Université de Saida– Dr. Moulay Tahar
Faculté des Sciences

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Filière : Mathématiques

Spécialité : Géométrie

Par :

LATTI Fethi

Thème :

Sur Les Métriques Naturelles

Thèse soutenue le 08 juillet 2021 devant le jury composé de :

Nom et prénom	**Grade**	**Etablissement**	**Qualité**
Kandouci Abdeldjebbar	Prof.	Université de Saida	Président
Ouakkas Seddik	Prof.	Université de Saida	Rapporteur
Djaa Mustapha	Prof.	Centre Universitaire Relizane	Co-rapporteur
Beldjilali Gherici	MCA	Université de Mascara	Examinateur
Mohammed Cherif Ahmed	MCA	Université de Mascara	Examinateur

Remerciements

- Je remercie le professeur **Ouakkas Seddik** pour son soutien durant ce travail.

- Je remercie le professeur **Djaa Mustapha** pour les bons choix de sujets concernant ce travail, et je le remercie pour sa patience.

- Je suis très reconnaissant envers le professeur **Kandouci Abdeldjebbar** pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, le remerciant aussi pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de cette thèse.

- Je tiens aussi à exprimer mes remerciements aux Docteurs **Beldjilali Gherici** et **Mohammed Cherif Ahmed** pour avoir accepté d'apprécier mon travail et de m'honorer de leurs présence au sein du jury.

Table des matières

Introduction

D'une part

La géométrie des fibrés tangents constitue un champs fertile de recherche en géométrie Riemannienne. Les fibrés tangents munis de métriques naturelles forment une large classe de variétés qui possèdent des propriétés géométriques intéressantes et un grand nombre d'applications à la fois en géométrie différentielle et en physique mathématique.

Les efforts dans cette direction ont commencé dans les années 1950, lorsque S.Sasaki a introduit sa fameuse métrique $\tilde{g}$ sur le fibré tangent d'une variété Riemannienne (M, g) définie par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{g}(X^H, Y^H) & = & g(X, Y) \circ \pi, \\ \tilde{g}(X^H, Y^V) & = & 0, \\ \tilde{g}(X^V, Y^V) & = & g(X, Y) \circ \pi, \end{array}$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$
Par la suite, la métrique de Sasaki a été intensément étudiée par plusieurs géomètres. Cependant la métrique a montré une '**rigidité extrême**'.

Le succès universel de la géométrie Riemannienne du fibré tangent a conduit certains géomètres à généraliser des métriques connues dans le contexte du fibré tangent moins rigides que la métrique de Sasaki. Parmi les métriques qui ont été généralisées on trouve la métrique de Cheeger-Gromoll $\hat{g}$:

$$\begin{array}{rcl} \hat{g}(X^H, Y^H) & = & g(X, Y) \circ \pi, \\ \hat{g}(X^H, Y^V) & = & 0, \\ \hat{g}(X^V, Y^V) & = & \dfrac{1}{1+r^2}(g(X, Y) + g(X, u)g(Y, u)) \circ \pi, \end{array}$$

Où $r = \|u\| = \sqrt{g(u, u)}$

On introduit d'autres métriques naturelles dans cette thèse : la métrique de **Mus-Sasaki**, la métrique de **Mus-Gradient** et la métrique de **Cheeger-Gromoll Généralisée**, et on étudie leurs géométries.

D'une autre part

Les applications harmoniques sont les correspondances entre les variétés Riemanniennes ou pseudo-riemanniennes qui extrémisent la fonctionnelle énergie naturelle

$$E(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2 v_g,$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$, généralisant ainsi l' intégrale de Dirichlet. Ces applications sont en faite des solutions des équations d'Euler-Lagrange (équations harmoniques) :

$$\tau(\varphi) = trace_g \nabla d\varphi = 0.$$

L'étude des applications harmoniques a débuté vers les années 1964 par J. Eells, J.H. Sampson, L.Lemaire [17] [19] et A.Lichnerowicz [34]. En 1993, J.Eells a donné une généralisation aux applications p-harmoniques et exponentiellement-harmoniques

$$E(\varphi; D) = \int_D F(\frac{1}{2}|d\varphi|^2) v_g,$$

où F est une fonction polynomiale (resp exponentielle), puis en 1999 M.Ara [35] a introduit les applications F-harmoniques, en considérant les applications $F : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Une généralisation naturelle des applications harmoniques est obtenue en considérant les points critiques de la fonctionnelle bi-énergie :

$$E_2(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g.$$

La notion des applications f-harmonique entre deux variétés Riemanniennes est introduite par N.Course[9], S.Ouakkas, R.Nasri et M.Djaa[40],[11]. Ces applications correspondant au points critiques des fonctionnelles f-énergie (resp. f-bi-énergie) donnée par

$$E_f(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D f(x)|d\varphi|^2 v_g,$$

respectivement

$$E_{2,f}(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau_f(\varphi)|^2 v_g,$$

où $f : M \to]0, +\infty[$.

Puis M.Djaa et A.M.Cherif ont étudier une extension appelée applications f-harmonique généralisées et f-bi-harmonique généralisées correspondant aux points critiques des fonctionnelle f-énergie (respectivement f-bi-énergie) donnée par

$$E_f(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D f(x, \varphi(x))|d\varphi|^2 v_g,$$

respectivement

$$E_{2,f}(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau_f(\varphi)|^2 v_g,$$

où $f : M \times N \to]0, +\infty[$ une fonction de classe C^∞.

Dans cette thèse on introduit une extension encore plus large, les applications F-harmoniques, ces applications correspondant au points critiques des fonctionnelles F-energies (respectivement F-bi-énergie) :

$$E_F(\varphi; D) = \int_D F\big(x, e(\varphi)(x)\big),$$

respectivement

$$E_{2,F}(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau_F(\varphi)|^2 v_g,$$

où $f : M \times \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ une fonction de classe C^∞.
et nous étudions certains propriétés de conformités et de stabilité des applications F-harmonique. De plus , nous donnons une formule pour construire quelques exemples d'application F-biharmonique propre.

Ainsi, le contenu de la thèse se résume comme suit :

Dans le **chapitre 1**, nous étudions le relèvement vertical, complet et horizontal des fonctions, champ de vecteurs, forme différentielle et champ de tenseurs de type quelconque d'une variété au fibré tangent. Cette étude est parue dans l'article de Sasaki S. [45] et développée par Dombrowski P. [16], Yano K. et Ishihara S. [47] et Yano K. et Kobayashi S. [49]. Nous définissons ensuite la métrique naturelle, la métrique de Sasaki et la métrique de Cheeger-Gromoll.

Dans le **chapitre 2**, on définit la métrique de Mus-Sasaki [33]
Définition :
Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f : M \times \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ de classe C^∞. Sur le fibré tangent TM, on définit la métrique de Mus-Sasaki notée g_f^S par :

1. $g_f^S(X^H, Y^H)_{(x,u)} = g_x(X, Y)$,
2. $g_f^S(X^H, Y^V)_{(x,u)} = 0$,
3. $g_f^S(X^V, Y^V)_{(x,u)} = f(x, r)g_x(X, Y)$,

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, $(x, u) \in TM$ et $r = g(u, u)$. f est dite fonction de torsion.
Notons que si $f = 1$ alors g_f^S est la métrique de Sasaki, [45].

en donnant les formules relative aux connexions induites en établissant les théorèmes suivants :
Théorème :[53]
Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si $f(x, r) = F(\alpha(x), \beta(r))$ et ∇ (resp. $\widetilde{\nabla}$) désigne la

connexion de Levi-Civita associée à (M,g) (resp. (TM,g_f^S)), alors :

$$\begin{array}{llll}
1. & (\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^H)_p & = & (\nabla_X Y)^H_p - \frac{1}{2}(R_x(X,Y)u)^V,\\
2. & (\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^V)_p & = & (\nabla_X Y)^V_p + \frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,Y)X)^H + \frac{1}{2}X(\alpha)\frac{\partial \ln F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))Y^V_p,\\
3. & (\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^H)_p & = & \frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,X)Y)^H + \frac{1}{2}Y(\alpha)\frac{\partial \ln F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))X^V_p,\\
4. & (\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^V)_p & = & \beta'(r)\frac{\partial \ln F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\Big[g_x(Y,u)X^V_p + g_x(X,u)Y^V_p - g_x(X,Y)U^V_p\Big]\\
 & & & -\frac{1}{2}g_x(X,Y)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(grad_M\alpha)^H_p,
\end{array}$$

pour tous champs de vecteurs $X,Y \in \Gamma(TM)$ et $p=(x,u)\in TM$, où R désigne le tenseur de courbure de la variété (M,g).

Ensuite nous étudions aussi les sections harmoniques de la métrique de Mus-Sasaki, en établissant les théorèmes suivants :

Théorème[33]
Soient (M,g) une variété Riemannienne de dimension m et (TM,g_f^S) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki, tel que $f(x,r)=F(\alpha(x),\beta(r))$. Alors le champ de tension associé à $X\in\Gamma(TM)$ est donnée par :

$$\tau(X) \;=\; \frac{m}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(\nabla_{grad_M\alpha}X)^V + \big[trace_g A(X)\big]^V + \big[trace_g B(X)\big]^H, \tag{1}$$

où $A(X)$ et $B(X)$ sont des applications bilinéaires définies par :

$$\begin{array}{lll}
A(X) & = & \nabla^2 X + \frac{\beta'(r)}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[2g(\nabla X,X)\nabla X - g(\nabla X,\nabla X)X\big],\\
B(X) & = & f(x,r)R(X,\nabla X) * -\frac{1}{2}g(\nabla X,\nabla X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))grad_M\alpha.
\end{array}$$

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu' un $X\in\Gamma(TM)$ est harmonique, nous avons :

Théorème[33]
Soient (M,g) une variété Riemannienne de dimension m et (TM,g_f^S) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki et $X\in\Gamma(TM)$. Alors X est harmonique si et seulement si

$$\begin{array}{ll}
0 = & trace_g\big\{\nabla^2 X + \frac{\beta'(r)}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[2g(\nabla X,X)\nabla X - g(\nabla X,\nabla X)X\big]\big\}\\
 & \qquad + \frac{m}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))\nabla_{grad_M\alpha}X,
\end{array} \tag{2}$$

et

$$0 = \; trace_g\big\{f(x,r)R(X,\nabla X) * -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))g(\nabla X,\nabla X)grad_M\alpha\big\},$$

où $r = g(X_x, X_x) = \|X_x\|^2$.

Si M est compact, alors :

Théorème[33]
Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension m et (TM, g_f^S) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki et $X \in \Gamma(TM)$. Alors X est harmonique si et seulement si X est parallèle (i.e $\nabla X = 0$).

Théorème[33]
Soient $(\mathbb{R}^m, g_0)$ l'espace réel euclidien et $(T\mathbb{R}^m, g_{0f}^S)$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki, tel que $f(x, r) = F(\alpha(x), \beta(r))$. Si $X = (X^1, \cdots, X^m)$ et un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$, alors X est harmonique si est seulement si

$$\left\{\begin{array}{rl} 0 = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{m}{f(x, \|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x), \beta(\|X\|^2))\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}(x)\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 X^k}{\partial (x^i)^2}\Big] \\ & \displaystyle +\frac{\beta'(\|X\|^2)}{f(x, \|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x), \beta(\|X\|^2))\sum_{i,j=1}^{m}\Big[2X^j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^i} - X^k(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2\Big], \\ 0 = & \displaystyle\frac{\partial \alpha}{\partial x^k}(x)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x), \beta(\|X\|^2))\sum_{i,j=1}^{m}(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2, \end{array}\right. \tag{3}$$

pour tout $k = \overline{1, m}$.

Corollaire[33]
Soient $(\mathbb{R}^m, g_0)$ l'espace réel euclidien et $(T\mathbb{R}^m, g_{0f}^S)$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki. Si α est une fonction constante, alors $X = (X^1, \cdots, X^m)$ est un champ de vecteurs harmonique sur $\mathbb{R}^m$ si et seulement si X vérifier le système d'équations suivant :

$$\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial^2 X^k}{\partial (x^i)^2} + \frac{\beta'(\|X\|^2)}{f(x, \|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x), \beta(\|X\|^2))\sum_{i,j=1}^{m}\Big[2X^j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^i} - X^k(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2\Big] = 0,$$

pour tout $k = \overline{1, m}$.

En utilisant ce corollaire ,on peut construire plusieurs exemples non triviaux de champs de vecteurs harmoniques.

Dans le **chapitre 3**, on définit la métrique de Mus-Gradient : **Définition**
Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f : M \to]0, +\infty[$. Sur le fibré tangent TM, on définit la métrique de Sasaki gradient notée g^f par :

1. $g^f(X^H, Y^H)_{(x,u)} = g_x(X, Y)$
2. $g^f(X^H, Y^V)_{(x,u)} = 0$
3. $g^f(X^V, Y^V)_{(x,u)} = g_x(X, Y) + X_x(f)Y_x(f)$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, $(x, u) \in TM$.

En donnant les formules relative aux connexions induites et des courbures (tenseur de courbure, courbure sectionelle et courbure scalaire), puis on étudie la biharmonicité en illustrant avec des exemples d'applications biharmoniques propres. En fin de chapitre nous étudions la géodésie de cette métrique

Dans le **chapitre 4**, on définit la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée G^f par [32] :

$$\begin{array}{rcl} G^f(X^H, Y^H)_{(x,u)} & = & g_x(X, Y) \\ G^f(X^H, Y^V)_{(x,u)} & = & 0 \\ G^f(X^V, Y^V)_{(x,u)} & = & f(x)\omega^p(g_x(X, Y) + q g_x(X, u) g_x(Y, u)) \end{array}$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, et $r^2 = \|u\| = \sqrt{g(u, u)}$, avec $\omega = (1 + \|u\|^2)^{-1}$, $p, q \in \mathbb{R}$ et q positive.

Nous donnons les formules relative aux connexions induites, les tenseurs de courbures, la courbure sectionnelle et la courbure scalaire de cette métrique

Dans le **chapitre 5**[38], nous étendons la définition des applications F-harmoniques [35], on donne la notion de applications F-bi-harmonique, qui est une généralisation des applications bi-harmoniques entre deux variétés Riemanniennes [51] et des applications f-bi-harmoniques [40] et nous étudions certains propriétés de conformités et de stabilité des applications F-harmonique. De plus, nous donnons une formule pour construire quelques exemples d'application F-bi-harmonique en établissant ce qui suit :

Considérons une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemannienne.Soit

$$F : M \times \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad (x, r) \mapsto F(x, r), \tag{4}$$

Une fonction de classe C^∞ positive,pour tout domaine compact D de M la fonctionnelle F-énergie de φ est définie par

$$E_F(\varphi; D) = \int_D F\big(x, e(\varphi)(x)\big)\, v_g, \tag{5}$$

où $e(\varphi)$ est la densité de l'énergie de φ définie par

$$e(\varphi) = \frac{1}{2}\, h\big(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)\big), \tag{6}$$

v_g est la forme volume,et $\{e_i\}$ est une base orthonormée sur (M, g).

Définition : Une application est dite F-harmonique si c'est un point critique de la fonctionnelle F-énergie sur chaque compact D de M.

Corollaire : Une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ de classe C^∞ est F-harmonique si et seulement si

$$\tau_F(\varphi) = F'_r\, \tau(\varphi) + d\varphi\big(\operatorname{grad}^M F'_r\big) = 0. \tag{7}$$

Corollaire :
Si $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ est une application conforme de dilatation λ, alors

$$\tau_F(\varphi) = d\varphi\Big((2-m)F'_r\, grad^M\,(ln\,\lambda) + \mathrm{grad}^M\, F'_r\Big). \tag{8}$$

Théorème : Soit $\varphi : (M^m,g) \to (N^m,h)$ $(m \geq 3)$ est une immersion conforme de dilatation λ, alors φ est F-harmonique si et seulement si

$$F(x,r) = C(\lambda(x))^{(m-2)}.r. \tag{9}$$

Théorème : Soit $\varphi : M \to N$ une application de classe C^∞entre deux variétés Riemannienne et soit $i : N \hookrightarrow P$ l'inclusion canonique d'une sous-variétés , alors φ est F-harmonique si et seulement si $\tau_F(i \circ \varphi)$ est normal à N, où $F \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ est une fonction positive de classe C^∞ .

Théorème : Soit $\varphi : (M^m,g) \longrightarrow (N^n,h)$ $\quad (m \geq 3)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemannienne. on suppose que $F'_r \neq 0$. alors φ est F-harmonique si et seulement si φ est harmonique par rapport à la métrique conforme $\widetilde{g}$ donnée par

$$\widetilde{g} = \big(F'_r\big)^{2/(m-2)}.g$$

Théorème : Soit $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application F-harmonique entre deux variétés Riemanniennes. Si $F''_r \geq 0$ et N est a courbure non positive, alors φ est stable.

Théorème : Soit $\varphi : M^m \longrightarrow S^n$ une application F-harmonique d'une variété compacte M. Si

$$\int_M |d\varphi|^2 \Big\{|d\varphi|^2 F''_r(x, e(\varphi(x)) + (2-n)F'_r(x, e(\varphi(x))\Big\} v_g \; < \; 0,$$

alors φ est instable.

Théorème : Soit $\varphi : M^m \longrightarrow S^n$ $(n \geq 3)$ une application F-harmonique d'une variété compacte M. Si

$$F''_r \leq 0, \quad et \quad F'_r > 0$$

alors φ est instable.

Théorème : Si $F''_r \leq 0,\ F'_r > 0,\ et\ n \geq 3$ or $F''_r < 0,\ and\ n = 2$. alors toute application F-harmonique stable d'une variété compacte à S^n est constante .

Ensuite nous étudions les applications F-bi-harmoniques :

Corollaire : soit $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une application entre deux variétés Riemanniennes. Alors φ est F-bi-harmonique si :

$$\begin{aligned} \tau_{2,F}(\varphi) &= -F'_r\, \mathrm{trace}_g\, R^N(\tau_F(\varphi), d\varphi)d\varphi - \mathrm{trace}_g\, \nabla^\varphi\, F'_r\, \nabla^\varphi\, \tau_F(\varphi) \\ &\quad - \mathrm{trace}_g\, \nabla^\varphi\, < \nabla^\varphi\, \tau_F(\varphi), d\varphi > \, F''_r\, d\varphi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Théorème : Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application conforme a dilatation λ. le champ F-bi-tension de ϕ est donné par

$$\begin{aligned}\tau_{2,F'_r}(\phi) &= (n-2)F'_r \operatorname{trace}_g \nabla^2 F'_r d\phi\,(grad\ln\lambda) - F'_r \operatorname{trace}_g \nabla^2 d\phi\,(gradF'_r)\\ &+ (n-2)F'_r \operatorname{trace}_g R^N\left(F'_r d\phi\,(grad\ln\lambda)\,, d\phi\right) d\phi - F'_r \operatorname{trace}_g R^N\left(d\phi\,(gradf)\,, d\phi\right) d\phi\\ &+ (n-2)\nabla_{gradf} F'_r d\phi\,(grad\ln\lambda) - \nabla_{gradF'_r} d\phi\,(gradF'_r)\\ &+ (n-2)\,F''_r \operatorname{trace}_g\ \nabla^{\phi}\ < \nabla^{\phi}\, d\phi\Big(F'_r\, grad^M\,(ln\,\lambda) + \mathrm{grad}^M\,F'_r\Big), d\phi >\ d\phi.\end{aligned} \tag{11}$$

Du corollaire suivant on peut construire plusieurs exemples d'application F-biharmonique propre : **Corollaire :** Soit (M^m, g) une variété Riemannienne plate. Alors $Id_M : M \to M$ est F-bi-harmonique propre si et seulement si la fonction F vérifie :

$$\begin{cases} F'_r grad(\Delta F'_r) \quad + \frac{1}{2} grad\left(|gradF'_r|^2\right) + F''_r grad(\Delta F'_r) = 0.\\ grad\ F'_r \neq 0.\end{cases}$$

Chapitre 1

Géométrie du Fibré Tangent

Sommaire

Dans ce chapitre on donne la notions de relèvement vertical, complet et horizontal des fonctions, champ de vecteurs. Nous définissons ensuite la métrique naturelle, la métrique de Sasaki, la métrique de Cheeger-Gromoll et les β-métrique tout en donnant les formules relative aux connexions induites et les courbures.

1.1 Relèvement Vertical, Complet et Horizontal

Définition 1.1.1
Soient M une variété Riemannienne et $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur M. On définit les applications

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathfrak{T}_p^q(M) & \longrightarrow & \mathfrak{T}_p^{q-1}(TM) \\ F & \longmapsto & \gamma(F) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_X : \mathfrak{T}_p^q(M) & \longrightarrow & \mathfrak{T}_p^{q-1}(TM) \\ F & \longmapsto & \gamma_X(F) \end{array}$$

localement par :

$$\gamma(F) = F^{k_1\cdots k_p}_{h_1\cdots h_q} y^{h_1} \frac{\partial}{\partial y^{k_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{k_p}} \otimes dx^{h_2} \otimes \cdots \otimes dx^{h_q},$$

$$\gamma_X(F) = F^{k_1\cdots k_p}_{h_1\cdots h_q} X^{h_1} \frac{\partial}{\partial y^{k_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{k_p}} \otimes dx^{h_2} \otimes \cdots \otimes dx^{h_q},$$

où $q \geq 1$, $F = F^{k_1\cdots k_p}_{h_1\cdots h_q} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_p}} \otimes dx^{h_1} \otimes \cdots \otimes dx^{h_q}$ *et* $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Propriétés 1.1.1

1) *La Définition 1.1.1 est indépendante de la carte choisie,*

2) *Si* F *est un champ de tenseurs de type* $(1,1)$ *sur la variété* M, *alors* $\gamma(F)$ *(resp.* $\gamma_X(F)$*) est un champ de vecteurs sur* TM, *tel que localement :*

$$\gamma(F) = y^j F^i_j \frac{\partial}{\partial y^i} \quad resp. \quad \gamma_X(F) = X^j F^i_j \frac{\partial}{\partial y^i},$$

où $F = F^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ *et* $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$,

3) *Si* $f \in C^\infty(M)$ *et* $X \in \Gamma(TM)$, *on pose* $\gamma(f) = \gamma_X(f) = 0$,

4) *Si* ∇ *est une connexion linéaire sur la variété* M *et* $f \in C^\infty(M)$, *alors* $\nabla f = df$, $\gamma(df) = \gamma(\nabla)$.

Proposition 1.1.1
Si $F, G \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ *alors* $[\gamma(F), \gamma(G)] = \gamma(G \circ F) - \gamma(F \circ G)$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
[\gamma(F), \gamma(G)] &= [y^j F^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}, y^k G^s_k \frac{\partial}{\partial y^s}] \\
&= y^j F^i_j y^k G^s_k [\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^s}] + y^j F^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}(y^k G^s_k) \frac{\partial}{\partial y^s} - y^k G^s_k \frac{\partial}{\partial y^s}(y^j F^i_j) \frac{\partial}{\partial y^i} \\
&= y^j F^i_j G^s_k \delta^k_i \frac{\partial}{\partial y^s} - y^k G^s_k F^i_j \delta^j_s \frac{\partial}{\partial y^i} \\
&= y^j G^s_i F^i_j \frac{\partial}{\partial y^s} - y^k F^i_j G^j_k \frac{\partial}{\partial y^i} \\
&= y^j (G \circ F)^s_j \frac{\partial}{\partial y^s} - y^k (F \circ G)^i_k \frac{\partial}{\partial y^i} \\
&= \gamma(G \circ F) - \gamma(F \circ G).
\end{aligned}$$

■

1.1.1 Relèvement Vertical

Définition 1.1.2
Soit (TM, π, M) le fibré vectoriel tangent, si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞, on définit le relèvement vertical f^V par :

$$\begin{array}{rcl} f^V = f \circ \pi : TM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, v) & \longmapsto & f^V(x, v) = (f \circ \pi)(x, v) = f(x) \end{array}$$

Propriété 1.1.1
Soient $f, g \in C^\infty(M)$, on a :

1. $(f + g)^V = f^V + g^V$,
2. $(fg)^V = f^V g^V$.

Définition 1.1.3
Un champ de vecteurs $\widetilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ est dit champ de vecteur vertical si et seulement si pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\widetilde{X}(f^V) = 0.$$

Si $\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1^h \\ \widetilde{X}_2^k \end{pmatrix}$ sont les composantes de $\widetilde{X}$ par rapport à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM, alors pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\widetilde{X}(f^V) = (\widetilde{X}_1^h \frac{\partial}{\partial x^h} + \widetilde{X}_2^k \frac{\partial}{\partial y^k})(f^V) = \widetilde{X}_1^h \frac{\partial f}{\partial x^h}.$$

d'où

Proposition 1.1.2
Soit $\widetilde{X} \in \Gamma(TTM)$. $\widetilde{X}$ est un champ de vecteur vertical sur TM si et seulement si relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM, les composantes de $\widetilde{X}$ vérifient la condition

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1^h \\ \widetilde{X}_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{X}_2^k \end{pmatrix}.$$

Remarques 1.1.1
On a :
1.

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM & \to & M \\ (x, v) & \mapsto & \pi(x, v) = x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} d_{(x,v)}\pi : T_{(x,v)}(TM) & \to & T_x M \\ Z = Z^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}|_{(x,v)} + \overline{Z}^j \dfrac{\partial}{\partial y^i}|_{(x,v)} & \mapsto & d_{(x,v)}\pi(Z) = Z^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}|_x \end{array}$$

2. $\mathcal{V}_{(x,v)} = Ker(d_{(x,v)}\pi)$ *est un sous espace vectoriel de* $T_{(x,v)}(TM)$*, appelé sous espace vertical,*
3. *Localement* $\mathcal{V}_{(x,v)}$ *est engendré par* $(\frac{\partial}{\partial y^1}|_{(x,v)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^m}|_{(x,v)})$,
4. $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{(x,v)\in TM} \mathcal{V}_{(x,v)}$ *est un sous fibré vectoriel de* $T(TM)$,
5. $\widetilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ *est un champ de vecteurs vertical si et seulement si* $d\pi(\widetilde{X}) = 0$,
6. *Si* $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$*, alors* $\gamma(F)$ *et* $\gamma_X(F)$ *sont des champs de vecteurs verticaux.*

Définition 1.1.4
Soit $X \in \Gamma(TM)$ *un champ de vecteurs sur* M*, On définit le relèvement vertical de* X *noté* X^V *au fibré tangent* TM*, par pour toute fonction* $f \in C^\infty(M)$ *par :*

$$X^V(df) = (X(f))^V. \tag{1.1}$$

localement si $(X^i)_{i=\overline{1,m}}$, $(\widetilde{X}_1^h, \widetilde{X}_2^k)$ désignent les composantes de $X \in \Gamma(TM)$, X^V respectivement et pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$.
On a pour tout $(x,y) \in TM, y = y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$$df(x,y) = y(f) = y^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$
$$\widetilde{X}(df) = \widetilde{X}_1^h\frac{\partial^2 f}{\partial x^h x^i}y^i + \widetilde{X}_2^k\frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Alors de la formule 1.1, on obtient :

$$\widetilde{X}_1^h\frac{\partial^2 f}{\partial x^h x^i}y^i + \widetilde{X}_2^k\frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{\partial f}{\partial x^k}X^k,$$

d'où

$$\widetilde{X}_1^h = 0, \quad \widetilde{X}_2^k = X^k,$$

pour tout $h,k = \overline{1,m}$.

Proposition 1.1.3
Localement si le champ de vecteurs X *a pour composantes* $(X^h)_{h=\overline{1,m}}$ *relativement à une carte* $(U,x^h)_{h=\overline{1,m}}$ *sur* M*. Alors le relèvement vertical* X^V *de* X *a pour composantes*

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM*. i.e*

$$X^V = X^h\frac{\partial}{\partial y^h},$$

De plus, on a : pour tout $h = \overline{1,m}$ *:*

$$(\frac{\partial}{\partial x^h})^V = \frac{\partial}{\partial y^h}.$$

Exemple 1.1.1
Dans la variété $\mathbb{R}^2$, $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. *En considère le champ de vecteurs*

$$\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T\mathbb{R}^2 \\ (x^1, x^2) & \longmapsto & (X^1_{(x^1,x^2)}, X^2_{(x^1,x^2)}) \end{array}$$

Dans les cartes $(\mathbb{R}^2, x^1, x^2)$ *et* $(\mathbb{R}^4, x^1, x^2, y^1, y^2)$, *on a*

$$X^V = X^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial y^2}$$

Remarque 1.1.1
Le relèvement vertical X^V *de* X *au fibré* TM *est un champ de vecteur vertical, et on a :*

$$X^V(f^V) = 0, \tag{1.3}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ *et* $f \in C^\infty(M)$.

Propriété 1.1.2
Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$, $F \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$, *on a :*

1. $(X + Y)^V = X^V + Y^V$,
2. $(fX)^V = f^V X^V$,
3. $[X^V, Y^V] = 0$,
4. $[X^V, \gamma(F)] = \gamma_X(F)$.

Preuve.
Les propriétés 1), 2) et 3) sont des conséquences directes de la Proposition 1.1.3.
4) Localement, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $F = F^s_j \frac{\partial}{\partial x^s} \otimes dx^j$, on a :

$$\begin{aligned} [X^V, \gamma(F)] &= [X^i \frac{\partial}{\partial y^i}, y^j F^s_j \frac{\partial}{\partial y^s}] \\ &= X^i y^j F^s_j [\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^s}] + X^i \frac{\partial}{\partial y^i}(y^j F^s_j) \frac{\partial}{\partial y^s} - y^j F^s_j \frac{\partial}{\partial y^s}(X^i) \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= X^i F^s_i \frac{\partial}{\partial y^s} \\ &= \gamma_X(F). \end{aligned}$$

■

Remarques 1.1.2
1. $\mathcal{V}_{(x,u)} = \{X^V_{(x,u)}; X \in \Gamma(TM)\}$,
2. *Soient* $u \in T_xM$ *et* $X \in \Gamma(TM)$ *tel que* $X_x = u$, *on note :*

$$u^V = X^V_{(x,u)}$$

appelé relèvement vertical de u. *D'après la formule* (1.2) *cette définition est indépendante du choix de* X,
3. *L'application* $(x, u) \in TM \mapsto u^V \in T_{(x,u)}TM \subset TTM$ *est une section de classe* C^∞ *sur* TM, *donc un champ de vecteurs sur* TM,
4. *Soient* $x \in M$ *et* $v \in T_xM$, *alors L'application* $u \in T_xM \to u^V \in \mathcal{V}_{(x,v)}$ *est un isomorphisme linéaire.*

Définition 1.1.5
Soit F un champ de tenseurs de type $(1,1)$ sur la variété M, On définit le champ de vecteurs vertical VF de F sur TM par :

$$\begin{array}{rcl} VF : TM & \rightarrow & T(TM) \\ (x,u) & \mapsto & VF(x,u) = (F_x(u))^V, \end{array}$$

Localement, relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$, si $F = F_i^j \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes dx^i$ on a :

$$VF = y^i (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^V = y^i F_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Exemple 1.1.2
Dans la variété $\mathbb{R}^2$, $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. En considère un champ de tenseurs , $F = F_i^j \frac{\partial}{\partial x_j} \otimes dx^i$ de type $(1,1)$, suivent les cartes $(\mathbb{R}^2, x^1, x^2)$ et $(\mathbb{R}^4, x^1, x^2, y^1, y^2)$, on a

$$VF = y^i F_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} = (y^1 F_1^1 + y^2 F_2^1) \frac{\partial}{\partial y^1} + (y^1 F_1^2 + y^2 F_2^2) \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

1.1.2 Relèvement Complet

Définition 1.1.6
Soit f une fonction de M. On définit le Relèvement Complet de f noté f^C de M au fibré TM par :

$$\begin{array}{rcl} f^C : TM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d_x f(y). \end{array}$$

Relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM, on a :

$$f^C(x,y) = y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = (\partial f)(x).$$

Proposition 1.1.4
Soient $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ deux champs de vecteurs sur TM. Si pour tout fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\widetilde{X}(f^C) = \widetilde{Y}(f^C),$$

Alors $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$.

Propriétés 1.1.2
Soit $X \in \Gamma(TM)$ et $g, f \in C^\infty(M)$, on a :

$$X^V(f^C) = (X(f))^V, \tag{1.4}$$
$$(gf)^C = g^C f^V + g^V f^C, \tag{1.5}$$
$$(f+g)^C = f^C + g^C, \tag{1.6}$$
$$(\gamma F)(f^C) = \gamma(df \circ F). \tag{1.7}$$

Preuve.

1) *Les formules* (1.4), (1.5) *et* (1.6) *sont des conséquences directes de la formule* (1.2) *et la Définition* 1.1.6.

2) *Localement, si* $F = F_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\gamma(F)(f^C) &= y^i F_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}(y^s \frac{\partial f}{\partial x^s}) \\
&= y^i F_i^j \delta_j^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \\
&= y^i F_i^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \\
&= y^i (df \circ F)_i^s \\
&= \gamma(df \circ F).
\end{aligned}$$

■

Définition 1.1.7

Le relèvement Complet d'un champ de vecteurs X *sur* M *est l'unique champ de vecteurs* X^C*sur le fibré* TM *tel que :*

$$X^C f^C = (X(f))^C, \tag{1.8}$$

pour tout $f \in C^\infty(M)$.

Proposition 1.1.5

Si X *est un champ de vecteurs de composantes* X^h *par rapport à une carte* (U, x^h) *sur* M, *alors le relèvement complet* X^C *de* X *a pour composantes*

$$X^C : \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix},$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM, *où* $\partial X^h = y^i \frac{\partial X^h}{\partial x^i}$.

Preuve.

Si X^h désignent les composantes de X par rapport à une carte (U, x_i) sur M et $\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1^h \\ \widetilde{X}_2^k \end{pmatrix}$ les composantes de X^C par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM. De la formule (1.8) on a, pour toute $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
X^C(f^C) &= \widetilde{X}_1^j (\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}) y^i + \widetilde{X}_2^j \frac{\partial f}{\partial x^j}, \\
(X(f))^C &= y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) \\
&= (y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^j y^i (\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}),
\end{aligned}$$

d'où pour tout $j = \overline{1, m}$, on a : $\widetilde{X}_1^j = X^j$ et $\widetilde{X}_2^j = y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} = \partial X^j$.

On pose localement, pour tout $i = \overline{1, m}$

$$X^C = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial X^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

■

Remarque 1.1.2
Relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM, on a : pour tout $i = \overline{1, m}$:

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})^C = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Exemple 1.1.3
Dans la variété $\mathbb{R}^2$, $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. En considère le champ de vecteurs

$$\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T\mathbb{R}^2 \\ (x^1, x^2) & \longmapsto & (X^1_{(x^1,x^2)}, X^2_{(x^1,x^2)}) \end{array}$$

Dans les cartes $(\mathbb{R}^2, x^1, x^2)$ et $(\mathbb{R}^4, x^1, x^2, y^1, y^2)$, on a

$$\begin{aligned} X^C &= X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \partial X^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \partial X^2 \frac{\partial}{\partial y^2}, \\ &= X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + (y^1 \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + y^2 \frac{\partial X^1}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial y^1} + (y^1 \frac{\partial X^2}{\partial x^1} + y^2 \frac{\partial X^2}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.6
Soient $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma(T^*M)$, on a :

$$X^C + Y^C = (X+Y)^C, \tag{1.9}$$
$$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C, \tag{1.10}$$
$$X^C f^V = (X(f))^V. \tag{1.11}$$

Preuve.
1)Les formules (1.9) et (1.10) sont des conséquences directes des formules (1.8), (1.4) et (1.5).
2) Localement, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a :

$$\begin{aligned} X^C(f^V) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) + y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}(f) \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) \\ &= (X(f))^V. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.7
Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

1) $[X^V, Y^V] = 0$,
2) $[X^V, Y^C] = [X, Y]^V$,
3) $[X^C, Y^C] = [X, Y]^C$,
4) $[X^C, \gamma F] = \gamma(\mathcal{L}_X F)$.

Preuve.
Les formules 1) , 2) et 3) sont des conséquences directes des formules (1.3), (1.5) et (1.8).
4) En utilisant la formule (1.8), on a :

$$\begin{aligned}
[X^C, \gamma(F)] &= [X^s \frac{\partial}{\partial x^s} + y^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^s}, y^k F_k^j \frac{\partial}{\partial y^j}] \\
&= y^k X^s \frac{\partial F_k^j}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial y^j} + y^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \delta_s^k F_k^j \frac{\partial}{\partial y^j} - y^k F_k^j \delta_j^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^s} \\
&= y^k X^s \frac{\partial F_k^j}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial y^j} + y^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} F_s^j \frac{\partial}{\partial y^j} - y^k F_k^j \frac{\partial X^s}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^s} \\
&= y^i X^s \frac{\partial F_i^j}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial y^j} + y^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} F_s^j \frac{\partial}{\partial y^j} - y^i F_i^s \frac{\partial X^j}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial y^j} \\
&= y^i \big(X^s \frac{\partial F_i^j}{\partial x^s} + \frac{\partial X^s}{\partial x^i} F_s^j - \frac{\partial X^j}{\partial x^s} F_i^s \big) \frac{\partial}{\partial y^j} \\
&= \gamma(\mathcal{L}_X F).
\end{aligned}$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X F &= \big(\mathcal{L}_X F\big)_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i \\
&= \big(X^s \frac{\partial F_i^j}{\partial x^s} - F_i^s \frac{\partial X^j}{\partial x^s} + F_s^j \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \big) \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i.
\end{aligned}$$

■

1.1.3 Relèvement Horizontal

Dans cette section, on suppose que M est une variété de dimension m munie d'une connexion linéaire ∇.

Définition 1.1.8
On définit la connexion opposée à ∇ notée $\widehat{\nabla}$, par pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$:

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y].$$

Remarques 1.1.3

1. *Soient T et $\widehat{T}$ les tenseurs de torsion, R et $\widehat{R}$ les tenseurs de courbure associés à ∇ et $\widehat{\nabla}$ respectivement, alors on a : $\widehat{T} = T$,*
2. *Si ∇ est sans torsion, alors $\widehat{\nabla} = \nabla$ et $\widehat{R} = R$.*

Définition 1.1.9
Si f est une fonction sur M, on pose :

$$f^H = f^C - \gamma(\nabla f),$$

application de classe C^∞ sur TM dite relèvement horizontal de la fonction f.
De la $4^{\text{èmme}}$ propriété des Propriétés 1.1.1, on rappel que, pour tout $f \in C^{\infty(M)}$, on a :

$$\gamma(df) = \gamma(\nabla f) = f^C = \partial(f).$$

Alors :

$$f^H = 0.$$

Définition 1.1.10
Soit X un champ de vecteurs sur M. On définit Relèvement Horizontal de X noté X^H au fibré TM par :

$$X^H = X^C - \nabla_\gamma X,$$

où $\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X)$.

Si (X^h) désignent les coordonnées de $X \in \Gamma(TM)$ et Γ^h_{ji} les coefficients de Christoffel associés à la connexion ∇ relativement à la carte (U, x^h) sur M, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla X &= (\frac{\partial X^h}{\partial x^j} + X^i\Gamma^h_{ji})\frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^j,\\
\nabla_\gamma X &= (\frac{\partial X^h}{\partial x^j} + X^i\Gamma^h_{ji})y^j\frac{\partial}{\partial y^h},\\
X^C &= X^h\frac{\partial}{\partial x^h} + y^j\frac{\partial X^h}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^h},\\
X^H &= X^h\frac{\partial}{\partial x^h} - y^j\Gamma^h_{ji}X^i\frac{\partial}{\partial y^h}.
\end{aligned}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM, d'où

Proposition 1.1.8
Si X un champ de vecteurs sur TM de composantes (X^h) par rapport à une carte (U, x^h) sur M, alors le relèvement horizontal X^H a pour composantes

$$X^H : \begin{pmatrix} X^h \\ -y^j\Gamma^h_{ji}X^i \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM. De plus, on a : pour tout $h = \overline{1, m}$

$$(\frac{\partial}{\partial x^h})^H = \frac{\partial}{\partial x^h} - y^j\Gamma^h_{ji}\frac{\partial}{\partial y^h}.$$

Exemple 1.1.4
On considère sur $\mathbb{R}$ la métrique $g = e^x dx^2$.
Les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-cita associe à g sont

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}) = \frac{1}{2}$$

Soit le champ de vecteurs $X = f\dfrac{\partial}{\partial x^1}$, Dans les cartes $(\mathbb{R}, x)$ et $(\mathbb{R}^2, x, y)$, on a

$$X^H = f\frac{\partial}{\partial x} - yf\Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial y} = f(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y}).$$

Exemple 1.1.5
On considérons l'espace hyperbolique (H^2, g) *de courbure sectionnelle constante* $-c^2 < 0$

$$H^2 = \{z = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\},$$

$$h = \frac{1}{(cx_2)^2}((dx_1)^2 + (dx_2)^2).$$

Les symboles de Christoffel ne sont pas nuls de la connexion de Levi-cita associe à g *sont*

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{x_2} = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2$$

Soit le champ de vecteurs $X = X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, *Dans les cartes* (H^2, x_1, x_2) *et* $(TH^2, x_1, x_2, y_1, y_2)$, *on a*

$$X^H = X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2} + (X_1\frac{y_2}{x_2} + X_2\frac{y_1}{x_2})\frac{\partial}{\partial y_1} - (X_1\frac{y_1}{x_2} - X_2\frac{y_2}{x_2})\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Remarque 1.1.3
Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, *on a :* $d\pi \circ X^H = X \circ \pi$.

Définition 1.1.11
Soit $(x, v) \in TM$, *alors :*

$$\mathcal{H}_{(x,v)} = \{X^H_{(x,v)}, \quad X \in \Gamma(TM)\} \tag{1.13}$$

est un sous espace vectoriel de $T_{(x,v)}(TM)$ *appelé espace horizontal associé à* ∇.

$$\mathcal{H} = \bigcup_{(x,v)\in TM} \mathcal{H}_{(x,v)}$$

est un sous fibré vectoriel de $T(TM)$ *appelé fibré horizontal associé à* ∇.

Remarque 1.1.4
Des formules (1.12) et (1.13), localement pour tout $v \in TM$, *on obtient :*

$$\mathcal{H}_{(x,v)} = \{a^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_{(x,v)} - \Gamma^k_{ji}a^iy^j\frac{\partial}{\partial y^k}|_{(x,v)};\ a^1, \cdots, a^m \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 1.1.9

$$T(TM) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V},$$

$$T_{(x,w)}(TM) = \mathcal{H}_{(x,w)} \oplus \mathcal{V}_{(x,w)},$$

où $(x, w) \in TM$.

En effet : localement, si $w = w^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM$ *et* $\widetilde{X} = a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + b^i \dfrac{\partial}{\partial y^i} \in T_{(x,w)}(TM)$, *alors :*

$$\widetilde{X} = (a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - a^i w^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k}) + (b^k + a^i w^j \Gamma^k_{ij}) \frac{\partial}{\partial y^k} \in T_{(x,w)}(TM),$$

avec :
$\widetilde{X}^h = a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} - a^i w^j \Gamma^k_{ij} \dfrac{\partial}{\partial y^k} \in \mathcal{H}_{(x,w)}$ *est la partie horizontale de* $\widetilde{X}$,
$\widetilde{X}^v = (b^k + a^i w^j \Gamma^k_{ij}) \dfrac{\partial}{\partial y^k} \in \mathcal{V}_{(x,w)}$ *est la partie verticale de* $\widetilde{X}$.

Définition 1.1.12
Soit $w \in T_xM$, *le relèvement horizontal de* w *est défini par :*

$$w^H = X^H_{(x,w)},$$

où $X \in \Gamma(TM)$ *tel que* $X_x = w$. *De la formule (1.12) cette définition est indépendante du champ de vecteurs* X *choisi, d'où*

Proposition 1.1.10
Soit $v \in T_xM$,*l'application*

$$\begin{array}{rcl} T_xM & \rightarrow & \mathcal{H}_{(x,v)} \\ w & = & w^H \end{array}$$

est un isomorphisme linéaire.

Définition 1.1.13
Un champ de vecteurs $\widetilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ *est dit horizontal, si pour tout* $(x,v) \in TM$, *on a :*

$$\widetilde{X}_{(x,v)} \in \mathcal{H}_{(x,v)}.$$

Proposition 1.1.11
Un champ de vecteurs $\widetilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ *est horizontal, si seulement si localement, pour tout* $h = \overline{1,m}$, *on a :*

$$\widetilde{X}^h_2 + \Gamma^h_{ij} \widetilde{X}^j_1 y^i = 0,$$

où $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i_1 \frac{\partial}{\partial x^i} + \widetilde{X}^i_2 \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Preuve.
Soit $(x,v) \in TM$, *on a :*

$$\widetilde{X}_{(x,v)} = (\widetilde{X}^h_1 \frac{\partial}{\partial x^h}|_{(x,v)} - y^i \Gamma^h_{ij} \widetilde{X}^j_1 \frac{\partial}{\partial y^h}|_{(x,v)}) + (\widetilde{X}^h_2 + y^i \Gamma^h_{ij} \widetilde{X}^j_1) \frac{\partial}{\partial y^h}|_{(x,v)},$$

$\widetilde{X}$ *est horizontal* $\Leftrightarrow \widetilde{X}_{(x,v)} \in \mathcal{H}_{(x,v)} \Leftrightarrow \widetilde{X}^h_2 + \Gamma^h_{ij} \widetilde{X}^j_1 y^i = 0.$ ■

Lemme 1.1.1
Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, *on a :*

$$(\nabla Y) \circ (\nabla X) - (\nabla X) \circ (\nabla Y) = \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X - \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y - \mathcal{L}_Y(\nabla X) + \mathcal{L}_X(\nabla Y) - [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X].$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
(\nabla Y)\circ(\nabla X)Z =&(\nabla Y)\circ(\nabla_Z X)\\
=&(\nabla Y)(\widehat{\nabla}_X Z-[X,Z])\\
=&(\nabla Y)(\widehat{\nabla}_X Z)-(\nabla Y)(\mathcal{L}_X Z)\\
=&(\widehat{\nabla}_Y)(\widehat{\nabla}_X Z)-\mathcal{L}_Y(\widehat{\nabla}_X Z)-(\nabla Y)(\mathcal{L}_X Z)\\
=&(\widehat{\nabla}_Y)(\widehat{\nabla}_X Z)-(\mathcal{L}_Y)(\mathcal{L}_X)Z-(\mathcal{L}_Y)(\nabla X)Z-(\nabla Y)(\mathcal{L}_X Z),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{(\nabla Y)\circ(\nabla X)-(\nabla X)\circ(\nabla Y)\}Z =&\{\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X Z-\widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z\}-\{(\mathcal{L}_Y)(\mathcal{L}_X)Z-(\mathcal{L}_X)(\mathcal{L}_Y)Z\}\\
&-\{(\mathcal{L}_Y)(\nabla X)Z-(\nabla X)(\mathcal{L}_Y Z)\}\\
&+\{(\mathcal{L}_X)(\nabla Y)Z-(\nabla Y)(\mathcal{L}_X Z)\}\\
=&\{\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X-\widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y\}Z-[\mathcal{L}_Y,\mathcal{L}_X]Z\\
&-\mathcal{L}_Y(\nabla X)Z+\mathcal{L}_X(\nabla Y)Z\\
=&\{\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X-\widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y-\mathcal{L}_Y(\nabla X)+\mathcal{L}_X(\nabla Y)-[\mathcal{L}_Y,\mathcal{L}_X]\}Z.
\end{aligned}
$$

■

Proposition 1.1.12
Pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$ et $f\in C^\infty(M)$, on a :

$$(X+Y)^H=(X)^H+(Y)^H, \tag{1.14}$$
$$(fX)^H=(f)^V X^H, \tag{1.15}$$
$$X^H(f^V)=(X(f))^V, \tag{1.16}$$
$$[X^V,Y^H]=[X,Y]^V-\gamma_X(\nabla Y), \tag{1.17}$$
$$[X^H,Y^H]=[X,Y]^H-\gamma\widehat{R}(X,Y), \tag{1.18}$$

où $\widehat{R}$ est le tenseur de courbure associé à $\widehat{\nabla}$.

Preuve.
1) Les formules (1.14), (1.15) sont des conséquences directes de la formule (1.12).

$$
\begin{aligned}
X^H(f^V) &= (X^C-\nabla_\gamma X)(f^V)\\
&= X^C(f^V)-\nabla_\gamma X(f^V)\\
&= X^C(f^V) \qquad \textit{puisque } \nabla_\gamma X \textit{ est un champ de vecteurs vertical}\\
&= (X(f))^V,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[X^V,Y^H] &= [X^V,Y^C-\gamma(\nabla Y)]\\
&= [X^V,Y^C]-[X^V,\gamma(\nabla Y)]\\
&= [X^V,Y^C]-\gamma_X(\nabla Y),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
[X^H, Y^H] &= [X^C - \gamma(\nabla X), Y^C - \gamma(\nabla Y)] \\
&= [X^C, Y^C] - [X^C, \gamma(\nabla Y)] - [\gamma(\nabla X), Y^C] + [\gamma(\nabla X), \gamma(\nabla Y)] \\
&= [X, Y]^H + \gamma(\nabla[X, Y]) - \gamma(\mathcal{L}_X(\nabla Y)) + \gamma(\mathcal{L}_Y(\nabla X)) \\
&\quad + \gamma((\nabla Y) \circ (\nabla X) - (\nabla X) \circ (\nabla Y)) \\
&= [X, Y]^H + \gamma(\widehat{\nabla}_{[X,Y]} - \mathcal{L}_{[X,Y]}) + \gamma(\mathcal{L}_Y(\nabla X) - \mathcal{L}_X(\nabla Y)) \\
&\quad + \gamma((\nabla Y) \circ (\nabla X) - (\nabla X) \circ (\nabla Y)),
\end{aligned}$$

Du Lemme 1.1.1 on obtient :

$$\begin{aligned}
[X^H, Y^H] &= [X, Y]^H + \gamma(\widehat{\nabla}_{[X,Y]} - \mathcal{L}_{[X,Y]}) + \gamma(\mathcal{L}_Y(\nabla X) - \mathcal{L}_X(\nabla Y)) \\
&\quad + \gamma(\widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X - \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y - \mathcal{L}_Y(\nabla X) + \mathcal{L}_X(\nabla Y) - [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X]) \\
&= [X, Y]^H - \gamma(\widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X - \widehat{\nabla}_{[X,Y]}) - \gamma(\mathcal{L}_{[X,Y]} + [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X]) \\
&= [X, Y]^H - \gamma \widehat{R}(X, Y), \quad \text{où } \mathcal{L}_{[X,Y]} + [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X] = 0.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.1.5
Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$: $\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$.

1) $\gamma_X(\nabla Y) = (\nabla_X Y)^V$

2) *Si* ∇ *est sans torsion i.e* $\widehat{\nabla} = \nabla$ *et* $\widehat{R} = R$, *alors* $\gamma \widehat{R}(X, Y) = (R(X, Y)u)^V$.
En effet, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $u = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$
1) *On a :*

$$\nabla Y = (\frac{\partial Y^h}{\partial x^j} + Y^i \Gamma^h_{ji}) \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^j$$

alors

$$\begin{aligned}
\gamma_X(\nabla Y) &= X^j (\frac{\partial Y^h}{\partial x^j} + Y^i \Gamma^h_{ji}) \frac{\partial}{\partial y^h} \\
&= X^j (\frac{\partial Y^h}{\partial x^j} + Y^i \Gamma^h_{ji}) (\frac{\partial}{\partial x^h})^V \\
&= (X^j (\frac{\partial Y^h}{\partial x^j} + Y^i \Gamma^h_{ji}) \frac{\partial}{\partial x^h})^V \\
&= (\nabla_X Y)^V.
\end{aligned}$$

2) *On a :*

$$\widehat{R}(X, Y) = R(X, Y) = X^i Y^j R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^k$$

alors

$$\begin{aligned}
\gamma(\widehat{R}(X,Y)) &= y^k X^i Y^j R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial y^l} \\
&= y^k X^i Y^j R^l_{ijk} (\frac{\partial}{\partial x^l})^V \\
&= y^k X^i Y^j (R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l})^V \\
&= y^k X^i Y^j (R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^k})^V \\
&= (R(X,Y)u)^V.
\end{aligned}$$

Définition 1.1.14
Soit F un champ de tenseurs de type $(1,1)$ sur la variété M, On définit le champ de vecteurs horizontal HF de F sur TM par :

$$\begin{aligned}
HF : TM &\rightarrow TTM \\
(x,u) &\mapsto HF(x,u) = (F_x(u))^H,
\end{aligned}$$

est un champ de vecteurs sur TM. Localement, relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$, si $F = F^h_i \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i$ on a :

$$HF = y^i (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H = y^i F^h_i \frac{\partial}{\partial x^h} - y^i y^j F^l_i \Gamma^k_{jl} \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

1.2 Métrique Naturelle

1.2.1 Métrique Naturelle

Définition 1.2.1
Soit (M,g) une variété Riemannienne . Une métrique Riemannienne $\bar{g}$ sur le fibré tangent TM de M est dite naturelle par rapport à g si :

$$\begin{aligned}
\bar{g}(X^H, Y^H) &= g(X,Y) \circ \pi, \\
\bar{g}(X^H, Y^V) &= 0,
\end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Remarque 1.2.1
De la Définition 1.2.1, on déduit que pour tout champ de vecteurs vertical $\widetilde{Y} \in \Gamma(T(TM))$ et $X \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\bar{g}(X^H, \widetilde{Y}) = 0,$$

où $\bar{g}$ est une métrique naturelle sur le fibré tangent TM.

Proposition 1.2.1
Soit (M,g) une variété Riemannienne de connexion de Levi-Civita ∇. Si $\bar{g}$ est une métrique naturelle sur TM de connexion de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, alors :

$$\begin{aligned}
1)\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^H) &= \bar{g}_{(x,u)}((\nabla_X Y)^H, Z^H),\\
2)\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^V) &= -\frac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(X,Y)u\}^V, Z^V),\\
3)\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^H) &= -\frac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(Z,X)u\}^V, Y^V),\\
4)\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2}\big(X^H(\bar{g}(Y^V,Z^V) + \bar{g}(Z^V,(\nabla_X Y)^V) - \bar{g}(Y^V,(\nabla_X Z)^V)\big)_{(x,u)},\\
5)\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^V}Y^H, Z^H) &= \frac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(Y,Z)u\}^V, X^V),\\
6)\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^V}Y^H, Z^V) &= \frac{1}{2}\big(Y^H(\bar{g}(Z^V,X^V) - \bar{g}(Z^V,(\nabla_Y X)^V) - \bar{g}(X^V,(\nabla_Y Z)^V)\big)_{(x,u)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7)\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^V}Y^V, Z^H) &= \frac{1}{2}\big(-Z^H(\bar{g}(X^V,Y^V)) + \bar{g}(Y^V,(\nabla_Z X)^V) + \bar{g}(X^V,(\nabla_Z Y)^V)\big)_{(x,u)},\\
8)\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^V}Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2}\big(X^V(\bar{g}(Y^V,Z^V) + Y^V(\bar{g}(Z^V,X^V) - Z^V(\bar{g}(X^V,Y^V))\big)_{(x,u)},
\end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ et $(x,u) \in TM$, où R désigne le tenseur de courbure de (M,g).

Preuve.
la preuve découle immédiatement de la formule de Kozul.

$$\begin{aligned}
1)\ 2\bar{g}(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^H) =& X^H\bar{g}(Y^H,Z^H) + Y^H\bar{g}(Z^H,X^H) - Z^H\bar{g}(X^H,Y^H)\\
&+ \bar{g}(Z^H,[X^H,Y^H]) + \bar{g}(Y^H,[Z^H,X^H]) - \bar{g}(X^H,[Y^H,Z^H])\\
=& X^H(g(Y,Z)^V) + Y^H(g(Z,X)^V) - Z^H(g(X,Y)^V) + \bar{g}(Z^H,[X,Y]^H)\\
&+ \bar{g}(Y^H,[Z,X]^H) - \bar{g}(X^H,[Y,Z]^H)\\
=& \{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y])\\
&+ g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])\}^V\\
=& 2g(\nabla_X Y.Z)^V\\
=& 2\bar{g}((\nabla_X Y)^H, Z^H).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\ 2\bar{g}(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^V) =& X^H\bar{g}(Y^H,Z^V) + Y^H\bar{g}(Z^V,X^H) - Z^V\bar{g}(X^H,Y^H)\\
&+ \bar{g}(Z^V,[X^H,Y^H]) + \bar{g}(Y^H,[Z^V,X^H]) - \bar{g}(X^H,[Y^H,Z^V])\\
=& -Z^V(g(X,Y)^V) + \bar{g}(Z^V,[X,Y]^H) - \bar{g}(Z^V,\gamma(\widehat{R}(X,Y)))\\
&+ \bar{g}(Y^H,[Z,X]^V - (\nabla_Z X)^V) - \bar{g}(X^H, -[Z,Y]^V + (\nabla_Z Y)^V)\\
=& -\bar{g}(Z^V,\gamma(\widehat{R}(X,Y))).
\end{aligned}$$

D'après la Remarque 1.1.5, la connexion ∇ *est symétrique alors* $\gamma(\widehat{R}(X,Y)) = (R(X,Y)u)^V$. *On déduit :*

$$2\bar{g}(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^V) = -\,\bar{g}((R(X,Y)u)^V, Z^V)$$

Les autres égalités se démontrent de la même façon voir [23]. ∎

1.2.2 Métrique de Sasaki

Définition 1.2.2
Soit (M,g) *une variété Riemannienne. La métrique de Sasaki associée à* g *est l'unique métrique naturelle notée* g^S *sur le fibré tangent* TM *telle que, pour tous* $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\begin{array}{rcl} 1)\ g^S(X^H,Y^H) &=& g(X,Y)\circ\pi, \\ 2)\ g^S(X^H,Y^V) &=& 0, \\ 3)\ g^S(X^V,Y^V) &=& g(X,Y)\circ\pi. \end{array}$$

Connexion de Levi-Civita

De la Proposition 1.2.1 et la Définition 1.2.2, on obtient :

Proposition 1.2.2
Soit (M,g) *une variété Riemannienne et* g^S *la métrique de Sasaki associée à* g *sur* TM. *Si* ∇ *(resp.*$\widehat{\nabla}$*) désigne la connexion de Levi-Civita sur* (M,g) *(resp. sur* (TM,g^S)*) alors on a :*

$$\begin{array}{rcl} 1)g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^H,Z^H) &=& g^S_{(x,u)}((\nabla_X Y)^H,Z^H), \\ 2)g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^H,Z^V) &=& -\dfrac{1}{2}g^S_{(x,u)}(\{R(X,Y)u\}^V,Z^V), \\ 3)g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^V,Z^H) &=& \dfrac{1}{2}g^S_{(x,u)}(\{R(u,Y)X\}^V,Z^H), \\ 4)g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^V,Z^V) &=& g^S_{(x,u)}((\nabla_X Y)^V,Z^V), \\ 5)g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^H,Z^H) &=& \dfrac{1}{2}g^S_{(x,u)}(\{R(u,X)Y\}^H,Z^H), \\ 6)g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^H,Z^V) &=& 0, \\ 7)g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^V,Z^H) &=& 0, \\ 8)g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^V,Z^V) &=& 0, \end{array}$$

pour tous champs de vecteurs $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ *et* $(x,u) \in TM$, *où* R *désigne le tenseur de courbure de* (M,g).

Proposition 1.2.3
Soit (M,g) *une variété Riemannienne et* g^S *la métrique de Sasaki associée à* g *sur* TM. *Si*

∇ *(resp.*$\widehat{\nabla}$*) désigne la connexion de Levi-Civita sur* (M, g) *(resp. sur* (TM, g^S)*) alors on a :*

$$\begin{aligned}
1)\ (\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H)_{(x,u)} &= (\nabla_X Y)^H_{(x,u)} - \frac{1}{2}(R_x(X,Y)u)^V,\\
2)\ (\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V)_{(x,u)} &= (\nabla_X Y)^V_{(x,u)} + \frac{1}{2}(R_x(u,Y)X)^H,\\
3)\ (\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H)_{(x,u)} &= \frac{1}{2}(R_x(u,X)Y)^H,\\
4)\ (\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V)_{(x,u)} &= 0,
\end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $(x,u) \in TM$*, où* R *désigne le tenseur de courbure de* (M, g)*.*

Preuve.
La preuve découle immédiatement de la Proposition 1.2.2. ■

Proposition 1.2.4
Soit (M, g) *une variété Riemannienne. Si* $\widehat{\nabla}$ *désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique de Sasaki* g^S*, associée à* g*. Si* F *est un champ de tenseurs de type* $(1,1)$ *sur* M*, alors :*

$$\begin{aligned}
1)\ (\widehat{\nabla}_{X^V} VF)_{(x,u)} &= (F(X))^V_{(x,u)},\\
2)\ (\widehat{\nabla}_{X^V} HF)_{(x,u)} &= (F(X))^H_{(x,u)} + \frac{1}{2}(R_x(u,X_x)F_x(u))^H,\\
\\
3)\ (\widehat{\nabla}_{X^H} HK)_{(x,u)} &= H(XF)_{(x,u)} - \frac{1}{2}(R_x(X_x,F_x(u))u)^V,\\
4)\ (\widehat{\nabla}_{X^H} VK)_{(x,u)} &= V(\nabla_X F)_{(x,u)} + \frac{1}{2}(R_x(u,F_x(u))X_x)^H,
\end{aligned}$$

où $(x,u) \in TM$ *et* $X \in \Gamma(TM)$*.*

Preuve.
Soit $(x,u) \in TM$*,* $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $U = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *est un champ de vecteurs constant. De la Proposition 1.2.3, localement, on a :*

$$\begin{aligned}
1)\ (\widehat{\nabla}_{X^V} VF)_{(x,u)} &= (\widehat{\nabla}_{X^V} y^i (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^V)_{(x,u)}\\
&= (X^V(y^i)(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^V)_{(x,u)}\\
&= (X^i(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^V)_{(x,u)}\\
&= (F(X))^V_{(x,u)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\ (\widehat{\nabla}_{X^V} HF)_{(x,u)} &= (\widehat{\nabla}_{X^V} y^i (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H)_{(x,u)}\\
&= (X^V(y^i)(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H)_{(x,u)} + (y^i \widehat{\nabla}_{X^V}(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H)_{(x,u)}\\
&= (X^i(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H)_{(x,u)} + u^i \frac{1}{2}(R_x(u,X_x)F_x(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H\\
&= (F(X))^H_{(x,u)} + \frac{1}{2}(R_x(u,X_x)F_x(u))^H.
\end{aligned}$$

Les autres égalités se démontrent de la même façon. ■

1.2.3 Métrique de Cheeger-Gromoll

Définition 1.2.3
Soit (M, g) une variété Riemannienne. La métrique de Cheeger-Gromoll $\widehat{g}$ est une métrique naturelle définie sur le fibré tangent TM par :

$$\begin{array}{rcl} 1)\ \widehat{g}_p(X^H, Y^H) &=& g_x(X, Y), \\ 2)\ \widehat{g}_p(X^H, Y^V) &=& 0, \\ 3)\ \widehat{g}_p(X^V, Y^V) &=& \dfrac{1}{1+r^2}\big(g_x(X, Y) + g_x(X, u)g_x(Y, u)\big), \end{array}$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, $p = (x, u) \in TM$ et $r = \|u\| = \sqrt{g(u, u)}$. Par la suite, on pose $\alpha = 1 + r^2$.

Lemme 1.2.1
Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.
Pour tous $X \in \Gamma(TM)$, $p = (x, u) \in TM$ et $r^2 = g(u, u)$, on a :

1. $X_p^H(f(r^2)) = 0$,
2. $X_p^V(f(r^2)) = 2f'(r^2)g_x(X, u)$.

Preuve.
Localement, si $U : x \in M \to U_x = u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in TM$ est un champ de vecteurs constant sur chaque fibre T_xM, alors d'après les formules (1.2) et (1.12) on obtient :

$$\begin{array}{rcl} 1.\ X_p^H(f(r^2)) &=& \big[X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}(f(r^2)) - \Gamma_{ij}^k X^i y^j \dfrac{\partial}{\partial y^k}(f(r^2))\big]_p \\ &=& \big[X^i f'(r^2) \dfrac{\partial}{\partial x^i}(r^2) - f'(r^2)\Gamma_{ij}^k X^i y^j \dfrac{\partial}{\partial y^k}(r^2)\big]_p \\ &=& f'(r^2)\big[X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}(g_{st}y^s y^t) - \Gamma_{ij}^k X^i y^j \dfrac{\partial}{\partial y^k}(g_{st}y^s y^t)\big]_p \\ &=& f'(r^2)\big[Xg(U, U)_x - 2(\Gamma_{ij}^k X^i y^j g_{sk} y^s)_p\big] \\ &=& f'(r^2)[Xg(U, U)_x - 2g(U, \nabla_X U)_x] \\ &=& 0. \\ 2.\ X_p^V(f(r^2)) &=& [X^i f'(r^2) \dfrac{\partial}{\partial y^i}(g_{st}y^s y^t)]_p \\ &=& 2f'(r^2)X^i g_{it} u^t \\ &=& 2f'(r^2)g(X, u)_x. \end{array}$$

■

Lemme 1.2.2
Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, $p = (x, u) \in TM$, on a :

1. $X_p^H(g(u, u)) = 0$,

2. $X_p^V(g(u,u)) = 2g_x(X,u)$,

3. $X_p^H(g(Y,u)) = g_x(\nabla_X Y, u)$,

4. $X_p^V(g(Y,u)) = g_x(X,Y)$.

Preuve.

Les propriétés 1. *et* 2. *sont des conséquences directes du Lemme* 1.2.1.

$$\begin{aligned}
3.\ X_p^H(g(Y,u)) &= \big[X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{st}Y^s y^t) - \Gamma_{ij}^k X^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}(g_{st}Y^s y^t)\big]_p \\
&= Xg(Y,U)_x - (\Gamma_{ij}^k X^i y^j g_{sk} Y^s)_p \\
&= Xg(Y,U)_x - g(Y, \nabla_X U)_x \\
&= g(\nabla_X Y, U)_x. \\
4.\ X_p^V(g(Y,u)) &= [X^i \frac{\partial}{\partial y^i}(g_{st}Y^s y^t)]_p \\
&= X^i g_{si} Y^s \\
&= g(X,Y)_x.
\end{aligned}$$

■

Connexion de Levi-Civita

Proposition 1.2.5

Soit (M,g) une variété Riemannienne et $\widehat{g}$ la métrique de Cheeger-Gromoll associée à g sur TM. Si ∇ (resp.$\widehat{\nabla}$) désigne la connexion de Levi-Civita associée à (M,g) (resp. $(TM,\widehat{g})$) alors on a :

$$\begin{aligned}
1)\ (\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H)_p &= (\nabla_X Y)_p^H - \frac{1}{2}(R_x(X,Y)u)^V, \\
2)\ (\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V)_p &= (\nabla_X Y)_p^V + \frac{1}{2\alpha}(R_x(u,Y)X)^H, \\
3)\ (\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H)_p &= \frac{1}{2\alpha}(R_x(u,X)Y)^H, \\
4)\ (\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V)_p &= -\frac{1}{\alpha}\Big(\widehat{g}_p(X^V,U^V)Y_p^V + \widehat{g}_p(Y^V,U^V)X_p^V\Big) \\
&\quad + \frac{1+\alpha}{\alpha}\widehat{g}_p(X^V,Y^V)U_p^V - \frac{1}{\alpha}\widehat{g}_p(X^V,U^V)\widehat{g}_p(Y^V,U^V)U_p^V,
\end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs $X,Y \in \Gamma(TM)$ et $p=(x,u) \in TM$, où R désigne le tenseur de courbure de (M,g).

Preuve.

De la Proposition 1.2.1 et les Lemmes 1.2.1 et 1.2.2, on a :

1) $\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^H) = \widehat{g}((\nabla_X Y)^H, Z^H).$

2) $\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^V) = -\frac{1}{2}\widehat{g}((R(X,Y)u)^V, Z^V).$

3)
$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^H) &= -\frac{1}{2}\widehat{g}_{(x,u)}((R(Z,X)u)^V, Y^V)\\
&= -\frac{1}{2\alpha}\big(g(R(Z,X)u, Y) + g(R(Z,X)u,u)g(Y,u)\big)\\
&= \frac{1}{2\alpha}g(R(u,Y)X, Z)\\
&= \frac{1}{2\alpha}\widehat{g}((R(u,Y)X)^H, Z^H).
\end{aligned}$$

4) $\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^V) = \frac{1}{2}\big(X^H(\widehat{g}(Y^V,Z^V) + \widehat{g}(Z^V,(\nabla_X Y)^V) - \widehat{g}(Y^V,(\nabla_X Z)^V)\big).$

Des Lemmes 1.2.1 et 1.2.2, on a : $X^H(\frac{1}{\alpha}) = 0$, *ainsi*

$$X^H(\widehat{g}(Y^V,Z^V)) = \widehat{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V) + \widehat{g}(Y^V,(\nabla_X Z)^V),$$

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^V) =& \frac{1}{2}\big(\widehat{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V) + \widehat{g}(Y^V,(\nabla_X Z)^V) + \widehat{g}(Z^V,(\nabla_X Y)^V)\\
&- \widehat{g}(Y^V,(\nabla_X Z)^V)\big)\\
=& \widehat{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V).
\end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^H, Z^H) &= \frac{1}{2}\widehat{g}((R(Y,Z)u)^V, X^V)\\
&= \frac{1}{2\alpha}g(R(Y,Z)u, X)\\
&= \frac{1}{2\alpha}\widehat{g}((R(u,X)Y)^H, Z^H).
\end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^H, Z^V) &= \frac{1}{2}\big(Y^H(\widehat{g}(Z^V,X^V) - \widehat{g}(Z^V,(\nabla_Y X)^V) - \widehat{g}(X^V,(\nabla_Y Z)^V)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\widehat{g}(Z^V,(\nabla_Y X)^V) + \widehat{g}(X^V,(\nabla_Y Z)^V) - \widehat{g}(Z^V,(\nabla_Y X)^V)\\
&\quad - \widehat{g}(X^V,(\nabla_Y Z)^V)\big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

7)
$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^V, Z^H) &= \frac{1}{2}\big(-Z^H(\widehat{g}(X^V,Y^V)) + \widehat{g}(Y^V,(\nabla_Z X)^V) + \widehat{g}(X^V,(\nabla_Z Y)^V)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(-\widehat{g}(X^V,(\nabla_Z Y)^V) - \widehat{g}(Y^V,(\nabla_Z X)^V) + \widehat{g}(Y^V,(\nabla_Z X)^V)\\
&\quad + \widehat{g}(X^V,(\nabla_Z Y)^V)\big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

8) $\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^V,Z^V) = \frac{1}{2}\big(X^V(\widehat{g}(Y^V,Z^V)+Y^V(\widehat{g}(Z^V,X^V)-Z^V(\widehat{g}(X^V,Y^V))\big)$,

Des Lemmes 1.2.1 et 1.2.2, on a : $X^V(\frac{1}{\alpha}) = -\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)$, *ainsi*

$$X^V(\widehat{g}(Y^V,Z^V)) = -\frac{2}{\alpha}g(X,u)\widehat{g}(Y^V,Z^V)+\frac{1}{\alpha}\big(g(X,Y)g(Z,u)+g(X,Z)g(Y,u)\big),$$

De la Définition 1.2.3, on a pour tout $X \in \Gamma(TM)$

$$\widehat{g}(X^V,U^V) = \frac{1}{\alpha}\big(g(X,U)+g(X,u)g(U,u)\big) = g(X,u),$$

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^V,Z^V) =& -\frac{1}{\alpha}g(X,u)\widehat{g}(Y^V,Z^V)+\frac{1}{2\alpha}\big(g(X,Y)g(Z,u)+g(X,Z)g(Y,u)\big)\\
& -\frac{1}{\alpha}g(Y,u)\widehat{g}(X^V,Z^V)+\frac{1}{2\alpha}\big(g(X,Y)g(Z,u)+g(Y,Z)g(X,u)\big)\\
& +\frac{1}{\alpha}g(Z,u)\widehat{g}(X^V,Y^V)-\frac{1}{2\alpha}\big(g(Y,Z)g(X,u)+g(X,Z)g(Y,u)\big)\\
=& -\frac{1}{\alpha}g(X,u)\widehat{g}(Y^V,Z^V)-\frac{1}{\alpha}g(Y,u)\widehat{g}(X^V,Z^V)\\
& +\frac{1}{\alpha}g(Z,u)\widehat{g}(X^V,Y^V)+\frac{1}{\alpha}g(Z,u)g(X,Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V}Y^V,Z^V) =& -\frac{1}{\alpha}\widehat{g}(X^V,U^V)\widehat{g}(Y^V,Z^V)-\frac{1}{\alpha}\widehat{g}(Y^V,U^V)\widehat{g}(X^V,Z^V)\\
& +\frac{1}{\alpha}\widehat{g}(Z^V,U^V)\widehat{g}(X^V,Y^V)+\widehat{g}(Z^V,U^V)\widehat{g}(X^V,Y^V)\\
& -\frac{1}{\alpha}\widehat{g}(X^V,U^V)\widehat{g}(Y^V,U^V)\widehat{g}(Z^V,U^V)\\
=& \widehat{g}\Big(-\frac{1}{\alpha}\big(\widehat{g}(X^V,U^V)Y^V+\widehat{g}(Y^V,U^V)X^V\big)\\
& +\frac{1+\alpha}{\alpha}\widehat{g}(X^V,Y^V)U^V-\frac{1}{\alpha}\widehat{g}(X^V,U^V)\widehat{g}(Y^V,U^V)U^V,Z^V\Big).
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.2.3
Soit (M,g) une variété Riemannienne. Si ∇ (resp. $\widehat{\nabla}$) désigne la connexion de Levi-Civita associée à (M,g) (resp. $(TM,\widehat{g})$), alors :

1) $\widehat{\nabla}_{X^H}U^V = 0$,

2) $\widehat{\nabla}_{X^V}U^V = \frac{1}{\alpha}[X^V+g(X,u)U^V]$,

pour tous $X,U \in \Gamma(TM)$ et $U_x = u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM$ et $p=(x,u) \in TM$.

Preuve.

$$
\begin{aligned}
1)\ \widehat{\nabla}_{X^H}U^V =& \widehat{\nabla}_{X^H}(y^k(\frac{\partial}{\partial x^k})^V)\\
=& X^H(y^k)(\frac{\partial}{\partial x^k})^V + y^k\widehat{\nabla}_{X^H}(\frac{\partial}{\partial_{x^k}})^V\\
=& -X^iy^j\Gamma_{ij}^k(\frac{\partial}{\partial x^k})^V + y^k\big[\frac{1}{2\alpha}(R(u,\frac{\partial}{\partial x^k})X)^H + (\nabla_X(\frac{\partial}{\partial_{x^k}}))^V\big]\\
=& -(\nabla_X U)^V + \frac{1}{2\alpha}(R(u,u)X)^H + (\nabla_X U)^V\\
=& 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ \widehat{\nabla}_{X^V}U^V =& \widehat{\nabla}_{X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}(y^k(\frac{\partial}{\partial x^k})^V)\\
=& X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^V(y^k)(\frac{\partial}{\partial x^k})^V + y^kX^i\widehat{\nabla}_{(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}(\frac{\partial}{\partial_{x^k}})^V\\
=& X^i\frac{\partial}{\partial y^i}(y^k)(\frac{\partial}{\partial x^k})^V\\
&+ y^kX^i\Big[-\frac{1}{\alpha}\big[\widehat{g}((\frac{\partial}{\partial_{x^i}})^V,U^V)(\frac{\partial}{\partial_{x^k}})^V + \widehat{g}((\frac{\partial}{\partial_{x^k}})^V,U^V)(\frac{\partial}{\partial_{x^i}})^V\big]\\
&+ \frac{1+\alpha}{\alpha}\widehat{g}((\frac{\partial}{\partial_{x^i}})^V,(\frac{\partial}{\partial_{x^k}})^V)U^V - \frac{1}{\alpha}\widehat{g}((\frac{\partial}{\partial_{x^i}})^V,U^V)\widehat{g}((\frac{\partial}{\partial_{x^k}})^V,U^V)U^V\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X^V}U^V =& X^V - \frac{1}{\alpha}\big[g(X,u)U^V + (\alpha-1)X^V\big]\\
&+ \frac{1+\alpha}{\alpha}g(X,u)U^V - \frac{\alpha-1}{\alpha}g(X,u)U^V\\
=& \frac{1}{\alpha}[X^V + g(X,u)U^V].
\end{aligned}
$$

■

Remarque 1.2.2
1) $[X^H, U^V] = 0$,
2) $[X^V, U^V] = X^V$,
où $X, U \in \Gamma(TM)$ *et* $U_x = u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM$ *et* $(x,u) \in TM$.

Proposition 1.2.6
Soit (M, g) *une variété Riemannienne. Si* $\widehat{\nabla}$ *désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique de Cheeger-Gromoll* $\widehat{g}$*, associée à* g*. Si* K *est un champ de tenseurs de type* $(1,1)$

sur M, alors :

$$
\begin{aligned}
1)\ (\widehat{\nabla}_{X^H}HK)_p =& H(\nabla_X K)_p - \frac{1}{2}\big(R(X,K(u))u\big)^V_p,\\
2)\ (\widehat{\nabla}_{X^H}VK)_p =& V(\nabla_X K)_P + \frac{1}{2\alpha}(R(u,K(u))X)^H_p,\\
3)\ (\widehat{\nabla}_{X^V}HK)_p =& (K(X))^H_p + \frac{1}{2\alpha}\big(R(u,X)K(u)\big)^H_p,\\
4)\ (\widehat{\nabla}_{X^V}VK)_p =& (K(X))^V_p - \frac{1}{\alpha}\Big(\widehat{g}_p(X^V,U^V)(VK)_p + \widehat{g}_p(VK,U^V)X^V_p\Big)\\
&+ \frac{1+\alpha}{\alpha}\widehat{g}_p(X^V,VK)U^V_p - \frac{1}{\alpha}\widehat{g}_p(X^V,U^V)\widehat{g}_p(VK,U^V)U^V_p,
\end{aligned}
$$

pour tous $p=(x,u)\in TM$ et $X,U\in\Gamma(TM)$ et $U_x=u\in T_xM$.

Preuve.
Soit $p=(x,u)\in TM$, $u=u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $U=u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ est un champ de vecteurs constant. De la Définition 1.2.3 et la Proposition 1.2.5, on a :

$$
\begin{aligned}
1)\ (\widehat{\nabla}_{X^H}HK)_p =& \Big[\widehat{\nabla}_{X^H}y^k(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H\Big]_p\\
=& \Big[X^H(y^k)(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H + y^k\widehat{\nabla}_{X^H}K(\frac{\partial}{\partial_k})^H\Big]_p\\
=& -X^iu^j\Gamma^k_{ij}(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H_p + u^k(\nabla_X K(\frac{\partial}{\partial_k}))^H_p - u^k\frac{1}{2}\big(R(X,K(\frac{\partial}{\partial x^k}))u\big)^V_p\\
=& -(K(\nabla_X U))^H_p + (\nabla_X K(U))^H_p - \frac{1}{2}\big(R(X,K(u))u\big)^V_p\\
=& ((\nabla_X K)(U))^H_p - \frac{1}{2}\big(R(X,K(u))u\big)^V_p\\
=& (H(\nabla_X K))_p - \frac{1}{2}\big(R(X,K(u))u\big)^V_p.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ (\widehat{\nabla}_{X^H}VK)_p =& \Big[\widehat{\nabla}_{X^H}y^k(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V\Big]_p\\
=& \Big[X^H(y^k)(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V + y^k\widehat{\nabla}_{X^H}K(\frac{\partial}{\partial_k})^V\Big]_p\\
=& -X^iu^j\Gamma^k_{ij}(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V_p + \frac{u^k}{2\alpha}(R(u,K(\frac{\partial}{\partial x^k}))X)^H_p + u^k(\nabla_X K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V_p\\
=& -(K(\nabla_X U))^V_p + \frac{1}{2\alpha}(R(u,K(u))X)^H_p + (\nabla_X K(U))^V_p\\
=& ((\nabla_X K)(U))^V_p + \frac{1}{2\alpha}(R(u,K(u))X)^H_p\\
=& V(\nabla_X K)_P + \frac{1}{2\alpha}(R(u,K(u))X)^H_p.
\end{aligned}
$$

Les autres égalités se démontrent de la même façon. ∎

Chapitre 2

Métrique de Mus-Sasaki

Sommaire

Dans ce chapitre, on étudie la géoémtrie de la métrique de Mus-Sasaki et on donne une carctérisation des sections harmoniques relativement à la métrique Mus-Sasaki.[33]

2.1 Métrique de Mus-Sasaki

Définition 2.1.1
Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f : M \times \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ de classe C^∞. Sur le fibré tangent TM, on définit la métrique de Mus-Sasaki notée g_f^S par :

1. $g_f^S(X^H, Y^H)_{(x,u)} = g_x(X, Y)$,
2. $g_f^S(X^H, Y^V)_{(x,u)} = 0$,
3. $g_f^S(X^V, Y^V)_{(x,u)} = f(x, r)g_x(X, Y)$,

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, $(x, u) \in TM$ et $r = g(u, u)$. f est dite fonction de torsion.
Notons que si $f = 1$ alors g_f^S est la métrique de Sasaki, [45].

Lemme 2.1.1
Soient (M, g) une variété Riemannienne, $F : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \to F(s, t) \in]0, +\infty[$, $\alpha : M \to]0, +\infty[$ et $\beta : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ sont des fonctions lisses. Si $f(x, r) = F(\alpha(x), \beta(r))$, alors

1. $X^V(f)_{(x,u)} = 2\beta'(r)g_x(X, u)\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x), \beta(r))$,

2. $X^H(f)_{(x,u)} = g_x(grad_M\alpha, X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r)) = X(\alpha)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))$,
où $X \in \Gamma(TM)$, $(x,u) \in TM$ *et* $r = g_x(u,u)$.

Preuve.
Du Lemme 1.2.2, on a :

$$\begin{aligned}
1)\ X^V(f)_{(x,u)} =& X^i\frac{\partial}{\partial y^i}F(\alpha(x),\beta(r))|_{(x,u)}\\
=& X^i\big[\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))\frac{\partial \alpha}{\partial y^i}(x) + \frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\frac{\partial \beta}{\partial y^i}(r)\big]_{(x,u)}\\
=& X^i\big[\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\frac{\partial \beta}{\partial r}(r)\frac{\partial}{\partial y^i}g(u,u)\big]_{(x,u)}\\
=& \beta'(r)\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))X^V(g(u,u))_{(x,u)}\\
=& 2\beta'(r)g_x(X,u)\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\ X^H(f)_{(x,u)} =& (X^i\frac{\partial}{\partial x^i} - X^iy^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k})F(\alpha(x),\beta(r))|_{(x,u)}\\
=& X^i\big[\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}(x) + \frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\frac{\partial \beta}{\partial x^i}(r)\big]_{(x,u)}\\
&- X^iy^j\Gamma^k_{ij}\big[\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))\frac{\partial \alpha}{\partial y^k}(x) + \frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\frac{\partial \beta}{\partial y^k}(r)\big]_{(x,u)}\\
=& \frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))X_x(\alpha) + \frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[X^i\frac{\partial \beta}{\partial r}(r)\frac{\partial}{\partial x^i}g(u,u)\big]_{(x,u)}\\
&- X^iy^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[\frac{\partial \beta}{\partial r}(r)\frac{\partial}{\partial y^k}g(u,u)\big]_{(x,u)}\\
=& X_x(\alpha)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r)) + \beta'(r)\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))X^H(g(u,u))_{(x,u)}\\
=& X_x(\alpha)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r)).
\end{aligned}$$

∎

Par la suite, on considère $f(x,r) = F(\alpha(x),\beta(r))$, *où* $F : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \to F(s,t) \in]0,+\infty[$, $\alpha : M \to]0,+\infty[$ *et* $\beta : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ *sont des fonctions lisses.*

2.2 Connexion de Levi-Civita de la métrique de Mus-Sasaki

Lemme 2.2.1
Soit (M,g) *une variété Riemannienne. Si* $f(x,r) = F(\alpha(x),\beta(r))$ *et* ∇ *(resp.* $\widetilde{\nabla}$*) désigne la*

connexion de Levi-Civita associée à (M, g) *(resp.* (TM, g_f^S)*), alors :*

1) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) = g_f^S((\nabla_X Y)^H, Z^H)$,

2) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) = -\dfrac{1}{2} g_f^S((R(X,Y)u)^V, Z^V)$,

3) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^H) = g_f^S(\dfrac{f}{2}(R(u,Y)X)^H, Z^H)$,

4) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^V) = g_f^S(\dfrac{1}{2} X(\alpha) \dfrac{\partial \ln F}{\partial s} Y^V + (\nabla_X Y)^V, Z^V)$,

5) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^H) = g_f^S((\dfrac{f}{2} R(u,X)Y)^H, Z^H)$,

6) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^V) = g_f^S(\dfrac{1}{2} Y(\alpha) \dfrac{\partial \ln F}{\partial s} X^V, Z^V)$,

7) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^H) = g_f^S(-\dfrac{1}{2} g(X,Y) \dfrac{\partial F}{\partial s} (grad(\alpha)^H, Z^H)$,

8) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) = \beta' \dfrac{\partial \ln F}{\partial t} g_f^S\Big(g(X,u)Y^V + g(Y,u)X^V - g(X,Y)U^V, Z^V\Big)$.

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *et* $(x,u) \in TM$*, où* R *désigne le tenseur de courbure de* (M, g).

Preuve.

De la Proposition 1.2.1 et le Lemme 2.1.1,on a :

1) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^H) = g_f^S((\nabla_X Y)^H, Z^H).$

2) $g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^V) = -\frac{1}{2}g_f^S((R(X,Y)u)^V, Z^V).$

3) $$\begin{aligned} g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^H) &= -\frac{1}{2}g_f^S((R(Z,X)u)^V, Y^V) \\ &= g_f^S(\frac{f}{2}(R(u,Y)X)^H, Z^H). \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2}\Big[X^H(g_f^S(Y^V,Z^V)) + g_f^S(Z^V,(\nabla_X Y)^V) - g_f^S(Y^V,(\nabla_X Z)^V)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[X^H(f)g(Y,Z) + fX(g(Y,Z)) + fg(Z,\nabla_X Y) - fg(Y,\nabla_X Z)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[X^H(f)g(Y,Z) + 2fg(Z,\nabla_X Y)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[X(\alpha)\frac{\partial F}{\partial s}g(Y,Z) + 2fg(Z,\nabla_X Y)\Big] \\ &= g_f^S(\frac{1}{2}X(\alpha)\frac{\partial \ln F}{\partial s}Y^V + (\nabla_X Y)^V, Z^V). \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^H, Z^H) &= \frac{1}{2}g_f^S((R(Y,Z)u)^V, X^V) \\ &= g_f^S((\frac{f}{2}R(u,X)Y)^H, Z^H). \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^H, Z^V) &= \frac{1}{2}\Big[Y^H(g_f^S(X^V,Z^V)) - g_f^S(Z^V,(\nabla_Y X)^V) - g_f^S(X^V,(\nabla_Y Z)^V)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[Y^H(f)g(X,Z) + fY(g(X,Z)) - fg(Z,\nabla_Y X) - fg(X,\nabla_Y Z)\Big] \\ &= g_f^S(\frac{1}{2}Y(\alpha)\frac{\partial \ln F}{\partial s}X^V, Z^V). \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^V, Z^H) &= \frac{1}{2}\Big[-Z^H(g_f^S(X^V,Y^V)) + g_f^S(Y^V,(\nabla_Z X)^V) + g_f^S(X^V,(\widetilde{\nabla}_Z Y)^V)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[-Z^H(f)g(X,Y) - fZ(g(X,Y)) + fg(Y,\nabla_Z X) + fg(X,\nabla_Z Y)\Big] \\ &= -\frac{1}{2}g(X,Y)\frac{\partial F}{\partial s}Z(\alpha) \\ &= g_f^S(-\frac{1}{2}g(X,Y)\frac{\partial F}{\partial s}(grad(\alpha)^H, Z^H). \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} g_f^S(\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2}\Big[X^V(g_f^S(Y^V,Z^V)) + Y^V(g_f^S(X^V,Z^V)) - Z^V(g_f^S(X^V,Y^V))\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[X^V(fg(Y,Z)) + Y^V(fg(X,Z)) - Z^V(fg(X,Y))\Big] \\ &= \beta'\frac{\partial F}{\partial t}\Big[g(Y,Z)g(X,u) + g(X,Z)g(Y,u) - g(X,Y)g(Z,u)\Big] \\ &= \beta'\frac{\partial \ln F}{\partial t}g_f^S\Big(g(X,u)Y^V + g(Y,u)X^V - g(X,Y)U^V, Z^V\Big). \end{aligned}$$

∎

Théorème 2.2.1
Soit (M,g) une variété Riemannienne. Si $f(x,r)=F(\alpha(x),\beta(r))$ et ∇ (resp $\widetilde{\nabla}$) désigne la connexion de Levi-Civita associée à (M,g) (resp (TM,g_f^S)), alors :

$$\begin{aligned}
1.\quad (\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^H)_p &= (\nabla_X Y)_p^H - \frac{1}{2}(R_x(X,Y)u)^V,\\
2.\quad (\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^V)_p &= (\nabla_X Y)_p^V + \frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,Y)X)^H + \frac{1}{2}X(\alpha)\frac{\partial \ln F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))Y_p^V,\\
3.\quad (\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^H)_p &= \frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,X)Y)^H + \frac{1}{2}Y(\alpha)\frac{\partial \ln F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))X_p^V,\\
4.\quad (\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^V)_p &= \beta'(r)\frac{\partial \ln F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\Big[g_x(Y,u)X_p^V + g_x(X,u)Y_p^V - g_x(X,Y)U_p^V\Big]\\
&\quad -\frac{1}{2}g_x(X,Y)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(grad_M\alpha)_p^H,
\end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs $X,Y\in\Gamma(TM)$ et $p=(x,u)\in TM$, où R désigne le tenseur de courbure de la variété (M,g).

Preuve.
La preuve du Théorème 2.2.1 découle directement du Lemme 2.2.1. ∎

Proposition 2.2.1
Soient (M,g) une variété Riemannienne et $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita du fibré tangent (TM,g_f^s) equippé de la métrique Mus-Sasaki. Si K est un champ de tenseurs de type $(1,1)$ sur M, alors :

$$\begin{aligned}
1)\quad (\widetilde{\nabla}_{X^H}HK)_p &= H(\nabla_X K)_p - \frac{1}{2}(R_x(X_x,K_x(u))u)^V,\\
2)\quad (\widetilde{\nabla}_{X^H}VK)_p &= V(\nabla_X K)_p + \frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,K_x(u))X_x)^H\\
&\quad +\frac{1}{2}X(\alpha)\frac{\partial \ln F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(VK)_p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3)\quad (\widetilde{\nabla}_{X^V}HK)_p &= (K(X))_p^H + \frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,X_x)K_x(u))^H\\
&\quad +\frac{1}{2}g_x(grad_M\alpha,K_x(u))\frac{\partial \ln F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))X_p^V,\\
4)\quad (\widetilde{\nabla}_{X^V}VK)_p &= (K(X))_p^V - \frac{1}{2}g_x(X,K_x(u))\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(grad_M\alpha)_p^H\\
&\quad +\beta'(r)\frac{\partial \ln F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\Big[g_x(K_x(u),u)X_p^V) + g_x(X,u)(VK)_p\\
&\quad -g_x(X,K_x(u))U_p^V\Big],
\end{aligned}$$

où $p=(x,u)\in TM$ et $X\in\Gamma(TM)$.

Preuve.
Soit $p=(x,u)\in TM$, $u=u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $U=u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ *est un champ de vecteurs constant.*
De la Définition 2.1.1 *et le Théorème* 2.2.1 *on a :*

$$
\begin{aligned}
1)\ (\widetilde{\nabla}_{X^H}HK)_p &= (\widetilde{\nabla}_{X^H}y^k(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H)_p\\
&= (X^H(y^k)(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H + y^k\widetilde{\nabla}_{X^H}K(\frac{\partial}{\partial_k})^H)_p\\
&= (-X^iy^j\Gamma_{ij}^k(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H)_p + u^k(\nabla_X K(\frac{\partial}{\partial_k}))_p^H\\
&\quad -u^k\frac{1}{2}(R_x(X_x,K_x(\frac{\partial}{\partial x^k}))u)^V\\
&= -K(\nabla_X U)_p^H + (\nabla_X K(U))_p^H - \frac{1}{2}(R_x(X_x,K_x(u))u)^V\\
&= ((\nabla_X K)(U))_p^H - \frac{1}{2}(R_x(X_x,K_x(u))u)^V\\
&= (H(\nabla_X K))p - \frac{1}{2}(R_x(X_x,K_x(u))u)^V.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ (\widetilde{\nabla}_{X^H}VK)_p &= (X^H(y^k)(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V + y^k\widetilde{\nabla}_{X^H}K(\frac{\partial}{\partial_k})^V)_p\\
&= (-X^iy^j\Gamma_{ij}^k(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V)_p + u^k(\nabla_X K(\frac{\partial}{\partial_k}))_p^V\\
&\quad +u^k\frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,K_x(\frac{\partial}{\partial x^k}))X_x)^H\\
&\quad +u^k\frac{1}{2f(x,r)}g_x(grad_M\alpha,X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(K_x(\frac{\partial}{\partial x^k})_p^V\\
&= -K(\nabla_X U)_p^V + (\nabla_X K(U))_p^V + \frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,K_x(u))X_x)^H\\
&\quad +\frac{1}{2f(x,r)}g_x(grad_M\alpha,X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(K_x(u)_p^V\\
&= (V(\nabla_X K))p + \frac{f(x,r)}{2}(R_x(u,K_x(u))X_x)^H\\
&\quad +\frac{1}{2f(x,r)}g_x(grad_M\alpha,X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(VK)_p.
\end{aligned}
$$

Les autres égalités se démontrent de la même façon. ∎

2.3 Sections harmoniques de la métrique de Mus-Sasaki

Définition 2.3.1 (*Seconde forme fondamentale*)
Soient (M,g), (N,h) *deux variétés Riemannienne et* $\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ *une application différentiable de classe* C^∞. *La seconde forme fondamentale de l'application* φ *est la dérivée covariante de la 1-forme vectoriel* $d\varphi$, *définie par :*

$$\nabla d\varphi(X,Y)=\nabla_X^\varphi d\varphi(Y)-d\varphi(\nabla_X^M Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Propriété 2.3.1
Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *une application différentiable, la seconde forme fondamentale de l'application* φ *est symétrique. C'est-à-dire :*

$$\nabla d\varphi(X, Y) = \nabla d\varphi(Y, X), \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Définition 2.3.2
Soient (M, g) *et* (N, h) *des variétés Riemanniennes. Une application* $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *est dite totalement géodésique si* $\nabla d\varphi = 0$.

Définition 2.3.3
Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *une application de classe* C^∞. *La trace de la seconde forme fondamentale de l'application* φ *est appelé champ de tension de l'application* φ, *noté par :*

$$\tau(\varphi) = tr_g \nabla d\varphi.$$

Relativement à une base orthonormée (e_i) *sur* M, *on a :*

$$\tau(\varphi) = \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i). \tag{2.1}$$

Lemme 2.3.1
Soient (M, g) *une variété Riemannienne,* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *deux champs d'un vecteurs sur* M *et* $(x, u) \in TM$ *tel que* $X_x = u$, *alors :*

$$d_x X(Y_x) = Y^H_{(x,u)} + (\nabla_Y X)^V_{(x,u)}.$$

Preuve.
Soient (U, x^i) *une carte sur* M *et* $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j)$ *la carte induite sur* TM, *si* $X_x = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ *et* $Y_x = Y^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, *alors :*

$$d_x X(Y_x) = Y^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{(x,X_x)} + Y^j(x)\frac{\partial X^k}{\partial x^i}(x)\frac{\partial}{\partial y^k}|_{(x,X_x)},$$

d'où la partie horizontale

$$\begin{aligned}
(d_x X(Y_x))^h &= Y^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{(x,X_x)} - Y^i(x)X^j(x)\Gamma^k_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial y^k}|_{(x,X_x)} \\
&= Y^H_{(x,X_x)},
\end{aligned}$$

et la partie verticale

$$\begin{aligned}
(d_x X(Y_x))^v &= \{Y^j(x)\frac{\partial X^k}{\partial x^i}(x) + Y^i(x)X^j(x)\Gamma^k_{ij}(x)\}\frac{\partial}{\partial y^k}|_{(x,X_x)} \\
&= (\nabla_Y X)^V_{(x,X_x)}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Définition 2.3.4
Soient (M, g) une variété Riemannienne et (TM, g_f^S) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki et $X \in \Gamma(TM)$.
La densité d'énergie associée à X est définie par : pour tous $x \in M$ et $p = (x, u) \in TM$

$$e(X)_x = \frac{1}{2} trace_g g_f^S(dX(*), dX(*))_p.$$

L'énergie associée à X sur une partie compact D de M est définie par :

$$E(X, D) = \int_D e(X) v^M.$$

Le champ de tension associé à X est défini par :

$$\tau(X) = trace_g(\nabla dX).$$

Lemme 2.3.2
Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension m, (TM, g_f^S) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki et $X \in \Gamma(TM)$. Alors la densité d'énergie associée à X est donnée par :

$$e(X) = \frac{m}{2} + \frac{f}{2} trace_g g(\nabla X, \nabla X). \tag{2.2}$$

Preuve.
Soit $(E_1, \cdots, E_m)$ une base orthonormée locale sur M, alors :

$$e(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} g_f^S(dX(E_i), dX(E_i)).$$

En utilisant le Lemme 2.3.1

$$\begin{aligned}
e(X) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} g_f^S(E_i^H + (\nabla_{E_i} X)^V, E_i^H + (\nabla_{E_i} X)^V) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left[(g_f^S(E_i^H, E_i^H) + g_f^S((\nabla_{E_i} X)^V, (\nabla_{E_i} X)^V))\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left[(g(E_i, E_i) + f g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X))\right] \\
&= \frac{m}{2} + \frac{f}{2} trace_g g(\nabla X, \nabla X),
\end{aligned}$$

∎

Théorème 2.3.1
Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension m et (TM, g_f^S) son fibré tangent équipé

de la métrique de Mus-Sasaki, tel que $f(x,r) = F(\alpha(x),\beta(r))$. Alors le champ de tension associé à $X \in \Gamma(TM)$ est donnée par :

$$\tau(X) = \frac{m}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(\nabla_{grad_M\alpha}X)^V + \big[trace_g A(X)\big]^V + \big[trace_g B(X)\big]^H.$$

où $A(X)$ et $B(X)$ sont des applications bilinéaires définies par :

$$\begin{aligned} A(X) &= \nabla^2 X + \frac{\beta'(r)}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[2g(\nabla X,X)\nabla X - g(\nabla X,\nabla X)X\big],\\ B(X) &= f(x,r)R(X,\nabla X)* - \frac{1}{2}g(\nabla X,\nabla X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))grad_M\alpha. \end{aligned}$$

Preuve.
Soient $x \in M$, $p = (x,u) \in TM$ et $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ est une base orthonormée sur M telles que $(\nabla^M_{E_i}E_i)_x = 0$ et $X_x = u$, alors :

$$\begin{aligned} \tau(X)_x &= trace_g(\nabla dX)_p\\ &= \sum_{i=1}^m\{\nabla^X_{E_i}dX(E_i) - dX(\nabla^M_{E_i}E_i)\}_p\\ &= \sum_{i=1}^m \widetilde{\nabla}_{dX(E_i)}dX(E_i)_p\\ &= \sum_{i=1}^m \widetilde{\nabla}_{(E_i^H+(\nabla_{E_i}X)^V)}(E_i^H + (\nabla_{E_i}X)^V)_p\\ &= \sum_{i=1}^m\{\widetilde{\nabla}_{E_i^H}E_i^H + \widetilde{\nabla}_{E_i^H}(\nabla_{E_i}X)^V + \widetilde{\nabla}_{(\nabla_{E_i}X)^V}(E_i)^H + \widetilde{\nabla}_{(\nabla_{E_i}X)^V}(\nabla_{E_i}X)^V\}_p. \end{aligned}$$

Du Théorème 2.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_{E_i^H}E_i^H)_p &= 0,\\ (\widetilde{\nabla}_{E_i^H}(\nabla_{E_i}X)^V)_p &= \frac{f(x,r)}{2}(R_x(X_x,\nabla_{E_i}X)E_i)^H + \frac{1}{2f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(\nabla_{grad_M\alpha}X)^V_p\\ &\quad +(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}X)^V_p,\\ (\widetilde{\nabla}_{(\nabla_{E_i}X)^V}E_i^H)_p &= \frac{f(x,r)}{2}(R_x(X_x,\nabla_{E_i}X)E_i)^H + \frac{1}{2f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(\nabla_{grad_M\alpha}X)^V_p,\\ (\widetilde{\nabla}_{(\nabla_{E_i}X)^V}(\nabla_{E_i}X)^V)_p &= -\frac{1}{2}g_x(\nabla_{E_i}X,\nabla_{E_i}X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(grad_M\alpha)^H_p\\ &\quad +\frac{\beta'(r)}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[2g_x(\nabla_{E_i}X,X_x)(\nabla_{E_i}X)^V_p\\ &\quad -g_x(\nabla_{E_i}X,\nabla_{E_i}X)X^V_p\big], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tau(X) \; = \; & \sum_{i=1}^{m} \Big[f(x,r)(R_x(X_x,\nabla_{E_i}X)E_i)^H + \frac{1}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(\nabla_{grad_M\alpha}X)_p^V \\
& +(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}X)_p^V - \frac{1}{2}g_x(\nabla_{E_i}X,\nabla_{E_i}X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(grad_M\alpha)_p^H \\
& +\frac{\beta'(r)}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[2g_x(\nabla_{E_i}X,X_x)(\nabla_{E_i}X)_p^V - g_x(\nabla_{E_i}X,\nabla_{E_i}X)X_p^V\big]\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau(X) \; = \; & \frac{m}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))(\nabla_{grad_M\alpha}X)^V \\
& +\Big[trace_g\big[\nabla^2 X + \frac{\beta'(r)}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[2g(\nabla X,X)\nabla X - g(\nabla X,\nabla X)X\big]\big]\Big]^V \\
& +\Big[trace_g\big[f(x,r)R(X,\nabla X)* - \frac{1}{2}g(\nabla X,\nabla X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))grad_M\alpha\big]\Big]^H.
\end{aligned}
$$

■

Théorème 2.3.2
Soient (M,g) une variété Riemannienne de dimension m, (TM,g_f^S) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki et $X \in \Gamma(TM)$. Alors X est harmonique si et seulement si

$$
\begin{aligned}
0 = \; & trace_g\big\{\nabla^2 X + \frac{\beta'(r)}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))\big[2g(\nabla X,X)\nabla X - g(\nabla X,\nabla X)X\big]\big\} \\
& + \frac{m}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))\nabla_{grad_M\alpha}X,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

et

$$
0 = \; trace_g\big\{f(x,r)R(X,\nabla X)* - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))g(\nabla X,\nabla X)grad_M\alpha\big\}.
$$

où $r = g(X_x,X_x) = \|X_x\|^2$.

Preuve.
La preuve découle directement du Théorème 2.3.1. ■

Corollaire 2.3.1
Soient (M,g) une variété Riemannienne de dimension m, (TM,g_f^S) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki et $X \in \Gamma(TM)$. Si X est parallèle (i.e $\nabla X = 0$), alors X est harmonique.

Théorème 2.3.3
Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension m, (TM,g_f^S) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki et $X \in \Gamma(TM)$. Alors X est harmonique si et seulement si X est parallèle (i.e $\nabla X = 0$).

Preuve.
D'après le Corollaire 2.3.1, on a : $(\nabla X = 0) \Rightarrow (\tau(X) = 0)$.
Inversement, on suppose que X et harmonique, comme M est une variété compacte, alors

$$
\begin{aligned}
\phi : \mathbb{R}\times M & \longrightarrow T_xM \\
(t,x) & \longmapsto \phi(t,x) = X_t(x) = (t+1)X_x
\end{aligned}
$$

est une variation de X à support compacte.
du Lemme 2.3.2, on a :

$$e(X_t) \quad = \quad \frac{m}{2} + f(x,r)\frac{(t+1)^2}{2} trace_g g(\nabla X, \nabla X).$$

X est harmonique alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} E(X_t)|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\int_M \big[\frac{m}{2} + f(x,r)\frac{(t+1)^2}{2} trace_g g(\nabla X, \nabla X)\big] v^M\Big]_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{m}{2} vol(M)\Big]_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{(t+1)^2}{2}\int_M f(x,r) trace_g g(\nabla X, \nabla X) v^M\Big]_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{(1+t)^2}{2}\Big]_{t=0} \int_M f(x,r) trace_g g(\nabla X, \nabla X) v^M \\ &= \int_M f(x,r) trace_g g(\nabla X, \nabla X) v^M. \end{aligned}$$

Puisque $f(x,r) > 0$ donc $trace_g g(\nabla X, \nabla X) = 0$.
On déduit $\nabla X = 0$. ■

Exemple 2.3.1
Soit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ équipé de la métrique canonique produit

$$g = d\alpha^2 + sin^2(\alpha) d\psi^2 + dt^2,$$

alors le champ $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$ est harmonique.
En effet :si X est parallèle ,alors X est harmonique,
c'est a dire $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \alpha}} X = 0$, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi}} X = 0$ et $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X = 0$, alors X est harmonique.
Puisque les symboles de Christoffel suivants :

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{33} = \Gamma^3_{33} = 0.$$

On obtient :X est harmonique.

Exemple 2.3.2
Soit $\mathbb{R}^n$ équipé de la métrique canonique est une variété plate et non compacte
Soit le champ de vecteurs :

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T\mathbb{R}^n \qquad\qquad , \\ x = (x_1, \cdots, x_n) &\longmapsto X_x = (X^1_x, \cdots, X^n_x) \end{aligned}$$

on a :

$$\tau(X) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 X^1}{\partial x_i^2}, \cdots, \frac{\partial^2 X^n}{\partial x_i^2}\Big).$$

1) Si X est constant alors X et harmonique,
2) Si $X^i = a_i x_i$ et $a_i \neq 0$, alors X est harmonique ($\tau(X) = 0$) mais

$$\nabla X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_i \neq 0.$$

Remarque 2.3.1
En générale , du Corollaire 2.3.1 et le Théorème 2.3.3, on peut construire plusieurs exemples de champs de vecteurs harmoniques.

Théorème 2.3.4 *[33]*
Soient $(\mathbb{R}^m, g_0)$ l'espace réel euclidien et $(T\mathbb{R}^m, g^S_{0f})$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki, tel que $f(x,r) = F(\alpha(x), \beta(r))$. Si $X = (X^1, \cdots, X^m)$ et un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$, alors X est harmonique si est seulement si

$$\left\{\begin{array}{rl} 0 = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{m}{f(x,\|X\|^2)}\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}(x)\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2)) + \frac{\partial^2 X^k}{\partial (x^i)^2}\Big] \\ & \displaystyle+\frac{\beta'(\|X\|^2)}{f(x,\|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\sum_{i,j=1}^{m}\Big[2X^j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^i} - X^k(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2\Big], \\ 0 = & \displaystyle\frac{\partial\alpha}{\partial x^k}(x)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\sum_{i,j=1}^{m}(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2, \end{array}\right. \tag{2.4}$$

pour tout $k = \overline{1,m}$.

Preuve.
Soit $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=\overline{1,m}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

Du Théorème 2.3.2, on a : X est harmonique si et seulement si

$$\frac{m}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))\nabla_{grad_M\alpha}X + trace_g A(X) = 0 \quad et \quad trace_g B(X) = 0,$$

$$\nabla_{grad_M\alpha}X = \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}}X^k\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}(x)\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

$$\frac{m}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))\nabla_{grad_M\alpha}X = \sum_{i,k=1}^{m}\Big[\frac{m}{f(x,\|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}(x)\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

$$\begin{aligned} trace_g A(X) =& trace_g\Big[\nabla^2 X + \frac{\beta'(r)}{f(x,r)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(r))[2g(\nabla X, X)\nabla X - g(\nabla X,\nabla X)X]\Big] \\ =& \sum_{i=1}^{m}\Big[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X + \frac{\beta'(\|X\|^2)}{f(x,\|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2)) \\ & \times[2g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X, X^j\frac{\partial}{\partial x^j})\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X - g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X,\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X)X^j\frac{\partial}{\partial x^j}]\Big] \\ =& \sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial^2 X^k}{\partial(x^i)^2}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\beta'(\|X\|^2)}{f(x,\|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2)) \\ & \times\sum_{i,j,k=1}^{m}\Big[2X^j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k} - X^j(\frac{\partial X^k}{\partial x^i})^2\frac{\partial}{\partial x^j}\Big]. \end{aligned}$$

Alors,on obtient :

$$\frac{m}{f(x,r)}\tfrac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))\nabla_{grad_M\alpha}X + trace_g A(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{m}{f(x,\|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}(x)\frac{\partial X^k}{\partial x^i}+\frac{\partial^2X^k}{\partial(x^i)^2}\Big]$$

$$+\frac{\beta'(\|X\|^2)}{f(x,\|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\sum_{i,j=1}^{m}\Big[2X^j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^i}-X^k(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2\Big]=0,$$

pour tout $k=\overline{1,m}$.

$$\begin{aligned} trace_g B(X) =& trace_g\big[f(x,r)R(X,\nabla X)*-\frac{1}{2}g(\nabla X,\nabla X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(r))grad_M\alpha\big]\\ =&\sum_{i=1}^{m}-\frac{1}{2}g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X,\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}\\ =&\sum_{i,j,k=1}^{m}-\frac{1}{2}(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\frac{\partial\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} trace_g B(X)=0 \Leftrightarrow& \sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\frac{\partial\alpha}{\partial x^k}(x)(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2=0\\ \Leftrightarrow&\frac{\partial\alpha}{\partial x^k}(x)\frac{\partial F}{\partial s}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\sum_{i,j=1}^{m}(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2=0, \end{aligned}$$

pour tout $k=\overline{1,m}$. ■

Corollaire 2.3.2
Soient $(\mathbb{R}^m, g_0)$ *l'espace réel euclidien et* $(T\mathbb{R}^m, g^S_{0f})$ *son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki. Si* α *et* β *sont des fonctions constantes, ou* F *est une fonction constante, alors* $X=(X^1,\cdots,X^m)$ *est un champ de vecteurs harmonique sur* $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si pour tout* $i=\overline{1,m}$ X^i *est harmonique.*

Corollaire 2.3.3
Soient $(\mathbb{R}^m, g_0)$ *l'espace réel euclidien et* $(T\mathbb{R}^m, g^S_{0f})$ *son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki. Si* $(grad^M\alpha\neq 0)$ *et* $(\frac{\partial F}{\partial s}\neq 0)$*, alors* $X=(X^1,\cdots,X^m)$ *est un champ de vecteurs harmonique sur* $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si* X *est constant.*

Corollaire 2.3.4
Soient $(\mathbb{R}^m, g_0)$ *l'espace réel euclidien et* $(T\mathbb{R}^m, g^S_{0f})$ *son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki. Si* α *est une fonction constante, alors* $X=(X^1,\cdots,X^m)$ *est un champ de vecteurs harmonique sur* $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si* X *vérifier le système d'équations suivant :*

$$\sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial^2X^k}{\partial(x^i)^2}+\frac{\beta'(\|X\|^2)}{f(x,\|X\|^2)}\frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(x),\beta(\|X\|^2))\sum_{i,j=1}^{m}\Big[2X^j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^i}-X^k(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2\Big]=0,$$

pour tout $k=\overline{1,m}$.

Remarque 2.3.2

En utilisant le Corollaire 2.3.4, on peut construire plusieurs exemples non triviaux de champs de vecteurs harmoniques.

Exemple 2.3.3

Si $\mathbb{R}^n$ *équipé de la métrique canonique et* $T\mathbb{R}^m$ *son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Sasaki , telle que* $F(s,t) = t$ *(i.e* $f(x,r) = \beta(r)$*). Du Corollaire 2.3.4, on déduit* $X = (h(x_1), 0, \cdots, 0)$ *est un champ de vecteurs harmonique sur* $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si* h *est solution de l'équation différentielle :*

$$h'' + \frac{\beta'(h^2)}{\beta(h^2)} h(h')^2 = 0, \tag{2.5}$$

Dans le cas où $\beta(t) = t$*, la solution de l'équation (2.5) est donnée par :* $h(x_1) = \pm\sqrt{ax_1 + b}$*,*
Dans le cas où $\beta(t) = \dfrac{1}{t}$*, la solution de l'équation (2.5) est donnée par :* $h(x_1) = be^{ax_1}$*.*

Chapitre 3

Métrique de Mus-Gradient

Sommaire

Dans ce chapitre on définit la métrique de Mus-Gradient Métrique, en donnant les formules relative aux connexions induites et des courbures,puis on étudie la biharmonicité en illustrant avec des exemples d'applications biharmoniques propres. En fin de chapitre nous étudions la géodésie de cette métrique

3.1 Métrique de Mus-Gradient

Définition 3.1.1

Soient (M,g) une variété Riemannienne et $f : M \to]0,+\infty[$. Sur le fibré tangent TM, on définit la métrique de Sasaki gradient notée g^f par :

1. $g^f(X^H,Y^H)_{(x,u)} = g_x(X,Y)$
2. $g^f(X^H,Y^V)_{(x,u)} = 0$
3. $g^f(X^V,Y^V)_{(x,u)} = g_x(X,Y) + X_x(f)Y_x(f)$

où $X,Y \in \Gamma(TM)$, $(x,u) \in TM$.

Remarque 3.1.1

1) Si f est constant,alors g^f est la métrique de Sasaki.

2) $g^f(X^H, (grad\, f)^H) = g(X, grad\, f) = X(f)$.
3) $g^f(X^V, (grad\, f)^V) = (1 + \|grad\, f\|^2)X(f) = \alpha X(f)$, *où* $\alpha = 1 + \|grad\, f\|^2$.
4) $g^f(X^V, Y^V) - g^f(X^H, Y^H) = X(f)Y(f)$.
où $X, Y \in \Gamma(TM)$.
Par la suite, on considère $\alpha = 1 + \|grad\, f\|^2 = 1 + g(grad\, f, grad\, f)$.

Lemme 3.1.1
Soit (M, g) *une variété Riemannienne. Pour tous* X, Y *et* $Z \in \Gamma(TM)$, *on a*

$$\begin{aligned}
1.\; X^V g^f(Y^V, Z^V) &= 0\\
2.\; X^H g^f(Y^V, Z^V) &= g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + g^f((Y^V, \nabla_X Z)^V) + Y(f) g^f((\nabla_X grad\, f)^H, Z^H)\\
&\quad + g(Y, \nabla_X grad\, f) g^f((grad\, f)^H, Z^H). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.\; X^H g^f(Y^V, Z^V) &= g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + g^f((Y^V, \nabla_X Z)^V) + Y(f) g^f((\nabla_X grad\, f)^V, Z^V)\\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\big[g(Y, \nabla_X grad\, f) - \frac{1}{2}X(\alpha)Y(f)\big] g^f((grad\, f)^V, Z^V). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
1.\; X^V g^f(Y^V, Z^V) &= X^V\big[g(Y, Z) + Y(f)Z(f)\big]\\
&= X^V g(Y, Z) + X^V(Y(f)Z(f))\\
&= 0.\\
2.\; X^H g^f(Y^V, Z^V) &= X^H\big[g(Y, Z) + Y(f)Z(f)\big]\\
&= X^H g(Y, Z) + X^H(Y(f)Z(f))\\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\\
&\quad + g(\nabla_X Y, grad\, f)Z(f) + g(Y, \nabla_X grad\, f)Z(f)\\
&\quad + Y(f) g(\nabla_X Z, grad\, f) + Y(f) g(Z, \nabla_X grad\, f)\big]\\
&= g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + g^f((Y^V, \nabla_X Z)^V)\\
&\quad + g(Y, \nabla_X grad\, f)Z(f) + Y(f) g(Z, \nabla_X grad\, f)\\
&= g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + g^f((Y^V, \nabla_X Z)^V)\\
&\quad + g(Y, \nabla_X grad\, f) g^f((grad\, f)^H, Z^H) + Y(f) g^f((\nabla_X grad\, f)^H, Z^H).\\
3.\; X^H g^f(Y^V, Z^V) &= g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + g^f((Y^V, \nabla_X Z)^V)\\
&\quad + \frac{1}{\alpha} g(Y, \nabla_X grad\, f) g^f((grad\, f)^V, Z^V)\\
&\quad + Y(f)\big[g^f((\nabla_X grad\, f)^V, Z^V) - (\nabla_X grad\, f)(f)Z(f)\big]\\
&= g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + g^f((Y^V, \nabla_X Z)^V)\\
&\quad + \frac{1}{\alpha} g(Y, \nabla_X grad\, f) g^f((grad\, f)^V, Z^V)\\
&\quad + Y(f) g^f((\nabla_X grad\, f)^V, Z^V) - \frac{1}{2\alpha} Y(f)X(\alpha) g^f((grad\, f)^V, Z^V)\\
&= g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + g^f((Y^V, \nabla_X Z)^V) + Y(f) g^f((\nabla_X grad\, f)^V, Z^V)\\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\big[g(Y, \nabla_X grad\, f) - \frac{1}{2}X(\alpha)Y(f)\big] g^f((grad\, f)^V, Z^V).
\end{aligned}$$

■

3.2 Connexion de levi-Civita de la métrique de Mus-Gradient

Proposition 3.2.1
Soit (M,g) une variété Riemannienne. Si ∇ (resp. ∇^f) désigne la connexion de Levi-Civita associée à (M,g) (resp. (TM,g^f)), alors :

$$
\begin{aligned}
1)\ g^f(\nabla^f_{X^H}Y^H,Z^H) =& g^f((\nabla_X Y)^H,Z^H)\\
2)\ g^f(\nabla^f_{X^H}Y^H,Z^V) =& -\frac{1}{2}g^f((R(X,Y)u)^V,Z^V)\\
3)\ g^f(\nabla^f_{X^H}Y^V,Z^H) =& \frac{1}{2}g^f((R(u,Y)X)^H+Y(f)(R(u,grad\,f)X)^H,Z^H)\\
4)\ g^f(\nabla^f_{X^H}Y^V,Z^V) =& g^f((\nabla_X Y)^V,Z^V)+\frac{1}{2}Y(f)g^f((\nabla_X grad\,f)^V,Z^V)\\
&+\frac{1}{2\alpha}\big[g(Y,\nabla_X grad\,f)-\frac{1}{2}X(\alpha)Y(f)\big]g^f((grad\,f)^V,Z^V)\\
5)\ g^f(\nabla^f_{X^V}Y^H,Z^H) =& \frac{1}{2}g^f((R(u,X)Y)^H+X(f)(R(u,grad\,f)Y)^H,Z^H)\\
6)\ g^f(\nabla^f_{X^V}Y^H,Z^V) =& \frac{1}{2}X(f)g^f((\nabla_Y grad\,f)^V,Z^V)\\
&+\frac{1}{2\alpha}\big[g(X,\nabla_Y grad\,f)-\frac{1}{2}Y(\alpha)X(f)\big]g^f((grad\,f)^V,Z^V)\\
7)\ g^f(\nabla^f_{X^V}Y^V,Z^H) =& -\frac{1}{2}g^f\big(X(f)(\nabla_Y grad\,f)^H+Y(f)(\nabla_X grad\,f)^H,Z^H\big)\\
8)\ g^f(\nabla^f_{X^V}Y^V,Z^V) =& 0
\end{aligned}
$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
1)\ 2g^f(\nabla^f_{X^H}Y^H,Z^H) =& X^Hg^f(Y^H,Z^H)+Y^Hg^f(Z^H,X^H)-Z^Hg^f(X^H,Y^H)\\
&+g^f(Z^H,[X^H,Y^H])+g^f(Y^H,[Z^H,X^H])-g^f(X^H,[Y^H,Z^H])\\
=& Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)+g(Z,[X,Y])\\
&+g(Y,[Z,X])-g(X,[Y,Z])\\
=& 2g(\nabla_X Y.Z)\\
=& 2g^f((\nabla_X Y)^H,Z^H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ 2g^f(\nabla^f_{X^H}Y^H,Z^V) =& X^Hg^f(Y^H,Z^V)+Y^Hg^f(Z^V,X^H)-Z^Vg^f(X^H,Y^H)\\
&+g^f(Z^V,[X^H,Y^H])+g^f(Y^H,[Z^V,X^H])-g^f(X^H,[Y^H,Z^V])\\
=& g^f(Z^V,[X^H,Y^H])\\
=& -g^f((R(X,Y)u)^V,Z^V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\ 2g^f(\nabla^f_{X^H}Y^V, Z^H) =& X^H g^f(Y^V, Z^H) + Y^V g^f(Z^H, X^H) - Z^H g^f(X^H, Y^V) \\
& + g^f(Z^H, [X^H, Y^V]) + g^f(Y^V, [Z^H, X^H]) - g^f(X^H, [Y^V, Z^H]) \\
=& g^f(Y^V, [Z^H, X^H]) \\
=& - g^f((R(Z, X)u)^V, Y^V) \\
=& - g(R(Z, X)u, Y) - Y(f)(R(Z, X)u)(f) \\
=& g(R(u, Y)X, Z) + Y(f)g(R(u, grad\, f)X, Z) \\
=& g^f((R(u, Y)X)^H + Y(f)(R(u, grad\, f)X)^H, Z^H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\ 2g^f(\nabla^f_{X^H}Y^V, Z^V) =& X^H g^f(Y^V, Z^V) + Y^V g^f(Z^V, X^H) - Z^V g^f(X^H, Y^V) \\
& + g^f(Z^V, [X^H, Y^V]) + g^f(Y^V, [Z^V, X^H]) - g^f(X^H, [Y^V, Z^V]) \\
=& X^H g^f(Y^V, Z^V) + g^f(Z^V, [X^H, Y^V]) + g^f(Y^V, [Z^V, X^H]) \\
=& g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + g^f(Y^V, (\nabla_X Z)^V) + Y(f)g^f((\nabla_X grad\, f)^V, Z^V) \\
& + \frac{1}{\alpha}\big[g(Y, \nabla_X grad\, f) - \frac{1}{2}X(\alpha)Y(f)\big]g^f((grad\, f)^V, Z^V) \\
& + g^f(Z^V, (\nabla_X Y)^V) - g^f(Y^V, (\nabla_X Z)^V) \\
=& 2g^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + Y(f)g^f((\nabla_X grad\, f)^V, Z^V) \\
& + \frac{1}{\alpha}\big[g(Y, \nabla_X grad\, f) - \frac{1}{2}X(\alpha)Y(f)\big]g^f((grad\, f)^V, Z^V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5)\ 2g^f(\nabla^f_{X^V}Y^H, Z^H) =& X^V g^f(Y^H, Z^H) + Y^H g^f(Z^H, X^V) - Z^H g^f(X^V, Y^H) \\
& + g^f(Z^H, [X^V, Y^H]) + g^f(Y^H, [Z^H, X^V]) - g^f(X^V, [Y^H, Z^H]) \\
=& - g^f(X^V, [Y^H, Z^H]) \\
=& g^f((R(Y, Z)u)^V, X^V) \\
=& g(R(Y, Z)u, X) + X(f)(R(Y, Z)u)(f) \\
=& g(R(u, X)Y, Z) + X(f)g(R(u, grad\, f)Y), Z) \\
=& g^f((R(u, X)Y)^H + X(f)(R(u, grad\, f)Y)^H, Z^H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6)\ 2g^f(\nabla^f_{X^V}Y^H, Z^V) =& X^V g^f(Y^H, Z^V) + Y^H g^f(Z^V, X^V) - Z^V g^f(X^V, Y^H) \\
& + g^f(Z^V, [X^V, Y^H]) + g^f(Y^H, [Z^V, X^V]) - g^f(X^V, [Y^H, Z^V]) \\
=& Y^H g^f(Z^V, X^V) + g^f(Z^V, [X^V, Y^H]) - g^f(X^V, [Y^H, Z^V]) \\
=& g^f((\nabla_Y X)^V, Z^V) + g^f(X^V, (\nabla_Y Z)^V) + X(f)g^f((\nabla_Y grad\, f)^V, Z^V) \\
& + \frac{1}{\alpha}\big[g(X, \nabla_Y grad\, f) - \frac{1}{2}Y(\alpha)X(f)\big]g^f((grad\, f)^V, Z^V) \\
& - g^f(Z^V, (\nabla_Y X)^V) - g^f(X^V, (\nabla_Y Z)^V) \\
=& X(f)g^f((\nabla_Y grad\, f)^V, Z^V) \\
& + \frac{1}{\alpha}\big[g(X, \nabla_Y grad\, f) - \frac{1}{2}Y(\alpha)X(f)\big]g^f((grad\, f)^V, Z^V)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
7)\ 2g^f(\nabla^f_{X^V}Y^V,Z^H) =& X^V g^f(Y^V,Z^H)+Y^V g^f(Z^H,X^V)-Z^H g^f(X^V,Y^V)\\
&+g^f(Z^H,[X^V,Y^V])+g^f(Y^V,[Z^H,X^V])-g^f(X^V,[Y^V,Z^H])\\
=&-Z^H g^f(X^V,Y^V)+g^f(Y^V,[Z^H,X^V])-g^f(X^V,[Y^V,Z^H])\\
=&-g^f((\nabla_Z Y)^V,X^V)-g^f((Y^V,\nabla_Z X)^V)\\
&-Y(f)g^f((\nabla_Z grad\, f)^H,X^H)-g(Y,\nabla_Z grad\, f)g^f((grad\, f)^H,X^H)\\
&+g^f(Y^V,(\nabla_Z X)^V)+g^f(X^V,(\nabla_Z Y)^V)\\
=&-Y(f)g(\nabla_Z grad\, f,X)-g(Y,\nabla_Z grad\, f)X(f)\\
=&-Y(f)g(\nabla_X grad\, f,Z)-g(Z,\nabla_Y grad\, f)X(f)\\
=&-g^f\big(X(f)(\nabla_Y grad\, f)^H+Y(f)(\nabla_X grad\, f)^H,Z^H\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8)\ 2g^f(\nabla^f_{X^V}Y^V,Z^V) =& X^V g^f(Y^V,Z^V)+Y^V g^f(Z^V,X^V)-Z^V g^f(X^V,Y^V)\\
&+g^f(Z^V,[X^V,Y^V])+g^f(Y^V,[Z^V,X^V])-g^f(X^V,[Y^V,Z^V])\\
=&0
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.1
Soit (M,g) une variété Riemannienne. Si ∇ (resp. ∇^f) désigne la connexion de Levi-Civita associée à (M,g) (resp. (TM,g^f)), alors :

$$\begin{aligned}
1.\ (\nabla^f_{X^H}Y^H)_p &= (\nabla_X Y)^H_p-\frac{1}{2}(R(X,Y)u)^V_p,\\
2.\ (\nabla^f_{X^H}Y^V)_p &= \frac{1}{2}(R(u,Y)X)^H_p+\frac{1}{2}Y_x(f)(R(u,grad\, f)X)^H_p+\frac{1}{2}Y_x(f)(\nabla_X grad\, f)^V_p\\
&\quad +(\nabla_X Y)^V_p+\frac{1}{2\alpha}\big[g_x(Y,\nabla_X grad\, f)-\frac{1}{2}X_x(\alpha)Y_x(f)\big](grad\, f)^V_p\\
3.\ (\nabla^f_{X^V}Y^H)_p &= \frac{1}{2}(R(u,X)Y)^H_p+\frac{1}{2}X_x(f)(R(u,grad\, f)Y)^H_p+\frac{1}{2}X_x(f)(\nabla_Y grad\, f)^V_p\\
&\quad +\frac{1}{2\alpha}\big[g_x(X,\nabla_Y grad\, f)-\frac{1}{2}Y_x(\alpha)X_x(f)\big](grad\, f)^V_p\\
4.\ (\nabla^f_{X^V}Y^V)_p &= -\frac{1}{2}X_x(f)(\nabla_Y grad\, f)^H_p-\frac{1}{2}Y_x(f)(\nabla_X grad\, f)^H_p.
\end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs $X,Y\in\Gamma(TM)$ et $p=(x,u)\in TM$, où R désigne le tenseur de courbure de la variété (M,g).

Preuve.
La preuve du Théorème 3.2.1 découle directement de la formule de Kozul, le Lemme 3.1.1 et la proposition 3.2.1. ■

Définition 3.2.1
Soit F un champ de tenseurs de type (1,1) sur la variété M, On définit le champ de vecteurs vertical VF et le champ de vecteur horizontal HF de F sur TM par :

$$VF:\ \begin{array}{ccc} TM & \to & TTM\\ p & \mapsto & (F_x(u))^V\end{array}\quad et \quad HF:\ \begin{array}{ccc} TM & \to & TTM\\ p & \mapsto & (F_x(u))^H\end{array}$$

Localement ,si $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ *une carte induite sur* TM *,on a*

$$(VF)_p = y^i F_x(\frac{\partial}{\partial x^i})^V \text{ et } (HF)_p = y^i F_x(\frac{\partial}{\partial x^i})^H$$

où $p = (x,u) \in TM, u = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

Proposition 3.2.2
Soient (M,g) *une variété Riemannienne .Si* ∇ *(resp.* ∇^f*) désigne la connexion de Levi-Civita associée à* (M,g) *(resp.* (TM, g^f)*) et* K *est un champ de tenseurs de type* $(1,1)$ *sur* M*, alors :*

$$1)\ (\nabla^f_{X^H} HK)_p = H(\nabla_X K)_p - \frac{1}{2}\big(R(X,K(u))u\big)^V_p$$

$$\begin{aligned} 2)\ (\nabla^f_{X^H} VK)_p &= \frac{1}{2}(R(u,K(u))X)^H_p + \frac{1}{2}g_x(K(u), grad\, f)(R(u, grad\, f)X)^H_p \\ &+V(\nabla_X K)_p + \frac{1}{2}g_x(K(u), grad\, f)(\nabla_X grad\, f)^V_p \\ &+\frac{1}{2\alpha}\big[g_x(K(u), \nabla_X grad\, f) - \frac{1}{2}X_x(\alpha) g_x(K(u), grad\, f)\big](grad\, f)^V_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3)\ (\nabla^f_{X^V} HK)_p &= (K(X))^H_p + \frac{1}{2}\big(R(u,X)K(u)\big)^H_p + \frac{1}{2}X_x(f)\big(R(u, grad\, f)K(u)\big)^H_p \\ &+\frac{1}{2}X_x(f)(\nabla_{K(u)} grad\, f)^V_p \\ &+\frac{1}{2\alpha}\big[g_x(K(u), \nabla_X grad\, f) - \frac{1}{2}g_x(K(u), grad\, \alpha)X_x(f)\big](grad\, f)^V_p \end{aligned}$$

$$4)\ (\nabla^f_{X^V} VK)_p = (K(X))^V_p - \frac{1}{2}X_x(f)(\nabla_{K(U)} grad\, f)^H_p - \frac{1}{2}g_x(K(u), grad\, f)(\nabla_X grad\, f)^H_p$$

où $p = (x,u) \in TM$ *et* $X \in \Gamma(TM)$.

Preuve.
Soit $p = (x,u) \in TM$, $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $U = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ est un champ de vecteurs constant. De la Définition 3.1.1 et le Théorème 3.2.1 on a :

$$\begin{aligned} 1)\ (\nabla^f_{X^H} HK)_p &= \Big[\nabla^f_{X^H} y^k (K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H\Big]_p \\ &= \Big[X^H(y^k)(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H + y^k \nabla^f_{X^H} K(\frac{\partial}{\partial_k})^H\Big]_p \\ &= -X^i u^j \Gamma^k_{ij}(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H_p + u^k(\nabla_X K(\frac{\partial}{\partial_k}))^H_p - u^k \frac{1}{2}\big(R(X, K(\frac{\partial}{\partial x^k}))u\big)^V_p \\ &= -(K(\nabla_X U))^H_p + (\nabla_X K(U))^H_p - \frac{1}{2}\big(R(X,K(u))u\big)^V_p \\ &= ((\nabla_X K)(U))^H_p - \frac{1}{2}\big(R(X,K(u))u\big)^V_p \\ &= (H(\nabla_X K))_p - \frac{1}{2}\big(R(X,K(u))u\big)^V_p. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2)\,(\nabla^f_{X^H}VK)_p &= \Big[\nabla^f_{X^H}y^k(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V\Big]_p\\
&= \Big[X^H(y^k)(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V + y^k\nabla^f_{X^H}K(\frac{\partial}{\partial_k})^V\Big]_p\\
&= -X^iu^j\Gamma^k_{ij}(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V_p + \frac{u^k}{2}(R(u,K(\frac{\partial}{\partial x^k}))X)^H_p\\
&\quad + \frac{u^k}{2}K_x(\frac{\partial}{\partial x^k})(f)(R(u,grad\,f)X)^H_p + u^k(\nabla_X K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V_p\\
&\quad + \frac{u^k}{2}K_x(\frac{\partial}{\partial x^k})(f)(\nabla_X grad\,f)^V_p\\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[u^k g_x(K(\frac{\partial}{\partial x^k}),\nabla_X grad\,f) - \frac{u^k}{2}X_x(\alpha)K_x(\frac{\partial}{\partial x^k})(f)\big](grad\,f)^V_p\\
&= -(K(\nabla_X U))^V_p + \frac{1}{2}(R(u,K(u))X)^H_p + \frac{1}{2}K_x(u)(f)(R(u,grad\,f)X)^H_p\\
&\quad +(\nabla_X K(U))^V_p + \frac{1}{2}K_x(u)(f)(\nabla_X grad\,f)^V_p\\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[g_x(K(u),\nabla_X grad\,f) - \frac{1}{2}X_x(\alpha)K_x(u)(f)\big](grad\,f)^V_p\\
&= \frac{1}{2}(R(u,K(u))X)^H_p + \frac{1}{2}g_x(K(u),grad\,f)(R(u,grad\,f)X)^H_p\\
&\quad +((\nabla_X K)(U))^V_p + \frac{1}{2}g_x(K(u),grad\,f)(\nabla_X grad\,f)^V_p\\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[g_x(K(u),\nabla_X grad\,f) - \frac{1}{2}X_x(\alpha)g_x(K(u),grad\,f)\big](grad\,f)^V_p\\
&= \frac{1}{2}(R(u,K(u))X)^H_p + \frac{1}{2}g_x(K(u),grad\,f)(R(u,grad\,f)X)^H_p\\
&\quad +V(\nabla_X K)_p + \frac{1}{2}g_x(K(u),grad\,f)(\nabla_X grad\,f)^V_p\\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[g_x(K(u),\nabla_X grad\,f) - \frac{1}{2}X_x(\alpha)g_x(K(u),grad\,f)\big](grad\,f)^V_p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\ (\nabla^f_{X^V} HK)_p &= \Big[\nabla^f_{X^V} y^k (K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H\Big]_p \\
&= \Big[X^V(y^k)(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H + y^k \nabla^f_{X^V} K(\frac{\partial}{\partial_k})^H\Big]_p \\
&= X^k (K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H_p + \frac{u^k}{2}(R(u,X)K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H_p \\
&\quad + \frac{u^k}{2} X_x(f)(R(u, grad\, f)K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^H_p + \frac{u^k}{2} X_x(f)(\nabla_{K(\frac{\partial}{\partial x^k})} grad\, f)^V_p \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[u^k g_x(X, \nabla_{K(\frac{\partial}{\partial x^k})} grad\, f) - \frac{u^k}{2} K_x(\frac{\partial}{\partial x^k})(\alpha) X_x(f)\big](grad\, f)^V_p \\
&= (K(X))^H_p + \frac{1}{2}(R(u,X)K(u))^H_p + \frac{1}{2} X_x(f)(R(u, grad\, f)K(u))^H_p \\
&\quad + \frac{1}{2} X_x(f)(\nabla_{K(U)} grad\, f)^V_p \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[g_x(X, \nabla_{K(U)} grad\, f) - \frac{1}{2} K_x(u)(\alpha) X_x(f)\big](grad\, f)^V_p \\
&= (K(X))^H_p + \frac{1}{2}\big(R(u,X)K(u)\big)^H_p + \frac{1}{2} X_x(f)\big(R(u, grad\, f)K(u)\big)^H_p \\
&\quad + \frac{1}{2} X_x(f)(\nabla_{K(U)} grad\, f)^V_p \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[g_x(K(u), \nabla_X grad\, f) - \frac{1}{2} g_x(K(u), grad\, \alpha) X_x(f)\big](grad\, f)^V_p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\ (\nabla^f_{X^V} VK)_p &= \Big[\nabla^f_{X^V} y^k (K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V\Big]_p \\
&= \Big[X^V(y^k)(K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V + y^k \nabla^f_{X^V} K(\frac{\partial}{\partial_k})^V\Big]_p \\
&= X^k (K(\frac{\partial}{\partial x^k}))^V_p - \frac{u^k}{2} X_x(f)(\nabla_{K(\frac{\partial}{\partial x^k})} grad\, f)^H_p \\
&\quad - \frac{u^k}{2} K_x(\frac{\partial}{\partial x^k})(f)(\nabla_X grad\, f)^H_p \\
&= (K(X))^V_p - \frac{1}{2} X_x(f)(\nabla_{K(U)} grad\, f)^H_p - \frac{1}{2} K_x(u)(f)(\nabla_X grad\, f)^H_p \\
&= (K(X))^V_p - \frac{1}{2} X_x(f)(\nabla_{K(U)} grad\, f)^H_p - \frac{1}{2} g_x(K(u), grad\, f)(\nabla_X grad\, f)^H_p
\end{aligned}
$$

■

3.3 Courbures de la métrique de Mus-Gradient

Théorème 3.3.1
Soient (M,g) une variété Riemannienne et $(TM,g^f))$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Si R (resp R^f dénote le tenseur de courbure associé à (M,g) (resp (TM,g^f)), alors :

$$
\begin{aligned}
1) R_p^f(X^H,Y^H)Y^H =& (R_x(X,Y)Y)^H + \frac{3}{4}(R_x(u,R(X,Y)u)Y)^H \\
&+ \frac{3}{4} g_x(R(X,Y)u, \operatorname{grad} f)(R_x(u,\operatorname{grad} f)Y)^H \\
&+ \frac{1}{2}((\nabla_Y R)(X,Y)u)_p^V + \frac{3}{4} g_x(R(X,Y)u,\operatorname{grad} f)(\nabla_Y \operatorname{grad} f)_p^V \\
&+ \frac{3}{8\alpha}\big[2g_x(R(X,Y)u,\nabla_Y \operatorname{grad} f) - Y_x(\alpha) g_x(R(X,Y)u,\operatorname{grad} f))\big](\operatorname{grad} f)_p^V.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
2) R_p^f(X^H,Y^V)Y^V =& - Y_x(f)(\nabla_X\nabla_Y \operatorname{grad} f)_p^H - \frac{1}{4}Y_x(f)\big(R_x(u,Y+\operatorname{grad} f)R(u,Y)X\big)^H \\
&- \frac{1}{2}Y_x(f)(R_x(Y,\operatorname{grad} f)X)^H - \frac{1}{4}Y_x(f)(R_x(u,Y+Y(f)\operatorname{grad} f)R(u,\operatorname{grad} f)X)^H \\
&+ \frac{1}{4}Y_x^2(f)(\nabla_{(\nabla_X \operatorname{grad} f)} \operatorname{grad} f)_p^H + Y_x(f)(\nabla_{(\nabla_X Y)} \operatorname{grad} f)_p^H \\
&+ \frac{Y_x(f)}{8\alpha}\big[g_x(Y,\nabla_X \operatorname{grad} f - \frac{1}{2}X(\alpha)\operatorname{grad} f)\big](\operatorname{grad}\alpha)_p^H \\
&+ \big[\frac{1}{8\alpha}X_x(\alpha)Y_x(f) - \frac{1+3\alpha}{4\alpha}g_x(Y,\nabla_X \operatorname{grad} f)\big](\nabla_Y \operatorname{grad} f)_p^H \\
&+ \frac{1}{2}Y_x(f)(R_x(X,\nabla_Y \operatorname{grad} f)u)^V - \frac{1}{4}Y_x(f)(\nabla_{(R(u,Y+Y(f)\operatorname{grad} f)X)} \operatorname{grad} f)_p^V \\
&+ \frac{1}{8\alpha}g_x\big(R(u,Y+Y(f)\operatorname{grad} f)X, Y(f)\operatorname{grad}\alpha - \nabla_Y \operatorname{grad} f\big)(\operatorname{grad} f)_p^V.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
3) - R_p^f(X^V,Y^H)Y^H =& \frac{1}{2}((\nabla_Y R)_x(u,X)Y)^H + \frac{1}{2}X_x(f)((\nabla_Y R)_x(u,\operatorname{grad} f)Y)^H \\
&+ \frac{3}{4}X_x(f)(R_x(u,\nabla_Y \operatorname{grad} f)Y)^H + \frac{3}{4}g_x(X,\nabla_Y \operatorname{grad} f)(R_x(u,\operatorname{grad} f)Y)^H \\
&+ \frac{1}{2}X_x(f)\big[\nabla_Y\nabla_Y \operatorname{grad} f - \nabla_{(\nabla_Y Y)} \operatorname{grad} f\big]_p^V \\
&- \frac{1}{4}\big(R_x(Y,R(u,(X+X(f)\operatorname{grad} f))Y)u\big)^V \\
&+ \big[\frac{3\alpha+1}{4\alpha}g_x(X,\nabla_Y \operatorname{grad} f) - \frac{1}{8\alpha}X_x(f)Y_x(\alpha)\big](\nabla_Y \operatorname{grad} f)_p^V \\
&+ \big[\frac{1}{4\alpha}X_x(f)\|\nabla_Y \operatorname{grad} f\|^2 + \frac{1}{2\alpha}g_x\big(\nabla_Y\nabla_Y \operatorname{grad} f - \nabla_{(\nabla_Y Y)} \operatorname{grad} f, X\big) \\
&- \frac{1}{4\alpha}X_x(f)g_x(Y,\nabla_Y \operatorname{grad}\alpha) - \frac{1}{8\alpha^2}X_x(f)(Y_x(\alpha))^2 \\
&- \frac{3\alpha+2}{8\alpha^2}Y_x(\alpha)g_x(X,\nabla_Y \operatorname{grad} f)\big](\operatorname{grad} f)_p^V.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
4) R^f_p(X^V,Y^V)Y^V =& \frac{1}{4}(R_x(u,Y)(\nabla_{\left(X(f)Y+Y(f)X\right)} \operatorname{grad} f))^H - \frac{1}{2}Y_x(f)(R_x(u,X)(\nabla_Y \operatorname{grad} f))^H \\
&+ \frac{1}{4}Y_x(f)\big(R_x(u, \operatorname{grad} f)(\nabla_{\left(Y(f)X-X(f)Y\right)} \operatorname{grad} f)\big)^H \\
&+ \frac{1}{8\alpha}g_x\big(\nabla_{\left(X(f)Y-Y(f)X\right)} \operatorname{grad} f, (Y(f) \operatorname{grad} \alpha + 2\nabla_Y \operatorname{grad} f)\big)(\operatorname{grad} f)^V_p \\
&+ \frac{1}{4}Y_x(f)\big(\nabla_{(\nabla_{\left(Y(f)X-X(f)Y\right)} \operatorname{grad} f)} \operatorname{grad} f\big)^V_p
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

pour tout $p=(x,u)\in TM$ *et* , $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$.

Dans la suite on note $Q^f(V,W)$ le carré de l'aire du parallélogramme de côtés V et W pour $V,W\in\Gamma(TTM)$

$$Q^f(V,W) = g^f(V,V)g^f(W,W) - |g^f(V,W)|^2. \tag{3.7}$$

Soit G^f un tenseur de type $(2,0)$ sur le fibré tangent TM, pour $V,W\in\Gamma(TTM)$ donné par

$$G^f(V,W) = g^f(R^f(V,W)W,V). \tag{3.8}$$

$$K^f(V,W) = \frac{G^f(V,W)}{Q^f(V,W)}$$

Lemme 3.3.1
Soit (M,g) une variété Riemannienne et $(TM,g^f))$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Alors, pour tous champs de vecteurs orthonormés $X,Y\in\Gamma(TM)$ on a :

1) $Q^f(X^H,Y^H) = 1$
2) $Q^f(X^H,Y^V) = 1+|Y(f)|^2$
3) $Q^f(X^V,Y^V) = 1+|X(f)|^2+|Y(f)|^2$

Preuve.
L'énoncé est une conséquence directe de la définition 3.1.1 est de l'equation (3.7). ∎

Lemme 3.3.2
Soit (M,g) une variété Riemannienne et $(TM,g^f))$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Alors, pour tous champs de vecteurs orthonormés $X,Y\in\Gamma(TM)$ on a :

1) $G^f(X^H,Y^H) = g(R(X,Y)Y,X) - \frac{3}{4}\|R(X,Y)u\|^2 - \frac{3}{4}|g(R(X,Y)u, grad\ f)|^2$

$$
\begin{aligned}
2)\ G^f(X^H,Y^V) =& Y(f)\big[g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \nabla_X Y) - g(\nabla_X \nabla_Y \operatorname{grad} f, X) \\
&+ \frac{1}{4\alpha} X(\alpha) g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y) + \frac{1}{2} g(R(u,Y)X, R(u, \operatorname{grad} f)X)\big] \\
&+ |Y(f)|^2 \big[\frac{1}{4}\|R(u,\operatorname{grad} f)X\|^2 + \frac{1}{4}\|\nabla_X \operatorname{grad} f\|^2 - \frac{1}{16\alpha}|X(\alpha)|^2\big] \\
&+ \frac{1}{4}\|R(u,Y)X\|^2 - \frac{3\alpha+1}{4\alpha}|g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\ G^f(X^V,Y^V) =& \frac{1}{4}|Y(f)|^2\|\nabla_X \operatorname{grad} f\|^2 + \frac{1}{4}|X(f)|^2\|\nabla_Y \operatorname{grad} f\|^2 \\
&- \frac{1}{2} X(f)Y(f) g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \nabla_Y \operatorname{grad} f)
\end{aligned}
$$

Preuve.
L'énoncé est une conséquence directe de la définition 3.1.1, théorème 3.3.1 est de l'equation (3.8). ∎

Proposition 3.3.1
Soit (M,g) une variété Riemannienne et $(TM, g^f))$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Si K (resp., K^f) désigne la courbure sectionnelle de (M,g) (resp., (TM, g^f)), alors pour tous champs de vecteurs orthonormés $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a :

$$
1)\ K^f(X^H,Y^H) = K(X,Y) - \frac{3}{4}\|R(X,Y)u\|^2 - \frac{3}{4}|g(R(X,Y)u, grad\ f)|^2
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ K^f(X^H,Y^V) =& \frac{Y(f)}{1+|Y(f)|^2}\big[g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \nabla_X Y) - g(\nabla_X \nabla_Y \operatorname{grad} f, X) \\
&+ \frac{1}{4\alpha} X(\alpha) g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y) + \frac{1}{2} g(R(u,Y)X, R(u, \operatorname{grad} f)X)\big] \\
&+ \frac{|Y(f)|^2}{1+|Y(f)|^2} \big[\frac{1}{4}\|R(u,\operatorname{grad} f)X\|^2 + \frac{1}{4}\|\nabla_X \operatorname{grad} f\|^2 - \frac{1}{16\alpha}|X(\alpha)|^2\big] \\
&+ \frac{1}{1+|Y(f)|^2}\big[\frac{1}{4}\|R(u,Y)X\|^2 - \frac{3\alpha+1}{4\alpha}|g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)|^2\big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\ K^f(X^V,Y^V) =& \frac{1}{1+|X(f)|^2+|Y(f)|^2}\Big[- \frac{1}{2} X(f)Y(f) g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \nabla_Y \operatorname{grad} f) \\
&+ \frac{1}{4}|Y(f)|^2\|\nabla_X \operatorname{grad} f\|^2 + \frac{1}{4}|X(f)|^2\|\nabla_Y \operatorname{grad} f\|^2\Big]
\end{aligned}
$$

Preuve.
La division de $G^f(X^i,Y^j)$ par $Q^f(X^i,Y^j)$ pour $i,j \in \{H,V\}$ donne le résultat. ∎

Proposition 3.3.2
Soit (M,g) une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante λ et $(TM, g^f))$ son fibré tangent équipé de la métrique de la métrique de Mus-Gradient. Si K^f désigne la courbure

sectionnelle de (TM, g^f), alors pour tous champs vecteurs orthonormés $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a :

1) $K^f(X^H, Y^H) = \lambda - \dfrac{3\lambda^2}{4}\big[|g(X,u)|^2 + |g(Y,u)|^2| + |X(f)g(Y,u) - Y(f)g(X,u)|^2\big]$

2)
$$\begin{aligned}K^f(X^H, Y^V) =& \frac{\lambda^2}{4(1+|Y(f)|^2)}\Big[2|Y(f)|^2|g(X,u)|^2 - 2X(f)Y(f)g(X,u)g(Y,u)\\
&+ |g(X,u)|^2 + |X(f)|^2|Y(f)|^2\|u\|^2 - 2X(f)|Y(f)|^2u(f)g(X,u)\\
&+ (\alpha-1)|Y(f)|^2|g(X,u)|^2\Big] - \frac{3\alpha+1}{4\alpha(1+|Y(f)|^2)}|g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)|^2\\
&+ \frac{|Y(f)|^2}{1+|Y(f)|^2}\big[\frac{1}{4}\|\nabla_X \operatorname{grad} f\|^2 - \frac{1}{16\alpha}|X(\alpha)|^2\big]\\
&+ \frac{Y(f)}{1+|Y(f)|^2}\big[g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \nabla_X Y) - g(\nabla_X\nabla_Y \operatorname{grad} f, X)\\
&+ \frac{1}{4\alpha}X(\alpha)g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)\big]\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}K^f(X^V, Y^V) =& \frac{1}{1+|X(f)|^2+|Y(f)|^2}\Big[-\frac{1}{2}X(f)Y(f)g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \nabla_Y \operatorname{grad} f)\\
&+ \frac{1}{4}|Y(f)|^2\|\nabla_X \operatorname{grad} f\|^2 + \frac{1}{4}|X(f)|^2\|\nabla_Y \operatorname{grad} f\|^2\Big]\end{aligned}$$

Preuve.
La preuve de la proposition 3.3.2 est déduite de la proposition 3.3.1 est des equations suivantes :

$$R(X,Y)Z = \lambda\big[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big]\ ,\ \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

$$\begin{aligned}\|R(X,Y)u\|^2 &= \|\lambda\big[g(Y,u)X - g(X,u)Y\big]\|^2\\
&= \lambda^2\big[|g(X,u)|^2 + |g(Y,u)|^2\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|g(R(X,Y)u, grad\ f)|^2 &= |g(\lambda\big[g(Y,u)X - g(X,u)Y\big], \operatorname{grad} f)|^2\\
&= \lambda^2|X(f)g(Y,u) - Y(f)g(X,u)|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(R(u,Y)X, R(u, grad\ f)X) &= \lambda^2 g(g(X,Y)u - g(u,X)Y, g(X, \operatorname{grad} f)u - g(u,X)\operatorname{grad} f)\\
&= \lambda^2\big[Y(f)|g(X,u)|^2 - X(f)g(X,u)g(Y,u)\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|R(u,Y)X\|^2 &= \|\lambda\big[g(Y,X)u - g(u,X)Y\big]\|^2\\
&= \lambda^2|g(u,X)|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|R(u, \operatorname{grad} f)X\|^2 &= \|\lambda\big[g(\operatorname{grad} f, X)u - g(u,X)\operatorname{grad} f\big]\|^2\\
&= \lambda^2\big[|X(f)|^2\|u\|^2 - 2X(f)U(f)g(X,u) + (\alpha-1)|g(X,u)|^2\big]\end{aligned}$$

■

Lemme 3.3.3
Soit $(E_1, ..., E_m)$ *une base locale orthonormée de champs de vecteurs sur* (M, g). *Si* $\operatorname{grad} f \neq 0$ *on pose :*
$E_1 = \dfrac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$, $F_i = E_i^H$, $F_{m+1} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} E_1^V$ *et* $F_{m+j} = E_j^V$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{2, m}$.
Alors :
1) $(F_1, ..., F_{2m})$ *est une base locale orthonormée sur* (TM, g^f),
2) $Q^f(F_a, F_b) = 1$, $K^f(F_a, F_b) = G^f(F_a, F_b)$, $a, b = \overline{1, 2m}$,
3) $E_1(f) = \sqrt{\alpha - 1}$, $E_j(f) = 0$, $j = \overline{2, m}$,
4) $g(\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = \dfrac{1}{2} E_i(\alpha)$, $i = \overline{1, m}$,
5) $\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f = \dfrac{1}{2} \operatorname{grad} \alpha$,
6) $g(\nabla_{E_i} \nabla_{grad\, f} grad\ f, E_i) = \dfrac{1}{2} g(\nabla_{E_i} grad\ \alpha, E_i)$, $i = \overline{1, m}$.

Lemme 3.3.4
Soit (M, g) *une variété Riemannienne* $(TM, g^f))$ *son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Si* $(E_1, ..., E_m)$ *(resp.,* $(F_1, ..., F_m)$*) une base locale orthonormée sur* M *(resp.,* TM*), alors pour tout* $i, j = \overline{1, m}$ *et* $k, l = \overline{2, m}$, *on a :*

1) $K^f(F_i, F_j) = K(E_i, E_j) - \dfrac{3}{4}\|R(E_i, E_j)u\|^2 - \dfrac{3}{4}|g(R(E_i, E_j)u, \operatorname{grad} f)|^2$

2)
$$K^f(F_i, F_{m+1}) = \frac{\alpha + 3}{4\alpha}\|\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f\|^2 - \frac{\alpha^2 - \alpha + 4}{16\alpha^2(\alpha - 1)}|E_i(\alpha)|^2 + \frac{\alpha}{4(\alpha - 1)}\|R(u, \operatorname{grad} f)E_i\|^2 - \frac{1}{2\alpha} g(\nabla_{E_i} grad\ \alpha, E_i)$$

3) $K^f(F_i, F_{m+l}) = \dfrac{1}{4}\|R(u, E_l)E_i\|^2 - \dfrac{3\alpha + 1}{4\alpha}|g(\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_l)|^2$

4) $K^f(F_{m+k}, F_{m+1}) = \dfrac{\alpha - 1}{4\alpha}\|\nabla_{E_k} \operatorname{grad} f\|^2$

5) $K^f(F_{m+k}, F_{m+l}) = 0$

Preuve.
En utilisant la proposition 3.3.1 et le lemme 3.3.3.

1) Application directe.

$$
\begin{aligned}
2)\ K^f(F_i, F_{m+1}) =& G^f\Big(E_i^H, \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}(\operatorname{grad} f)^V\Big)\\
=& \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} G^f\big(E_i^H, (\operatorname{grad} f)^V\big)\\
=& \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\Bigg[(\alpha-1)\Big[g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \nabla_{E_i}\operatorname{grad} f) - g(\nabla_{E_i}\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f, E_i)\\
&+ \frac{1}{4\alpha}E_i(\alpha) g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) + \frac{1}{2} g(R(u, \operatorname{grad} f)E_i, R(u, \operatorname{grad} f)E_i)\Big]\\
&+ (\alpha-1)^2\Big[\frac{1}{4}\|R(u, \operatorname{grad} f)E_i\|^2 + \frac{1}{4}\|\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f\|^2 - \frac{1}{16\alpha}|E_i(\alpha)|^2\Big]\\
&+ \frac{1}{4}\|R(u, \operatorname{grad} f)E_i\|^2 - \frac{3\alpha+1}{4\alpha} g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\Big]\Bigg]\\
=& \frac{\alpha+3}{4\alpha}\|\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f\|^2 - \frac{\alpha^2-\alpha+4}{16\alpha^2(\alpha-1)}|E_i(\alpha)|^2\\
&+ \frac{\alpha}{4(\alpha-1)}\|R(u, \operatorname{grad} f)E_i\|^2 - \frac{1}{2\alpha} g(\nabla_{E_i} grad\ \alpha, E_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\ K^f(F_i, F_{m+l}) =& K^f(E_i^H, E_l^V)\\
=& \frac{1}{4}\|R(u, E_l)E_i\|^2 - \frac{3\alpha+1}{4\alpha}|g(\nabla_{E_i} grad\ f, E_l)|^2\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\ K^f(F_{m+k}, F_{m+1}) =& G^f\Big(E_k^V, \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}(\operatorname{grad} f)^V\Big)\\
=& \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} G^f\big(E_k^H, (\operatorname{grad} f)^V\big)\\
=& \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\frac{(\alpha-1)^2}{4}\|\nabla_{E_k}\operatorname{grad} f\|^2\\
=& \frac{\alpha-1}{4\alpha}\|\nabla_{E_k}\operatorname{grad} f\|^2
\end{aligned}
$$

5) application directe. ∎

Lemme 3.3.5
Soit $(E_1, ..., E_m)$ une base locale orthonormée sur M, alors pour tout $i, j = \overline{1, m}$, on a :

$$\sum_{i,j=1}^{m} \|R(u, E_i)E_j\|^2 = \sum_{j,s=1}^{m} \|R(E_i, E_j)u\|^2.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{m}\|R(u,E_i)E_j\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{m} g(R(u,E_i)E_j, R(u,E_i)E_j)\\ &= \sum_{i,j,k,l,s=1}^{m} u_k u_l g(R(E_k,E_i)E_j,E_s)g(R(E_l,E_i)E_j,E_s)\\ &= \sum_{i,j,k,l,s=1}^{m} u_k u_l g(R(E_j,E_s)E_k,E_i)g(R(E_j,E_s)E_l,E_i)\\ &= \sum_{i,j,s=1}^{m} g(R(E_j,E_s)u, g(R(E_j,E_s)u,E_i)E_i)\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\|R(E_i,E_j)u\|^2\end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.2
Soit (M,g) une variété Riemannienne et $(TM,g^f))$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Si σ (resp., σ^f) désigne la courbure scalaire de (M,g) (resp., (TM,g^f)), alors pour toute base locale orthonormée $(E_1,...,E_m)$ sur M on a :

$$\begin{aligned}\sigma^f =&\sigma - \frac{\alpha^2-\alpha+4}{8\alpha^2(\alpha-1)}\|\operatorname{grad}\alpha\|^2\\ &-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\|R(E_i,E_j)u\|^2 - \frac{3}{4}\sum_{i,j=1}^{m}|g(R(E_i,E_j)u,\operatorname{grad} f)|^2 - \frac{3\alpha+1}{2\alpha}\sum_{i,j=1}^{m}|g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f,E_j)|^2\\ &+\frac{\alpha+1}{\alpha}\sum_i\|\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f\|^2 - \frac{1}{2}\sum_i\|R(u,\operatorname{grad} f)E_i\|^2 - \frac{1}{\alpha}\sum_i g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad}\alpha,E_i) \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Preuve.
En utilisant les lemmes 3.3.3 , 3.3.4 et 3.3.5.

$$\begin{aligned}\sigma^f &= \sum_{s,t=1}^{2m} K^f(F_s,F_t)\\ &= \sum_{i,j=1}^{m} K^f(F_i,F_j) + 2\sum_{i,j=1}^{m} K^f(F_i,F_{m+j}) + \sum_{i,j=1}^{m} K^f(F_{m+i},F_{m+j})\\ &= \sum_{i,j=1}^{m} K^f(F_i,F_j) + 2\sum_{i=1}^{m} K^f(F_i,F_{m+1}) + 2\sum_{i=1,j=2}^{m} K^f(F_i,F_{m+j}) + 2\sum_{i=1}^{m} K^f(F_{m+i},F_{m+1})\\ &\quad+\sum_{i,j=2}^{m} K^f(F_{m+i},F_{m+j})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^f =& \sum_{i,j=1}^{m} \Big[K(E_i,E_j) - \frac{3}{4}\|R(E_i,E_j)u\|^2 - \frac{3}{4}|g(R(E_i,E_j)u, \operatorname{grad} f)|^2\Big] \\
&+ 2\sum_{i=1}^{m} \Big[\frac{\alpha+3}{4\alpha}\|\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f\|^2 - \frac{\alpha^2-\alpha+4}{16\alpha^2(\alpha-1)}|E_i(\alpha)|^2 \\
&+ \frac{\alpha}{4(\alpha-1)}\|R(u, \operatorname{grad} f)E_i\|^2 - \frac{1}{2\alpha} g(\nabla_{E_i} grad\ \alpha, E_i)\Big] \\
&+ 2\sum_{i=1,j=2}^{m} \Big[\frac{1}{4}\|R(u,E_j)E_i\|^2 - \frac{3\alpha+1}{4\alpha}|g(\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j)|^2\Big] \\
&+ 2\sum_{i=2}^{m} \frac{\alpha-1}{4\alpha}\|\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f\|^2
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\sigma - \frac{3}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\|R(E_i,E_j)u\|^2 - \frac{3}{4}\sum_{i,j=1}^{m}|g(R(E_i,E_j)u, \operatorname{grad} f)|^2 \\
&+ \frac{\alpha+3}{2\alpha}\sum_{i=1}^{m}\|\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f\|^2 - \frac{\alpha^2-\alpha+4}{8\alpha^2(\alpha-1)}\sum_{i=1}^{m}|E_i(\alpha)|^2 \\
&+ \frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\sum_{i=1}^{m}\|R(u, \operatorname{grad} f)E_i\|^2 - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i} \operatorname{grad} \alpha, E_i) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1,j=2}^{m}\|R(u,E_j)E_i\|^2 - \frac{3\alpha+1}{2\alpha}\sum_{i,j=2}^{m} g(\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j)|^2 + \frac{\alpha-1}{2\alpha}\sum_{i=1}^{m}\|\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f\|^2
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\sigma - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\|R(E_i,E_j)u\|^2 - \frac{3}{4}\sum_{i,j=1}^{m}|g(R(E_i,E_j)u,\operatorname{grad} f)|^2\\
&+\frac{\alpha+1}{\alpha}\sum_{i=1}^{m}\|\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f\|^2 - \frac{\alpha^2-\alpha+4}{8\alpha^2(\alpha-1)}\sum_{i=1}^{m}|E_i(\alpha)|^2\\
&+\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\sum_{i=1}^{m}\|R(u,\operatorname{grad} f)E_i\|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\|R(u,E_1)E_i\|^2\\
&-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{m}g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad}\alpha,E_i) - \frac{3\alpha+1}{2\alpha}\sum_{i,j=1}^{m}g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f,E_j)|^2\\
=&\sigma - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\|R(E_i,E_j)u\|^2 - \frac{3}{4}\sum_{i,j=1}^{m}|g(R(E_i,E_j)u,\operatorname{grad} f)|^2\\
&-\frac{3\alpha+1}{2\alpha}\sum_{i,j=1}^{m}|g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f,E_j)|^2 - \frac{\alpha^2-\alpha+4}{8\alpha^2(\alpha-1)}\|\operatorname{grad}\alpha\|^2\\
&+\frac{\alpha+1}{\alpha}\|\nabla\operatorname{grad} f\|^2 - \frac{1}{2}trace_g(R(u,\operatorname{grad} f)^2) - \frac{1}{\alpha}trace_g(\nabla\operatorname{grad}\alpha)
\end{aligned}
$$

■

Corollaire 3.3.1
Soit (M,g) une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante λ et $(TM,g^f))$ son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Si σ^f désigne la courbure scalaire de (TM,g^f), alors pour toute base locale orthonormée $(E_1,...,E_m)$ sur M on a :

$$
\begin{aligned}
\sigma^f =&m(m-1)\lambda + \lambda^2\Big[\frac{2\alpha-m-1}{2}\|u\|^2 - |g(u,\operatorname{grad} f)|^2\Big]\\
&-\frac{3\alpha+1}{2\alpha}\sum_{i,j=1}^{m}|g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f,E_j)|^2 - \frac{\alpha^2-\alpha+4}{8\alpha^2(\alpha-1)}\|\operatorname{grad}\alpha\|^2\\
&+\frac{\alpha+1}{\alpha}\|\nabla\operatorname{grad} f\|^2 - \frac{1}{\alpha}trace_g(\nabla\operatorname{grad}\alpha)
\end{aligned}
$$

Preuve.
Du fait que : $\sigma = m(m-1)\lambda$ et pour tous champs de vecteurs $X,Y,Z\in TM$

$$R(X,Y)Z = \lambda(g(Z,Y)X - g(X,Z)Y)$$

alors :

$$\sum_{i,j=1}^{m}\|R(E_i,E_j)u\|^2 =2(m-1)\lambda^2\|u\|^2 \tag{3.12}$$

$$\sum_{i,j=1}^{m}|g(R(E_i,E_j)u,\operatorname{grad} f)|^2 = 0 \tag{3.13}$$

$$trace_g(R(u, \operatorname{grad} f)^2) = -2\lambda^2\Big[(\alpha-1)\|u\|^2 - |g(u, \operatorname{grad} f)|^2\Big] \tag{3.14}$$

Du théorème (3.3.2) et des formules (3.12), (3.13) et (3.14) on déduit

$$\begin{aligned}\sigma^f =& m(m-1)\lambda + \lambda^2\Big[\frac{2\alpha-m-1}{2}\|u\|^2 - |g(u, \operatorname{grad} f)|^2\Big]\\ &- \frac{3\alpha+1}{2\alpha}\sum_{i,j=1}^{m}|g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, E_j)|^2 - \frac{\alpha^2-\alpha+4}{8\alpha^2(\alpha-1)}\|\operatorname{grad}\alpha\|^2\\ &+ \frac{\alpha+1}{\alpha}\|\nabla\operatorname{grad} f\|^2 - \frac{1}{\alpha}trace_g(\nabla\operatorname{grad}\alpha)\end{aligned}$$

■

3.4 Biharmonicité de la métrique de Mus-Gradient

Soit $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application differentiable entre deux variétés Riemannienne, alors la fonctionnelle energie est définie par

$$E(\phi) = \int_K e(\phi)dv_g \tag{3.15}$$

sur tout compact $K \subset M$.

$$e(\phi) = \frac{1}{2}trace_g(\phi^* h) = \frac{1}{2}trace_g h(d\phi, d\phi) \tag{3.16}$$

est la densité de ϕ.

Une application est dite harmonique si c'est un point critique de la fonctionnelle énergie. Pour tout variation $\{\phi_t\}_{t\in I}$ de ϕ avec $\phi_0 = \phi$ et $V = \frac{d}{dt}\phi_t\Big|_{t=0}$, on a

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t)\Big|_{t=0} = -\int_K h(\tau(\phi), V)dv_g \tag{3.17}$$

où

$$\tau(\phi) = trace_g \nabla d\phi \tag{3.18}$$

est le champ de tension de ϕ. Alors ϕ est harmonique si et seulement si $\tau(\phi) = 0$.

Le champ bitension de φ est donné par

$$\tau_2(\varphi) \;=\; -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g\big(\nabla^\varphi\nabla^\varphi\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M}\tau(\varphi)\big). \tag{3.19}$$

et φ est dite biharmonique si et seulement si $\tau_2(\varphi) = 0$

Lemme 3.4.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne et $(TM, g^S))$ sont fibré tangent équipé de la métrique de Sasaki alors la projection canonique $\pi : (TM, g^S) \mapsto (M, g)$ est harmonique.*

Théorème 3.4.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, $f : M \to]0, +\infty[$ telle que $f \in C^\infty(M)$ et $(TM, g^f))$ sont fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient.alors le champ de tension de la projection canonique $\pi : (TM, g^f) \mapsto (M, g)$ est donnée par*

$$\tau^f(\pi) = \frac{1}{\alpha}\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f = \frac{\operatorname{grad}\alpha}{2\alpha} \tag{3.20}$$

et π est harmonique si et seulement si $\|\operatorname{grad} f\| = Const.$

Preuve. Du lemme 3.3.3, si $(E_1, ..., E_m)$ est une base orthonormée sur (M, g) tel que $E_1 = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$, alors $(E_1^H, ..., E_m^H, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_1^V, ..., E_m^V)$ est une base orthonormée sur (TM, g^f). Du théorème 3.2.1 on a

$$\begin{aligned}
\tau^f(\pi) &= \sum_{i=1}^m \nabla_{E_i}E_i - \sum_{i=1}^m d\pi(\nabla^f_{E_i^H}E_i^H) - \sum_{i=2}^m d\pi(\nabla^f_{E_i^V}E_i^V) - \frac{1}{\alpha}d\pi(\nabla^f_{E_1^V}E_1^V)\\
&= \sum_{i=2}^m E_i(f)\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f + \frac{1}{\alpha}E_1(f)\nabla_{E_1}\operatorname{grad} f\\
&= \nabla_{\sum_{i=1}^m E_i(f)E_i}\operatorname{grad} f + \frac{1-\alpha}{\alpha}E_1(f)\nabla_{E_1}\operatorname{grad} f\\
&= \nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f + \frac{1-\alpha}{\alpha}E_1(f)\nabla_{E_1}\operatorname{grad} f\\
&= \nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f + \frac{1-\alpha}{\alpha}\|\operatorname{grad} f\|\nabla_{\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}}\operatorname{grad} f\\
&= \nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f + \frac{1-\alpha}{\alpha}\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f\\
&= \frac{1}{\alpha}\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f\\
&= \frac{\operatorname{grad}\alpha}{2\alpha}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.4.2 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, f une fonction de classe C^∞ sur M tel que $\operatorname{grad} f \neq 0$ en tout point sur M, et (TM, g^f) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Alors la projection canonique $\pi : (TM, g^f) \longrightarrow (M, g)$ est biharmonique si et seulement si*

$$\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad}\ln\alpha) + \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\Delta\ln\alpha) + \frac{1}{8}\operatorname{grad}(\|\operatorname{grad}\ln\alpha\|^2) = 0. \tag{3.21}$$

Preuve. Soit $(E_1, ..., E_m)$ est une base orthonormée sur (M, g) tel que $E_1 = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$, de sorte que $(E_1^H, ..., E_m^H, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_1^V, ..., E_m^V)$ est une base orthonormée sur (TM, g^f). Puisque $d\pi(X^H) = X$ et $d\pi(X^V) = 0$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on obtient

$$-\operatorname{trace}_{g^f} R(\tau(\pi), d\pi)d\pi = -\frac{1}{2\alpha}\sum_{i=1}^m R(\operatorname{grad}\alpha, E_i)E_i,$$

Par la definition du tenseur de Ricci de (M, g) avec $\frac{1}{\alpha}\operatorname{grad}\alpha = \operatorname{grad}\ln\alpha$, on a

$$-\operatorname{trace}_{g^f} R(\tau(\pi), d\pi)d\pi = -\frac{1}{2}\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad}\ln\alpha).$$

le terme $-\operatorname{trace}_{g^f}\nabla^{\pi}\nabla^{\pi}\tau(\pi)$ est donné par

$$\begin{aligned} -\operatorname{trace}_{g^f}\nabla^{\pi}\nabla^{\pi}\tau(\pi) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla^{\pi}_{E_i^H}\nabla^{\pi}_{E_i^H}\operatorname{grad}\ln\alpha \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}\ln\alpha. \end{aligned}$$

Pour le dernier terme $\operatorname{trace}_{g^f}\nabla^{\pi}_{\nabla^f}\tau(\pi)$ on a

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}_{g^f}\nabla^{\pi}_{\nabla^f}\tau(\pi) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla^{\pi}_{\nabla^f_{E_i^H}E_i^H}\operatorname{grad}\ln\alpha + \frac{1}{2\alpha}\nabla^{\pi}_{\nabla^f_{E_1^V}E_1^V}\operatorname{grad}\ln\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m}\nabla^{\pi}_{\nabla^f_{E_i^V}E_i^V}\operatorname{grad}\ln\alpha, \end{aligned} \tag{3.22}$$

Selon le théorème 3.2.1, on a

$$\begin{aligned} (\nabla^f_{E_i^H}E_i^H)_{(x,u)} &= (\nabla_{E_i}E_i)^H_x - \frac{1}{2}(R_x(E_i,E_i)u)^V = (\nabla_{E_i}E_i)^H_x, \text{ for all } 1 \le i \le m \\ (\nabla^f_{E_1^V}E_1^V)_{(x,u)} &= -E_1(f)_x(\nabla_{E_1}\operatorname{grad} f)^H_x = -(\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f)^H_x, \\ (\nabla^f_{E_i^V}E_i^V)_{(x,u)} &= -E_i(f)_x(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f)^H_x = 0, \text{ for all } 2 \le i \le m, \end{aligned}$$

où $(x, u) \in TM$. Remplaçant les dernières formules dans (3.22), avec $\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f = \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\|\operatorname{grad} f\|^2)$, on trouve que

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}_{g^f}\nabla^{\pi}_{\nabla^f}\tau(\pi) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla_{\nabla_{E_i}E_i}\operatorname{grad}\ln\alpha - \frac{1}{4\alpha}\nabla_{\operatorname{grad}(\|\operatorname{grad} f\|^2)}\operatorname{grad}\ln\alpha \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla_{\nabla_{E_i}E_i}\operatorname{grad}\ln\alpha - \frac{1}{4}\nabla_{\operatorname{grad}\ln\alpha}\operatorname{grad}\ln\alpha \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla_{\nabla_{E_i}E_i}\operatorname{grad}\ln\alpha - \frac{1}{8}\operatorname{grad}(\|\operatorname{grad}\ln\alpha\|^2). \end{aligned}$$

Notons que la projection canonique π est biharmonique si et seulement si

$$\tau_2(\pi) = -\operatorname{trace}_{g^f} R(\tau(\pi), d\pi)d\pi - \operatorname{trace}_{g^f}\left(\nabla^{\pi}\nabla^{\pi}\tau(\pi) - \nabla^{\pi}_{\nabla}\tau(\pi)\right) = 0,$$

est équivalente à :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad}\ln\alpha) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}\ln\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\nabla_{\nabla_{E_i}E_i}\operatorname{grad}\ln\alpha - \frac{1}{8}\operatorname{grad}(\|\operatorname{grad}\ln\alpha\|^2). \end{aligned}$$

Le théorème 3.4.2 découle de la dernière équation et du faite que

$$\operatorname{trace}_g \nabla^2 \operatorname{grad} \ln \alpha = \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln \alpha) + \operatorname{grad}(\Delta \ln \alpha).$$

■

Corollaire 3.4.1 *Soit (M, g) une variété d'Einstein (i.e. $\operatorname{Ricci}(X) = \lambda X$ pour tout X dans $\Gamma(TM)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$), f est une fonction positive de classe C^∞ sur M tel que $\operatorname{grad} f \neq 0$ en tout points sur M, et (TM, g^f) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-Gradient. Alors la projection canonique $\pi : (TM, g^f) \longrightarrow (M, g)$ est biharmonique si et seulement si*

$$\lambda \ln \alpha + \frac{1}{2} \Delta \ln \alpha + \frac{1}{8} \|\operatorname{grad} \ln \alpha\|^2 = Const. \tag{3.23}$$

D'après le corollaire 3.4.1, nous avons l'exemple suivant :

Exemple 3.4.1 *Soit $M = (1, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$ équipé de la métrique Riemannienne $g = dt^2 + \sum_{i=1}^{m-1} dx_i^2$. notant que, (M, g) est une variété d'Einstein avec $\lambda = 0$. On pose*

$$f(t, x) = \int \sqrt{t^4 - 1} dt, \quad \textit{pour tout } (t, x) \textit{ dans } M.$$

On a, $\operatorname{grad} f = \sqrt{t^4 - 1}\, \partial_t$, $\|\operatorname{grad} f\| = \sqrt{t^4 - 1}$, $\alpha(t, x) = t^4$, pour tout (t, x) dans M, de sorte que

$$\Delta \ln \alpha = -\frac{4}{t^2} \quad \textit{et} \quad \|\operatorname{grad} \ln \alpha\|^2 = \frac{16}{t^2}.$$

Utilisant le corollaire 3.4.1, la projection canonique $\pi : (TM, g^f) \longrightarrow (M, g)$ est biharmonique propre. Le champ de tension de π et la métrique de Mus-Gradient g^f sont donnés par :

$$\tau(\pi) = \frac{2}{t} \partial_t \quad \textit{et} \quad g^f = dt^2 + \sum_{i=1}^{m-1} dx_i^2 + t^4 dy_1^2 + \sum_{i=1}^{m-1} dy_i^2.$$

3.5 Géodésiques de la Métrique de Mus-gradient

Définition 3.5.1
Soit $x : I \to M$ une courbe sur une variété M.
On définit une courbe $C : I \to TM$ par $\forall t \in I, C(t) = (x(t), y(t))$ où $y(t) \in T_{x(t)}M$
C'est-à-dire $y(t)$ est un champ de vecteurs le long de la courbe $x(t)$.

Définition 3.5.2
Soient (M, g) une variété Riemannienne et x une courbe sur M.
Alors la courbe $C(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ est dite relèvement naturel de la courbe $x(t)$ à TM.

Définition 3.5.3
Soient (M,g) une variété Riemannienne et ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associée à g.Si $x(t)$ une courbe sur M,alors la courbe $C(t)=(x(t),y(t))$ est dite relèvement horizontal de la courbe $x(t)$ à TM si et seulement si $\nabla_{\dot{x}}y=0$.

Lemme 3.5.1
Soient (M,g) une variété Riemannienne et ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associée à g.Si $x(t)$ une courbe sur M et $C(t)=(x(t),\dot{x}(t))$ une courbe sur TM. alors

$$\dot{C}=\dot{x}^H+(\nabla_{\dot{x}}y)^V \tag{3.24}$$

Proposition 3.5.1
Soient (M,g) une variété Riemannienne et ∇ (resp. ∇^f) désigne la connexion de Levi-Civita associée à (M,g) (resp. (TM,g^f)).Si $x(t)$ une courbe sur M et $C(t)=(x(t),y(t))$ une courbe sur TM alors :

$$\begin{aligned}
\nabla^f_{\dot{C}}\dot{C} &= \Big[\nabla_{\dot{x}}\dot{x}+R(y,\nabla_{\dot{x}}y)\dot{x}+g(\nabla_{\dot{x}}y,grad\,f)R(y,grad\,f)\dot{x}\\
&- g(\nabla_{\dot{x}}y,grad\,f)\big(\nabla_{(\nabla_{\dot{x}}y)}grad\,f\big)\Big]^H\\
&+ \Big[\nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}y+g(\nabla_{\dot{x}}y,grad\,f)\nabla_{\dot{x}}grad\,f\\
&+ \frac{1}{\alpha}\Big[g(\nabla_{\dot{x}}y,\nabla_{\dot{x}}grad\,f)-g(\nabla_{\dot{x}}grad\,f,grad\,f)g(\nabla_{\dot{x}}y,grad\,f)\Big]grad\,f\Big]^V
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
\nabla^f_{\dot{C}}\dot{C} &= \nabla^f_{[\dot{x}^H+(\nabla_{\dot{x}}y)^V]}[\dot{x}^H+(\nabla_{\dot{x}}y)^V] \\
&= \nabla^f_{\dot{x}^H}\dot{x}^H + \nabla^f_{\dot{x}^H}(\nabla_{\dot{x}}y)^V + \nabla^f_{(\nabla_{\dot{x}}y)^V}\dot{x}^H + \nabla^f_{(\nabla_{\dot{x}}y)^V}(\nabla_{\dot{x}}y)^V \\
&= (\nabla_{\dot{x}}\dot{x})^H - \frac{1}{2}(R(\dot{x},\dot{x})y)^V \\
&\quad + \frac{1}{2}(R(y,\nabla_{\dot{x}}y)\dot{x})^H + \frac{1}{2}(\nabla_{\dot{x}}y)(f)(R(y,grad\, f)\dot{x})^H \\
&\quad + (\nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}y)^V + \frac{1}{2}(\nabla_{\dot{x}}y)(f)(\nabla_{\dot{x}}grad\, f)^V \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[g(\nabla_{\dot{x}}y,\nabla_{\dot{x}}grad\, f) - \frac{1}{2}\dot{x}(\alpha)(\nabla_{\dot{x}}y)(f)\big](grad\, f)^V \\
&\quad + \frac{1}{2}(R(y,\nabla_{\dot{x}}y)\dot{x})^H + \frac{1}{2}(\nabla_{\dot{x}}y)(f)(R(y,grad\, f)\dot{x})^H \\
&\quad + \frac{1}{2}(\nabla_{\dot{x}}y)(f)(\nabla_{\dot{x}}grad\, f)^V \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}\big[g(\nabla_{\dot{x}}y,\nabla_{\dot{x}}grad\, f) - \frac{1}{2}\dot{x}(\alpha)(\nabla_{\dot{x}}y)(f)\big](grad\, f)^V \\
&\quad - \frac{1}{2}(\nabla_{\dot{x}}y)(f)(\nabla_{(\nabla_{\dot{x}}y)}grad\, f)^H - \frac{1}{2}(\nabla_{\dot{x}}y)(f)(\nabla_{(\nabla_{\dot{x}}y)}grad\, f)^H
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^f_{\dot{C}}\dot{C} &= (\nabla_{\dot{x}}\dot{x})^H + (R(y,\nabla_{\dot{x}}y)\dot{x})^H + (\nabla_{\dot{x}}y)(f)(R(y,grad\, f)\dot{x})^H \\
&\quad +(\nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}y)^V + (\nabla_{\dot{x}}y)(f)(\nabla_{\dot{x}}grad\, f)^V \\
&\quad +\frac{1}{\alpha}\big[g(\nabla_{\dot{x}}y,\nabla_{\dot{x}}grad\, f) - \frac{1}{2}\dot{x}(\alpha)(\nabla_{\dot{x}}y)(f)\big](grad\, f)^V \\
&\quad -(\nabla_{\dot{x}}y)(f)(\nabla_{(\nabla_{\dot{x}}y)}grad\, f)^H\Big] \\
&= \Bigg[\nabla_{\dot{x}}\dot{x} + R(y,\nabla_{\dot{x}}y)\dot{x} + g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)R(y, grad\, f)\dot{x} \\
&\quad - g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\big(\nabla_{(\nabla_{\dot{x}}y)}grad\, f\big)\Bigg]^H \\
&\quad + \Bigg[\nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}y + g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\nabla_{\dot{x}}grad\, f \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\Big[g(\nabla_{\dot{x}}y,\nabla_{\dot{x}}grad\, f) - \frac{1}{2}\dot{x}(\alpha)g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\Big]grad\, f\Bigg]^V \\
&= \Bigg[\nabla_{\dot{x}}\dot{x} + R(y,\nabla_{\dot{x}}y)\dot{x} + g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)R(y, grad\, f)\dot{x} \\
&\quad - g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\big(\nabla_{(\nabla_{\dot{x}}y)}grad\, f\big)\Bigg]^H \\
&\quad + \Bigg[\nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}y + g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\nabla_{\dot{x}}grad\, f \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\Big[g(\nabla_{\dot{x}}y,\nabla_{\dot{x}}grad\, f) - g(\nabla_{\dot{x}}grad\, f, grad\, f)g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\Big]grad\, f\Bigg]^V
\end{aligned}
$$

■

Théorème 3.5.1
Soient (M,g) une variété Riemannienne et (TM,g^f) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-gradient Si $x(t)$ une courbe sur M et $C(t)=(x(t),y(t))$ une courbe sur TM alors : $C(t)$ est une géodésique sur TM ssi

$$
\left\{
\begin{aligned}
\nabla_{\dot{x}}\dot{x} &= -R(y,\nabla_{\dot{x}}y)\dot{x} - g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)R(y, grad\, f)\dot{x} \\
&\quad +g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\big(\nabla_{(\nabla_{\dot{x}}y)}grad\, f\big) \\
\nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}y &= -g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\nabla_{\dot{x}}grad\, f \\
&\quad -\frac{1}{\alpha}\Big[g(\nabla_{\dot{x}}y,\nabla_{\dot{x}}grad\, f) - g(\nabla_{\dot{x}}grad\, f, grad\, f)g(\nabla_{\dot{x}}y, grad\, f)\Big]grad\, f
\end{aligned}
\right.
\tag{3.26}
$$

Preuve.
La preuve du Théorème (3.5.1) découle directement de la définition d'une géodésique et la proposition (3.5.1). ■

Corollaire 3.5.1
Soient (M, g) une variété Riemannienne et (TM, g^f) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-gradient. Le relèvement naturel $C(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ d'une géodésique $x(t)$ sur M est une géodésique sur TM.

Corollaire 3.5.2
Soient (M, g) une variété Riemannienne et (TM, g^f) son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-gradient et $C(t) = (x(t), y(t))$ un relèvement horizontal de la courbe $x(t)$ à TM (i.e.$\nabla_{\dot{x}} y = 0$).Alors $C(t)$ est une géodésique sur TM ssi $x(t)$ est une géodésique sur M.

Remarque 3.5.1
Si $C(t) = (x(t), y(t))$ un relèvement horizontal de la courbe x à TM.
Localement on a

$$\nabla_{\dot{x}} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \exp(-A).y_0 \ , \ y_0 \in \mathbb{R}^n, \ A = [a_{kj}] \ , \ a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k$$

Exemple 3.5.1
On considère sur $\mathbb{R}$ la métrique $g = e^x dx^2$.
Les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-cita associe à g sont

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc les géodésiques $c(t)$ telles que $c(0) = x, c'(0) = v$ de g vérifient l'équation

$$c'' + \frac{1}{2}(c')^2 = 0$$

d'où $c'(t) = \dfrac{2v}{2 + vt}$ et donc $c(t) = x + 2\ln(1 + \dfrac{vt}{2})$
Le relèvement naturel $C(t) = (c(t), \dot{c}(t))$ est géodésique sur $T\mathbb{R}$. où $\dot{c}(t) = c'(t)\dfrac{d}{dt}$

Exemple 3.5.2
On considère le demi-plan supérieur

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$$

muni de la métrique g définie par

$$g_{11} = 1 \ , \ g_{22} = y^2 \ , \ g_{12} = g_{21} = 0$$

Les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-cita associe à g sont

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0 \ , \ \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0 \ , \ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{y}$$

Soit $C(t) = (\gamma(t), \delta(t))$ un relèvement horizontal de la courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $\delta(t) = (u(t), v(t))$, alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{y'}{y} \end{pmatrix} \quad , \quad \delta(t) = (0, k\exp(\frac{y'}{y})) \quad et \quad C(t) = \big(x(t), y(t), 0, k\exp(\frac{y'}{y})\big) \ ,k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.5.3
On considère $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *muni de la métrique* h *définie par*

$$h_{11} = x^2 \ , \ h_{22} = y^2 \ , \ h_{33} = z^2 \ , \ h_{ij} = 0, \forall i \neq j \ , \ (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-cita associe à h *sont*

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{x} \ , \ \Gamma^2_{22} = \frac{1}{y} \ , \ \Gamma^3_{33} = \frac{1}{z} \ , \ \Gamma^k_{ij} = 0 \ \forall (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3 \setminus \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\}$$

Soit $C(t) = (\gamma(t), \delta(t))$ *un relèvement horizontal de la courbe* $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$
et $\delta(t) = (u(t), v(t), w(t))$, *alors*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x'}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y'}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z'}{z} \end{pmatrix} \quad , \quad \delta(t) = \big(k_1 \exp(\frac{x'}{x}), k_2 \exp(\frac{y'}{y}), k_3 \exp(\frac{z'}{z})\big)$$

$$et \quad C(t) = \big(x(t), y(t), z(t), k_1 \exp(\frac{x'}{x}), k_2 \exp(\frac{y'}{y}), k_3 \exp(\frac{z'}{z})\big) \ , \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.5.2
Soient (M, g) *une variété Riemannienne et* (TM, g^f) *son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-gradient,et* $x(t)$ *une géodésique sur* M *.Si la courbe* $C(t) = (x(t), y(t))$ *est une géodésique sur* TM *telle que* $\nabla_{\dot{x}} y \neq 0$ *alors :*

$$grad\, f = 0 \quad ou \quad \nabla_{\dot{x}} grad\, f = 0 \tag{3.27}$$

i.e f *est constante ou* $grad\, f$ *est parallèle le long de la courbe* $x(t)$.

Preuve.
Soit $x(t)$ une géodésique sur M , alors $\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0$.En utilisant la première équation de la formule (3.26) on obtient :

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \dot{x}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad g(R(y, \nabla_{\dot{x}} y)\dot{x}, \dot{x}) - g(\nabla_{\dot{x}} y, grad\, f) g(R(y, grad\, f)\dot{x}, \dot{x}) \\ &\qquad + g(\nabla_{\dot{x}} y, grad\, f) g\big(\nabla_{(\nabla_{\dot{x}} y)} grad\, f, \dot{x}\big) = 0 \\ &\Rightarrow \quad g(\nabla_{\dot{x}} y, grad\, f) g\big(\nabla_{\dot{x}} grad\, f, \nabla_{\dot{x}} y\big) = 0 \\ &\Rightarrow \quad grad\, f = 0 \ \ ou \ \ \nabla_{\dot{x}} grad\, f = 0 \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.5.3
Soient (M, g) *une variété Riemannienne et* (TM, g^f) *son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-gradient et* $x(t)$ *une courbe sur* M *et* $\nabla_{\dot{x}} grad\, f = 0$ *.Si la courbe* $C(t) = (x(t), y(t))$ *est une géodésique sur* TM *telle que* $\nabla_{\dot{x}} y \neq 0$ *Alors*

$$\begin{cases} g(\nabla_{\dot{x}} \dot{x}, \dot{x}) & = & 0 \\ \nabla_{\dot{x}} \nabla_{\dot{x}} y & = & 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

Preuve.
La preuve découle directement du Théorème (3.5.1). ■

Corollaire 3.5.4
Soient (M, g) *une variété Riemannienne et* (TM, g^f) *son fibré tangent équipé de la métrique de Mus-gradient et* $x(t)$ *une géodésique sur* M *et* $\nabla_{\dot{x}} grad\, f = 0$ *.Si la courbe* $C(t) = (x(t), y(t))$ *est une géodésique sur* TM *telle que* $\nabla_{\dot{x}} y \neq 0$ *alors :*

$$\nabla_{\dot{x}} \nabla_{\dot{x}} y = 0 \tag{3.29}$$

Preuve.
La preuve découle directement du Théorème (3.5.1). ■

Chapitre 4

Métrique de Cheeger-Gromoll généralisée

Sommaire

Dans ce chapitre on définit la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée, en donnant les formules relative aux connexions induites et des différents types de courbures [32].

4.1 Métrique de Cheeger-Gromoll généralisée

Définition 4.1.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne et $f : M \to]0, +\infty[$ une fonction de classe C^∞ strictement positive. On définit la metrique de Cheeger-Gromoll généralisée G^f sur le fibré tangent TM par*

$$\begin{aligned} G^f(X^H, Y^H)_{(x,u)} &= g_x(X, Y), \\ G^f(X^H, Y^V)_{(x,u)} &= 0, \\ G^f(X^V, Y^V)_{(x,u)} &= f(x)\omega^p(g_x(X, Y) + qg_x(X, u)g_x(Y, u)), \end{aligned}$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, et $r^2 = \|u\| = \sqrt{g(u, u)}$, avec $\omega = (1 + \|u\|^2)^{-1}$, $p, q \in \mathbb{R}$ et q positive.

Remarque 4.1.1

1. *Si $f = 1, p = q = 1$, alors G^f est la métrique de Cheeger-Gromoll.*

2. *Si* $f = 1, p = q = 0$, *alors* G^f *est la metrique de Sasaki .*
3. $G^f(X^V, U^V) = f\omega^p g(X, u)(1 + qr^2)$.
4. $G^f(U^V, U^V) = f\omega^p r^2(1 + qr^2)$.

où $X, U \in \Gamma(TM)$ *et* $U_x = u = u^i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in T_xM$ *et* $(x, u) \in TM$.

Lemme 4.1.1 *([4]) Soit* (M, g) *une variété Riemannienne et* TM *son fibré tangent. alors, pour tout* $(x, u) \in TM$ *et pour chaque fonction* h *a valeurs réelles sur* M, *on a :*

1. $X^H_{(x,u)}(h(r^2)) = 0$,
2. $X^V_{(x,u)}(h(r^2)) = 2h'(r^2)g(X, u)$,
3. $X^V(g(X, u) = g(X, Y)$,
4. $X^H(g(Y, u) = g(\nabla_X Y, u)$,
5. $X^H(g(Y, Z) = X(g(Y, Z))$.

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Lemme 4.1.2 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne et* (TM, G^f) *son fibré tangent équipé de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée, alors*

$$\begin{aligned} X^H(G^f(Y^V, Z^V)) &= \frac{X(f)}{f} G^f(Y^V, Z^V) + G^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) + G^f((\nabla_X Z)^V, Y^V), \\ X^V(G^f(Y^V, Z^V)) &= -2pf\omega^{p+1} g(X, u)\Big[g(Y, Z) + g(Y, u)g(Z, u)\Big] \\ &\quad + qf\omega^p\Big[g(X, Y)g(Z, u) + g(X, Z)g(Y, u)\Big], \end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Preuve. En utilisant le lemme 4.1.1, on a

—

$$\begin{aligned} X^H(G^f(Y^V, Z^V)) &= X^H(f)\omega^p\Big[g(Y, Z) + qg(Y, u)g(Z, u)\Big] \\ &\quad + f\omega^p X^H\Big[g(Y, Z) + qg(Y, u)g(Z, u)\Big] \\ &= X(f)\omega^p\Big[g(Y, Z) + qg(Y, u)g(Z, u)\Big] \\ &\quad + f\omega^p\Big[g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &\qquad + qg(\nabla_X Y, u)g(Z, u) + qg(\nabla_X Z, u)g(Y, u)\Big] \\ &= \frac{X(f)}{f} G^f(Y^V, Z^V) + G^f((\nabla_X Y)^V, Z^V) \\ &\quad + G^f((\nabla_X Z)^V, Y^V). \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
X^V(G^f(Y^V,Z^V)) &= X^V(\omega^p)f\Big[g(Y,Z)+qg(Y,u)g(Z,u)\Big]\\
&\quad ++f\omega^pX^V\Big[g(Y,Z)+qg(Y,u)g(Z,u)\Big]\\
&= -2pf\omega^{p+1}g(X,u)\Big[g(Y,Z)+g(Y,u)g(Z,u)\Big]\\
&\quad +qf\omega^p\Big[g(X,Y)g(Z,u)+g(X,Z)g(Y,u)\Big].
\end{aligned}$$

■

4.2 Connexion de Levi-Civita de G^f

Lemme 4.2.1 *Soit (M,g) une variété Riemannienne. Si ∇ (resp. $\overline{\nabla}$) désigne la connexion de Levi-Civita de (M,g) (resp. (TM,G^f)), alors*

1. $G^f(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H,Z^H)=G^f((\nabla_XY)^H,Z^H)$,
2. $G^f(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H,Z^V)=-\dfrac{1}{2}G^f(Z^V,(R(X,Y)u)^V)$,
3. $G^f(\overline{\nabla}_{X^H}Y^V,Z^H)=G^f(f\omega^p(R(u,Y)X)^H,Z^H)$,
4. $G^f(\overline{\nabla}_{X^H}Y^V,Z^V)=G^f(\frac{X(f)}{f}Y^V+2(\nabla_XY)^V,Z^V)$,
5. $G^f(\overline{\nabla}_{X^V}Y^H,Z^H)=G^f(\dfrac{f}{2}\omega^p(R(u,X)Y)^H,Z^H)$,
6. $G^f(\overline{\nabla}_{X^V}Y^H,Z^V)=\dfrac{Y(f)}{f}G^f\Big(Z^V,X^V)$,
7. $G^f(\overline{\nabla}_{X^V}Y^V,Z^H)=G^f(-\dfrac{1}{f}G^f(X^V,Y^V)(gradf)^H,Z^H)$,
8. $$\begin{aligned}G^f(\overline{\nabla}_{X^V}Y^V,Z^V)&=-2\frac{p\omega^{-p+1}}{f(1+qr^2)}G^f(\Big[G^f(X^V,U^V)Y^V+G^f(Y^V,U^V)X^V\Big],Z^V)\\
&\quad+2\frac{(p\omega+q)\omega^{-p}}{f(1+qr^2)}G^f(X^V,Y^V)G^f(Z^V,U^V)\\
&\quad-2\frac{q^2\omega^{-2p}}{f^2(1+qr^2)^3}G^f(X^V,U^V)G^f(Y^V,U^V)G^f(Z^V,U^V),\end{aligned}$$

pour tout $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$.

Preuve. On utilise la formule de Koszul pour la connexion de Levi-Civita $\overline{\nabla}$

$$\begin{aligned}
2G^f(\overline{\nabla}_{X^i}Y^j,Z^k) &= X^i(G^f(Y^j,Z^k))+Y^j(G^f(Z^k,X^i))-Z^k(G^f(X^i,Y^j))\\
&\quad - G^f(X^i,[Y^j,Z^k])+G^f(Y^j,[Z^k,X^i])+G^f(Z^k,[X^i,Y^j])
\end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $i, j, k \in \{H, V\}$.
Le résultat est une conséquence directe des calculs suivants en utilisant la définition 4.1.1 et le lemme 4.1.2

$$\begin{array}{rcl}
2G^f(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^H) & = & X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Zg(g(X,Y)) \\
& & -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \\
& = & 2g(\nabla_X Y\, Z) \\
& = & 2G^f((\nabla_X Y)^H, Z^H). \\
2G^f(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^V) & = & G^f(Z^V,[X^H,Y^H]) \\
& = & -G^f(Z^V,(R(X,Y)u)^V). \\
2G^f(\overline{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^H) & = & G^f(Y^V,[Z^H,X^H]) \\
& = & -G^f(Y^V,(R(Z,X)u)^V) \\
& = & G^f((R(X,Z)u)^V, Y^V) \\
& = & f\omega^p(g(R(X,Z)u,Y) + qg(R(X,Z)u,u).g(Y,u)) \\
& = & G^f(f\omega^p(R(u,Y)X)^H, Z^H). \\
2G^f(\overline{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^V) & = & X^H(G^f(Y^V,Z^V)) \\
& & -G^f(Y^V,(\nabla_X Z)^V) + G^f(Z^V,(\nabla_X Y)^V) \\
& = & G^f(\dfrac{X(f)}{f}Y^V + 2(\nabla_X Y)^V, Z^V). \\
2G^f(\overline{\nabla}_{X^V}Y^H, Z^H) & = & -G^f(X^V,[Y^H,Z^H]) \\
& = & G^f(X^V,(R(Y,Z)u)^V) \\
& = & f\omega^p\Big[g(R(u,X)Y,Z) + qg(R(Y,Z)u,u)g(X,u)\Big] \\
& = & G^f(f\omega^p(R(u,X)Y)^H, Z^H). \\
2G^f(\overline{\nabla}_{X^V}Y^H, Z^V) & = & Y^H(G^f(Z^V,X^V)) \\
& - & G^f(X^V,(\nabla_Y Z)^V) - G^f(Z^V,(\nabla_Y X)^V) \\
& = & Y^H(G^f(X^V,Z^V)) + G^f(X^V,(\nabla_Y Z)^V) + G^f(Z^V,(\nabla_Y X)^V) \\
& & -G^f(X^V,(\nabla_Y Z)^V) - G^f(Z^V,(\nabla_Y X)^V) \\
& = & \dfrac{Y(f)}{f}G^f(Z^V,X^V). \\
2G^f(\overline{\nabla}_{X^V}Y^V, Z^H) & = & -Z^H(G^f\Big(X^V,Y^V)) \\
& + & G^f(X^V,(\nabla_Z Y)^V) + G^f(Y^V,(\nabla_Z X)^V) \\
& = & -\dfrac{Z(f)}{f}G^f(X^V,Y^V) \\
& = & G^f(-\dfrac{1}{f}G^f(X^V,Y^V)(gradf)^H, Z^H).
\end{array}$$

Du lemme 4.1.1, on a

$$\begin{aligned}
2G^f(\overline{\nabla}_{X^V}Y^V, Z^V) &= X^V(G^f(Y^V,Z^V)+Y^V(G^f(Z^V,X^V))-Z^V(G^f(X^V,Y^V)) \\
&= -2fp\omega^{p+1}g(X,u)\left(g(Y,Z)+qg(Y,u)g(Z,u)\right) \\
&\quad +qf\omega^p(g(X,Y)g(Z,u)+g(X,Z)g(Y,u)) \\
&\quad -2fp\omega^{p+1}g(Y,u)\left(g(X,Z)+qg(X,u)g(Z,u)\right) \\
&\quad +qf\omega^p(g(X,Y)g(Z,u)+g(Y,Z)g(X,u)) \\
&\quad +2fp\omega^{p+1}g(Z,u)\left(g(Y,X)+qg(Y,u)g(X,u)\right) \\
&\quad -qf\omega^p(g(Y,Z)g(X,u)+g(X,Z)g(Y,u)) \\
&= -2fpq\omega^{p+1}g(X,u)g(Y,u)g(Z,u) \\
&\quad +2f\omega^p(p\omega+q)g(X,Y)g(Z,u) \\
&\quad -2fp\omega^{p+1}\Big[g(X,u)g(Y,Z)+g(Y,u)g(X,Z)\Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G^f(\nabla^f_{X^V}Y^V, Z^V) &= -\frac{2p\omega^{-p+1}}{f(1+qr^2)}\Big[G^f(X^V,U^V)Y^V+G^f(Y^V,U^V)X^V\Big] \\
&\quad +\frac{2(p\omega+q)\omega^{-p}}{f(1+qr^2)}G^f(X^V,Y^V) \\
&\quad -\frac{2q^2\omega^{-2p}}{f^2(1+qr^2)^3}G^f(X^V,U^V)G^f(Y^V,U^V)U^V.
\end{aligned}$$

∎

Utilisant le lemme 4.2.1, on a

Théorème 4.2.1 *Soit (M,g) une variété Riemannienne et $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita du fibré tangent (TM, G^f). Alors*

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{X^H}Y^H)_{(x,u)} &= \Big(\nabla_XY\Big)^H-\frac{1}{2}\Big(R(X,Y)u\Big)^V, \\
(\overline{\nabla}_{X^H}Y^V)_{(x,u)} &= \frac{f}{2}\omega^p\Big(R(u,Y)X\Big)^H+\frac{X(f)}{2f}Y^V+\Big(\nabla_XY\Big)^V, \\
(\overline{\nabla}_{X^V}Y^H)_{(x,u)} &= \frac{f}{2}\omega^p\Big(R(u,X)Y\Big)^H+\frac{Y(f)}{2f}X^V, \\
(\overline{\nabla}_{X^V}Y^V)_{(x,u)} &= -\frac{p\omega^{-p+1}}{f(1+qr^2)}\Big[G^f(X^V,U^V)Y^V+G^f(Y^V,U^V)X^V\Big] \\
&\quad +\frac{(p\omega+q)\omega^{-p}}{f(1+qr^2)}G^f(X^V,Y^V)U^V \\
&\quad -\frac{q^2\omega^{-2p}}{f^2(1+qr^2)^3}G^f(X^V,U^V)G^f(Y^V,U^V)U^V \\
&\quad -\frac{1}{2f}G^f(X^V,Y^V)\Big(gradf\Big)^H,
\end{aligned}$$

pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$ et $(x,u)\in TM$, où R désigne le tenseur de courbure de (M,g).

Définition 4.2.1 *Soit (M,g) une variété Riemannienne et soit K un champ tenseur de type $(1,1)$ sur M. On définit les champs de vecteurs horizontals et verticals $K^V : TM \to TTM, K^H : TM \to TTM$ de K par*

$$K^V(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i K(\partial i)^V$$

et

$$K^H(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i K(\partial i)^H$$

où $\sum_{i=1}^{m} \eta_i \partial i \in \pi^{-1}(V)$ est une carte locale de $\eta \in \mathcal{C}^\infty(TM)$.

De la définition 4.2.1 et du théorème 4.2.1, on a

Proposition 4.2.1 *Soit (M,g) une variété Riemannienne et soit $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita du fibré tangent (TM, G^f). Si K est un champ de tenseur de type $(1,1)$ sur M, alors*

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{X^H} K^H)_{(x,u)} &= \Big(\nabla_X K\Big)^H - \frac{1}{2}\Big(R(X,K(u))u\Big)^V \\
(\overline{\nabla}_{X^H} K^V)_{(x,u)} &= \frac{f}{2}\omega^p\Big(R(u,K(u))X\Big)^H + \frac{X(f)}{2f}K(u)^V + \Big(\nabla_X K(u)\Big)^V \\
(\overline{\nabla}_{X^V} K^H)_{(x,u)} &= \Big(K(X)\Big)^H + \frac{f}{2}\omega^p\Big(R(u,X)K(u)\Big)^H + \frac{1}{2f}g(K(u),gradf)X^V \\
(\overline{\nabla}_{X^V} K^V)_{(x,u)} &= \Big(K(X)\Big)^V - \frac{p\omega^{-p+1}}{f(1+qr^2)}\Big[G^f(X^V,U^V)K(u)^V + G^f(K(u)^V,U^V)X^V\Big] \\
&\quad + \frac{(p\omega+q)\omega^{-p}}{f(1+qr^2)}G^f(X^V,K(u)^V)U^V \\
&\quad - \frac{q^2\omega^{-2p}}{f^2(1+qr^2)^3}G^f(X^V,U^V)G^f(K(u)^V,U^V)U^V \\
&\quad - \frac{1}{2f}G^f(X^V,K(u)^V)\Big(gradf\Big)^H
\end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $(p,u) \in TM$.

4.3 Tenseur de Courbure de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée

Théorème 4.3.1 *Soit (M,g) une variété Riemannienne et (TM, G^f) son fibré tangent équippé de la metrique Cheeger-Gromoll généralisée. Si R (resp $\overline{R}$) désigne le tenseur de courbure associé à M (resp(TM, G^f)), alors pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $p = (x,u) \in TM$, on a les* *formules suivantes*

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(X^H,Y^H)Z^H &= \Big(R(X,Y)Z\Big)^H + \frac{f\omega^p}{2}\Big(R(u,R(X,Y)u)Z\Big)^H \\
&+\frac{f\omega^p}{4}\Big(R(u,R(X,Z)u)Y\Big)^H - \frac{f\omega^p}{4}\Big(R(u,R(Y,Z)u)X\Big)^H \\
&+\frac{1}{2}\Big(\nabla_Z R)(X,Y)u\Big)^V - \frac{X(f)}{4f}\Big(R(u,R(Y,Z)u\Big)^V \\
&+\frac{Y(f)}{4f}\Big(R(u,R(X,Z)u\Big)^V + \frac{Z(f)}{2f}\Big(R(X,Y)u\Big)^V, \\
\overline{R}(X^H,Y^V)Z^V &= -\frac{\omega^p}{2}\Big[g(Y,Z)+qg(Y,u)g(Z,u)\Big]\Big(\nabla_X gradf\Big)^H \\
&+\frac{\omega^p}{4}\Big[g(Y,Z)+qg(Y,u)g(Z,u)\Big]\Big(R(X,gradf)u\Big)^V \\
&-\frac{fp\omega^{p+1}}{2}\Big[-g(Y,u)\Big(R(u,Z)X\Big)^H + g(Z,u)\Big(R(u,Y)X\Big)^H\Big] \\
&-\frac{f\omega^p}{2}\Big(R(Y,Z)X\Big)^H \\
&-\frac{f^2\omega^{2p}}{4}\Big(R(u,Y)R(u,Z)X\Big)^H - \frac{\omega^p}{4}g(R(u,Z)X,gradf)Y^V \\
&+X(f)\frac{\omega^p}{4f}\Big[g(Y,Z)+qg(Y,u)g(Z,u)\Big]\Big(grad_M f\Big)^H,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(X^V,Y^V)Z^H &= \frac{f\omega^p}{2}\Big(R(X,Y)Z\Big)^H \\
&-pf\omega^{p+1}\Big[g(X,u)\Big(R(u,Y)Z\Big)^H - g(Y,u)\Big(R(u,X)Z\Big)^H\Big] \\
&+\frac{f^2\omega^{2p}}{4}\Big[\Big(R(u,X)R(u,Y)Z\Big)^H - \Big(R(u,Y)R(u,X)Z\Big)^H\Big] \\
&+\frac{\omega^p}{4}\Big[g(R(u,Y)Z,gradf)X^V - g(R(u,X)Z,gradf)Y^V\Big],
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X^H, Y^V)Z^H &= \frac{\omega^p}{2}X(f)\Big(R(u,Y)Z\Big)^H + \frac{\omega^p}{4}Z(f)\Big(R(u,Y)X\Big)^H \\
&+\frac{f\omega^p}{2}\Big((\nabla_X R)(u,Y)Z\Big)^H - \frac{\omega^p}{4}g(Y,R(X,Z)u)\Big(gradf\Big)^H \\
&+\frac{1}{2}\Big(R(X,Z)Y\Big)^V - \frac{f\omega^p}{4}\Big(R(X,R(u,Y)Z)u\Big)^V \\
&+\Big[\frac{1}{2f}X(Z(f)) - \frac{1}{4f^2}X(f)Z(f) - \frac{1}{2f}(\nabla_X Z)(f)\Big]Y^V \\
&-\frac{p\omega}{2}g(Y,u)\Big(R(X,Z)u\Big)^V \\
&+\frac{p\omega+q}{2(1+qr^2)}g(Y,R(X,Z)u)U^V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X^H Y^H)Z^V &= \frac{f\omega^p}{2}\Big((\nabla_X R)(u,Z)Y\Big)^H - \frac{f\omega^p}{2}\Big((\nabla_Y R)(u,Z)X\Big)^H \\
&+\frac{\omega^p}{4}X(f)\Big(R(u,Z)Y\Big)^H - \frac{\omega^p}{4}Y(f)\Big(R(u,Z)X\Big)^H \\
&-\frac{\omega^p}{2}g(R(X,Y)u,Z)\Big(gradf\Big)^H + \Big(R(X,Y)Z\Big)^V \\
&-\frac{f\omega^p}{4}\Big(R(X,R(u,Z)Y)u\Big)^V + \frac{f\omega^p}{4}\Big(R(Y,R(u,Z)X)u\Big)^V \\
&-p\omega g(Z,u)\Big(R(X,Y)u\Big)^V + (\frac{p\omega+q}{1+qr^2})g(R(X,Y)u,Z)U^V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X^V, Y^V)Z^V &= Ag(Z,u)\Big[g(Y,u)X^V - g(X,u)Y^V\Big] \\
&+ B\Big[g(Y,Z)X^V - g(X,Z)Y^V\Big] \\
&+ C\Big[g(X,u)g(Y,Z) - g(Y,u)g(X,Z)\Big]U^V \\
&- \frac{f\omega^{2p}}{4}\left[g(Z,Y)(R(u,X)gradf)^H - g(X,Z)(R(u,Y)gradf)^H\right] \\
&- \frac{qf\omega^{2p}}{4}g(Z,u)\left[g(Y,u)(R(u,X)gradf)^H\right. \\
&\left.-g(X,u)(R(u,Y)gradf)^H\right]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= \frac{p\omega((p+2q-2)\omega-q)}{1+qr^2} - \frac{q\omega^p}{4f}\|gradf\|^2 \\
B &= \frac{p^2\omega^2 - p(p-2)\omega + q}{1+qr^2} - \frac{\omega^p}{4f}\|gradf\|^2 \\
C &= \frac{p(p-2)(1-q)\omega^2 + pq(p-3)\omega - q^2}{(1+qr^2)^2}
\end{aligned}$$

Notons que A, B *et* C *sont liés par la relation :* $A - qB = C(1 + qr^2)$.

4.3.1 Courbure Sectionnelle de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée

Dans la suite, on considère pour tout $V, W \in \Gamma(TTM), V \neq W$

$$\overline{Q}(V,W) = G(V,V)G(W,W) - |G(V,W)|^2$$

$$\overline{G}(V,W) = G(\overline{R}(V,W)W,V)$$

$$\overline{K}(V,W) = \frac{\overline{G}(V,W)}{\overline{Q}(V,W)}$$

Lemme 4.3.1 *Soit* (M,g) *une variété riemannienne et* (TM, G^f) *sont fibré tangent équippé de la metrique de Cheeger-Gromoll généralisée, alors pour tout champs de vecteurs orthonormés* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, on a*

1. $\overline{Q}(X^H, Y^H) = 1$,
2. $\overline{Q}(X^H, Y^V) = f\omega^p\Big[1 + q|g(Y,u)|^2\Big]$,
3. $\overline{Q}(X^V, Y^V) = f^2\omega^{2p}\Big(1 + q|g(X,u)|^2 + q|g(Y,u)|^2\Big)$.

Preuve. La preuve est une conséquence directe de la définition 4.1.1. ∎

Lemme 4.3.2 *Soit* (M,g) *une variété riemannienne et* (TM, G^f) *sont fibré tangent équippé de la metrique de Cheeger-Gromoll généralisée, alors pour tout champs de vecteurs orthonormés* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, on a*

1. $\overline{G}(X^H, Y^H) = g(R(X,Y)Y,X) - \frac{3f\omega^p}{4}\|R(X,Y)u\|^2$,
2. $\overline{G}(X^H, Y^V) = \Big[\frac{|X(f)|^2\omega^p}{4f} - \frac{\omega^2}{2}g(\nabla_X gradf, X)\Big]\Big[1 + q|g(Y,u)|^2\Big]$
$+\frac{f^2\omega^{2p}}{4}\|R(u,Y)X\|^2$,
3. $\overline{G}(X^V, Y^V) = f\omega^p\Big[A(|g(Y,u)|^2 + |g(X,u)|^2) + B\Big]$.

Les constants A *et* B *sont celles du théorème* 4.3.1.

Proposition 4.3.1 *Soit* (M,g) *une variété riemannienne et* (TM, G^f) *sont fibré tangent équippé de la metrique de Cheeger-Gromoll généralisée. Si* K *(resp.,* $\overline{K}$*) désigne la courbure sectionnelle de* (M,g)*(resp.,* (TM, G^f)*), alors pour tout champs de vecteurs orthonormés* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, on a*

1. $\overline{K}(X^H, Y^H) = K(X,Y) - \dfrac{3f\omega^p}{4}\|R(X,Y)u\|^2$,
2. $\overline{K}(X^H, Y^V) = \dfrac{f\omega^p}{4(1 + q|g(Y,u)|^2)}\|R(u,Y)X\|^2 + \frac{|X(f)|^2}{4f^2} - \dfrac{\omega^{-p+2}}{2f}g(\nabla_X gradf, X)$,
3. $\overline{K}(X^V, Y^V) = \dfrac{\omega^{-p}}{fq(1 + g(X,u)|^2 + |g(Y,u)|^2)}\Big[A(|g(Y,u)|^2 + |g(X,u)|^2) + B\Big]$.

Proposition 4.3.2 *Soit (M, g) une variété Riemannienne de courbure constante λ et (TM, G^f) son fibré tangent équipé de la metrique de Cheeger-Gromoll généralisée. Si $\overline{K}$ désigne la courbure sectionnelle de TM, alors pour tout champs de vecteurs orthonormé $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a*

1. $\overline{K}(X^H, Y^H) = \lambda - \dfrac{3\lambda^2 f\omega^p}{4}\Big[|g(X,u)|^2 + |g(Y,u)|^2\Big]$,
2. $\overline{K}(X^H, Y^V) = \dfrac{f\omega^p\lambda^2}{4}\frac{|g(X,u)|^2}{(1+q|g(Y,u)|^2)} + \dfrac{|X(f)|^2}{4f^2} - \dfrac{\omega^{-p+2}}{2f}g(\nabla_X gradf, X)$,
3. $\overline{K}(X^V, Y^V) = \dfrac{\omega^{-p}}{fq(1+g(X,u)|^2 + |g(Y,u)|^2)}\Big[A(|g(Y,u)|^2 + |g(X,u)|^2) + B\Big]$.

Preuve. La preuve de la proposition 4.3.2 est déduite de la proposition 4.3.1 et des équations suivantes

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \lambda\Big[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\Big] \\ \|R(X,Y)u\|^2 &= \|\lambda\Big[g(Y,u)X - g(X,u)Y\Big]\|^2 \\ &= \lambda^2[|g(X,u)|^2 + |g(y,u)|^2] \\ \|R(u,Y)X\|^2 &= \|\lambda\Big[g(Y,X)u - g(X,u)Y\Big]\|^2 \\ &= \lambda^2|g(X,u)|^2 \end{aligned}$$

■

Lemme 4.3.3 *Soit (x, u) un point de TM avec $u \neq 0$ and $(E_1, ..., E_m)$ une base locale orthonormée de champs de vecteurs sur M telle que $E_1 = \frac{u}{\|u\|}$. Alors $(F_1, ..., F_{2m})$ est une base locale orthonormée de champs de vecteurs sur (TM, G^f).*
où $F_i = E_i^H$, $F_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{f\omega^p(1+qr^2)}}E_1^V$ et $F_{m+j} = \sqrt{\frac{\omega^{-p}}{f}}E_j^V$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{2,m}$.

Lemme 4.3.4 *Soit (M, g) une variété Riemannienne et (TM, G^f) son fibré tangent équipé de la metrique de Cheeger-Gromoll généralisée. Si $(E_1, ..., E_m)$, (resp $(F_1, .., F_{2m})$) une base locale orthonormée de champs de vecteurs sur M (resp., TM), alors pour tout $i, j = \overline{1,m}$ et $k, l = \overline{2,m}$, on a*

1. $\overline{K}(F_i, F_j) = K(E_i, E_j) - \dfrac{3f\omega^p}{4}\|R(E_i, E_j)\|^2$,
2. $\overline{K}(F_i, F_{m+1}) = \frac{|E_i(f)|^2}{4f^2} - \dfrac{\omega^{-p+2}}{2f}g(\nabla_{E_i} gradf, E_i)$,
3. $\overline{K}(F_i, F_{m+l}) = \frac{1}{4}\|R(u, E_l)E_i)\|^2 + \dfrac{|E_i(f)|^2}{4f^2} - \dfrac{\omega^{-p+2}}{2f}g(\nabla_{E_i} gradf, E_i)$,
4. $\overline{K}(F_{m+k}, F_{m+1}) = \frac{1+qr^2}{fq\omega^p(1+qr^2)+qr^2}\Big[\frac{r^2}{f\omega^p(1+qr^2)}A + B\Big]$,
5. $\overline{K}(F_{m+k}, F_{m+l}) = \frac{\omega^{-p}}{fq}B$.

Lemme 4.3.5 *Si $(E_1, ..., E_m)$ est une base locale orthonormée de champs de vecteurs sur M, alors pour tout $i, j = \overline{1, m}$, on a*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \|R(u, E_i)E_j\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \|R(E_i, E_j)u\|^2.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} \|R(u, E_i)E_j\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{m} g(R(u, E_i, E_j, R(u, E_i)E_j) \\
&= \sum_{i,j,k,l,s=1}^{m} u_k u_l g(R(E_k, E_i)E_j, E_s)g(R(E_k, E_i)E_j, E_s) \\
&= \sum_{i,j,k,l,s=1}^{m} u_k u_l g(R(E_j, E_s)E_k, E_i)g(R(E_j, E_s)E_l, E_i) \\
&= \sum_{i,j,s=1}^{m} g(R(E_j, E_s)u, g(E_j, E_s)u, E_i)E_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \|R(E_i, E_j)u\|^2
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.3.3 *Soit (M, g) une variété Riemannienne et (TM, G^f) son fibré tangent équipé de la metrique de Cheeger-Gromoll généralisée.Si σ (resp.,$\overline{\sigma}$) désigne la courbure scalaire de (M, g) (resp.,(TM, G^f)),alors pour tout base locale orthonormée $(E_1, ..., E_m)$,on a*

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma} &= \sigma + \frac{2 - 3f\omega^p}{4} \sum_{i,j=1}^{m} \|R(E_i, E_j)\|^2 - \frac{m\omega^{-p+2}}{f}\Delta(f) + \frac{m\|gradf\|^2}{2f^2} \\
&\quad +2(m-1)\left[\frac{1 + qr^2}{fq\omega^p(1 + qr^2) + qr^2}\left(\frac{r^2}{f\omega^p(1 + qr^2)}A + B\right) + \frac{(m-2)\omega^{-p}}{2fq}B\right]
\end{aligned}$$

Preuve. Utilisant le lemme 4.3.4

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma} &= \sum_{s,t=1}^{2m} \overline{K}(F_s, F_t) \\
&= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{m} \overline{K}(F_i, F_j) + 2\sum_{i,j=1}^{m} \overline{K}(F_i, F_{m+j}) + \sum_{i,j=1,i\neq j}^{m} \overline{K}(F_{m+i}, F_{m+j}) \\
&= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{m} \overline{K}(F_i, F_j) + 2\sum_{i=1}^{m} \overline{K}(F_i, F_{m+1}) + 2\sum_{i=1,j=2}^{m} \overline{K}(F_i, F_{m+j}) \\
&+ 2\sum_{i=1}^{m} \overline{K}(F_{m+i}, F_{m+1}) + \sum_{i,j=2,i\neq j}^{m} \overline{K}(F_{m+i}, F_{m+j})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma} &= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{m}[K(E_i,E_j)-\frac{3f\omega^p}{4}\|R(E_i,E_j)\|^2] \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{m}[\frac{|E_i(f)|^2}{4f^2}-\frac{\omega^{-p+2}}{2f}g(\nabla_{E_i}gradf,E_i)] \\
&\quad +2\sum_{i=1,j=2}^{m}[\frac{1}{4}\|R(u,E_j)E_i)\|^2+\frac{|E_i(f)|^2}{4f^2}-\frac{\omega^{-p+2}}{2f}g(\nabla_{E_i}gradf,E_i)] \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{m}[\frac{1+\alpha r^2}{fq\omega^p(1+qr^2)+qr^2}[\frac{r^2}{f\omega^p(1+qr^2)}A+B]] \\
&\quad +\sum_{i,j=2,i\neq j}^{m}[\frac{\omega^{-p}}{fq}B] \\
&= \sigma-\sum_{i,j=1,i\neq j}^{m}\frac{3f\omega^p}{4}\|R(E_i,E_j)\|^2+\frac{\|gradf\|^2}{2f^2}-\frac{\omega^{-p+2}}{f}trace_g(\nabla gradf) \\
&\quad +\frac{2}{4}\sum_{i=1,j=2}^{m}\|R(u,E_j)E_i\|^2+(m-1)\frac{\|gradf\|^2}{2f^2} \\
&- \quad \frac{(m-1)\omega^{-p+2}}{f}trace_g(\nabla gradf) \\
&\quad +2(m-1)[\frac{1+qr^2}{fq\omega^p(1+qr^2)+qr^2}[\frac{r^2}{f\omega^p(1+qr^2)}A+B] \\
&\quad +(m-2)(m-1)[\frac{\omega^{-p}}{fq}B]
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma} &= \sigma+\frac{2-3f\omega^p}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\|R(E_i,E_j)\|^2-\frac{m\omega^{-p+2}}{f}\Delta(f)+\frac{m\|gradf\|^2}{2f^2} \\
&\quad +2(m-1)\left[\frac{1+qr^2}{fq\omega^p(1+qr^2)+qr^2}(\frac{r^2}{f\omega^p(1+qr^2)}A+B)+\frac{(m-2)\omega^{-p}}{2fq}B\right]
\end{aligned}
$$

■

Corollaire 4.3.1 *Soit (M,g) une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante λ et (TM,G^f) son fibré tangent équipé de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée. Si $\overline{\sigma}$ désigne la courbure scalaire de (TM,G^f), alors pour tout base locale orthonormée $(E_1,...,E_m)$ sur M, on a*

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma} &= +2(m-1)\left[\frac{1+qr^2}{fq\omega^p(1+qr^2)+qr^2}(\frac{r^2}{f\omega^p(1+qr^2)}A+B)\right. \\
&\qquad \left.+\frac{m\lambda}{2}+\lambda^2r^2\frac{2-3f\omega^p}{4}+\frac{(m-2)\omega^{-p}}{2fq}B\right] \\
&\quad +\frac{m}{f}\left[-\omega^{-p+2}\Delta(f)+\frac{\|gradf\|^2}{2f}\right]
\end{aligned}
$$

Preuve. Du fait que $\sigma = m(m-1)\lambda$ et pour tout champs de vecteurs $X, Y, Z \in TM$

$$R(X,Y)Z = \lambda(g(Z,Y)X - g(X,Z)Y)$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} \|R(E_i,E_j)u\|^2 &= \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{m} \|g(u,E_j)E_i - g(E_i,u)E_j\|^2 \\
&= \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{m} [|g(u,E_j)|^2 - 2g(u,E_j)g(E_i,u)\delta_{ij} + |g(E_i,u)|^2] \\
&= \lambda^2[m\|u\|^2 - 2\|u\|^2 + m\|u\|^2] \\
&= 2\lambda^2(m-1)r^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma} &= m(m-1)\lambda + 2(m-1)\lambda^2 r^2 \frac{2-3f\omega^p}{4} - \frac{m\omega^{-p+2}}{f}\Delta(f) + \frac{m\|gradf\|^2}{2f^2} \\
&\quad +2(m-1)\left[\frac{1+qr^2}{fq\omega^p(1+qr^2)+qr^2}\left(\frac{r^2}{f\omega^p(1+qr^2)}A + B\right) + \frac{(m-2)\omega^{-p}}{2fq}B\right]
\end{aligned}$$

■

Chapitre 5

Géométrie de la généralisation des applications F-harmoniques

Sommaire

Dans ce chapitre, nous donnons la définition des applications F-harmoniques [38] et on donne la notion des applications F-bi-harmonique, qui est une généralisation des applications bi-harmoniques [51] et des applications f-bi-harmoniques [40] entre deux variétés Riemanniennes, et nous étudions certains propriétés de conformités et de stabilité. De plus, nous donnons une formule pour construire quelques exemples d'application F-bi-harmonique. Nos résultats sont des extensions de [35] et [40].

Considérons une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes. Soit

$$F : M \times \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad (x, r) \mapsto F(x, r), \tag{5.1}$$

Une fonction de classe C^∞ positive, pour tout domaine compact D de M la fonctionnelle F-énergie de φ est définie par

$$E_F(\varphi; D) = \int_D F\big(x, e(\varphi)(x)\big)\, v_g, \tag{5.2}$$

où $e(\varphi)$ est la densité de l'énergie de φ définie par

$$e(\varphi) = \frac{1}{2}\, h\big(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)\big), \tag{5.3}$$

v_g est la forme volume,et $\{e_i\}$ une base orthonormée sur (M,g).

Définition 5.0.1 *Une application est dite F-harmonique si c'est un point critique de la fonctionnelle F-énergie sur tout compact D de M.*

5.1 Première variation d'énergie

Soit $F : M \times \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $(x,r) \mapsto F(x,r)$, on note par

$$\partial_r = \partial/\partial r, \quad F' = \partial_r(F), \quad F'' = \partial_r\big(\partial_r(F)\big)$$

et soit $F_r,\ F'_r,\ F''_r$ définis par

$$F_r(x) = F\big(x, e(\varphi)(x)\big), \quad F'_r(x) = F'\big(x, e(\varphi)(x)\big), \quad F''_r(x) = F''\big(x, e(\varphi)(x)\big). \tag{5.4}$$

Théorème 5.1.1 *Soit $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une application differentiable et soit $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de φ à support dans D. Alors*

$$\frac{d}{dt}E_F(\varphi_t;D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(\tau_F(\varphi),v)\,v_g, \tag{5.5}$$

où $v = \dfrac{\partial\varphi_t}{\partial t}\Big|_{t=0}$ désigne le champ de vecteur de variation de φ,

$$\tau_F(\varphi) = F'_r\,\tau(\varphi) + d\varphi\big(\operatorname{grad}^M F'_r\big), \tag{5.6}$$

et $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de φ défini dans (2.1), donné par

$$\tau(\varphi) = \operatorname{trace}\nabla d\varphi. \tag{5.7}$$

$\tau_F(\varphi)$ est dit le champ F-tension de φ.

Preuve. On défini $\phi : M \times (-\epsilon,\epsilon) \to N$ par

$$\phi(x,t) = \varphi_t(x), \quad (x,t) \in M \times (-\epsilon,\epsilon), \tag{5.8}$$

Soit ∇^ϕ la connection sur le fibré inverse (Pull-back) $\phi^{-1}TN$. Tout champ de vecteur X sur M est considéré comme un champ de vecteurs sur $M \times (-\epsilon,\epsilon)$, on a

$$[\partial_t, X] = 0. \tag{5.9}$$

On utilisant (5.2) nous obtenons

$$\frac{d}{dt}E_F(\varphi_t;D)\Big|_{t=0} = \int_D \partial_t\Big(F\big(x, e(\varphi_t)(x)\big)\Big)\Big|_{t=0} v_g, \tag{5.10}$$

notons que

$$\partial_t\Big(F\big(x, e(\varphi_t)(x)\big)\Big)\Big|_{t=0} = dF\big(\partial_t(e(\varphi_t))\big)\Big|_{t=0}, \tag{5.11}$$

Dans un repère normal au point $x \in M$, on a

$$\begin{aligned} \partial_t(e(\varphi_t)) &= h\big(\nabla^{\phi}_{\partial_t} d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_i)\big) \\ &= h\big(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(\partial_t), d\varphi_t(e_i)\big), \end{aligned} \tag{5.12}$$

puis

$$\begin{aligned} dF\big(\partial_t(e(\varphi_t))\big)\Big|_{t=0} &= F'_r\, h\big(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)\big) \\ &= e_i\big(h(v, F'_r\, d\varphi(e_i))\big) - h\big(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} F'_r\, d\varphi(e_i)\big), \end{aligned} \tag{5.13}$$

où la dernière égalité est obtenue puisque $d\phi(\partial_t)\Big|_{t=0} = v$, on défini une 1-forme sur M par

$$\omega(X) = h(v, F'_r\, d\varphi(X)), \quad X \in \Gamma(TM), \tag{5.14}$$

de (5.13) et (5.14) on a

$$\begin{aligned} dF\big(\partial_t(e(\varphi_t))\big)\Big|_{t=0} &= \operatorname{div}\omega - h\big(v, d\varphi(\operatorname{grad}^M F'_r)\big) \\ & \quad -h\big(v, F'_r\, \tau(\varphi)\big). \end{aligned} \tag{5.15}$$

En substituant (5.11),et (5.15) dans (5.10), et considérant le théorème de la divergence, nous obtenons le résultat du théorème 5.1.1. ∎

Corollaire 5.1.1 *Une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ de classe C^∞ est F-harmonique si et seulement si*

$$\tau_F(\varphi) = F'_r\, \tau(\varphi) + d\varphi\big(\operatorname{grad}^M F'_r\big) = 0. \tag{5.16}$$

Dans le cas où $F(x, r) = F(r)$ on obtient les résultats de Ara [35]

Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N, h)$ est dite conforme s'il existe une fonction $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R}^*_+)$ de classe C^∞ telle que pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a

$$h(d\varphi(X), d\varphi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y),$$

La fonction λ est appelée fonction de dilatation associée à φ. Le champ de tension de l'application conforme φ est donné par (voir [3]) :

$$\tau(\varphi) = (2 - m) d\varphi(grad\, ln\, \lambda) \tag{5.17}$$

Du corollaire 5.1.1 et de la formule (5.17), on a

Corollaire 5.1.2 *Si $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ est une application conforme de dilatation λ, alors*

$$\tau_F(\varphi) = d\varphi\Big((2 - m)F'_r\, grad^M (ln\, \lambda) + \operatorname{grad}^M F'_r\Big). \tag{5.18}$$

Du corollaire 5.1.2 on obtient

Théorème 5.1.2 *Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N, h)$ $(m \geq 3)$ est une immersion conforme de dilatation λ, alors φ est F-harmonique si et seulement si*

$$F(x,r) = C(\lambda(x))^{(m-2)}.r. \tag{5.19}$$

Exemples 5.1.1 *:*

1) Si F est constante alors toute application harmonique est F-harmonique.

2) En particulier, dans le cas où $F(x,r) = F(r)$ et φ est une immersion isometrique, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} i) & \varphi \text{ est minimale ;} \\ ii) & \varphi \text{ est harmonique ;} \\ iii) & \varphi \text{ est } F\text{-harmonique.} \end{cases}$$

3) Dans le cas où φ est une immersion isometrique harmonique, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} i) & \varphi \text{ est } F\text{-harmonique.} \\ ii) & F = F(r) \end{cases}$$

4) Dans le cas où φ est une application harmonique, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} i) & \operatorname{grad}^M F'_r \in \ker d\varphi \\ ii) & \varphi \text{ est } F\text{-harmonique.} \end{cases}$$

5) Dans le cas où φ est une submersion Riemannienne harmonique, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} i) & \operatorname{grad}^M F'_r \text{ est tangente aux fibres de } \varphi \text{ ;} \\ ii) & \varphi \text{ est } F\text{-harmonique.} \end{cases}$$

Théorème 5.1.3 *Soit $\varphi : M \to N$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemannienne et soit $i : N \hookrightarrow P$ l'inclusion canonique d'une sous-variété, alors φ est F-harmonique si et seulement si $\tau_F(i \circ \varphi)$ est normal à N, où $F \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ est une fonction positive de classe C^∞.*

Preuve. Le champ F-tension de la composition $i \circ \varphi : M \to P$ est donné par

$$\tau_F(i \circ \varphi) \quad = \quad F'_r \tau(i \circ \varphi) + di(d\varphi(\operatorname{grad}^M F_r))$$

puisque le champ de tension de la composition $i \circ \varphi$ est :

$$\tau(i \circ \varphi) = di(\tau(\varphi)) + \text{trace } \nabla di(d\varphi, d\varphi),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\tau_F(i \circ \varphi) &= F_r' di(\tau(\varphi)) + F_r' \text{trace } \nabla di(d\varphi, d\varphi) \\ &\quad + di(d\varphi(\text{grad}^M F_r')) \\ &= di(\tau_F(\varphi)) + F_r' \text{trace } \nabla di(d\varphi, d\varphi).\end{aligned}$$

alors $\tau_F(i \circ \varphi) - di(\tau_F(\varphi))$ est normal à N, et

$$\tau_F(\varphi) = 0 \iff \tau_F(i \circ \varphi) \perp N.$$

∎

Théorème 5.1.4 *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h) \quad (m \geq 3)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemannienne. On suppose que $F_r' \neq 0$. Alors φ est F-harmonique si et seulement si φ est harmonique par rapport à la métrique conforme $\widetilde{g}$ donnée par*

$$\widetilde{g} = \left(F_r'\right)^{2/(m-2)} .g$$

Preuve. Posons $\lambda(x) = F_r'(x, e(\varphi)(x)$, alors le champ de tension $\widetilde{\tau}(\varphi)$ par rapport à la métrique conforme $\widetilde{g} = \lambda^2 g$ est donné par

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}(\varphi) &= \frac{1}{\lambda^m}\left\{\lambda^{(m-2)}\tau(\varphi) + d\varphi(grad(\lambda^{(m-2)}))\right\} \\ &= \left(F_r'\right)^{(m-2)/m}\left\{F_r'\tau(\varphi) + d\varphi(grad(F_r')\right\} \\ &= \left(F_r'\right)^{(m-2)/m}\tau_F(\varphi).\end{aligned}$$

∎

5.2 Deuxième formule de variation

Théorème 5.2.1 *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application f-harmonique entre deux variétés Riemanniennes et $\{\varphi_{t,s}\}_{t,s \in (-\epsilon, \epsilon)}$ une variation à deux paramètres à support compact dans D,*

$$v = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{t=s=0}, \quad w = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{t=s=0}. \tag{5.20}$$

Avec la notation ci-dessus, nous avons ce qui suit

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{t=s=0} = -\int_D h(J_F(v), w)\, v_g, \tag{5.21}$$

où $J_F(v) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ *donné par*

$$\begin{aligned} J_F(v) &= -F_r' \,\text{trace}\; R^N(v, d\varphi)d\varphi - \text{trace}\; \nabla^\varphi F_r' \nabla^\varphi v \\ &\quad - \text{trace}\; \nabla^\varphi < \nabla^\varphi v, d\varphi > F_r''\, d\varphi. \end{aligned} \tag{5.22}$$

$< , >$ *désigne le produit sur* $T^*M \otimes \varphi^{-1}TN$ *et* R^N *est le tenseur de courbure de* (N, h)*.*

Preuve. On défini $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to N$ par

$$\phi(x, t, s) = \varphi_{t,s}(x), \quad (x, t, s) \in M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon), \tag{5.23}$$

soit ∇^ϕ la connexion sur le fibré inverse (pull-back) sur $\phi^{-1}TN$. Notons que pour tout champ de vecteur X sur M est considéré comme un champ de vecteur sur $M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)$, on a

$$[\partial_t, X] = 0, \quad [\partial_s, X] = 0, \quad [\partial_t, \partial_s] = 0, \tag{5.24}$$

Alors, de (5.2) on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_F(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{t=s=0} = \int_D \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} F\big(x, e(\varphi_{t,s})(x)\big)\Big|_{t=s=0} v_g, \tag{5.25}$$

D'abord, notons que

$$\frac{\partial}{\partial t} F\big(x, e(\varphi_{t,s})(x)\big) = dF(\partial_t(e(\varphi_{t,s}))), \tag{5.26}$$

$$dF(\partial_t(e(\varphi_{t,s}))) = h(\nabla^\phi_{\partial_t} d\phi(e_i), d\phi(e_i))\, F_r', \tag{5.27}$$

on passant à la dérivée seconde, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} F\big(x, \varphi_{t,s}(x), e(\varphi_{t,s})(x)\big) &= +h(\nabla^\phi_{\partial_s} \nabla^\phi_{\partial_t} d\phi(e_i), d\phi(e_i)) F_r' \\ &\quad + h(\nabla^\phi_{\partial_t} d\phi(e_i), \nabla^\phi_{\partial_s} d\phi(e_i)) F_r' \\ &\quad + h(\nabla^\phi_{\partial_t} d\phi(e_i), d\phi(e_i))\, \partial_s(F_r'). \end{aligned} \tag{5.28}$$

De (5.25) et la définition du tenseur de courbure de (N, h) on a

$$\begin{aligned} h(\nabla^\phi_{\partial_s} \nabla^\phi_{\partial_t} d\phi(e_i), d\phi(e_i)) F_r'\Big|_{t=s=0} &= F_r'\, h(R^N(w, d\varphi(e_i))v, d\varphi(e_i)) \\ &\quad + F_r'\, h(\nabla^\phi_{e_i} \nabla^\phi_{\partial_s} d\phi(\partial_t), d\varphi(e_i))\Big|_{t=s=0}, \end{aligned} \tag{5.29}$$

de (5.29), la propriété du tenseur de courbure de (N,h) et la compatibilité de ∇^{ϕ} avec la métrique h on a

$$\begin{aligned} h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\phi(e_i),d\phi(e_i))F'_r\Big|_{t=s=0} &= -F'_r\,h(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),w) \\ &\quad +e_i(h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(\partial_t),F'_r\,d\varphi(e_i)))\Big|_{t=s=0}, \\ &\quad -h(\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(\partial_t),\nabla^{\varphi}_{e_i}F'_r\,d\varphi(e_i))\Big|_{t=s=0}, \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$h(\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\phi(e_i),\nabla^{\phi}_{\partial_s}d\phi(e_i))F'_r\Big|_{t=s=0} = e_i(h(F'_r\nabla^{\varphi}_{e_i}v,w))-h(\nabla^{\varphi}_{e_i}F'_r\nabla^{\varphi}_{e_i}v,w). \tag{5.31}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \partial_s(F'_r) &= \partial_s\big(F'_r(x,e(\varphi_{t,s})(x))\big) \\ &= +dF'_r\big(\partial_s(e(\varphi_{t,s}))\big), \end{aligned} \tag{5.32}$$

par un simple calcul, nous avons

$$dF'_r\big(\partial_s(e(\varphi_{t,s}))\big)\Big|_{t=s=0} = F''_r\,h(\nabla^{\varphi}_{e_i}w,d\varphi(e_i)), \tag{5.33}$$

alors

$$\begin{aligned} h(\nabla^{\phi}_{\partial_t}d\phi(e_i),d\phi(e_i))\partial_s(F'_r)\Big|_{t=s=0} &= +<\nabla^{\varphi}v,d\varphi>\ F''_r\,h(\nabla^{\varphi}_{e_i}w,d\varphi(e_i)) \\ &= +e_i(h(w,<\nabla^{\varphi}v,d\varphi>\ F''_r\,d\varphi(e_i))) \\ &\quad -h(w,\nabla^{\varphi}_{e_i}<\nabla^{\varphi}v,d\varphi>\ F''_r\,d\varphi(e_i)). \end{aligned} \tag{5.34}$$

À partir des formules (5.25),(5.28),(5.30),(5.31),(5.34), le théorème de la divergence et la F-harmonicité de φ, on obtient le théorème 5.2.1.

■

Lemme 5.2.1

$$-\int h(\text{trace}\ \nabla^{\varphi}F'_r\nabla^{\varphi}v,w)v_g = \int F''_r\ <\nabla^{\varphi}v,d\varphi><\nabla^{\varphi}w,d\varphi>.v_g. \tag{5.35}$$

Preuve. On a :

$$-h(\text{trace}\ \nabla^{\varphi}F'_r\nabla^{\varphi}v,w) = -h(\nabla^{\varphi}_{e_i}F'_r\nabla^{\varphi}_{e_i}v,w) \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned} &= -e_i\big(h(F'_r\nabla^{\varphi}_{e_i}v,w)\big)+h(F'_r\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}w) \\ &= -\operatorname{div}\omega+F'_r\ <\nabla^{\varphi}v,\nabla^{\varphi}w> \end{aligned} \tag{5.37}$$

où : $\omega(X) = F'_r\, h(\nabla^{\varphi}_X v, w)$.

$$\begin{aligned}
- \quad h(\text{trace } \nabla^{\varphi} & \; < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > F''_r\, d\varphi, w) = \\
= \quad & -h(\nabla^{\varphi}_{e_i} \; < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > \; F''_r\, d\varphi(e_i), w) \\
= \quad & -e_i\big(h(< \nabla^{\varphi} v, d\varphi > \; F''_r\, d\varphi(e_i), w)\big) \\
& + h(< \nabla^{\varphi} v, d\varphi > \; F''_r\, d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i} w) \\
= \quad & -\operatorname{div} \eta + F''_r \; < \nabla^{\varphi} v, d\varphi >< \nabla^{\varphi} w, d\varphi >
\end{aligned} \tag{5.38}$$

où : $\eta(X) = F''_r \; < \nabla^{\varphi} v, d\varphi > \; h(d\varphi(X), w)$.

Par l'integration et le théorème de divergence on obtient (5.35).

■

Du théorème 5.2.1 et du lemme 5.2.1 :

Corollaire 5.2.1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{t=s=0} \;=\; & \int_D F''_r\Big(\frac{|d\varphi|^2}{2}\Big) \; < \nabla^{\varphi} v, d\varphi >< \nabla^{\varphi} w, d\varphi > \; v_g \\
& - \int_D F'_r\Big(\frac{|d\varphi|^2}{2}\Big) h(\text{trace } R^N(v, d\varphi)d\varphi, w)\, v_g \\
& + \int_D F'_r\Big(\frac{|d\varphi|^2}{2}\Big) \; < \nabla^{\varphi} v, \nabla^{\varphi} w > \; v_g
\end{aligned} \tag{5.39}$$

(Dans le cas où $F = F(r)$ on a le résultat obtenu par M. Ara dans [35].)

Définition 5.2.1 *Une application F-harmonique est appelée stable si $I(V,V) \geq 0$ pour tout champ V à support compact le long de φ où*

$$I(V,W) \;=\; \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{t=s=0}$$

De la définition 5.2.1 et du corollaire 5.2.1 on obtient

Théorème 5.2.2 *Soit $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application F-harmonique entre deux variétés Riemanniennes. Si $F''_r \geq 0$ et N est a courbure non positive, alors φ est stable.*

Soient ${}^M\nabla$, $\widetilde{\nabla}$, ${}^R\nabla$ et ${}^S\nabla$ désignent les connexions Levi-Civita sur M, $\varphi^{-1}TS^n$, $\mathbb{R}^{n+1}$ et S^n respectivement. Soit ${}^SR$, B et A le tenseur de courbure, la seconde forme fondamentale et l'opérateur de Shape de S^n. Si $X, Y \in \Gamma(TS^n)$ et $W \in (TS^n)^{\perp}$, alors pour $x \in S^n$ on a

$$B(X,Y) = - < X, Y > .x, \quad \textit{et} \quad < A^W(X), Y >= - < X, Y >< x, W > .$$

Lemme 5.2.2 *Si V est un champ parallel dans $\mathbb{R}^n$,alors pour $x \in S^n$ on a*

$$\widetilde{\nabla}_X V^\top = A^{V^\perp}(d\varphi(X)), \quad et \quad <\widetilde{\nabla}_X V^\top, d\varphi(X)> = -|d\varphi(X)|^2 <x, V> .$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X V^\top &= {}^S\nabla_{d\varphi(X)} V^\top \\
&= \big({}^R\nabla_{d\varphi(X)} V^\top\big)^\top \\
&= \big({}^R\nabla_{d\varphi(X)} (V - V^\perp)\big)^\top \\
&= -\big({}^R\nabla_{d\varphi(X)} V^\perp\big)^\top \\
&= A^{V^\perp}(d\varphi(X)). \\
<\widetilde{\nabla}_X V^\top, d\varphi(X)> &= <A^{V^\perp}(d\varphi(X)), d\varphi(X)> \\
&= -|d\varphi(X)|^2 <x, V^\perp> \\
&= -|d\varphi(X)|^2 <x, V>
\end{aligned}$$

■

Du lemme 5.2.2 on obtient

Lemme 5.2.3 *Si V est un champ parallel dans $\mathbb{R}^n$, alors pour $x \in S^n$ on a*

$$|\widetilde{\nabla}_X V^\top|^2 = |d\varphi(X)|^2 <x, V>^2$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

De la courbure sectionnelle de S^n, on obtient

Lemme 5.2.4 *Si $V \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$<^S R\big(V^\top, d\varphi(X)\big)d\varphi(X), V^\top> = |d\varphi(X)|^2 |V^\top|^2 - <d\varphi(X), V>^2$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Proposition 5.2.1 *Soit $\{E_k\}_{k=1}^{n+1}$ une base locale orthonormée dans $\mathbb{R}^{n+1}$, alors*

$$\sum_{k=1}^{n+1} I(E_k^\top, E_k^\top) = \int_M |d\varphi|^2 \Big\{ |d\varphi|^2 F_r''(x, e(\varphi(x)) + (2-n) F_r'(x, e(\varphi(x)) \Big\} v_g.$$

Preuve. Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base locale orthonormée sur M et $x \in S^n$,de 5.2.2, 5.2.3 et 5.2.4 on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\Big(\sum_{i=1}^{m} < \widetilde{\nabla}_{e_i}E_k^{\top}, d\varphi(e_i) > \Big)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{m}|d\varphi(e_i)|^2\Big)^2\sum_{k=1}^{n+1} < x, E_k >^2 \\
&= |d\varphi|^4|x|^2 \\
&= |d\varphi|^4. \qquad (5.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}|\widetilde{\nabla}_{e_i}E_k^{\top}|^2 &= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}|d\varphi(e_i)|^2 < x, E_k >^2 \\
&= |d\varphi|^2|x|^2 \\
&= |d\varphi|^2. \qquad (5.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} <^S R\big(E_k^{\top}, d\varphi(e_i)\big)d\varphi(e_i), E_k^{\top} > &= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\Big(|d\varphi(e_i)|^2|E_k^{\top}|^2 - < d\varphi(e_i), E_k >^2\Big) \\
&= -|d\varphi|^2 + |d\varphi|^2\sum_{k=1}^{n+1}|E_k^{\top}|^2 \\
&= -|d\varphi|^2 + |d\varphi|^2\sum_{k=1}^{n+1}|E_k - E_k^{\perp}|^2 \\
&= -|d\varphi|^2 + |d\varphi|^2\sum_{k=1}^{n+1}|E_k - < E_k, x > x|^2 \\
&= -|d\varphi|^2 + |d\varphi|^2\sum_{k=1}^{n+1}\big(|E_k|^2 - < E_k, x > |^2\big) \\
&= -|d\varphi|^2 + |d\varphi|^2\sum_{k=1}^{n+1}\big(1 - < E_k, x > |^2\big) \\
&= -|d\varphi|^2 + |d\varphi|^2\big(n+1-\sum_{k=1}^{n+1} < E_k, x > |^2\big) \\
&= -|d\varphi|^2 + |d\varphi|^2\big(n+1-|x|^2\big) \\
&= (n-1)|d\varphi|^2 \qquad (5.42)
\end{aligned}$$

Du corollaire 5.2.1 et les formules (5.40), (5.41) et (5.42) on obtient la propriété 5.2.1 .
■ De la Proposition 5.2.1 on a

Théorème 5.2.3 *Soit $\varphi : M^m \longrightarrow S^n$ une application F-harmonique d'une variété compacte M. Si*

$$\int_M |d\varphi|^2\Big\{|d\varphi|^2F_r''(x, e(\varphi(x))) + (2-n)F_r'(x, e(\varphi(x)))\Big\}v_g \ < \ 0$$

alors φ est instable.

Théorème 5.2.4 *Soit $\varphi : M^m \longrightarrow S^n$ $(n \geq 3)$ une application F-harmonique d'une variété compacte M. Si*

$$F''_r \leq 0, \quad et \quad F'_r > 0$$

alors φ est instable.

Théorème 5.2.5 *Si $F''_r \leq 0$, $F'_r > 0$, et $n \geq 3$ or $F''_r < 0$, et $n = 2$. alors toute application F-harmonique stable d'une variété compacte à S^n est constante .*

5.3 Applications F-biharmoniques.

Définition 5.3.1 *Une généralisation naturelle des applications F-harmoniques est donnée en intégrant le carré de la norme du champ F-tension.Plus précisément,la fonctionnelle F-bi-énergie d'une application $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ de classe C^∞, est définie par*

$$E_{2,F}(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau_F(\varphi)|^2 \, v_g. \tag{5.43}$$

Une application est dite F-bi-harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle F-bi-énergie pour tout domaine compact D de M.

Théorème 5.3.1 *[Première variation de la F-bi-énergie].*
Soit $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes, D un domaine compact de M et soit $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de classe C^∞ à support compact dans D. Alors

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = \int_D h(\tau_{2,F}(\varphi), v)\, v_g, \tag{5.44}$$

où

$$\begin{aligned} \tau_{2,F}(\varphi) \;\; &= \;\; -F'_r \text{ trace } R^N(\tau_F(\varphi), d\varphi)d\varphi - \text{trace } \nabla^\varphi F'_r \nabla^\varphi \tau_F(\varphi) \\ &\quad - \text{trace } \nabla^\varphi < \nabla^\varphi \tau_F(\varphi), d\varphi > F''_r \, d\varphi. \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\tag{5.46}$$

$\tau_{2,F}(\varphi)$ est dit F-bi-tension de φ.

Preuve. Soit $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to N$ par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. Notons que

$$\frac{d}{dt}E_{2,F}(\varphi_t; D) = \int_D h(\nabla^\phi_{\partial_t}\tau_F(\varphi_t), \tau_F(\varphi_t))\, v_g. \tag{5.47}$$

Calculons dans un repère normal à $x \in M$ on a

$$\nabla^{\phi}_{\partial_t} \tau_F(\varphi_t) = \nabla^{\phi}_{\partial_t} \nabla^{\phi}_{e_i} F'_r \, d\varphi_t(e_i) \tag{5.48}$$

par la définition du tenseur de courbure de (N, h) on a

$$\nabla^{\phi}_{\partial_t} \nabla^{\phi}_{e_i} F'_r \, d\varphi_t(e_i) = F'_r \, R^N(d\phi(\partial_t), d\varphi_t(e_i)) d\varphi_t(e_i) + \nabla^{\phi}_{e_i} \nabla^{\phi}_{\partial_t} F'_r \, d\varphi_t(e_i), \tag{5.49}$$

de la compatibilité de ∇^{ϕ} avec h on a

$$\begin{aligned} h(\nabla^{\phi}_{e_i} \nabla^{\phi}_{\partial_t} F'_r \, d\varphi_t(e_i), \tau_F(\varphi_t)) &= e_i\big(h(\nabla^{\phi}_{\partial_t} F'_r \, d\varphi_t(e_i), \tau_F(\varphi_t))\big) \\ &\quad -h(\nabla^{\phi}_{\partial_t} F'_r \, d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t)), \end{aligned} \tag{5.50}$$

le deuxième terme sur la gauche de (5.50) est

$$\begin{aligned} -h(\nabla^{\phi}_{\partial_t} F'_r \, d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t)) &= -\partial_t(F'_r) \, h(d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t)) \\ &\quad -F'_r \, h(\nabla^{\phi}_{\partial_t} d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t)), \end{aligned} \tag{5.51}$$

par un simple calcul nous avons

$$\partial_t(F'_r) = d\phi(\partial_t)(F'_r) + F''_r \, h(\nabla^{\phi}_{e_j} d\phi(\partial_t), d\varphi_t(e_j)), \tag{5.52}$$

le premier terme sur la gauche de (5.51) est

$$\begin{aligned} -\partial_t(F'_r) \, h(d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t)) &= -e_j\big(h(d\phi(\partial_t), F''_r \, h(d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t)) \, d\varphi_t(e_j))\big) \\ &\quad +h\big(d\phi(\partial_t), \nabla^{\phi}_{e_j} F''_r h(d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t)) \, d\varphi_t(e_j)\big), \end{aligned} \tag{5.53}$$

le deuxième terme sur la gauche de (5.51) est

$$\begin{aligned} -F'_r \, h(\nabla^{\phi}_{\partial_t} d\varphi_t(e_i), \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t)) &= -e_i\big(h(d\phi(\partial_t), F'_r \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t))\big), \\ &\quad +h(d\phi(\partial_t), \nabla^{\phi}_{e_i} F'_r \nabla^{\phi}_{e_i} \tau_F(\varphi_t))\big), \end{aligned} \tag{5.54}$$

à partir de (5.47),(5.48),(5.49),(5.50),(5.51), (5.53),(5.54),$v = d\phi(\partial_t)$ où $t = 0$ et le théorème de la divergence, on obtient le théorème 5.3.1.

■

Corollaire 5.3.1 *soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application entre deux variétés Riemanniennes. Alors φ est F-bi-harmonique s'il satisfait les équations d'Euler-Lagrange associées*

$$\begin{aligned} \tau_{2,F}(\varphi) &= -F'_r \operatorname{trace}_g R^N(\tau_F(\varphi), d\varphi) d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^{\varphi} F'_r \nabla^{\varphi} \tau_F(\varphi) \\ &\quad - \operatorname{trace}_g \nabla^{\varphi} < \nabla^{\varphi} \tau_F(\varphi), d\varphi > F''_r \, d\varphi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Du corollaire 5.3.1 et le corollaire 5.1.2 on a

Théorème 5.3.2 *Soit $\phi : (M^m, g) \to (N, h)$ une application conforme a dilatation λ. le champ F-bi-tension de ϕ est donné par*

$$\begin{aligned}\tau_{2,F_r'}(\phi) &= (m-2)F_r' \operatorname{trace}_g \nabla^2 F_r' d\phi\,(grad \ln\lambda) - F_r' \operatorname{trace}_g \nabla^2 d\phi\,(grad F_r') \\ &+ (m-2)F_r' \operatorname{trace}_g R^N\left(F_r' d\phi\,(grad\ln\lambda), d\phi\right)d\phi - F_r' \operatorname{trace}_g R^N\left(d\phi\,(gradf), d\phi\right)d\phi \\ &+ (m-2)\nabla_{gradf} F_r' d\phi\,(grad\ln\lambda) - \nabla_{gradF_r'} d\phi\,(gradF_r') \\ &+ (m-2)\,F_r'' \operatorname{trace}_g\, \nabla^\phi\, < \nabla^\phi\, d\phi\Big(F_r'\, grad^M\,(ln\,\lambda) + \operatorname{grad}^M\, F_r'\Big), d\phi >\, d\phi\end{aligned} \tag{5.56}$$

Théorème 5.3.3 *Soit $\phi : (M^m, g) \to (N, h)$ une application conforme a dilatation λ. Alors, le champ F-bi-tension de ϕ est définit par*

$$\begin{aligned}\tau_{2,F}(\phi) &= (m-2)(F_r')^2 d\phi\,(grad\,(\Delta\ln\lambda)) - (m-2)^2(F_r')^2\nabla_{grad\ln\lambda} d\phi\,(grad\ln\lambda) \\ &+ 4(m-2)F_r'\nabla_{gradf} d\phi\,(grad\ln\lambda) + (m-2)F_r'\,(\Delta F_r')\,d\phi\,(grad\ln\lambda) \\ &- F_r' d\phi\,(grad\,(\Delta f)) + 2(m-2)(F_r')^2\,\langle\nabla d\phi, \nabla d\ln\lambda\rangle - 2F_r'\,\langle\nabla d\phi, \nabla dF_r'\rangle \\ &+ (m-2)\,|gradF_r'|^2\, d\phi\,(grad\ln\lambda) - \nabla_{gradF_r'} d\phi\,(gradF_r') \\ &+ 2(m-2)(F_r')^2 d\phi\left(Ricci^M\,(grad\ln\lambda)\right) - 2F_r' d\phi\left(Ricci^M\,(gradF_r')\right). \\ &+ (m-2)\,F_r'' \operatorname{trace}_g\, \nabla^\phi\, < \nabla^\varphi\, d\phi\Big(F_r'\, grad^M\,(ln\,\lambda) + \operatorname{grad}^M\, F_r'\Big), d\phi >\, d\phi\end{aligned}$$

Preuve. Fixons $x_0 \in M$ et soit $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ un repère orthonormal, telle que $\nabla_{e_i} e_j = 0$, à x_0 pour tout i, j. Calculons à x_0, on a

$$\begin{aligned} Tr_g\nabla^2 F_r' d\phi\,(grad\ln\lambda) &= \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} F_r' d\phi\,(grad\ln\lambda) \\ &+ e_i\,(F_r')\,\nabla_{e_i} d\phi\,(grad\ln\lambda) + e_i\,(e_i\,(F_r'))\,d\phi\,(grad\ln\lambda) \\ &= F_r' Tr_g\nabla^2 d\phi\,(grad\ln\lambda) + 2\nabla_{gradF_r'} d\phi\,(grad\ln\lambda) \\ &+ (\Delta F_r')\,d\phi\,(grad\ln\lambda)\,. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Notons que (voir [51])

$$\begin{aligned} Tr_g\nabla^2 d\phi\,(grad\ln\lambda) &= d\phi\,(grad\,(\Delta\ln\lambda)) + 2d\phi\left(Ricci^M\,(grad\ln\lambda)\right) \\ &+ (2-m)\nabla_{grad\ln\lambda} d\phi\,(grad\ln\lambda) + 2\,\langle\nabla d\phi, \nabla d\ln\lambda\rangle \\ &- Tr_g R^N\,(d\phi\,(grad\ln\lambda), d\phi)\,d\phi, \end{aligned} \tag{5.58}$$

où

$$\langle\nabla d\phi, \nabla d\ln\lambda\rangle = \nabla d\phi\,(e_i, e_j)\,\nabla d\ln\lambda\,(e_i, e_j)\,.$$

On substituant (5.58) dans (5.57), on conclu que

$$\begin{aligned} Tr_g\nabla^2 F_r' d\phi\,(grad\ln\lambda) &= F_r' d\phi\,(grad\,(\Delta\ln\lambda)) + 2F_r' d\phi\left(Ricci^M\,(grad\ln\lambda)\right) \\ &+ (2-m)F_r'\nabla_{grad\ln\lambda} d\phi\,(grad\ln\lambda) + 2F_r'\,\langle\nabla d\phi, \nabla d\ln\lambda\rangle \\ &+ F_r' Tr_g R^N\,(d\phi\,(grad\ln\lambda), d\phi)\,d\phi + 2\nabla_{gradF_r'} d\phi\,(grad\ln\lambda) \\ &+ (\Delta F_r')\,d\phi\,(grad\ln\lambda)\,. \end{aligned} \tag{5.59}$$

$$
\begin{aligned}
Tr_g \nabla^2 d\phi\,(gradf) = {} & d\phi\,(grad\,(\Delta F_r')) + 2d\phi\left(Ricci^M\,(gradf)\right) \\
& + (2-m)\nabla_{gradF_r'} d\phi\,(grad \ln\lambda) + 2\left\langle \nabla d\phi, \nabla dF_r'\right\rangle \\
& + Tr_g R^N\left(d\phi\,(gradF_r'), d\phi\right) d\phi.
\end{aligned} \tag{5.60}
$$

Finalement, on a

$$
\begin{aligned}
\nabla_{gradF_r'} F_r' d\phi\,(grad \ln\lambda) = {} & F_r' \nabla_{gradF_r'} d\phi\,(grad\ln\lambda) \\
& + \left|gradF_r'\right|^2 d\phi\,(grad\ln\lambda)\,.
\end{aligned} \tag{5.61}
$$

On substituant (5.59),(5.60) et (5.61) dans (5.56), nous obtenons le résultat du théorème 5.3.3.

■

En particulier, on a

Corollaire 5.3.2 *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne plate. Alors $Id_M : M \to M$ est F-bi-harmonique propre si et seulement si la fonction F satisfait l'équation*

$$
\begin{cases}
F_r' grad(\Delta F_r') & + \frac{1}{2} grad\left(|gradF_r'|^2\right) + F_r'' grad(\Delta F_r') = 0. \\
grad\ F_r' \neq 0. &
\end{cases}
$$

Remarque : Du corollaire 5.3.2, on obtient de nombreux exemples d'applications F-bi-harmoniques propres.

Par exemple si $F(x, r) = h(x_i) f(r)$, Alors Id_{R^m} est F-bi-harmonique propre si et seulement si $h(x_i) = \frac{C}{K} e^{Kx_i}$ où $x = (x_1, ..., x_m)$, $C = const$ *et* $K = -\frac{2f'(m/2) + f''(m/2)}{f'(m/2)}$.

Bibliographie

[1] Aso K., Notes on some Properties of the Sectional Curvature of the Tangent Bundle,Yokohama Math. J. 29 (1981), 1-5.

[2] Baird P., Harmonic maps between Riemannain manifolds.Clarendon Press Oxford 2003.

[3] Baird P. and J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds , Oxford Sciences Publications (2003).

[4] Benyounes, M., Loubeau, E. and Wood, C. M.,The geometry of generalised cheeger-Gromoll metrtics,Tokyo J.Math.32 (2009), 1-26

[5] Cengiz N.and Salimov A.A., Diagonal lift in the tensor bundle and its applications. Appl. Math. Comput. 142, no.2-3, 309-319 (2003).

[6] Cheeger J. and Gromoll D., On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature,Ann. of Math. (2) 96 (1972), 413-443.

[7] Cherif A.M., and Djaa M., Geometry of energy and bienergy variations between Riemannian manifolds, Kyungpook Mathematical Journal, 55(2015), pp 715-730.

[8] Cherif A. M and M. Djaa,On generalized $f$harmonic morphisms, Coment.Math.Univ.Carolin. 55,1 (2014) pp17-27

[9] Course, .N, f-harmonic maps which map the boundary of the domain to one point in the target ; New York Journal of Mathematics. 13, (2007), 423-435.

[10] Djaa M.and Gancarzewicz J., The geometry of tangent bundles of order r, Boletin Academia , Galega de Ciencias,Espagne, 4 (1985), 147-165.

[11] Djaa .M, A. M. Cherif, K. Zegga And S. Ouakkas, on the generalized of harmonic and bi-harmonic maps, international electronic journal of geometry, volume 5 no. 1 pp. 1-11 (2012).

[12] Djaa M., Latti F., Non linear analysis on manifolds on generalized F-energy variation, between Riemannian manifolds, AIP Conference Proceedings 2074, 020021 (2019)

[13] Djaa M., Géométrie Riemannienne et Analyse Harmonique sur les variétés (Mastre - Doctorat) Centre universitaire de Relisane (2017).

[14] Djaa N.E.H., Boulal A. and Zagane A., Generalized warped product manifolds and Biharmonic maps, Acta Math. Univ. Comenianae ; Vol. LXXXI, 2 (2012), 283-298.

[15] Djaa N.E.H., Ouakkas S. and Djaa M., Harmonic sections on tangent bundle of order two.Annales Mathematicae et Informaticae 38 (2011), 5-25.

[16] Dombrowski P., On the geometry of tangent bundle, J.Rrine Angew .Math.210 (1962),pp.73-88.

[17] Eells J. and Sampson J.H., Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Maths.86 (1964), 109-160.

[18] Elhendi H., Géométrie harmonique des fibrés tangents. Thèse de Doctorat Université d'Oran 2015.

[19] Fuglede B., Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978) 107-144

[20] Gezer A., On the tangent bundle with deformed Sasaki metric, Int. Electron. J. Geom. Volume 6 No. 2 (2013),19-31.

[21] Gudmundsson S., An Introduction to Riemannian Geometry,(version 1.224 - 23 January 2004).

[22] Gudmundsson S. and Kappos E., On the Geometry of the Tangent Bundle with the Cheeger-Gromoll metric, Tokyo J.Math. 25, no.1, 75-83, (2002).

[23] Gudmunsson S. and Kappos E., On the Geometry of Tangent Bundles, Expo.Math .20(2002), pp.1-41.

[24] Ishihara T., Harmonic sections of tangent bundles, J. Math. Univ. Tokushima 13 (1979),pp.23-27.

[25] Jiang G.Y., Harmonic maps and their first and second variational formulas. Chinese Ann.Math. Ser. A. 7, (1986), 389-402.

[26] Jian W.and Yong W., On the Geometry of Tangent Bundles with the Rescaled Metric arXiv :1104.5584v1 [math.DG] 29 Apr 2011.

[27] Kobayashi S. and Nomizu K., Fondation of Diferential Geometry ,vol.I. Intersciense, New York-London 1963.

[28] Kobayashi S. and Nomizu K., Fondation of Diferential Geometry ,vol.II. Intersciense, New York-London 1963.

[29] Kowalski O., Curvature of the Induced Riemannian Metric on the Tangent Bundle of a Riemannian Manifold, J. Reine Angew. Math. 250 (1971), 124-129.

[30] Kowalski O. and Sekizawa M., Natural Transformations of Riemannian Metrics on Manifolds to Metrics on Tangent Bundles, Bull. Tokyo Gakugei Univ. (4) 40 (1988),1-29.

[31] Kowalski O. and Sekizawa M., On tangent sphere bundles with small or large constant radius, Ann. Global. Anal. Geom. 18 (2000), no. 3-4, 207-219.

[32] Lakehal B. ,Hichem E. H and Latti F.,On the geometry of the tangent bundel whith vertical rescaled generalized Cheegeer-Gromoll metric. Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Vol 12(61), No. 2-2019

[33] Latti F., Djaa M. and Zagane A., Mus-Sasaki Metric and Harmonicity. Mathematical Sciences and Applications E-Notes 6 (1) 29-36 (2018) c Msaen.

[34] Lichnerowicz A., Applications harmoniques et varitettes klahleriennes, Symposia Mathematica, Vol. III , Academic Press, London, 1968/1969, pp. 341U402.

[35] M. Ara,Geometry of F-harmonic maps, Kodai Math. J. **22** (1999), 243.263.

[36] Morimoto A., Liftings of tensors fields and connections to tangent bundles of Higher order, Nogoya Math. Jour.,40 (1970),pp.99-120.

[37] Musso E. and Tricerri F., Riemannian metrics on tangent bundles, Ann.Mat.Purz Appl.(4),150(1988),1-10.

[38] Nour Elhouda Djaa, Fethi Latti., Geometry of Generalized F-harmonic maps. Bulletin of the Transilvania University of Brasov.Vol 13(62), No. 1 - 2020

[39] Nouhaud O., Applications harmoniques d'une variété riemannienne dans son fibré tangent. Généralisation, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 284 (1977), A815-A818.

[40] S. Ouakkas, R. Nasri and M. Djaa. On the f-harmonic and f-biharmonic maps. J. P. Journal. of Geom. and Top., **10** No. 1, (2010), 11-27.

[41] Salimov A. and Agca F., Some Properties of Sasakian Metrics in Cotangent Bundles. Mediterranean Journal of Mathematics ; 8(2) (2011). 243-255.

[42] Salimov A.and Gezer A., On the geometry of the (1,1)-tensor bundle with Sasaki type metric. Chinese Annals of Mathematics, Series B May 2011, Volume 32, Issue 3, pp 369-386.

[43] Salimov A., Gezer A. and Akbulut K., Geodesics of Sasakian metrics on tensor bundles. Mediterr. J. Math. 6, no.2,135-147 (2009).

[44] Salimov A.A. and Kazimova S., Geodesics of the Cheeger-Gromoll Metric, Turk J Math 33 (2009) , 99 - 105.

[45] Sasaki S., On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. J. 10, 338-354, (1958).

[46] Sekizawa M., Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric, TokyoJ. Math. 14, No. 2 (1991), 407-417.

[47] Yano K. and Ishhara S., Tangent and Cotangent Bundles (Marecel Dekker.Inc. New York 1973),1-171.

[48] Yano K. and Ishhara S.,Horizontal lifts of tonsors fields and connexion to the tangent bendles. jour .Math. and Mech.16(1967),1015-1030.

[49] Yano K. and Kobayashi S., Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles, Jour. Math. Soc. Japan I, (194-201), II,(236-246), 18,(1966), III, 19 (1967)(486-488).

[50] Yano K. and Kon M., Structures on Manifolds, Series in Pure Math., Vol 3, World Sci.,1984.

[51] Y.-J. Chiang and H. Sun,Biharmonic maps on V-manifolds, Int. J. Math. Math. Sci. **27**, 8 (2001), 477-484.

[52] Zagane A. and Djaa M., On Geodesics of Warped Sasaki Metric. Mathematical Sciences and Applications E-Notes 5 (1) 85-92 (2017) c Msaen.

[53] Zagane A. and Djaa M., Geometry of Mus-Sasaki metric. Communications in Mathematics 26 (2018) 113-126.

"على المقاييس الطبيعية"

الملخص:

في هذا العمل ، نقدم مقاييس طبيعية جديدة: مقياس Mus-Sasaki ، وسنقدم شرطًا ضروريًا وكافيًا لالحزمة المماسيةليكون متناسقًا لهذا المقياس الجديد ، ثم مقاييس جديدة أخرى طبيعية: مقياس Cheeger Gromoll ومقياس Mus-Gradient المعمم حيث ندرس تركيبتهما الهندسية ،
بعد ذلك ، قمنا بتوسيع تعريف الخرائط F-التوافقية ، ونعطي فكرة الخرائط F-التوافقية الثنائية، وهي عبارة عن تعميم للخرائط ثنائية التوافقية بين اثنين من منوعات ريمان.

كلمات مفتاحية:

مقياسMus-Sasaki، مقياسCheeger Gromoll، مقياسMus-Gradient،الحزمة المماسية أفقية، الحزمة المماسية عمودية، الخرائط F-التوافقية.

« Sur les métriques Naturelles»

Résumé :

Dans ce travail on introduit des nouvelles métriques naturelles : la métrique de Mus-Sasaki sur le fibré tangent , et on va donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs soit harmonique pour cette nouvelle métrique , puis d'autres nouvelles métrique naturelles : la métrique de Cheeger Gromollgénéralisée el ma métrique de Mus-Gradient généralisée où on érudit leurs géométries ,

Par la suite nous étendons la définition des applications F-harmoniques et, ondonne la notion de applications F-bi-harmonique, qui est une généralisation des applications bi-harmoniques entre deux variétés Riemanniennes.

Mots clés : métrique de Mus-sasaki, métrique de Cheeger Gromoll généralisée, métrique de Mus-gradient, champ de vecteurs horizontal,champ de vecteurs vertical ,application –F-harmonique,application –F-biharmonique.

« On The Natural Metrics»

Abstract :

In this work we introduce new natural metrics: the Mus-Sasaki metric on the tangent bundle, and we will give a necessary and sufficient condition for a vector field to be harmonic for this new metric, then other new metrics natural: the Cheeger Gromoll metric and my generalized Mus-Gradient metric where we learn their geometries,

Subsequently we extend the definition of F-harmonic maps and, we give the notion of F-bi-harmonic maps, which is a generalization of bi-harmonic maps between two Riemannian manifolds.

Key words :

Mus-sasaki metric, generalized Cheeger Gromoll metric, Mus-gradient metric, horizontal vector field, vertical vector field, F-harmonic map, F-biharmonic map