anti-dérivation sur  $\Lambda^*(M)$ ,
2.  $(i_X)^2 = 0$ ,
3.  $\mathcal{L}_X = i_X d + di_X$  (formule de cartan)

pour  $\omega \in \Lambda^r(M)$  et  $\eta \in \omega \in \Lambda^s(M)$  et  $f \in C^\infty(M)$ .

#### Approche analytique

Au dessus d'une carte locale de  $M$  de coordonnées  $(x^i)$ , prenons  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}$ .

Nous posons alors

$$(\mathcal{L}_X T)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = X^l \frac{\partial}{\partial x^l} T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} - \sum_{n=1}^s T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{p-1} l i_{p+1} \dots i_s} \frac{\partial X^{i_p}}{\partial x^l} + \sum_{n=1}^r T_{j_1 \dots j_{p-1} l j_{p+1} \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \frac{\partial X^l}{\partial x^{j_p}}$$

## 1.2 Métrique Riemannienne sur une variété

Dans sa thèse, présentée en 1851, RIEMANN met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom, notamment la sphère de RIEMANN. Il approfondira cette théorie en 1857, en faisant progresser la théorie des fonctions abéliennes. Lors de sa soutenance d'habilitation, en 1854, orienté par GAUSS, il donne un exposé, intitulé *Sur les hypothèses sous-jacentes à la géométrie (Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen)*, qui jette les bases de la géométrie différentielle. Il y introduit la bonne façon d'étendre à  $n$  dimensions les résultats de Gauss lui-même sur les surfaces. Les idées révolutionnaires de RIEMANN généralisaient la géométrie des surfaces initiée par GAUSS. Plus tard, cela conduit à une exacte définition du concept moderne de variété Riemannienne abstraite. Le développement du  $XXe$  siècle a fait de la géométrie Riemannienne l'une des parties les plus importantes des mathématiques modernes. Cette soutenance a profondément changé la conception de la notion de géométrie, notamment en ouvrant la voie aux géométries non Euclidiennes et à la théorie de la relativité générale.



Georg Friedrich Bernhard

Riemann (1826-1866)

**Définition 1.26** 1. Pour tout  $p \in M$ , définissons l'espace vectoriel

$$T_p^{(s,r)} M = \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_s \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_r$$

Un élément  $T \in T_p^{(s,r)}M$  est un tenseur de type  $(s, r)$  au dessus de  $p$ . Dans une base associée à des coordonnées  $(x^i)$  au voisinage de  $p$ , il s'écrit

$$T|_p = T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) \otimes dx_{|p}^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{|p}^{j_r}$$

2. Nous pouvons considérer la variété différentiable

$$T^{(s,r)}M = \bigcup_{p \in M} T_p^{(s,r)}M$$

qui est un fibré au dessus de  $M$ , le fibré des tenseurs de type  $(s, r)$ . Des sections  $C^\infty$  de ce fibré seront appelées champs de tenseurs de type  $(s, r)$ . Un champ de tenseurs  $T$  de type  $(s, r)$  s'écrit donc localement, au dessus d'une carte locale de  $M$ , de coordonnées  $(x^i)$ ,

$$T = T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}$$

Globalement, il est facile de vérifier qu'un tenseur de type  $(s, r)$  est une application  $C^\infty(M)$ -multilinéaire sur  $\Lambda^1(M) \times \dots \times \Lambda^2(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)$  à valeurs dans  $C^\infty(M)$ . Un champ de tenseurs de type  $(0, 0)$  n'est autre qu'une fonction sur  $M$ , un tenseur de type  $(1, 0)$  est un champ de vecteurs, et un tenseur de type  $(0, 1)$  est une 1-forme différentielle.

**Définition 1.27** Une métrique Riemannienne sur une variété  $M$  est une application

$$g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique, non dégénérée définie positive tel que pour tout  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  on a :

1.  $g(V, W) = g(W, V)$  (symétrique),
2.  $g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$  (non dégénérée),
3.  $g(V, V) \geq 0$ . (définie positive).

$g \in \mathfrak{X}^*(M) \otimes \mathfrak{X}^*(M)$  : Si  $(U, \varphi)$  est une carte sur  $M$ , alors

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

où  $g_{ij}$  sont des fonction différentiable sur  $U$  appelée composantes de tenseur métrique relativement à la carte  $(U, \varphi)$ . Localement, si  $V = V^i \partial_i$  et  $W = W^j \partial_j$ , on a  $g(V, W) = g_{ij} V^i W^j$ .

Pour tout  $x \in M$ ,  $g_x : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée définie positive, où  $T_x M$  désigne l'espace tangent en  $x$ .

**Définition 1.28** Une variété Riemannienne est un couple  $(M, g)$  où  $M$  est une variété différentielle et  $g$  une métrique Riemannienne sur le fibré tangent  $(TM, \pi, M)$ .

**Exemple 1.29** 1. L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de produit scalaire standard

$$g_0(v, w) = \sum v_i w_i$$

où  $v = (v_1 \dots v_n)_x$ ,  $w = (w_1 \dots w_n) \in T_x \mathbb{R}^n$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  est une métrique Riemannienne.

2. Dans la boule  $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$  on considère le tenseur  $g_H$  défini par

$$g_H(v, w) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} g_0(v, w),$$

où  $v, w \in T_x \mathbb{R}^n$  et  $x \in \mathbb{D}^n$ .  $g_H$  est appelée métrique hyperbolique sur  $\mathbb{D}^n$ .

### 1.2.1 Connexion linéaire

**Définition 1.30** Une connexion linéaire sur une variété  $M$  est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

vérifiant :

1.  $\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y$ , (i.e.)  $C^\infty(M)$ -linéaire par rapport à  $X$ ,
2.  $\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a \nabla_X Y_1 + b \nabla_X Y_2$ , (i.e.)  $\mathbb{R}$ -linéaire par rapport à  $Y$
3.  $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$ .

pour tout  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Définition 1.31** Soit  $\nabla$  une connexion sur  $M$  et  $(U, \varphi)$  une carte sur  $M$  de coordonnées locales  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . On définit une fonction différentiable  $\Gamma_{ij}^k : U \longrightarrow \mathbb{R}$  par  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ , appelé symboles de Christoffel.

En général,

$$\nabla_X Y = X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (1.1)$$

où  $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$  est la dérivée covariante associée à la connexion linéaire  $\nabla$ .

**Exemple 1.32** 1. Une connexion affine est une sorte de dérivée directionnelle de champs de vecteurs sur une variété. Soit un champ de vecteurs  $V$  sur  $\mathbb{R}^n$  (i.e. une application  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ), un point  $p \in \mathbb{R}^n$  et un vecteur tangent  $X \in T_p \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ . On note par  $\nabla_X Y$  la dérivée covariante de  $V$  en  $p$  dans la direction  $X$ , on écrit  $X = a^i \frac{d}{dx^i}$ . Alors

$$\nabla_X V = a^i \frac{dV}{dx^i} \in T_p \mathbb{R}^n$$

2. On peut voir la connexion canonique sur  $\mathbb{R}^n$  comme  $\nabla_X Y = X(Y^j) \frac{d}{dx^i} = X^i \frac{dY^j}{dx^i} \frac{d}{dx^i}$ . Les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  de la connexion par rapport à la base  $\{\frac{d}{dx^i}\}_{i=1,\dots,n}$  sont identiquement nuls.

## 1.2.2 Tenseur de torsion

**Définition 1.33** Soient  $M$  une variété différentielle et  $\nabla$  une connexion linéaire sur  $M$ . le tenseur de torsion associé à  $\nabla$  est une application vectoriel  $C^\infty(M)$ -bilinéaire définie par

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

pour tout  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . La connexion  $\nabla$  est dite sans torsion si  $T \equiv 0$ .

**Remarque 1.34** 1.  $T$  est un champ de tenseur de type  $(1,2)$ ,

2.  $T(X, Y) = -T(Y, X)$  pour tout  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  ( $T$  est antisymétrique),

3. La connexion  $\nabla$  est sans torsion si et seulement si pour tout  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , on a

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

4. Pour tout  $x \in M$  le tenseur de torsion  $T$  induit une application bilinéaire vectoriel

$$\begin{aligned} T_x : T_x M \times T_x M &\longrightarrow T_x M \\ (v, w) &\longmapsto T_x(v, w) = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X, Y]_x \end{aligned}$$

où  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  tel que  $X_x = v$  et  $Y_x = w$  (indépendant au choix de  $X$  et  $Y$ ).

### 1.2.3 Connexion de Levi-Civita

**Théorème 1.35** Soient  $(M, g)$  une variété Riemannienne, l'application

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

définie par la formule de Koszul

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = & X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) + Z(g(X, Y)) \\ & + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

est une connexion linéaire sur  $M$ , appelé connexion de **Levi-Civita**.

**Théorème 1.36** (théorème fondamental de la géométrie Riemannienne)

Si  $(M, g)$  est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec  $g$ .

Dans un système de coordonnées  $(x^i)$  sur  $M$ ,  $\nabla$  est complètement définie par les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ .

**Proposition 1.37** Soient  $(M^m, g)$  une variété Riemannienne, de dimension  $m$  et  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita. Si  $(U, \varphi)$  est une carte sur  $M$  avec les champs de bases  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$  associés, alors les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sont donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\} \quad (1.2)$$

où  $g_{ij}$  sont les coordonnées de  $g$  relativement à la carte  $(U, \varphi)$ .

**Preuve.** Comme  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  pour tout  $i, j = 1, \dots, m$ , où  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  pour tout  $i, j = 1, \dots, m$  on a,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) &= 2 \sum_{s=1}^m g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l) \\ &= 2\Gamma_{ij}^s g_{sl} \\ &= \partial_i(g(\partial_j, \partial_l)) + \partial_j(g(\partial_l, \partial_i)) - \partial_l(g(\partial_i, \partial_j)) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \} \\ \sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} &= \frac{1}{2} g^{lk} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \} \\ \sum_{s,l=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{lk} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \}\end{aligned}$$

et comme  $(g^{ij})$  est la matrice inverse de  $(g_{ij})$  on a  $\sum_{l=1}^m g_{sl} g^{lk} = \delta_{ks}$ , où  $\delta_{ks}$  est le symbole de Kronecker, d'où

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\}$$

■

**Exemple 1.38** Soit la sphère unité  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Nous paramétrons la surface  $X$  par

$$X(\theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

Calculons  $dx, dy$  et  $dz$  en termes de  $dr, d\theta$  et  $d\varphi$  nous obtenons

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Les composantes de la matrice et son inverse sont données par

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}; \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

Les symboles de christoffel sont

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} [g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + g^{12}(g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2})] \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} [(0 + 0 - 0) + 0(0 + 0 - 0)] \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} [g^{11}(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{21,1}) + g^{12}(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2})] \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} [1(0 + 0 - 0) + 0(0 + \cos 1 \sin 1 - 0)] \\ \Gamma_{12}^1 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} [g^{11}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{12}(g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,2})] \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} [1(0 + 0 - 2 \cos 1 \sin 1) + 0(0 + 0 - 0)] \\
\Gamma_{22}^1 &= -\cos \theta \sin \theta \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} [g^{21}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + g^{22}(g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2})] \\
\Gamma_{11}^2 &= 0 \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} [g^{21}(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}) + g^{22}(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2})] \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \left[ 0(0 + 0 - 0) + \frac{1}{\sin^2 \theta} (0 + 2 \cos \theta \sin \theta - 0) \right] \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

donc on a les  $\Gamma_{ij}^k$  sont nuls sauf  $\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\cos \theta \sin \theta$  et  $\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ .

#### 1.2.4 Tenseur de courbure

**Définition 1.39** Soit  $M$  une variété muni d'une connexion linéaire  $\nabla$  on définit le tenseur de courbure  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  associé à  $\nabla$  par

$$R(X, Y)V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X, Y]} V$$

pour tout  $X, V, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Remarque 1.40** 1. La courbure  $R$  est un 3-tenseur est  $C^\infty(M)$ -linéaire,  
2.  $R(X, Y)V = -R(Y, X)V$  pour tout  $X, V, Y \in \mathfrak{X}(M)$  (antisymétrique),

Sur une variété Riemannienne  $(M, g)$ , le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne, il s'exprime en fonction des coefficients de christoffel par :

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R_{ijk}^l \partial_l \text{ avec } R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum \{ \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \}$$

où  $(\partial_i)_{i=1\dots n}$  est une base de champ de vecteur sur  $M$ .

#### 1.2.5 Géodésiques et Transport parallèle

L'idée générale derrière le concept de géodésique est la généralisation des lignes droites de l'espace Euclidien aux variétés Riemanniennes. Une géodésique sera constamment paramétrée, par une courbe

lisse sur la variété, c'est localement la courbe la plus courte reliant deux points. Ils sont d'une grande importance dans l'approfondissement de la géométrie Riemannienne, ainsi que dans la physique théorique, en particulier la Relativité générale, où ils sont les trajectoires d'objets test se déplaçant dans une géométrie d'espace temps non triviale. Dans  $\mathbb{R}^n$  usuel, les géodésiques sont précisément les droites, c'est-à-dire les courbes d'accélération nulle. Pour une variété plongée dans un espace Euclidien ambiant, on pourrait envisager de calculer l'accélération d'une courbe  $\gamma(t)$  comme on le fait d'habitude, et de projeter orthogonalement ce vecteur sur l'espace tangent à  $M$  en  $\gamma(t)$ . Mais pour une variété quelconque, il va nous falloir trouver un moyen de définir l'accélération d'une courbe, de manière entièrement intrinsèque. Par ailleurs, dériver deux fois les coordonnées ne fonctionne pas, car il n'est justement pas possible d'interpréter cette double dérivation indépendamment du choix du système de coordonnées, comme on voudrait le faire. On introduit, donc, un nouveau type d'opérateur, les connexions, qui serviront ensuite à définir les notions de dérivée covariante d'un champ de vecteurs selon une courbe, une géodésique et un transport parallèle. Cette dérivée covariante permet de définir une dérivation covariante le long d'une courbe dans  $M$ , elle nous donnera une interprétation géométrique de la connexion. Pour cela, soit donné un champ de vecteurs  $Y(t)$  le long d'une courbe, c'est à dire que  $Y(t)$  n'est défini qu'au dessus des points  $\gamma(t)$  de  $M$ . Alors la dérivation covariante de  $Y(t)$  le long de  $\gamma$ , notée  $\frac{D}{dt}Y$ , est par définition

$$\frac{DY}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y(t)$$

c'est une dérivation le long d'un paramètre  $t$ . On remarquera que la donnée de la dérivation covariante le long de toute courbe est équivalente à la donnée de la connexion linéaire  $\nabla$ , puisque tout vecteur est tangent à au moins une courbe. Nous dirons que le champ  $Y(t)$  est parallèle le long de  $\gamma$  si pour tout  $t$ ,  $\frac{DY}{dt}(t) = 0$ . Pour une condition initiale  $Y(0) \in T_{\gamma(0)}M$  donnée, il existe un unique champ de vecteurs  $Y(t)$  parallèle le long de  $\gamma$  qui admet cette valeur en  $t = 0$ . Ceci définit alors une application

$$J_{\gamma,h} : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(h)}M$$

qui à  $Y(0)$  associe  $Y(h)$  où le champ  $Y(t)$  est l'unique solution ci-dessus, de valeur initiale  $Y(0)$ . Cette application est linéaire et inversible, elle porte le nom de transport parallèle le long de  $\gamma$  (voir Fig.8).

$$\frac{DY}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (J_{\gamma,h}^{-1} Y(t+h) - Y(t))$$

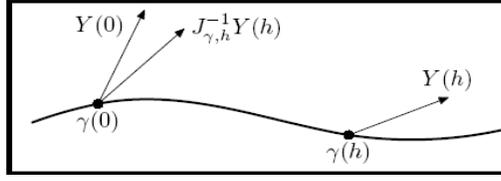


Fig.8

**Définition 1.41** Un champ de vecteurs le long de la courbe  $\gamma$  est une application  $V$  de classe  $C^\infty$  de  $I$  dans  $TM$ , telle que  $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$  pour tout  $t$  dans  $I$ . On note  $\mathfrak{X}_\gamma(M)$  l'espace des champs de vecteurs le long de  $\gamma$ .

**Lemme 1.42** Pour toute courbe  $\gamma$ ,  $\nabla$  détermine un unique opérateur

$$D_t = \frac{D}{dt} : \mathfrak{X}_\gamma(M) \rightarrow \mathfrak{X}_\gamma(M)$$

possédant les propriétés suivantes :

1.  $D_t$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire,
2. Pour tout  $f \in C^\infty(I) : D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$ ,
3. Compatibilité avec  $\nabla : D_tV = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}V$ .

**Définition 1.43** On dit qu'un champ de vecteurs le long d'une courbe  $\gamma$  est parallèle si

$$D_tV = \frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}V = 0.$$

**Théorème 1.44** (Transport parallèle). Soit  $\gamma : I \rightarrow M$  telle que  $t_0 \in I$  et  $V \in T_{\gamma(0)}M$ , alors, il existe une unique champ de vecteurs  $X$  le long de  $\gamma$  parallèle le long de  $\gamma$  tel que

$$X(t_0) = V.$$

**Définition 1.45** On appelle géodésique toute courbe  $\gamma$  telle que  $D_t\dot{\gamma} \equiv 0$ , c'est-à-dire,  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t) = 0$ .

**Exemple 1.46** l'équation de la géodésique sur la sphère est :  $\ddot{X}_k + \Gamma_{ij}^k \dot{X}_i \dot{X}_j = 0$ , alors les equations à résoudre sont maintenant

$$\begin{cases} \frac{du^\theta}{dr} + \Gamma_{\alpha\beta}^\theta u^\alpha u^\beta = 0, \\ \frac{du^\varphi}{dr} + \Gamma_{\alpha\beta}^\varphi u^\alpha u^\beta = 0, \end{cases}$$

il n'y a qu'un seul terme de connexion non-nul,

$$\begin{cases} \frac{du^\theta}{dr} + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta u^\varphi u^\varphi = 0, \\ \frac{du^\theta}{dr} - (u^\varphi)^2 \cos \theta \sin \theta = 0, \end{cases}$$

pour la seconde,

$$\begin{cases} \frac{du^\varphi}{dr} + \Gamma_{\alpha\beta}^\varphi u^\alpha u^\beta = 0, \\ \frac{du^\varphi}{dr} + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi u^\varphi u^\theta + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi u^\theta u^\varphi = 0, \\ \frac{du^\varphi}{dr} + 2u^\varphi u^\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0 \end{cases}$$

Soient  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  les conditions initiales être  $\varphi_0 = 0, u_0^\varphi = 1, u_0^\theta = 0$ . Ensuite, nous avons

$$\left(\frac{du^\theta}{dr}\right)_0 - (u_0^\varphi)^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0 = 0$$

et  $u^\theta$  ne change pas. Pour l'équation  $\varphi$ , il s'ensuit que

$$\frac{du^\varphi}{dr} = -2u^\varphi u^\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0$$

donc  $u^\varphi$  est également constante et le vecteur de vitesse est  $u^i = (0, 1)$ . Intégrer pour trouver la courbe,

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dr} = 0, \\ \frac{d\varphi}{dr} = 1, \end{cases}$$

alors  $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $\varphi = \varphi_0 + r = r$ . la courbe est donc l'équateur,  $(\theta, \varphi) = (0, r)$ .

Nous pouvons caractériser l'équateur comme l'intersection du plan unique normal à la surface, contenant le vecteur de vitesse initiale. Un tel plan passe toujours par le centre de la sphère, donc toutes les géodésiques sont donné par de grands cercles.

## 1.3 Quelques opérateurs différentiels

### 1.3.1 Opérateur star de Hodge

On notera d'abord  $\Lambda^p(M)$  l'espace des formes différentielles de degré  $p$  sur la variété différentiable  $M$ , si  $M$  est en outre équipé d'une métrique Riemannienne et orienté alors il existe un opérateur linéaire

$$* : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{\dim(M)-p}(M)$$

Appelé opérateur star de Hodge. En choisissant une base orthonormale positive  $\{e_i\}_{i=1,\dots,d}$  pour l'espace tangent  $T_m M$  en un point  $m \in M$ , on définit

$$*\alpha(e_{p+1}, \dots, e_d) = \alpha(e_1, \dots, e_p).$$

En un point  $p \in M$ , soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base orthonormale orientée positivement de l'espace cotangent  $T_p^* M$ , relativement au produit intérieur induit et l'orientation. L'opérateur star de Hodge est l'opérateur linéaire d'algèbre extérieure de  $T_p^* M$  défini par

$$\begin{aligned} *(1) &= e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \\ *(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) &= 1, \\ *(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) &= e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n. \end{aligned}$$

### 1.3.2 Divergence d'un champ de vecteurs

Soit  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne  $(M, g)$ , on a

$$\begin{aligned} \nabla X : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z X \end{aligned}$$

est une application  $\mathcal{C}^1(M)$  linéaire ( $\nabla X$  est un tenseur de type  $(1, 1)$ ). si  $x \in M$ , alors

$$\begin{aligned} (\nabla X)_x : T_x M &\longrightarrow T_x M \\ v &\longmapsto (\nabla_v X)_x \end{aligned}$$

est une application linéaire d'espace vectoriel.

**Définition 1.47** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , notée  $\operatorname{div} X$  est une fonction sur  $M$  définie par

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}_g(\nabla X)$$

Pour tout  $x \in M$ , on a  $(\operatorname{div} X)(x) = \operatorname{tr}_g((\nabla X)_x)$ .

**Définition 1.48** Si  $(e_i)$  est une base orthonormée locale sur  $M$  on a

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

et pour un système de coordonnées  $X = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , on a

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial X_j}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^j X_k \right\}.$$

### 1.3.3 Forme Volume

**Définition 1.49** Une forme volume sur une variété Riemannienne  $M$  de dimension  $n$  est une  $n$ -forme différentiable  $dv_g$  telle que

$$dv_g(e_1, \dots, e_n) = +1$$

pour toute base de  $M$ . Pour un système de coordonnées,

$$dv_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

**Exemple 1.50** On appelle forme volume standard sur  $\mathbb{R}^2$  la forme définie en coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  par

$$dv_{\text{eucl}} = dx \wedge dy.$$

**Proposition 1.51** Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , alors

$$\mathcal{L}_X dv_g = (\operatorname{div} X) dv_g.$$

**Preuve.**  $T = dv = \sqrt{g} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  est un champ de tenseur de type  $(n, 0)$  sur  $M$ . la dérivée de Lie  $\mathcal{L}_X$  de  $T = T_{12\dots n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  est aussi un tenseur de type  $(n, 0)$  ou une forme  $n$

$$\mathcal{L}_X T = (\mathcal{L}_X T)_{12\dots n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Nous montrons que

$$(\mathcal{L}_X T)_{12\dots n} = (\operatorname{div} X) \sqrt{g}.$$

En effet, en utilisant la formule qui donne les composantes du dérivée de Lie d'un tenseur, nous avons

$$(\mathcal{L}_X T)_{12\dots n} = \frac{\partial T_{12\dots n}}{\partial x_i} X^i + T^{j_1 2\dots n} \frac{\partial X^1}{\partial x_{j_1}} + T^{2j_2 \dots n} \frac{\partial X^2}{\partial x_{j_2}} + \dots + T^{12\dots j_n} \frac{\partial X^n}{\partial x_{j_n}}.$$

Comme  $T_{1\dots j_p\dots n} = \delta_{p,j_p} T_{1\dots p\dots n}$ , on a

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_X T)_{12\dots n} &= \frac{\partial T_{12\dots n}}{\partial x_i} X^i + T_{12\dots n} \left( \frac{\partial X^1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X^n}{\partial x_n} \right) \\
 &= \frac{\partial T_{12\dots n}}{\partial x_i} X^i + T_{12\dots n} \frac{\partial X^i}{\partial x_i} \\
 &= \frac{\sqrt{g}}{\partial x_i} X^i + \sqrt{g} \frac{\partial X^i}{\partial x_i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} X^i) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} X^i) \sqrt{g} \\
 &= (\operatorname{div} X) \sqrt{g}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathcal{L}_X T = \operatorname{div} X \sqrt{g} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \operatorname{div} X dv.$$

■

# Chapitre 2

## Variétés pseudo-Riemanniennes

### 2.1 Métriques semi-Riemanniennes

**Définition 2.1** Un tenseur métrique ou métrique semi-Riemannienne sur  $M^1$ , est une famille des applications  $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R} (x \in M)$ , telle que :

1. Pour tout  $x \in M$ ,  $g_x$  est une forme bilinéaire symétrique et non-dégénérée.
2. Si  $X, Y \in \Gamma(TM)$ , la fonction  $g(X; Y)(x) = g_x(X_x, Y_x)$  est différentiable.
3. L'indice de  $g$  est constant, et noté  $IndM$ , c'est-à-dire :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in M : Ind(T_x M) = p \text{ (par rapport à } g_x \text{)}.$$

**Définition 2.2** Une variété semi-Riemannienne est un couple  $(M, g)$ , où  $M$  est une variété différentiable de dimension  $n$  et  $g$  est une métrique sur  $M$ .

**Remarque 2.3** Soit  $(M, g)$  une variété semi-Riemannienne, alors :

- (i)  $0 \leq IndM \leq \dim M$ .
- (ii) Si  $IndM = 0$ ,  $(M, g)$  est dite variété Riemannienne.
- (iii) Si  $p = 1$  et  $\dim M \geq 2$ ,  $(M, g)$  est dite variété de Lorentz ou variété Lorentzienne.

**Définition 2.4** Étant donnée une carte  $(U, \varphi)$  de  $(M, g)$  avec les champs de bases  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  associé, on appelle composantes du tenseur métrique les  $n \times n$  fonctions  $g_{ij}$ , définie par  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ . Localement, si  $M$  est munie d'un système de coordonnées locales  $(x_i)$ , alors :

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

**Exemple 2.5** L'espace Euclidien  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique :

$$g = -dx_1^2 - \dots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \dots + dx_n^2,$$

noté  $\mathbb{R}_p^n$ , est une variété semi-Riemannienne, et  $\text{Ind}\mathbb{R}_p^n = p$ . Soit  $\epsilon_i = g(\partial_i, \partial_j)$ , alors :

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 1, \dots, p \\ 1 & \text{si } i = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Pour  $n \geq 2$ , l'espace  $\mathbb{R}_1^n$  est appelé espace de Minkowski, et si  $n = 4$ ,  $\mathbb{R}_1^4$  est dite espace temps de Minkowski. Les composantes de la métrique  $g$  sont données par  $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_j$ , i.e.

$$g = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\epsilon_j dx_i \otimes dx_j.$$

**Exemple 2.6** Soit  $n \geq 2$  et  $0 \leq p \leq n$ . La pseudo-sphère de  $\mathbb{R}_p^{n+1}$  est définie par :

$$\mathbb{S}_p^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -\sum_{i=1}^p x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n+1} x_i^2 = 1\}.$$

1/ Si  $n = 2$  et  $p = 1$ , on a  $\mathbb{S}_1^2$  de  $\mathbb{R}^3$ , définie par

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

On considère la paramétrisation :

$$\begin{cases} x_1 = \sinh \alpha \\ x_2 = \cosh \alpha \sin \beta \\ x_3 = \cosh \alpha \cos \beta \end{cases}$$

La métrique  $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$  de  $\mathbb{R}_1^3$  induit sur  $\mathbb{S}_1^2$  une métrique semi-Riemannienne  $h$ . Soit  $\partial_\alpha$  et  $\partial_\beta$  les champs de vecteurs de bases associé à cette paramétrisation, les composantes de la métrique  $h$  sont données par :

$$h_{11} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = -1, \quad h_{12} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = 0, \quad h_{22} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = \cosh^2 \alpha,$$

c'est-à-dire  $h = -d\alpha^2 + \cosh^2 \alpha d\beta^2$ .

2/ Si  $n = 3$  et  $p = 1$ , on a  $\mathbb{S}_1^3$  de  $\mathbb{R}^4$ , définie par :

$$\mathbb{S}_1^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

de  $\mathbb{R}_1^4$ , la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x_1 = & \sinh \alpha \\ x_2 = & \cosh \alpha \sin \beta \\ x_3 = & \cosh \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ x_4 = & \cosh \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{cases}$$

$\mathbb{R}_1^4$  induit sur  $\mathbb{S}_1^3$  une métrique semi-Riemannienne  $h$ , donnée par :

$$h = -d\alpha^2 + \cosh^2 \alpha d\beta^2 + \cosh^2 \alpha \cos^2 \beta d\gamma^2$$

(voir [7])

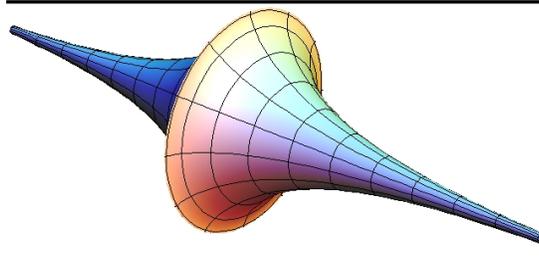


Fig.9

## 2.2 Variétés Lorentziennes

**Définition 2.7** Une variété Lorentzienne est une variété différentiable  $M$ , munie d'une métrique Lorentzienne  $g$  ( $g$  est  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique et non-dégénérée de signature  $(-, +, \dots, +)$  c'est-à-dire  $\text{Ind}M = 1$ ).

**Définition 2.8** Soient  $(M, g)$  une variété Lorentzienne,  $p \in M$  et  $X \in T_pM$ . Alors on dit que  $X$  est :

- (1) un vecteur de type espace si  $g(X, X) > 0$ ,
- (2) un vecteur de type temps si  $g(X, X) < 0$ ,
- (3) un vecteur nul ou de type lumière si  $g(X, X) = 0$ .

### 2.2.1 Espace de Minkowski $\mathbb{E}_1^3$

Soit  $\mathbb{R}^3$  l'espace vectoriel réel muni de sa structure vectorielle usuelle. On note par  $B_u = \{E_1, E_2, E_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$   $E_1 = (1, 0, 0)$ ,  $E_2 = (0, 1, 0)$ ,  $E_3 = (0, 0, 1)$  (voir [14]).

**Définition 2.9** L'espace de Lorentz-Minkowski de dimension 3 est un espace métrique  $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$  où la métrique  $\langle, \rangle$  est

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3, \quad u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$

qui est appelée la métrique lorentzienne de dimension 3. La métrique lorentzienne est une métrique non-dégénérée d'indice 1. L'espace Euclidien de dimension 3  $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_e)$  est un espace de Lorentz-Minkowski.

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  supporte également la métrique euclidienne, qui sera notée  $\langle, \rangle_e$ . Nous écrivons l'espace euclidien à 3 dimensions sous la forme  $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_e)$  pour le distinguer de l'espace de Lorentz-Minkowski.

**Définition 2.10** Un vecteur  $v \in \mathbb{E}_1^3$  est dit :

1. vecteur de type espace si  $\langle v, v \rangle_1 > 0$  ou  $v = 0$ ,
2. vecteur de type temps si  $\langle v, v \rangle_1 < 0$ ,
3. vecteur de type lumière si  $\langle v, v \rangle_1 = 0$  et  $v \neq 0$ .

Le cône lumière de  $\mathbb{E}_1^3$  est l'ensemble de tous les vecteurs lumière de  $\mathbb{E}_1^3$

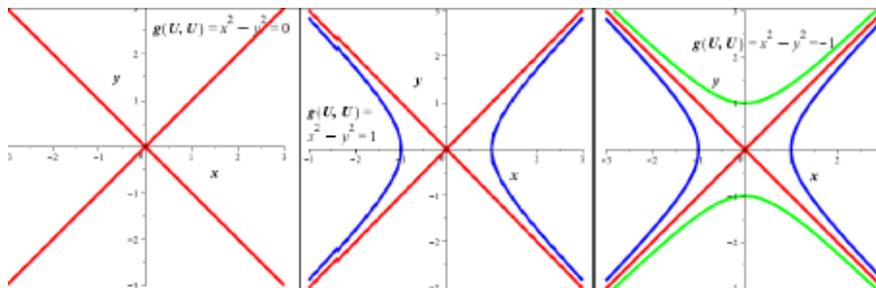
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - (0, 0, 0)$$

L'ensemble des vecteurs de type temps est

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

Les deux composantes  $\mathcal{T}$  et  $C$  sont connexes.

**Exemple 2.11** Soit  $\mathbb{R}_1^2 = (\mathbb{R}^2, g = dx^2 - dy^2)$  et soit  $v = (x, y) \in T_p\mathbb{R}_1^2$  ( $p \in \mathbb{R}^2$ ), alors  $g(v, v) = x^2 - y^2$  (le signe  $\pm$  varié) (voir figure ci-dessus)



**Exemple 2.12** Soit  $\mathbb{R}_1^3 = (\mathbb{R}^3, g = dx^2 + dy^2 - dz^2)$  et soit  $v = (x, y, z) \in T_p\mathbb{R}_1^3$  ( $p \in \mathbb{R}^3$ ), alors les vecteurs tangents de type espace, nul et type temps sont présentés comme suit :

$$g(v, v) = 0 \iff x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$g(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

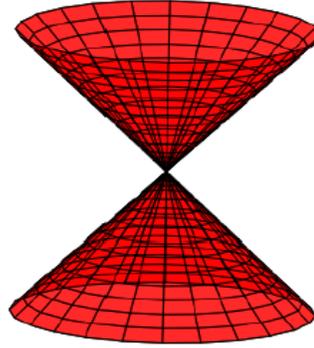


Fig.10

**Définition 2.13** Soit  $U \subset \mathbb{R}^3$  un sous-espace vectoriel, on a la métrique induite  $\langle, \rangle_U$  telle que

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in U$$

On a trois types de métrique sur  $U$  :

1.  $U$  est de type espace si  $\langle, \rangle_U$  est définie positive (Fig.11),
2.  $U$  est de type temps si  $\langle, \rangle_U$  est d'indice 1 (Fig.12),
3.  $U$  est de type lumière si  $\langle, \rangle_U$  est dégénérée (Fig.13).

Le caractère causal d'un vecteur ou un sous-espace est la propriété d'être de type espace, type lumière

ou type temps.

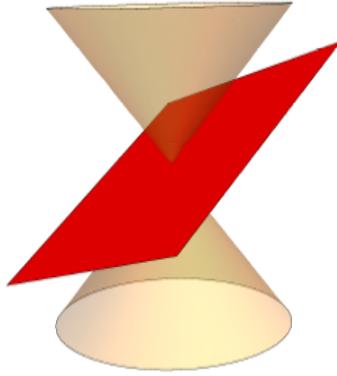


Fig.11  $U$  de type espace



Fig.12  $U$  de type temps

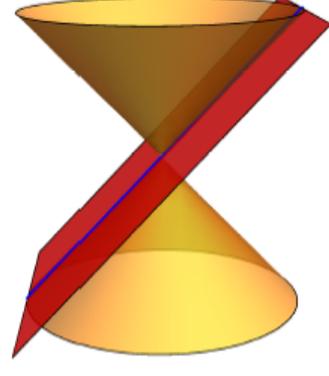


Fig.13  $U$  de type lumiere

**Définition 2.14** Une variété Lorentzienne  $(M, g)$  est dite de type temps-orientable s'il existe un champ de vecteurs  $X \in \Gamma^1(TM)$  de type-temps, c'est-à-dire :

$$g(X_x, X_x) < 0, \quad \forall x \in M.$$

**Exemple 2.15** La pseudo-sphère  $\mathbb{S}_1^n$  de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  est une variété Lorentzienne de type temps-orientable.

**Définition 2.16** Soient  $u, v \in \mathbb{E}_1^3$  Le produit vectoriel Lorentzienne de  $u$  et  $v$  est l'unique vecteur désigné par  $u \times v$  qui satisfait à

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$$

Où  $\det(u, v, w)$  est le déterminant de la matrice obtenue en plaçant sur les colonnes les coordonnées des trois vecteurs  $u, v$  et  $w$  par rapport à  $B_u$ . La bilinéarité de la métrique assure l'existence et l'unicité de ce vecteur  $u \times v$ . L'expression de  $u \times v$  en coordonnées par rapport à  $B_u$  est

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Par conséquent, si on note  $u \times_e v$  le produit vectoriel euclidien, alors  $u \times v$  est la projection de  $u \times_e v$  par rapport au plan d'équation  $z = 0$ .

**Définition 2.17** Notons que si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs non dégénérées, alors  $B = \{u, v, u \times v\}$  est une base de  $\mathbb{E}_1^3$ . Mais contrairement à l'espace Euclidien, le caractère causal de  $u$  et  $v$  détermine si

la base est ou non orienté positivement. Exactement, si  $u$  et  $v$  sont de type espace, alors  $u \times v$  est de type temps et  $B$  est orienté négativement parce que  $\det(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle < 0$ . Si  $u$  et  $v$  ont un caractère causal différent, alors  $B$  est orienté positivement. La norme de  $u$  dans  $\mathbb{E}_1^3$  est noté par  $\|u\|_1 = \sqrt{\langle u, u \rangle_1}$ . Les vecteurs  $u$  et  $v$  sont orthogonaux si  $\langle u, v \rangle_1 = 0$ .

## Chapitre 3

# Variété de Walker de dimension 3

Soit  $M$  une variété pseudo-Riemannienne de signature  $(p, q)$ . Nous supposons donnée une décomposition du fibré tangent sous la forme  $TM = V_1 \oplus V_2$  où  $V_1$  et  $V_2$  sont des sous-ensembles lisses qui sont appelés des distributions. Ceci définit deux projections complémentaires  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de  $TM$  sur  $V_1$  et  $V_2$ . Nous disons que  $V_1$  est une distribution parallèle si  $\nabla\pi_1 = 0$ , cela signifie que si  $X_1$  est un champ de vecteurs lisses prenant des valeurs dans  $V_1$ , alors  $\nabla X_1$  prend à nouveau des valeurs dans  $V_1$ . Si  $M$  est Riemannien, on peut prendre  $V_2 = V_1^\perp$  le complément orthogonal de  $V_1$  et dans ce cas,  $V_2$  est à nouveau parallèle. Soit  $V_1$  une distribution parallèle. Le rang de  $g$  restreint à  $V_1$  est constant. Nous disons que  $V_1$  est une distribution nulle parallèle si  $V_1$  est parallèle et si la métrique restreinte à  $V_1$  est nulle.

Supposons que  $\dim(V_1) = 1$ , de sorte que  $V_1$  est un champ de ligne. Supposons également que  $V_1$  est parallèle. Si  $V_1$  n'est pas nul en un seul point, il n'est pas nul en un autre point et la translation parallèle donne lieu à un champ de vecteur parallèle qui couvre  $V_1$  si  $M$  est simplement connexe. Toutefois, si  $V_1$  est nul, il n'est pas nécessaire qu'il soit étendu par un champ de vecteur parallèle. Les variétés de dimension 3 qui admettent des distributions parallèles nulles sont appelées variétés de WALKER tridimensionnelles.

ARTHUR GEOFFREY WALKER

**Born** : 17 July 1909 in Watford, Hertfordshire, England

**Died** : 31 March 2001 in Chichester, Sussex, England

**Définition 3.1** *Variétés de Lorentz qui admettent des distributions parallèles nulles sont appelées variétés de Walker, et dans le cas où les distributions sont étendues par un vecteur nul, elles sont appelées variétés de Walker strictes. Walker a dérivé des coordonnées adaptées à un champ de plan parallèle [23]. D'où la métrique d'une variété de Walker tridimensionnelle  $(M, g_f)$  avec des coordonnées*



$(x, y, z)$  est exprimé comme

$$g_f = \epsilon dy^2 + f dz^2 + dx \otimes dz + dz \otimes dx$$

et sa forme matricielle

$$g_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix} \text{ avec } g_f^{-1} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour une fonction  $f(x, y, z)$ , où  $\epsilon = \pm 1$  et donc  $\mathcal{D} = \langle \frac{\partial}{\partial x} \rangle$  comme un champ de ligne parallèle dégénéré. Notez que lorsque  $\epsilon = 1$  et  $\epsilon = -1$  la variété de Walker admet la signature  $(2, 1)$  et  $(1, 2)$  respectivement, et est donc Lorentzien dans les deux cas. Dans notre travail, nous prendrons toujours  $\epsilon = 1$ .

- Remarque 3.2** 1. S'il existe un vecteur nul parallèle  $U = \frac{\partial}{\partial x}$ , les coordonnées ci-dessus sont affectées de la manière suivante  $f(x, y, z) = f(y, z)$ . (voir [6])
2. Si  $f$  est indépendante de  $x$  la variété de Walker est appelée stricte. (voir [21])

### 3.1 Produit Vectoriel

On a défini le produit vectoriel Lorentzien (voir définition 2.16). Nous allons maintenant définir le produit vectoriel pour le cas particulier d'une métrique de Walker  $g_f$ . Soit  $u, v \in M$ , d'après la définition 2.16 le produit vectoriel  $u \times v$  de  $u$  et  $v$  est le vecteur unique défini comme

$$u \times v = (u_1 v_2 - u_2 v_1 - (u_2 v_3 - u_3 v_2)f, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_2 v_3 - u_3 v_2)$$

qui satisfait à

$$\langle u \times v, w \rangle = \det \langle u, v, w \rangle = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

où  $w \in \{E_1, E_2, E_3\}$  la base standard de l'espace vectoriel réel  $\mathbb{E}^3$ . Après avoir défini le produit vectoriel dans  $(M, g_f)$ , nous pouvons maintenant construire un repère orthonormé sur la variété. Alors, soit  $u = (0, 1, 0)$  et  $v = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{|f|}})$ , alors  $u \times v = (-\sqrt{f}, 0, \frac{1}{\sqrt{f}})$ .

Remarquez que  $|u| = |v| = |u \times v| = 1$ . nous supposons ici que  $f > 0$ , et le cas  $f < 0$  peut être étudié de la même manière. Donc, nous obtenons le repère orthonormal suivant

$$\begin{aligned} e_1 &= -\sqrt{f}\partial_x + \frac{1}{\sqrt{f}}\partial_z, & e_2 &= \partial_y, & e_3 &= \frac{1}{\sqrt{f}}\partial_z, \\ \langle e_1, e_2 \rangle &= 1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -1, & \langle e_3, e_3 \rangle &= 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

## 3.2 Connexion de Levi-Civita

**Proposition 3.3** *Nous pouvons calculer les symboles de Christoffel en utilisant la formule de 1.2*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\}$$

pour calculer les symboles de Christoffel non nuls possibles d'une métrique de Walker  $g_f$  comme suit,

$$\begin{aligned} \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}f_x, \\ \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}f_y, \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}(f_z + ff_x), \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}f_y, \\ \Gamma_{33}^3 &= -\frac{1}{2}f_x. \end{aligned}$$

**Preuve.** En utilisant 1.2, nous établissons les symboles de Christoffel comme suit.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 g^{1l} \left\{ \frac{\partial g_{1l}}{\partial x} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^l} \right\} \\ &= \frac{1}{2}g^{11} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial y} \right) - \frac{1}{2}g^{13} \left( \frac{\partial g_{13}}{\partial x} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial z} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 g^{1l} \left\{ \frac{\partial g_{3l}}{\partial x} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial z} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^l} \right\} \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{31}}{\partial x} + \frac{\partial g_{11}}{\partial z} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left( \frac{\partial g_{32}}{\partial x} + \frac{\partial g_{12}}{\partial z} - \frac{\partial g_{13}}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} g^{13} \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x} + \frac{\partial g_{13}}{\partial z} - \frac{\partial g_{13}}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{2} f_x.
\end{aligned}$$

■

Maintenant, comme nous connaissons les symboles Christoffel, nous pouvons calculer les composants de la connexion Levi-Civita.

**Théorème 3.4** *Les composantes non nulles possibles de la connexion Levi-Civita de toute métrique  $g_f$  sont :*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_x} \partial_z &= \frac{1}{2} f_x \partial_x & (3.2) \\
\nabla_{\partial_y} \partial_z &= \frac{1}{2} f_y \partial_x \\
\nabla_{\partial_z} \partial_z &= \frac{1}{2} (f f_x + f_z) \partial_x + \frac{1}{2} f_y \partial_y - \frac{1}{2} f_x \partial_z.
\end{aligned}$$

**Preuve.** Après un calcul simple en utilisant 1.2

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_x} \partial_x &= \sum_k \Gamma_{11}^k \partial_k \\
&= \Gamma_{11}^1 \partial_x + \Gamma_{11}^2 \partial_y + \Gamma_{11}^3 \partial_z \\
&= 0. \\
\nabla_{\partial_x} \partial_z &= \sum_k \Gamma_{13}^k \partial_k \\
&= \Gamma_{13}^1 \partial_x + \Gamma_{13}^2 \partial_y + \Gamma_{13}^3 \partial_z \\
&= \frac{1}{2} f_x \partial_x.
\end{aligned}$$

De même, nous pouvons trouver toutes les composantes  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$  de la connexion Levi-Civita de  $g_f$  comme indiqué ci-dessus. ■

### 3.3 Courbes géodésiques sur les 3-variétés de Walker

Dans ce qui suit, nous parlerons des courbes géodésiques d'une 3-variété de Walker en mettant l'accent sur les courbes à composante constante ou linéaire. Rappelons qu'une courbe dans  $M$  est dite de type temps (respectivement type espace, type lumière) à  $t$  si  $\gamma'(t)$  est un vecteur de type temps (respectivement de type espace, de type lumière) pour tous  $t \in I$ .

**Exemple 3.5** Soit la courbe la droite  $\gamma(t) = p + tv$  avec  $p, v \in \mathbb{R}$  et  $v \neq 0$ . Le caractère causal de cette courbe est identique au caractère causal du vecteur  $v$ .

**Remarque 3.6** La géométrie Euclidienne n'a pas de courbure et donc une ligne droite est le plus court chemin entre deux points. Une géodésique est la notion de droite à l'espace courbe, de sorte qu'une géodésique est (localement) le plus court chemin entre les points de l'espace. Rappelons qu'une courbe  $\gamma : I \rightarrow M$  sur une variété semi-Riemannienne  $M$  est appelée géodésique si  $\gamma''(t) = \nabla_{\gamma'} \gamma'(t) = 0$ .

Soit  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  une courbe définie sur  $U \subset M$ .  $\gamma$  est une géodésique de  $M$  si et seulement si ses fonctions de coordonnées  $\gamma_k$  satisfont à

$$\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} = 0$$

pour  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Il s'ensuit que les équations géodésiques d'une 3-variété de Walker  $(M, g_f)$  sont

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + f_x \frac{d\gamma_1}{dt} \frac{d\gamma_3}{dt} + f_y \frac{d\gamma_2}{dt} \frac{d\gamma_3}{dt} + \frac{1}{2}(f f_x + f_z) \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0, \\ 2. \quad & \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \frac{1}{2} f_y \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0, \\ 3. \quad & \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} - \frac{1}{2} f_x \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = 0, \end{aligned}$$

$$4. \quad \langle \gamma', \gamma' \rangle = \begin{cases} < 0, & \gamma \text{ est de type temps} \\ 0, & \gamma \text{ est de type lumière} \\ > 0 & \gamma \text{ est de type espace} \end{cases}$$

Pour un  $f$  arbitraire.

**Corollaire 3.7** Toute ligne droite  $\gamma(t) = p + tv$  avec  $p, v \in M$  et  $v = (v_1, v_2, 0)$  est une géodésique dans la variété  $(M, g_f)$  avec un  $f$  arbitraire et son caractère causal est le même que  $v$ .

**Preuve.** Soit  $\gamma(t) = p + tv$  et  $v = (v_1, v_2, 0)$ .

$$\gamma' = v = (v_1, v_2, 0).$$

Donc  $\gamma$  a le même caractère causal que  $v$ . De plus,  $\gamma(t)$  vérifie les équations géodésiques pour tout  $f$ .

■

**Corollaire 3.8** *Soit  $(M, g_f)$  une variété de Walker. S'il existe une courbe géodésique de la forme  $\gamma(t) = (\gamma_1 t, \gamma_2(t), c_1 t + c_2)$  dans  $M$  où  $c_1 \neq 0$ , alors  $M$  est une variété de Walker stricte. De plus, si  $\gamma_2$  est également linéaire par rapport à  $t$ , alors  $f = f(z)$ .*

**Preuve.** Soit  $\gamma(t) = (\gamma_1 t, \gamma_2(t), c_1 t + c_2)$  une géodésique dans  $M$ ,  $c_1 \neq 0$ . Alors  $\gamma$  vérifie les équations géodésiques :

$$\begin{aligned} 1. \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} + c_1 f_x \frac{d\gamma_1}{dt} + c_1 f_y \frac{d\gamma_2}{dt} + \frac{1}{2} c_1^2 (f f_x + f_z) &= 0, \\ 2. \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} + \frac{1}{2} c_1^2 f_y &= 0, \\ 3. -\frac{1}{2} c_1^2 f_x &= 0 \end{aligned}$$

Puisque  $c_1 \neq 0$ , de la formule (3)  $f_x = 0$ . Ainsi,  $f = f(y, z)$ , c'est-à-dire que  $M$  est une variété de Walker stricte. Pour la seconde partie, soit  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), b_1 t + b_2, c_1 t + c_2)$ . Alors  $\gamma' = (\gamma_1'(t), b_1, c_1)$  et les équations géodésiques deviennent :

$$\begin{aligned} 1. c_1 f_x a_1 + \frac{1}{2} c_1^2 (f f_x + f_z) &= 0, \\ 2. \frac{1}{2} c_1^2 f_y &= 0, \\ 3. -\frac{1}{2} c_1^2 f_x &= 0 \end{aligned}$$

Il résulte de 2 et 3 que  $f_x = f_y = 0$ . Donc  $f = f(z)$ . ■

**Corollaire 3.9** *Soit  $M$  une 3-variété de Walker stricte,  $M$  peut être caractérisé par  $f = f(y, z)$ . Dans ce cas,  $f_x = 0$  et les courbes géodésique de cette variété satisfont aux équations suivantes :*

$$\begin{aligned} 1. \frac{d^2 \gamma_1}{dt^2} + f_y \frac{d\gamma_2}{dt} \frac{d\gamma_3}{dt} + \frac{1}{2} f_z \left( \frac{d\gamma_3}{dt} \right)^2 &= 0, \\ 2. \frac{d^2 \gamma_2}{dt^2} + \frac{1}{2} f_y \left( \frac{d\gamma_3}{dt} \right)^2 &= 0, \\ 3. \frac{d^2 \gamma_3}{dt^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$4. \langle \gamma', \gamma' \rangle = \begin{cases} < 0, & \gamma \text{ est de type temps} \\ 0, & \gamma \text{ est de type lumière} \\ > 0 & \gamma \text{ est de type espace} \end{cases}$$

cela signifie que  $\frac{d\gamma_3}{dt}$  est une constante  $c_1$  de sorte que toute courbe de la forme  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), c_1 t + c_2)$  avec  $\gamma_1, \gamma_2$  satisfont aux équations ci-dessus sont des géodésiques dans  $M$  pour tout  $f(y, z)$ . De plus si  $c_1 = 0$ , alors  $\gamma$  est un ligne droite :

$$\gamma(t) = (a_1 t + a_2, b_1 t + b_2, c_2)$$

avec  $\langle \gamma', \gamma' \rangle = -b_1^2$ .

La causalité de  $\gamma$  dépend de  $b_1$ , c'est-à-dire, si  $b_1 = 0$ , alors  $\gamma$  est une géodésique de type lumière, et si  $b_1 \neq 0$ , alors  $\gamma$  est une géodésique de type temps.

## Chapitre 4

# Courbes magnétiques de Killing sur les variétés de Walker

Notre objectif est d'étudier les courbes magnétiques sur les variétés de Walker, afin de classifier les courbes magnétiques de Killing correspondantes. Pour cela, nous nous concentrons sur les variétés de Walker de dimension 3, notées  $M_f^3$ , pour l'étude desquelles nous sommes motivés par [3]. Tout d'abord, nous classons les champs de vecteurs Killing sur ces espaces. Pour l'existence de tels champs de vecteurs, nous fournissons certaines restrictions de la métrique de Walker. En conséquence, nous obtenons que le champ de vecteurs  $\partial_x$  est Killing sur  $M_f^3$ , si et seulement si cette variété de Walker stricte.

### 4.1 Champ de Killing sur une variété (Pseudo)-Riemannienne

**Théorème 4.1** *Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, et soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  tel que  $\mathcal{L}_X g = 0$ . Alors pour chaque  $p \in U$ , le flot  $\phi_t : U_p \rightarrow \phi_t(U_p)$  engendré par  $X$ , satisfait à  $\phi_0(p) = p$  and  $\frac{d}{dt}(\phi_t(p)) = X(\phi_t(p))$ , est une famille d'isométrie, (i.e.),*

$$\phi_t^* g = g$$

pour tout  $t$  où  $\phi_t$  est défini (voir [15], page 249).

Le théorème précédent nous mène à la définition suivante, nommée au nom du mathématicien allemand WILHELM KILLING.

**Définition 4.2** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. Un champ de vecteurs de Killing est un champ de vecteurs  $X$  qui satisfait à la condition

$$\mathcal{L}_X g = 0$$

Nous illustrons maintenant la condition du champ de vecteurs Killing en coordonnées locales, en l'exprimant sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires de premier ordre.

**Proposition 4.3** Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un système de coordonnées sur un domaine  $U$  et  $\{(\partial_i)_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \big|_p\}$  la base correspondante de  $T_p(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $g$  une métrique Riemannienne de composantes  $[g_{ij}]$ . Alors  $X = X^i \partial_i$  est un champ de vecteur de Killing si et seulement si les composantes  $X_i$  satisfont aux  $\frac{n(n+1)}{2}$  équations aux dérivées partielles

$$\sum_{k=1}^n (X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + g_{jk} \frac{\partial X^k}{\partial x_i} + g_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x_j}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \leq j.$$

**Exemple 4.4** Soit  $g_0$  la métrique Euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^2$  avec les coordonnées  $(x, y)$ . Soit  $X = X^1 \frac{\partial}{\partial x} + X^2 \frac{\partial}{\partial y}$  un champ de vecteur sur  $\mathbb{R}^2$ . Notre objectif est de décrire d'abord les champs de vecteurs de Killing dans le contexte Euclidien sur  $\mathbb{R}^2$ , et ensuite de les intégrer pour obtenir des isométries Euclidiennes (locales). De la dernière proposition, après les calculs appropriés, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial X^1}{\partial y} + \frac{\partial X^2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial X^2}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Par (1) et (3), on voit  $X_1 = X_1(y)$  et  $X_2 = X_2(x)$ . Equation (2) implique que

$$\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial x} = a$$

où  $a$  est une certaine constante, et donc les champs de vecteurs Euclidiens de Killing doivent avoir la forme

$$X(x, y) = (ay + b) \frac{\partial}{\partial x} + (-ax + c) \frac{\partial}{\partial y},$$

pour certaines constantes  $a, b, c$ .

Le fait que les champs de vecteurs de Killing Euclidiens aient une forme aussi simple leur permet d'être intégrés afin d'obtenir des isométries. Le flot  $\phi_t$  donné par  $\phi_t(x, y) = (x(t), y(t))$  généré par un champ de vecteurs de Killing Euclidienne doit satisfaire au système d'équations différentielles ordinaires

du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = ay + b \\ \dot{y} = -ax + c \end{cases}$$

la solution générale est

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at) + \frac{c}{a}, \\ y(t) = c_2 \cos(at) - c_1 \sin(at) - \frac{b}{a} \end{cases}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes dépendantes (différentiablement) de la condition initiale  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ .

Cela montre que les isométries locales issues des intégrales des champs de vecteurs de Killing euclidienne sont en fait définies de manière globale et peuvent être exprimées sous la forme de compositions de rotations et de translations (voir [15]).

**Remarque 4.5** Dans le plan euclidien, les champs de vecteurs de Killing correspondent à des translations et des rotations et les géodésiques sont des lignes. Nous trouvons qu'aux points d'intersection entre une ligne fixe et des cercles variables centrés à l'origine, le produit scalaire entre leurs vecteurs tangents est constant (ne dépend pas du cercle) (voir Fig.14).

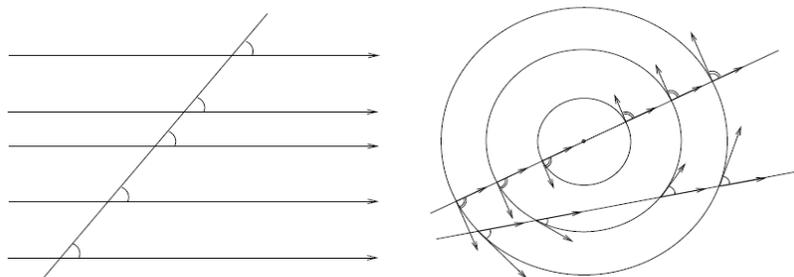


Fig.14

**Exemple 4.6** Dans l'espace euclidienne de dimension 3  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ , il y a six champs de Killing linéairement indépendants sur le champ des nombres réels :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, X_4 = -y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y}, X_5 = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}, X_6 = -x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Les groupes de transformations générés par les champs de vecteurs  $X_1, X_2, X_3$  sont des groupes de translations dans la direction des axes  $Ox, Oy$  et  $Oz$ , respectivement, et les groupes de transformations générés par les trois derniers champs de vecteurs sont des rotations autour des axes du  $Ox, Oy$  et  $Oz$  en conséquence. Les trois derniers champs sont aussi des champs de Killing sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . (voir [19])

**Proposition 4.7** *Un champ de vecteurs  $X$  est un champ de Killing si et seulement si  $\nabla X$  est anti-symétrique, i.e. pour tout point  $P$  et tous vecteurs tangents  $v$  et  $w$  en  $P$ ,*

$$\langle \nabla_v X, w \rangle + \langle v, \nabla_w X \rangle = 0$$

**Preuve.** Notons  $\phi_t$  le flot de  $X$ . Il est défini au moins localement en espace et en temps. Par définition,

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* g|_{t=0} = L_X g$$

est la dérivée de Lie de la métrique  $g$  par rapport au champ  $X$ . Si  $X$  est un champ de Killing, alors  $\phi_t^* g = g$  pour tout  $t$ , donc  $L_X g = 0$ . Réciproquement, supposons que  $L_X g = 0$ . La dérivée en un temps  $t$  quelconque de la courbe de métriques  $s \rightarrow \phi_s^* g$  est

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi_{t+s}^* g|_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial x} \phi_t^* \phi_x^* g|_{x=0} \\ &= \phi_t^* \frac{\partial}{\partial x} \phi_x^* g|_{x=0} \\ &= \phi_t^* L_X g \\ &= 0. \end{aligned}$$

donc  $\phi_t^* g = g$  pour tout  $t$ , donc  $X$  est un champ de Killing. Il reste à relier dérivée de Lie et dérivée covariante. Comme la dérivée covariante, la dérivée de Lie commute avec les opérations naturelles sur les tenseurs. Par conséquent, pour tous champs de vecteurs  $X, V$  et  $W$ ,

$$\begin{aligned} X \langle V, W \rangle &= L_X g(V, W) + \langle L_X V, W \rangle + \langle V, L_X W \rangle \\ &= L_X g(V, W) + \langle [X, V], W \rangle + \langle V, [X, W] \rangle \end{aligned}$$

Par définition de la connexion de Levi-civita,

$$X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle$$

En soustrayant, il vient

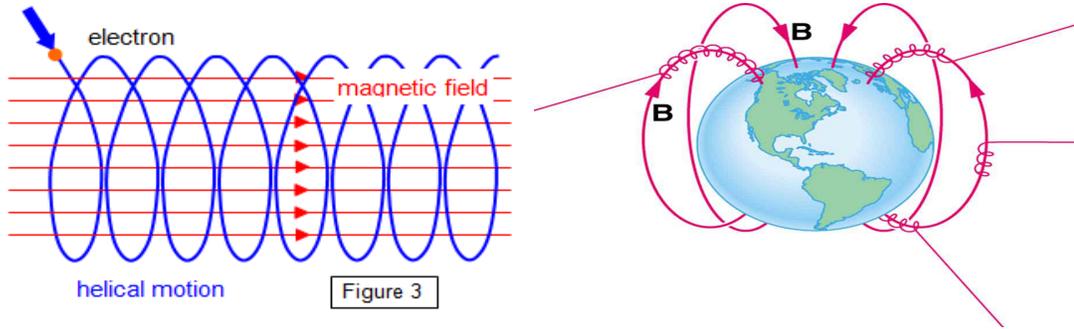
$$L_X g(V, W) = \langle \nabla_V X, W \rangle + \langle V, \nabla_W X \rangle$$

■

## 4.2 Courbes magnétiques sur une variété (Pseudo)-Riemannienne

Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne et sa connexion de Lévi-Civita. Un champ magnétique sur  $(M, g)$  est une 2-forme fermée  $F$  sur  $M$ . La force de Lorentz  $\Phi$  correspondant à  $F$ , est un champ de tenseur de type  $(1, 1)$  antisymétrique déterminé uniquement par  $g(\Phi(X), Y) = F(X, Y)$ , pour tout champ de vecteurs  $X, Y$  sur  $M$ . Une courbe lisse sur  $M$  est appelée courbe magnétique, ou trajectoire pour le champ magnétique  $F$  s'il s'agit d'une solution de l'équation de Lorentz  $\nabla_{\gamma'}\gamma' = \Phi(\gamma')$ .

En tant que telles, elles constituent une généralisation naturelle des géodésiques de  $M$ , qui vérifient l'équation de Lorentz en l'absence de tout champ magnétique. En particulier, le cas tridimensionnel a été étudié, car il présente des comportements particuliers (voir [5] et [8]).



**Définition 4.8** *Un champ magnétique sur une variété pseudo-Riemannienne  $(M, g)$  est défini comme une 2-forme fermée  $F$  sur  $M$ , liée, à un champ de tenseur  $\Phi$  de type  $(1, 1)$  antisymétrique, appelé force de Lorentz de  $F$ , par :*

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (4.1)$$

*Le champ potentiel sur la variété  $M$  est une 1-forme  $A \in \Lambda^1(M)$ , tel que le champ magnétique est  $F = dA \in \Lambda^2(M)$ .*

*La trajectoire magnétique de  $F$  (ou la courbe magnétique associée à  $F$ ) est une courbe lisse  $\gamma$  sur  $M$ , satisfaisant l'équation de Lorentz (appelé aussi Newton, ou équation de Landau-Hall) :*

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = q(t)\Phi(\gamma')$$

où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita de  $g$ , et  $q$  est la charge de la particule.

**Remarque 4.9** *Ces définitions nous amènent aux conséquences suivantes :*

1. *Pour le champ magnétique trivial  $F = 0 \iff \Phi = 0$ , l'équation de LANDAU HALL pour les courbes magnétiques est  $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ , ce qui signifie que les courbes magnétiques deviennent des géodésiques de  $(M, g)$ . Par conséquent, sur toute variété Riemannienne  $(M, g)$  par l'absence de champs électriques et*

magnétiques, les particules se déplacent le long des géodésiques.

2. Les courbes magnétiques satisfont à la loi de conservation suivante : les particules évoluent à vitesse constante, et donc à énergie constante le long des trajectoires magnétiques. En fait, à partir de 4.1 nous avons  $g(\Phi(X), Y) = -g(X, \Phi(Y))$ , puis

$$\frac{d}{dt}g(\gamma', \gamma') = \nabla_{\gamma'}g(\gamma', \gamma') = g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma') + g(\gamma', \nabla_{\gamma'}\gamma') = 2g(\Phi(\gamma'), \gamma') = 0.$$

En raison de l'antisymétrie de la force de Lorentz, les trajectoires magnétiques ont une vitesse constante  $v(t) = \|\gamma'\|$ . Lorsque la courbe magnétique  $\gamma(t)$  est paramétrée par la longueur d'arc ( $v_0 = 1$ ),  $\gamma$  est appelée courbe magnétique normale.

#### 4.2.1 Champs magnétiques sur $(M^3, g)$

Sur une variété pseudo-Riemannienne de dimension 3 orientée  $(M, g)$ , la force de Lorentz est fournie via le produit vectoriel, et les champs magnétiques correspondent un à un champ de vecteurs sans divergence. Les champs de vecteurs de Killing sont sans divergence. On peut définir une classe spéciale de champs magnétiques appelée champs magnétiques Killing.

sur chaque 3-variété Riemannienne orientée  $(M, g)$ , l'espace des 2-formes différentielles  $\Lambda^2(M^3)$  est identifié à l'espace  $\mathfrak{X}(M^3)$  de tous les champs de vecteurs différentiable via l'opérateur star de Hodge et la forme volume  $dv_g$ .

**Lemme 4.10** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , alors  $X^\flat$  est défini comme étant la forme unique donnée par

$$X^\flat(Y) = g(X, Y)$$

pour tous  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ . L'application de  $X$  vers  $X^\flat$  est un isomorphisme entre  $\mathfrak{X}(M)$  et  $\mathfrak{X}^*(M)$ . De plus, cet isomorphisme est linéaire sur les fonctions. En particulier, pour un 1-forme  $\eta$ , il y a donc un unique  $X \in \mathfrak{X}(M)$  telle que  $X^\flat = \eta$ . Le champ de vecteur  $X$  est noté  $\eta^\sharp$  (voir [21]).

En effet, soit  $(M^3, g)$  une variété Riemannienne orientée 3D avec  $dv_g$  une forme volume et considérons  $F \in \Lambda^2(M^3)$  une 2-formes différentielle. L'opérateur star de Hodge  $*$  agit sur  $F$  pour produire une 1-forme  $\omega = *F \in \Lambda^1(M^3)$ , en appliquant le lemme précédent sur la  $g$ -equivalent (dual) d'un champ de vecteur et une 1-forme on a bien  $U = (*F)^\sharp \in \mathfrak{X}(M^3)$ . Nous avons donc  $F \rightsquigarrow U$ . Inversement  $U \rightsquigarrow F$  fonctionne de la même manière : étant donné un champ de vecteur  $U \in \mathfrak{X}(M^3)$ , considérons sa 1-forme  $g$ -equivalent  $\omega = U^\flat$ . Appliquons l'opérateur star Hodge pour obtenir  $*\omega$ , qui est une 2-forme dans une variété 3D. Maintenant, d'après le lemme ci-dessus, le produit intérieure  $i_U$  (qui est défini au moyen de  $(i_U dv_g)(X, Y) = dv_g(U, X, Y)$ ) nous permettent de l'écrire comme  $*(U^\flat) = i_U dv_g = F$ .

**Lemme 4.11** *Si  $M$  est une variété pseudo Riemannienne orientée munie d'une forme volume  $dv_g$ , alors  $i_X dv_g = *(X^b)$  pour tous  $X \in \mathfrak{X}(M)$  (voir [13], page 413).*

**Lemme 4.12** *Si  $dv_g$  est une forme volume sur  $M$  alors  $\mathcal{L}_X(dv_g) = (\operatorname{div} X)dv_g$  (voir [20], page 195).*

(a) Les champs magnétiques désignent des champs vectoriels sans divergence. On sait que la dérivée de Lie et la forme volume vérifie que

$$L_V dv_g = d(i_V dv_g) = \operatorname{div}(V)dv_g$$

(voir [11], page 281), et ainsi, la forme  $*V^b = i_V dv_g$  est fermée si et si  $\operatorname{div} V = 0$ , c'est-à-dire que l'élément de volume est invariant par les flot locaux de  $V$ . Cela nous permettra de considérer les champs magnétiques de dimension 3 comme des champs vectoriels sans divergence.

En conséquence de la bijectivité entre les champs de vecteurs  $U$  sans divergence et les champs magnétiques  $F_U = i_U dv_g$  sur les variétés Riemanniennes  $3D$ , nous considérons le champ magnétique comme étant  $F_U$ .

(b) On peut définir le produit vectoriel  $X \wedge Y$  de deux champs de vecteurs  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^3)$  quelconques dans une variété Riemannienne orientée de dimension 3, comme suit :

$$g(X \wedge Y, Z) = dv_g(X, Y, Z).$$

**Théorème 4.13** *L'équation LANDAU-HALL de  $(M^3, g)$  est*

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = U \wedge \gamma'.$$

**Preuve.** La force de Lorentz  $\Phi$  associée au champ magnétique,  $F_U = i_U dv_g$  satisfait

$$g(\Phi(X), Y) = F_U(X, Y) = (i_U dv_g)(X, Y) = dv_g(U, X, Y) = g(U \wedge X, Y);$$

donc nous avons

$$\Phi(\gamma') = U \wedge \gamma',$$

pour tout  $X \in \mathfrak{X}(M^3)$ , et par conséquent, l'équation de la force de Lorentz, qui fournit le champ magnétique, peut être écrit comme

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma') = V \wedge \gamma'.$$

■

### 4.2.2 Champs magnétiques de Killing sur $(M^3, g)$

Les champs de vecteurs de Killing sur une variété Riemannienne  $(M^n, g)$  sont ceux générant des flot locaux isométriques. On sait que  $V \in \mathfrak{X}(M^n)$  est de Killing si et seulement si  $\mathcal{L}_V g = 0$  ou, de manière équivalente,  $\nabla V(p) = 0$  est un opérateur antiymétrique dans  $T_p M^n$ , en chaque point  $p \in M^n$ .

Mais nous avons aussi

$$\operatorname{div}(V) = \sum g(\nabla_{e_i} V, e_i) = 0,$$

c'est-à-dire que tout champ de vecteurs de Killing est sans divergence.

En particulier, si  $n = 3$ , chaque champ vectoriel de Killing définit un champ magnétique qui sera appelé champ magnétique de Killing. Par conséquent, la classe des champs magnétiques de Killing constitue une importante famille de champs magnétiques dont l'étude est l'un des principaux objectifs de ce travail.

Outre la loi de conservation qui affirme que la vitesse de toute trajectoire magnétique est constante, il convient de souligner que les trajectoires magnétiques en dimension 3 des champs magnétiques de Killing possèdent une autre loi de conservation supplémentaire. Encore plus, un champ magnétique dans une variété Riemannienne est de Killing si et seulement si, pour une courbe magnétique  $\gamma$ , le produit  $g(V, \gamma')$  est un constant le long  $\gamma$ .

En effet, si  $V$  est de Killing et  $\gamma$  est une trajectoire magnétique de  $V$ , alors

$$\frac{d}{dt} g(V, \gamma') = g(\nabla_{\gamma'} V, \gamma') + g(V, \nabla_{\gamma'} \gamma') = g(\nabla_{\gamma'} V, \gamma') + g(V, V \wedge \gamma') = 0.$$

Inversement, pour  $p \in M$  et  $v \in T_p M$ , soit une trajectoire magnétique d'un champ magnétique  $V$  telle que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ . Nous avons

$$0 = \frac{d}{dt} g(V, \gamma') = g(\nabla_{\gamma'} V, \gamma') + g(V, V \wedge \gamma') = g(\nabla_{\gamma'} V, \gamma').$$

Par conséquent,  $g(\nabla_v V, v) = 0$ , c'est à dire que  $V$  est de Killing.

### 4.2.3 Courbe magnétique de Killing sur $(\mathbb{E}^3, \langle, \rangle)$

Dans l'exemple (4.6), sur l'espace Euclidien de dimension 3  $\mathbb{E}^3(x, y, z)$ , il y a six champs de vecteurs Killing linéairement indépendants sur le champ des nombres réels :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = -y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_6 = -x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ici,  $x, y, z$  désignent les coordonnées globales sur  $\mathbb{E}^3$  et  $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$  est considéré comme un espace vectoriel. L'exemple le plus simple consiste à considérer le champ de vecteurs Killing  $\partial_z$ . (Des discussions similaires peuvent être faites pour  $\partial_x$  et  $\partial_y$ , respectivement.) Ses trajectoires magnétiques sont des hélices avec l'axe  $\partial_z$ , à savoir :  $(x_0 + \cos t, y_0 + \sin t, z_0 + bt)$  (voir [13]).

## 4.3 Champ de Killing sur les 3-variétés de Walker

Dans cette section, nous trouvons les conditions d'existence des champs de vecteurs Killing sur une 3-variété de Walker et ainsi que leur expression générale.

**Proposition 4.14** *Si  $V = V^1 \partial_x + V^2 \partial_y + V^3 \partial_z$  est un champ de vecteur de Killing sur  $M_f^3$  alors il existe certaines fonctions  $a, A, \dots, d, D$ , telles que l'un des cas suivants se produit :*

**Cas 1 :**

$$(i) \quad V^1 = [\pm a'(z)y - c'(z)]x + A(z)y^3 + B(z)y^2 + C(z)y + D(z)$$

$$(ii) \quad V^2 = a(z)x + b(z), \quad (iii) \quad V^3 = \mp a(z)y + c(z), \quad \text{et} \quad (4.2)$$

$$f(x, y, z) = [2a'(z)x + b'(z)3A(z)y^2 + 2B(z)y + C(z)]/a(z) \quad (4.3)$$

où  $a(z) \neq 0$ .

**Cas 2 :** *Il existe une fonction lisse  $F$  telle que  $f$  satisfait à l'équation implicite  $F(U_1, U_2, U_3) = 0$ , où  $U_i(x, y, z, f(x, y, z))$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , sont les premières intégrales de*

$$\frac{dx}{V^1} = \frac{dy}{V^2} = \frac{dz}{V^3} = \frac{df}{-2(f\partial_z V^3 + \partial_z V^1)},$$

avec

$$(i) \quad V^1 = -c'(z)x \mp b'(z)y + d(z),$$

$$(ii) \quad V^2 = b(z),$$

$$(iii) \quad V^3 = c(z).$$

**Preuve.** Pour que  $V$  soit de Killing, La condition  $L_V g_f = 0$  est équivalente au système (K1)-(K6)

tel que

$$(K1) V^3 \text{ ne dépendant pas de } x, \text{ i.e. } V^3 = V^3(y, z);$$

$$(K2) V^2 \text{ ne dépendant pas de } y, \text{ i.e. } V^2 = V^2(x, z);$$

$$(K3) \partial_x V^1 + \partial_z V^3 = 0,$$

$$(K4) \partial_y V^3 \pm \partial_x V^2 = 0,$$

$$(K5) \partial_y V^1 + f \partial_y V^3 \pm \partial_z V^2 = 0,$$

$$(K6) V f + 2 \partial_z V^1 + 2 f \partial_z V^3 = 0.$$

De (K1) et (K3) nous obtenons

$$V^1 = -\frac{\partial V^3}{\partial z} x + u(y, z), \quad (4.4)$$

Et de même, à partir de (K1),(K2),(K4), il s'ensuit que la fonction  $V^2$  (resp.  $V^3$ ) est linéaire en  $x$  (resp.  $y$ ), c'est-à-dire que 4.2 (ii) et (iii) sont vérifiées, où  $u(y, z)$ ,  $a(z)$ ,  $b(z)$ ,  $c(z)$  sont des fonctions lisses. Donc 4.4 devient :

$$V^1 = [\pm a'(z)y - c'(z)]x + u(y, z)$$

On remplaçant (K4) dans (K5) on obtient :

$$\partial_y V^1 \mp f \partial_x V^2 \pm \partial_z V^2 = 0$$

ce qui équivaut à

$$\pm a'(z)x + \frac{\partial u(y, z)}{\partial y} \mp f a(z) \pm [a'(z)x + b'(z)] = 0 \quad (4.5)$$

**Cas 1 :** si  $a(z) \neq 0$ , alors

$$f(x, y, z) = [2a'(z)x + b'(z) \pm \frac{\partial u(y, z)}{\partial y}] / a(z)$$

Puisque le membre gauche de (K6) devient linéaire en  $x$ , il s'ensuit que le coefficient de  $x$  doit être identique à zéro et que  $\frac{\partial^2 u(y, z)}{\partial y^2}$  se révèle être un polynôme de degré 1 en  $y$ , ayant comme coefficients certaines fonctions lisses de  $z$ . Donc,  $u(y, z)$  est un polynôme de degré 3 en  $y$ , avec quelques fonctions lisses de  $z$  comme coefficient.

**Cas2 :**  $a(z) = 0$ , alors 4.5 implique

$$u(y, z) = \mp b'(z)y + d(z),$$

pour une fonction lisse  $d(z)$ .

Donc  $V^1, V^2, V^3$  satisfont respectivement le deuxième cas (i)-(ii). Si nous les remplaçons dans (K6) et exprimons la solution générale de cette équation aux dérivées partielles quasi-linéaires, nous complétons la preuve. ■

Inversement, par un calcul direct, on obtient ce qui suit :

**Proposition 4.15** *Nous considérons un champ de vecteur  $V = V^1\partial_x + V^2\partial_y + V^3\partial_z$  Sur  $M_f^3$ .*

(i) *Soit  $V$  satisfait 4.2 (avec la fonction arbitraire  $a \neq 0, b, c, d, A, B, C, D$ ) et supposant que  $f$ , exprimé par 4.3, peut être écrit implicitement comme :*

$$F(U_1(x, y, z, f(x, y, z)), U_2(x, y, z, f(x, y, z)), U_3(x, y, z, f(x, y, z))) = 0,$$

où  $F$  est une fonction arbitraire et  $U_i, i = \overline{1, 3}$  sont les première intégrales du système :

$$\frac{dx}{V^1} = \frac{dy}{V^2} = \frac{dz}{V^3} = \frac{df}{-2(f\partial_z V^3 + \partial_z V^1)},$$

Alors  $V$  est killing.

(ii) *Si  $V$  satisfait le deuxième cas de la proposition (4.14) (où  $b, c, d$  sont des fonctions lisses arbitraire), alors  $V$  est de Killing.*

Comme conséquence des assertion ci-dessus, les deux résultats suivants sont les suivants :

**Corollaire 4.16** *Sur une variété de Walker  $M_f^3$ , les champs de vecteurs  $\partial_x$  (resp.  $\partial_y, \partial_z$ ) sont les champs de vecteurs de Killing si et seulement si la fonction  $f$  est indépendante de  $x$  (resp. de  $y, z$ ).*

**Preuve.** D'après la preuve de la proposition (4.14), le champ de vecteur  $V = V^1\partial_x + V^2\partial_y + V^3\partial_z$  est de Killing sur  $M_f^3$  donc il vérifie les conditions (K1) – (K6) l'orsque  $V$  est  $\partial_x$  (resp.  $\partial_y$  ou  $\partial_z$ ), alors (K1) – (K5) sont vérifient, et (K6) se réduit à  $f_x = 0$  (resp. à  $f_y = 0$  ou  $f_z = 0$ ), d'où la conclusion.

■

**Corollaire 4.17** *Le champ de vecteur  $\partial_x$  est un champ de vecteur de Killing sur la variété de Walker  $M_f^3$  si et seulement si la variété de Walker est stricte.*

**Preuve.** D'après la définition 3.1, la variété de Walker  $M_f^3$  est stricte, à condition que  $\partial_x$  (qui génère la distribution de type lumière) est parallèle. En prenant compte de la relation 3.2 pour la connexion Lévi-Civita, il s'ensuit que le parallélisme de  $\partial_x$  est exprimé comme étant  $f_x = 0$ . On utilise la remarque 3.2, la dernière relation est équivalente au fait que  $\partial_x$  est de Killing, d'où la preuve du corollaire. ■

### 4.3.1 Courbes magnétiques de Killing sur les 3-variétés de Walker

Certaines notions du contexte tridimensionnel de Minkowski seront étendues au cas Lorentzien tridimensionnel, à savoir une variété de Walker  $M_f^3$ . Sur  $M_f^3$ , un champ de vecteur de Killing  $V$  engendre une 2-forme  $F_V$ , défini comme suit :

$$F_V = i_V dv_{g_f} \quad (4.6)$$

appelé le champ magnétique de Killing, correspondant à  $V$ , où  $i$  désigne le produit intérieur.

La force de Lorentz  $\Phi$  du champ magnétique de Killing  $F_V$  satisfait à 3.2, qui devient maintenant :

$$g(\Phi(X), Y) = F_V(X, Y), \quad (4.7)$$

pour tout champ de vecteurs  $X, Y$  sur  $M_f^3$ .

D'autre part, sur  $M_f^3$ , on peut également définir le produit vectoriel de deux champs de vecteurs  $X, Y$ , par la relation

$$g(X \wedge Y, Z) = dv_{g_f}(X, Y, Z) \quad (4.8)$$

pour tout champ de vecteurs  $Z$  sur  $M_f^3$ , où  $dv_{g_f}$  désigne une forme volume sur  $M_f^3$ . Les relations 4.6-4.8 conduisent à l'expression de la force de Lorentz de  $F_V$  :

$$\Phi(X) = V \wedge X, \quad (4.9)$$

pour tout champ de vecteurs  $X$  sur  $M_f^3$ .

Considérons une courbe lisse  $\gamma : I \longrightarrow M_f^3$ ,  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ , paramétrée par sa longueur d'arc, c'est-à-dire.

$$g_f(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = (dy^2 + fdz^2 + dx \otimes dz + dz \otimes dx)((\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))) \quad (4.10)$$

donc

$$-\frac{\dot{x}^2}{f} + \dot{y}^2 + (\sqrt{f}\dot{z} + \frac{\dot{x}}{\sqrt{f}})^2 = \sigma$$

ou c'est équivalent à,

$$\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{z} + f\dot{z}^2 = \sigma \quad (4.11)$$

où  $\sigma$  est égal à 1 ou  $-1$ , selon que la courbe est de type espace ou de type temps.

En utilisant la notation faite ci-dessus de la définition 4.5, on dit qu'une courbe  $\gamma(s)$  sur  $M_f^3$ ,

paramétrée par sa longueur d'arc, est une trajectoire magnétique normale du champ magnétique de Killing  $F_V$  (ou une courbe magnétique normale associée au champ vecteur de Killing  $V$ ) si elle vérifie l'équation de Lorentz correspondante :

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = qV \wedge \gamma', \quad (4.12)$$

où la force  $q$  est une constante.

Si nous fixons les données initiales  $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$  et  $\dot{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0)$ , alors la condition de paramétrage de la longueur d'arc 4.11 conduit à :

$$v_0^2 + 2u_0w_0 + f_0w_0^2 = \sigma,$$

où  $f_0 = f(0, 0, 0)$ .

**Lemme 4.18** *Sur une variété de Walker  $M_f^3$ , la dérivée covariante d'un champ de vecteur unitaire de type espace ou de type temp unitaire le long d'un champ de vecteurs  $X$  sur  $M_f^3$  peut être exprimé par*

$$\nabla_X\xi = \alpha(X \mp g_f(X, \xi)\xi) + Y, \quad (4.13)$$

pour une certaine fonction  $\alpha \in \mathcal{F}(M_f^3)$  et  $Y \in (\text{Span}\{X, \xi\})^\perp$ , où le signe  $\mp$  est choisi en fonction du fait que  $\xi$  soit de type espace ou de type temps.

**Preuve. Cas 1** Si  $X$  n'est pas colinéaire avec  $\xi$ , alors il existe  $Y$  orthogonal à  $\text{Span}\{X, \xi\}$  et certaines fonctions  $\alpha, \beta$ , telles que

$$\nabla_X\xi = \alpha X + \beta\xi + Y.$$

Puisque  $\xi$  est un champ de vecteur unitaire, alors la relation suivante contient le signe  $+$  ou  $-$ , selon que  $\xi$  soit de type espace ou de type temp :

$$0 = g_f(\nabla_X\xi, \xi) = \alpha g_f(X, \xi) \pm \beta,$$

à partir de laquelle on obtient 4.13.

**Cas 2** Si  $X$  est colinéaire avec  $\xi$  (c'est-à-dire que  $X = \lambda\xi$ , pour une fonction lisse  $\lambda$ ), alors

$$\nabla_X\xi = \lambda\nabla_\xi\xi,$$

et donc 4.13 est satisfaite pour  $\alpha = 0$  et  $Y = \lambda\nabla_\xi\xi$ , ce qui complète la preuve. ■

Ensuite, portez le lemme ci-dessus pour obtenir une classe de géodésiques de type lumière.

**Théorème 4.19** *Soit  $M_f^3$  être une variété de Walker, dotée d'un champ de vecteur unitaire de type espace  $\xi$ . S'il existe une courbe de type lumière  $\gamma$  normale à  $\xi$ , alors  $\gamma$  est une géodésique, à une paramétrisation près.*

**Preuve.** Si  $\gamma$  est une courbe intégrale de type lumière de  $\xi^\perp$ , alors il existe de ([2], page 52) des champs de vecteurs locaux  $U, V$  le long de  $\gamma$ , tels que

$$\begin{aligned} g_f(\gamma', \gamma') &= g_f(U, U) = 0; & g_f(\gamma', U) &= g_f(V, V) = 1; \\ g_f(\gamma', V) &= g_f(U, V) = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

et toujours d'après ([2], page 55)

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \varphi \gamma' + \tilde{\varphi} V, \tag{4.15}$$

pour certaines fonctions  $\varphi, \tilde{\varphi}$ .

De  $\nabla_{\gamma'} g_f(\xi, \gamma') = 0$  le long de  $\gamma$ , on obtient de 4.13 et 4.15,

$$\tilde{\varphi} g_f(\xi, V) = 0.$$

Si nous **supposons** que  $\tilde{\varphi} \neq 0$ , nous avons  $g(\xi, V) = 0$ .

Alors 4.14 donne la décomposition suivante de  $\xi$  le long de  $\gamma$ , par rapport au repère de Frenet  $\{\gamma', V, U\}$  :

$$\xi = \psi \gamma' + \tilde{\psi} U,$$

pour certaines fonctions  $\psi, \tilde{\psi}$ . A partir de 4.14 on obtient

$$1 = g_f(\xi, \xi) = 2\tilde{\psi}\psi \quad \text{et} \quad 0 = g_f(\gamma', \xi) = \tilde{\psi}.$$

Cette **contradiction** montre que  $\tilde{\varphi} = 0$ , et de 4.15 on obtient  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = \varphi \gamma'$ , qui complète la preuve. ■

Contrairement au théorème ci-dessus, où la courbe est de type lumière, nous traitons maintenant le cas d'une courbe de type espace ou de type temps.

**Proposition 4.20** *Soit  $M_f^3$  une variété de Walker munie d'un champ de vecteurs de Killing unitaire  $V$  (de type espace ou de type temps). Alors toute courbe intégrale de type espace ou de type temps  $\gamma(s)$  de  $V^\perp$  est une **trajectoire** magnétique normale associée à  $V$ .*

**Preuve.** Soit  $\gamma(s)$  une courbe paramétrée par la longueur d'arc de type espace ou de type temps, tangente à  $V^\perp$ . Puisque  $\{\dot{\gamma}, V, V \wedge \dot{\gamma}\}$  est un repère orthonormé, alors  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  peut être exprimé par

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = qV \wedge \dot{\gamma} + rV, \quad (4.16)$$

pour certaines fonctions lisses  $q$  et  $r$ .

A partir de la condition de Killing  $\mathcal{L}_V g_f = 0$ , 4.16 et le fait que  $g_f(\dot{\gamma}, V) = 0$ , le champ de vecteur unitaire  $V$  satisfait

$$0 = g_f(\nabla_{\dot{\gamma}} V, \dot{\gamma}) = -g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, V) = -rg_f(V, V),$$

ce qui donne  $r = 0$ .

Donc 4.16 devient 4.12 et ainsi la proposition est prouvée.

■

Lorsque le champ de vecteurs de Killing  $V$  est  $\partial_x$ , l'équation de Lorentz 4.12 devient alors

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = q\partial_x \wedge \dot{\gamma}. \quad (4.17)$$

**Lemme 4.21** *Sur une variété stricte de Walker  $M_f^3$ , une courbe  $\gamma(s)$  de type espace ou de type temps est une trajectoire magnétique normale associée au champ de vecteurs de Killing  $\partial_x$ , si et seulement si elle répond au système suivant :*

$$\begin{cases} \ddot{x} + (w_0 f_y + q)\dot{y} + \frac{w_0^2}{2} f_z = 0, \\ \ddot{y} - \frac{w_0^2}{2} f_y - qw_0 = 0, \\ z = w_0 s + z_0, \end{cases}$$

où  $f_y$  et  $f_z$  désignent les dérivées partielles de la fonction  $f(y, z)$ , et  $q$  est la charge de la particule.

**Preuve.** Toute courbe de type espace ou de type temps  $\gamma : I \longrightarrow M_f^3$ ,  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ , a le vecteur vitesse

$$\dot{\gamma} = \dot{x}\partial_x + \dot{y}\partial_y + \dot{z}\partial_z.$$

Alors, en utilisant 3.2, nous obtenons l'expression suivante pour la dérivée covariante de  $\gamma$  le long de la courbe :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = [\ddot{x} + \dot{x}\dot{z}f_x + \dot{y}\dot{z}f_y + \frac{1}{2}\dot{z}^2 (ff_x + f_z)]\partial_x + (\ddot{y} - \frac{1}{2}\dot{z}^2 f_y)\partial_y + (\ddot{z} - \frac{1}{2}\dot{z}^2 f_x)\partial_z,$$

qui peut être réécrit en raison de 3.1, par rapport à la base orthonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , sous la forme :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -\frac{1}{\sqrt{f}}[\ddot{x} + \dot{x}\dot{z}f_x + \dot{y}\dot{z}f_y + \frac{1}{2}\dot{z}^2(f f_x + f_z)]e_1 + (\ddot{y} - \frac{1}{2}\dot{z}^2 f_y)e_2 + \left\{ \frac{1}{\sqrt{f}}[\ddot{x} + \dot{x}\dot{z}f_x + \dot{y}\dot{z}f_y + \frac{1}{2}\dot{z}^2(f f_x + f_z)] + \sqrt{f}(\ddot{z} - \frac{1}{2}\dot{z}^2 f_x) \right\} e_3$$

Puisque la variété de Walker  $M_f^3$  est stricte, l'expression ci-dessus devient plus simple :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -\frac{1}{\sqrt{f}}[\ddot{x} + \dot{y}\dot{z}f_y + \frac{1}{2}\dot{z}^2 f_z]e_1 + (\ddot{y} - \frac{1}{2}\dot{z}^2 f_y)e_2 + \left[ \frac{1}{\sqrt{f}}[\ddot{x} + \dot{y}\dot{z}f_y + \frac{1}{2}\dot{z}^2 f_z] + \sqrt{f}\ddot{z} \right] e_3$$

D'autre part, en utilisant 4.9, nous obtenons que la force de Lorentz  $\Phi(\gamma)$  associée au champ magnétique de Killing correspondant à  $\partial_x = \frac{1}{\sqrt{f}}(e_3 - e_1)$  a la forme

$$q\partial_x \wedge \dot{\gamma} = q \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{f}}e_1 + \dot{z}e_2 - \frac{\dot{y}}{\sqrt{f}}e_3 \right).$$

Ensuite, l'équation de Lorenz 4.17 donne le système différentiel indiqué dans le lemme. ■

En conclusion de toutes les études ci-dessus, pour certaines fonctions explicites  $f$ , nous obtenons les expressions des courbes magnétiques associées au champ de vecteur de Killing  $\partial_x$  sur  $M_f^3$ , comme suit :

**Théorème 4.22** *Sur une variété de Walker stricte  $M_f^3$ , avec  $f_y = k \in \mathbb{R}$ , soit  $\gamma(s)$  une courbe de type espace ou type temps, et soit  $q$  la charge d'une particule se déplaçant sous l'action du champ magnétique de Killing  $F_{\partial_x}$ . Alors  $\gamma(s)$  est une trajectoire magnétique normale de  $F_{\partial_x}$ , si et seulement si elle a pour expression :*

$$\begin{cases} x = -(q + kw_0) \left[ \left( \frac{kw_0^2}{2} + qw_0 \right) \frac{s^3}{6} + v_0 \frac{s^2}{2} + y_0 s \right] + x_0 - \frac{w_0^2}{2} \int_0^s \left( \int_0^v f_z(z(t)) dt \right) dv \\ y = \left( \frac{kw_0^2}{2} + qw_0 \right) \frac{s^2}{2} + v_0 s + y_0 \\ z = w_0 s + z_0 \end{cases}$$

# Bibliographie

- [1] Walker manifolds and Killing magnetic curves, Cornelia-Livia Bejan, Simona-Luiza Druță-Romaniuc. Differential Geometry and its Applications Volume 35, Supplement, September 2014, Pages 106-116.
- [2] K.L. Duggal, A. Bejancu, Lightlike Submanifolds of Pseudo-Riemannian Manifolds and Applications, Mathematics and Its Applications, vol. 364, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [3] The Geometry of Walker Manifolds, Steve G. Krantz (Ed.), M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, R. Vázquez-Lorenzo. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, Washington University, St. Louis, 2009.
- [4] Three-dimensional Lorentz manifolds admitting a parallel null vector field, M. Chaichi, E. García-Río, M.E. Vázquez-Abal. J. Phys. A 38 (2005) 841–850.
- [5] Magnetic fields in 2D and 3D sphere, Jose L. Cabrerizo. Journal of Nonlinear Mathematical Physics. Volume 20, 2013 - Issue 3.
- [6] The Contact Magnetic flow in 3D Sasakian manifolds, J. L. Cabrerizo<sup>1</sup>, M. Fernández<sup>1</sup> and J. S. Gómez<sup>1</sup>. J. Phys. A : Math. Theor. 42 (2009) 195201 (10pp).
- [7] Géométrie semi-Riemannienne Cours M2 – 2015, A. M. Cherif. Université de Mascara. [http://www.cu-relizane.dz/ETD/images/Cours-TD/cherifi/Cherif PolycopierFinal.pdf](http://www.cu-relizane.dz/ETD/images/Cours-TD/cherifi/Cherif%20PolycopierFinal.pdf).
- [8] Magnetic curves corresponding to Killing magnetic fields in  $\mathbb{E}^3$ , S.L. Druță-Romaniuc, M.I. Munteanu. J. Math. Phys. 52 (2011) 113506 :1–113506 :11.
- [9] Magnetic curves in Sasakian manifolds, Simona Luiza Druță-Romaniuc, Jun-ichi Inoguchi, Marian Ioan Munteanu & Ana Irina Nistor. Journal of Nonlinear Mathematical Physics. Volume 22, 2015 - Issue 3
- [10] Killing magnetic curves in a Minkowski 3-space, S.L. Druță-Romaniuc, M.I. Munteanu. Nonlinear Anal., Real World Appl. 14 (1) (2013) 383–396.

- [11] Geodesics of three-dimensional walker manifolds, Büyükbaş Çakar, Gökçen. Dept. of Mathematics - Master's degree, Bilkent University. July 2016.
- [12] S. Kobayashi, K. Nomizu Foundations of differential geometry, Vol. I (Interscience Publishers, New York, 1963).
- [13] Manifolds and Differential Geometry, Jeffrey M. Lee. Graduate Studies in Mathematics, Volume 107
- [14] Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, R. Lopez. International Electronic Journal of Geometry, vol. 7, pp. 44,107, 2014.
- [15] First Steps in Differential Geometry Riemannian, Contact, Symplectic, McInerney Andrew. Springer ; 2013 edition (July 10, 2013).
- [16] Magnetic curves in Enclidean space : one example, several approaches, Marian Ioan Munteanu. Publication de l'institut mathématiques nouvelle série, série, tome 94(108) (2013), 141–150.
- [17] Non-Uniqueness of the metric in Lorentzian manifolds, G. K. Martin and G. Thomson, pacific journal of mathematics Vol. 158, No. 1, 1993.
- [18] Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions, Thierry MASSON. [http ://science.thilucmic.fr/](http://science.thilucmic.fr/)
- [19] On the geometry of the orbits of Killing vector fields, A.Ya. Narmanov J. O. Aslonov. [https ://arxiv.org/pdf/1203.3690.pdf](https://arxiv.org/pdf/1203.3690.pdf).
- [20] Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, B. O'Neill. Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1983.
- [21] A brief introduction to Semi-Riemannian geometry and general relativity,Hans Ringström. [https ://www.kth.se/social/files/5548d4f9f276545b801115d3/May\\_5\\_Semi\\_Riemannian\\_Geometry.pdf](https://www.kth.se/social/files/5548d4f9f276545b801115d3/May_5_Semi_Riemannian_Geometry.pdf).
- [22] Canonical form for a Riemannian space with parallel field of null planes, A.G. Walker. Q. J. Math. 1 (1950) 69–79.
- [23] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, and R. Vázquez-Lorenzo, "The geometry of Walker manifolds," Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, vol. 2, pp. 1–179, 2009.