UNIVERSITE Dr. MOULAY TAHAR DE SAÏDA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Martingales à temps discret

ROUANE RACHIDA

Comme dans toutes notes de cours, des erreurs sont encore présentes dans ce polycopié. N'hésitez pas à me les communiquer : **rouane09@yahoo.fr**

Contents

Introduction

Ce cours traite essentiellement la notion d'espérance conditionnelle et celle des martingales (à temps discret) et ce dans le but de renforcer la formation en théorie des probabilités.

Le cours sera constitué de cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions sur l'espérance conditionnelle et de ses propriétés, et, quelques notions sur les martingales.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à deux principaux moyens de transformer un processus en martingale : La décomposition de Doob-Meyer elle permet de transformer une surmartingale (resp. sousmartingale) en martingale en additionnant (resp. soustrayant) un processus croissant. Cette décomposition est utilisée en finance pour décomposer l'évolution d'un portefeuille d'actifs financiers en une partie prévisible et une partie non prévisible. La partie non prévisible sera en moyenne nulle. On ne s'intéressera donc qu'à l'évolution de la partie prévisible dans la recherche des allocations optimales nécessaires à atteindre un objectif de rendement moyen donné, comme par exemple le taux d'intérêt sans risque. Ensuite, nous traitons la décomposition de Riesz.

Dans le troisième chapitre, on présente l'inégalité exponentielle de Azuma-Hoeffding, dans un premier temps, on donne une inégalité classique pour les sommes de variables aléatoires bornées ou ayant des moments exponentiels, ainsi que pour les martingales à temps discret ayant des accroissements bornées. Nous donnons ensuit quelques applications des ces inégalités au cas d'une marche aléatoire symétrique et au bin packing.

Dans le quatrième chapitre, nous donnerons quelques idées sur le théorème Convergence des martingales à temps discret en 2 types et quelques applications de ces théorèmes en probabilité .

Enfin dans le dernier chapitre, on présente des exercices sur l'espérance conditionnelle et les martingale.

Chapter 1

Généralités sur les martingales

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble (quelconque), $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.1 Espérance conditionnelle

1.1.1 Définition de l'espérance conditionnelle

Définition 1.1.1. *On suppose que X:* $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *est intégrable, i.e.* $\mathbb{E}(|X|) < \infty$*, on suppose que* $\mathcal{G}$ *est une sous-tribu de* $\mathcal{F}$*.*
On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ *et on note* $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ *toute variable aléatoire Y qui vérifie:*

1. *Y est $\mathcal{G}$-mesurable.*
2. $\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y)$.

1.1.2 Existence et unicité de l'espérance conditionnelle

Proposition 1.1.1. *L'espérance conditionnelle de* $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *existe et est unique.*

Remarque 1.1.1. *On parle ici toujours, bien entendu, d'unicité à indistinguabilité près.*

Commençons, pour prouver la proposition, par établir l'unicité.

Preuve de l'unicité: Supposons que Y, $\acute{Y}$ vérifient (1), (2) Rappelons que Y, $\acute{Y}$ sont intégrables.
Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $A_\varepsilon = \{Y - \acute{Y} \geq \varepsilon\}$. D'après le fait que Y et $\acute{Y}$ vérifient (1), $A_\varepsilon \in \mathcal{G}$ et donc d'après (2) et la linéarité de l'espérance:

$$0 = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) - \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) = \mathbb{E}((Y - \acute{Y})\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) \geq \varepsilon\mathbb{P}(A_\varepsilon),$$

ce qui entraîne que $\mathbb{P}(A_\varepsilon)$=0.
Comme ce raisonnement est valable $\forall\varepsilon > 0$, on d'eduit que:
$0 = \mathbb{P}(\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon) = \mathbb{P}(Y - \acute{Y} > 0)$ i.e. $Y < \acute{Y}$ p.s.
Par symétrie des rôles de $Y, \acute{Y}$ on obtient de même $\acute{Y} < Y$ p.s. et on conclut que: $\mathbb{P}(Y = \acute{Y}) = 1$.
Ceci achève la preuve de l'unicité.
Preuve de l'existence (via Radon-Nykodym):
Supposons tout d'abord $X \in \mathbb{L}^1, X \geq 0$. On définit alors la mesure (finie) $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{G})$ telle que:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A), \forall A \in \mathcal{G}$$

Lemme 1.1.1. *On a $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, et on peut donc définir sur $(\Omega, \mathcal{G})$ la variable $Y = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.*

En effet, si $A \in \mathcal{G}$ vérifie $\mathbb{P}(A) = 0$, alors pour tout $M > 0$ On a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) &= \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{0\leq X\leq M}\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X>M}\mathbb{1}_A) \\ &\leq M\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X>M}) \end{aligned}$$

Pour tout $M > 0$ le premier terme de la somme ci-dessus est nul car $\mathbb{P}(A) = 0$. Par le théorème de convergence dominée (on domine par la variable X qui

est intégrable), le deuxième tend vers 0 lorsque $M \to \infty$, ce qui implique finalement $\mathbb{Q}(A) = 0$. On a donc démontré que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, le théorème de Radon-Nykodym permet de conclure la preuve du lemme.
La variable Y ainsi introduite est (par construction) $\mathcal{G}$-mesurable, et de plus elle vérifie:

$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(A) = E(X\mathbb{1}_A).$$

La variable Y vérifie donc les propriétés (1) et (2) de la définition de l'espérance conditionnelle, ce qui achève la preuve de l'existence dans le cas d'une variable positive.
Lorsque $X \in \mathbb{L}^1$ est quelconque, on pose $X = X^+ - X^-$, ou bien sûr, $X^+ = max(X, 0)$ et $X^- = max(-X, 0)$ sont des variables intégrables et positives. On voit alors facilement qu'en posant:

$$Y = \mathbb{E}(X^+/\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-/\mathcal{G})$$

On obtient une variable aléatoire qui vérifie les deux propriétés requises, et on conclut que: $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$.

1.1.3 Espérance conditionnelle par rapport un événement

Soit $B \in \mathcal{F}$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On peut définir une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, appelée probabilité conditionnelle sachant B, en posant pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition 1.1.2. *Soit X une variable aléatoire $\mathbb{P}$-intégrable i.e. $\mathbb{E}(|X|) = \int |X| d\mathbb{P} < \infty$, alors X est aussi $\mathbb{P}(./B)$-intégrable. De plus,*

$$\mathbb{E}(X/B) = \int X \ d\mathbb{P}(./B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X \ d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_B). \tag{1.1}$$

$\mathbb{E}(X/B)$ *est l'espérance de* X *sachant (ou conditionnelle à) l'événement* B.

Preuve: Ce résultat se démontre par étapes, en commençant par une fonction indicatrice, ce qui permet de passer aux fonctions étagées puis aux fonctions mesurables positives, pour conclure sur les fonctions intégrables.

Étape 1: $X = \mathbb{1}_A$

$$\int \mathbb{1}_A d\mathbb{P}(./B) = \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int \mathbb{1}_{B \cap A} d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B \mathbb{1}_A d\mathbb{P}$$

Étape 2: $X = \sum_{j \in J} \lambda_j \mathbb{1}_{A_j}$ où J est un ensemble fini et les (A_j) sont des événements disjoints.

On obtient la relation (1.1) grâce à la linéarité de l'intégrale et l'étape précédente.

Étape 3: X est mesurable positive. Il existe une suite croissante de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étagées positives qui converge vers X. D'après l'étape 2, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int X_n \, d\mathbb{P}(./B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X_n \, d\mathbb{P}$$

On applique ensuite le théorème de Beppo Levi aux deux intégrales.

Étape 4: X intégrable. La variable aléatoire X se décompose sous la forme $X = X^+ - X^-$ avec:

$$\begin{cases} X^+ &= \max(X, 0) \\ X^- &= \max(-X, 0) \end{cases}$$

Les variables aléatoires X^+ et X^- sont positives et $\mathbb{P}$-intégrable. L'étape 3 assure que:

$$\int X^+ \, d\mathbb{P}(./B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X^+ \, d\mathbb{P} < +\infty,$$

$$et \int X^- \, d\mathbb{P}(./B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X^- \, d\mathbb{P} < +\infty$$

donc $|X| = X^+ + X^-$ est $\mathbb{P}(./B)$..intégrable et on obtient (1.1).

1.1.4 Espérance conditionnelle par rapport une variable aléatoire

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note $\mathbb{E}(X/Y)$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par Y, donc c'est une fonction de Y: il existe $\psi(Y)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ borélienne telle que $\mathbb{E}(X/Y) = \psi(Y)$.
L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X/Y)$ est caractérisée par:

$a)$ c'est une variable $\sigma(Y)$ mesurable.

$b)$ $\displaystyle\int_A \mathbb{E}(X/Y)\, d\mathbb{P} = \int_A X\, d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \sigma(Y).$

La propriété **b)** est équivalente à $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/Y)\phi(Y)] = \mathbb{E}(X\phi(Y))$ pour toute fonction ϕ borélienne bornée, ou à $\displaystyle\int_{Y\in B} \mathbb{E}(X/Y)\, d\mathbb{P} = \int_{Y\in B} X\, d\mathbb{P}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

1.1.5 Propriétés de l'espérance conditionnelle: énoncés

Ce qu'il faut retenir du paragraphe précédent sur la construction de l'espérance conditionnelle sont les deux choses suivantes. Comme l'espérance, l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire est définie dés lors qu'elle est positive ou intégrable. En outre, si cette variable est de carré intégrable, l'espérance conditionnelle s'interprète comme la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel des v.a.r. de carré intégrable mesurables par rapport à la filtration à laquelle on effectue le conditionnement. D'un point de vue pratique et calculatoire, ce seront ensuite les propriétés énoncées dans ce paragraphe qui seront utiles.

Toutes les propriétés qui suivent sont vraies p.s, puisque l'espérance conditionnelle est définie de façon unique à indistinguabilité près. Pour éviter d'alourdir les énoncés on ne rappellera pas cette "restriction".

1. **Linéarité:** Soient a, b des réels, X intégrable,

$$\mathbb{E}[aX + b/\mathcal{G}] = aE[X/\mathcal{G}] + b.$$

2. **Positivité:** Si $X \geq 0$, intégrable, $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] \geq 0$.

3. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors: $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = X$.

4. Si X est indépendant de $\mathcal{G}$, alors: $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

5. **Propriété de tour**: Si X intégrable,
   a. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
   b. Si $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}_1]/\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X/\mathcal{G}_2]$ et $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}_2]/\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X/\mathcal{G}_2]$.

6. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable et si $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ alors:

$$\mathbb{E}[XY/\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y/\mathcal{G}].$$

Preuves des propriétés:

1. Le membre de droit est clairement $\mathcal{G}$-mesurable, et il vérifie (2) grâce à la linéarité de l'espérance. On conclut par unicité.

2. Cette propriété est considérée comme évidente.

3. Par hypothèse, X vérifie (1), et il est immédiat de s'assurer que X vérifie (2).

4. La variable $\mathbb{E}[X]$ est constante, elle est donc $\mathcal{H}$-mesurable pour toute tribu $\mathcal{H}$, en particulier elle est donc $\mathcal{G}$-mesurable et (1) est vérifiée. Soit $A \in \mathcal{G}$, X et $\mathbb{1}_A$ sont deux variables indépendantes et donc:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}[X].$$

D'autre part, puisque la variable $\mathbb{E}[X]$ est constante, on a bien sûr:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X]\mathbb{P}[A].$$

Comme le raisonnement est valable quelque soit $A \in \mathcal{G}$, on conclut que $\mathbb{E}[X]$ vérifie (2).

5. **a.** est simplement (2) appliqué à $A = \Omega$, qui est bien un élément de $\mathcal{G}$. La deuxième égalité de **b.** est une simple application de Propriété 3. Quant à la première égalité, elle nous fournit un candidat $\mathcal{G}_2$ mesurable ($Y = \mathbb{E}[X/\mathcal{G}_2]$) pour $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}_1]/\mathcal{G}_2]]$. Or si $A \in \mathcal{G}_2$ (d'après l'hypothèse $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, A appartient à $\mathcal{G}_1$ également), on peut utiliser (2) à deux reprises (dans la première égalité ci-dessous, pour l'espérance conditionnelle vis-à-vis de $\mathcal{G}_2$, et dans la deuxième égalité ci-dessous, pour l'espérance conditionnelle vis-à-vis de $\mathcal{G}_1$, puisque $A \in \mathcal{G}_1$ pour obtenir:

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}_1]/\mathbb{1}_A]$$

ce qui assure le résultat.

6. Remarquons que $Z = X\mathbb{E}[Y/\mathcal{G}]$ fournit un cadidat $\mathcal{G}$-mesurable pour $\mathbb{E}[XY/\mathcal{G}]$.
Reste à vérifier (2). Commençons par le cas où $Y = \mathbb{1}_B$ pour un certain B indépendant de $\mathcal{G}$. On a alors pour $A \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}[XY\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}[X\mathbb{P}(B)\mathbb{1}_A]$$

comme souhaité.
Par linéarité, on étend le résultat aux variables Y étagées, indépendantes de $\mathcal{G}$.
Lorsque Y est positive, indépendante de $\mathcal{G}$, on peut approcher Y par une suite de fonctions étagées positives, indépendantes de $\mathcal{G}$ et conclure grâce au théorème (1.1.1) de convergence monotone conditionnel.
Enfin si Y est seulement supposée indépendante de $\mathcal{G}$, il suffit de la décomposer en $Y^+ - Y^-$ (qui sont toutes deux indépendantes de $\mathcal{G}$), utiliser le résultat précédent et à nouveau la linéarité.

Théorème 1.1.1. *(Convergence monotone conditionnelle)[9] Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite croissante de v.a.r intégrables, qui converge vers une variable X que l'on suppose intégrable, alors:*

$$\mathbb{E}[X_n/\mathcal{G}] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[X/\mathcal{G}].$$

Théorème 1.1.2. *(Convergence dominée conditionnelle)[9] Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de v.a.r. intégrables qui converge en probabilité vers X, et on suppose qu'il existe U intégrable telle que $\forall n \geq 0;\ |X_n| \leq U$, alors:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X/\mathcal{G}].$$

Lemme 1.1.2. *(Fatou conditionnel)[9] Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de v.a.r. positives et intégrables, telle que $\liminf_{n\to\infty}(X_n)$ est une variable intégrable, alors:*

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty}]X_n/\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n/\mathcal{G}]$$

Théorème 1.1.3. *(Jensen conditionnel)[7] Soit ϕ est convexe et $X, \phi(X)$ sont intégrables alors:*

$$\phi(\mathbb{E}[X/\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)/\mathcal{G}].$$

1.2 Martingales à temps discret

Définition 1.2.1. *(Processus aléatoire) On appelle processus aléatoire à valeurs (E, ξ) un terme $X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ où pour tout n, X_n est une v.a. à valeurs (E, ξ).*

Définition 1.2.2. *(Filtration) Une filtration de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$. on dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré.*

On définit souvent pour un filtration la tribu $\mathcal{F}_{-1}$ par $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Définition 1.2.3. *(Un processus adaptè) Un processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est adaptè à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, X_n *est mesurable par rapport à la tribu* $\mathcal{F}_n$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $\mathcal{F}_n^X$ comme étant la plus petite tribu rendant les variables aléatoires $X_0, ..., X_n$ mesurables:

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, ..., X_{n)}.$$

Alors $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration appelée filtration canonique du processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la définition, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors X_n mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_m$ pour $m \geq n$.
La filtration canonique est par construction la plus petite filtration qui rende le processus adapté.

1.2.1 Définition des martingales

On se fixe, pour toute la suite, un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 1.2.4. *Un processus aléatoire* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *si:*

(i) $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ *(ie* X_n *est intégrable).*

(ii) $(X_n)_{n\geq 0}$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

(iii) $\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = X_n$ *p.s.*

Lorsqu'on ne précise pas la filtration, on suppose que l'on a pris la filtration canonique ou naturelle. On dira que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport au processus $(Y_n)_{n\geq 0}$, si on a choisi $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, ..., Y_n)$.
On peut remarquer que, par définition de l'espérance conditionnelle la dernière propriété est équivalente a:

$$\forall A \in \mathcal{F}_n,\ \mathbb{E}[1_A X_{n+1}] = \mathbb{E}[1_A X_n]$$

ou encore à:

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)/\mathcal{F}_n] = 0.$$

1.2.2 Surmartingale et sous-martingale

Définition 1.2.5. *Un processus aléatoire* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une surmartingale (respectivement une sous-martingale) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *si:*

(*i*) $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ *(i.e.* X_n *est intégrable).*

(*ii*) $(X_n)_{n\geq 0}$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

(*iii*) $\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \leq X_n$ *p.s. (resp.* $\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \geq X_n$*).*

Il est évident que (X_n) est une surmartingale si et seulement si $(-X_n)$ est une sous-martingale. De plus (X_n) est une martingale si et seulement si c'est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

Exemples:

• Si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration et si X est une variable aléatoire intégrable, alors $X_n = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n)$ définit une martingale. C'est la martingale de Doob.

• Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est un processus adapté intégrable, alors $S_n = X_0 + ... + X_n$ définit une martingale si et seulement si $\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = 0$. En particulier si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées telles que $X_0 = 0$ alors $S_n = X_0 + ... + X_n$ est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$.

• Un cas particulier de l'exemple issu de la théorie des jeux est celui où la loi des variables aléatoires Z_n est la loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathbb{P}(Z_i = 1) = p, \mathbb{P}(Z_i = -1) = 1 - p$. avec valeurs +1 et -1. Dans ce cas, X_n représente la fortune d'un joueur aprés n paris, lorsque sa fortune initiale est X_0 Alors $M_n = X_n - n(2p - 1)$ est une martingale pour la filtration naturelle $\mathcal{F}^X$

• Dans l'exemple , si l'on suppose que $\mathbb{E}(\exp Z_n) = \exp(r_n)$ existe et est finie, on pose alors $R_n = r_1 + ... + r_n$. (Ici, par convention, $R_0 = 0$)

Alors $M_n = \exp(X_n - R_n)$ est une martingale pour la filtration naturelle $\mathcal{F}^X$. Remarquons enfin q'on peut avoir le choix de la filtration par rapport à laquelle X est une martingale, (resp. une sous-martingale, une sur-martingale). En effet :

Proposition 1.2.1. *Si* X *est une martingale (resp. une sur-martingale, une sous-martingale) par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_n)$ *et qu'elle est adaptée à une filtration* $(\mathcal{G}_n)$ *plus petite que* $(\mathcal{F}_n)$ *(au sens où, pour tout n,* $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$*), alors* X *est une martingale (resp. une sur-martingale, une sous-martingale) par rapport à la filtration naturelle.*

Preuve :

Nous pouvons augmenter les filtrations en rajoutant à chaque tribu $\mathcal{F}_n$ une tribu indépendante et en utilisant la propriété **??**. □

Donnons deux premières propriétés simples mais importantes des martingales.

Proposition 1.2.2. *Si* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une martingale alors* $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$. *On dit qu'une martingale est à espérance mathématique constante.*

Preuve: D'après la propriété des martingales on a:

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}(X_{n+1})$$

d'où par récurrence on obtient le résultat.

Proposition 1.2.3. *Si* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une martingale alors pour tout* $n \geq 0$ *et tout* $k \geq 0$ *on a:*

$$\mathbb{E}[X_{n+k}/\mathcal{F}_n] = X_n$$

Une manière équivalente de donner ce résultat est de dire que pour $m < n$, $\mathbb{E}[X_n/\mathcal{F}_m] = X_m$.

Preuve: On sait déjà que le propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Procédons par récurrence sur $k \geq 1$. D'après la propriété des martingales, et les propriétés de l'espérance conditionnelle on a:

$$\mathbb{E}[X_{n+k+1}/\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+k+1}/\mathcal{F}_{n+k}]/\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+k}/\mathcal{F}_n] = X_n$$

la dernière égalité s'obtenant avec l'hypothèse de récurrence. D'où, on obtient le résultat.

Proposition 1.2.4. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale (resp. une sous-martingale). Si φ est une fonction convexe (resp. convexe croissante) telle que $\varphi(X_n)$ soit intégrable alors $(\varphi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.*

Preuve: Pour la première partie de la proposition, d'après l'inégalité de Jensen on a:

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})/\mathcal{F}_n] \geq \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n])$$

ce dernier terme étant égal à $\varphi(X_n)$ si au départ on a une martingale, sinon il est supérieur ou égal à $\varphi(X_n)$) si on a une sous-martingale et une fonction croissante.□

Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés qui sont identiques à celles des martingales. Nous ne démontrerons pas ces résultats, il suffira d'adapter les démonstration données dans le paragraphe des martingales.

Proposition 1.2.5. *[7] Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale (resp. une sous-martingale) alors:*

(1) $(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 0}$ *est une suite décroissante (resp. croissante);*

(2) $\forall n \geq 0,\ \forall k \geq 0,\ \mathbb{E}[X_{n+k}/\mathcal{F}_n] \leq X_n$ *(resp. $\geq$) ou encore:*
$\forall m \geq n,\ \mathbb{E}[X_n/\mathcal{F}_m] \leq X_m$ *(resp. $\geq$).*

Chapter 2

Décomposition des martingales à temps discret

Dans ce chapitre nous nous intéressons essentiellement à deux principaux moyens de transformer un processus en martingale: La décomposition de Doob-Meyer elle permet de transformer une surmartingale (resp. sousmartingale) en martingale en additionnant (resp. soustrayant) un processus croissant. Cette décomposition est utilisée en finance pour décomposer l'évolution d'un portefeuille d'actifs financiers en une partie prévisible et une partie non prévisible. La partie non prévisible sera en moyenne nulle. On ne s'intéressera donc qu'à l'évolution de la partie prévisible dans la recherche des allocations optimales nécessaires à atteindre un objectif de rendement moyen donné, comme par exemple le taux d'intérêt sans risque. Ensuite, nous traitons la décomposition de Riesz.

2.1 Décomposition de Doob:

Dans la théorie des processus stochastiques à temps discret, une partie de la théorie mathématique des probabilités, le théorème de la décomposition de Doob donne une unique décomposition de chaque processus stochastique adapté et intégrable comme la somme d'une martingale et un processus prévisible en commençant à zéro. Le théorème a été démontré par Joseph L.

Doob et porte son nom.

Définition 2.1.1. *On dit qu'un processus A_n est un processus croissant prévisible si $A_0 = 0,\ A_n \leq A_{n+1}$ et si A_{n+1} est $\mathcal{F}_n -$ mesurable.*

Théorème 2.1.1. *Toute sous-martingale $\{X_n\}_{n\geq 0}$ peut être écrite d'une manière unique comme $X_n = M_n + A_n$, où M_n est une martingale et A_n est un processus prévisible croissant tel que $A_0 = 0$.*

<u>**Preuve**</u>:

L'existence:

La preuve est parfaitement constructive. Supposons d'abord que la décomposition existe, avec $\mathbb{E}(M_n/\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$ et $A_n \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$. Alors nécessairement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(M_n/\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(A_n/\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= M_{n-1} + A_n = X_{n-1} - A_{n-1} + A_n.\end{aligned}$$

Il en résulte les deux relations

$$A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}$$

et

$$M_n = X_n - A_n.$$

Ces deux relations définissent M_n et A_n univoquement. En effet, $A_0 = 0$ et donc $M_0 = X_0$ par hypothèse, de sorte que tous les M_n et A_n sont définis par récurrence. Le fait que X_n est une sous-martingale implique que $A_n \geq A_{n-1} \geq 0$. Par récurrence, $A_n \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$. Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n/\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n - A_n/\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_{n-1}) - A_n \\ &= X_{n-1} - A_{n-1} \\ &= M_{n-1},\end{aligned}$$

ce qui montre que M_n est bien une martingale.

L'unicité :

On définit $A_0 = 0, A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}(X_n - X_{n-1}/\mathcal{F}_{n-1})$, alors, par construction,A_n est un processus croissant prévisible intégrable et $M_n = X_n - A_n$ vérifie $\mathbb{E}(M_n - M_{n-1}/\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ (puisque A_n *est* $\mathcal{F}_{n-1} - mesurable$).

Suposons qu'il existe deux décompositions :

$$X_n = X_0 + M_n + A_n$$

et

$$X_n = X_0 + M'_n + A'_n,$$

on a $A_0 = A'_0 = 0$ et $A'_n - A'_{n-1} = X_n - X_{n-1} - (M'_n - M'_{n-1})$ d'où, en conditionnant par $\mathcal{F}_{n-1}$, $A'_n - A'_{n-1} = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1})/\mathcal{F}_{n-1} = A_n - A_{n-1}$ d'où $A'_{n-1} = A_{n-1}$ puis $M'_{n-1} = M_{n-1}$. Donc la décomposition est unique . □

Corollaire 2.1.1. *Toute surmartingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une décomposition*

$$X_n = M_n + X_0 - A_n$$

où (M_n) et (A_n) sont comme dans la décomposition d'une sous martingale .

Il suffit pour le voir d'appliquer la décomposition de Doob à la sous martingale $(-X_n)$.

2.2 Interprétation de la décomposition de Doob

Si (X_n) représente l'évolution du processus au cours du temps, si à la date n on estime la valeur de X_{n+1}, on a une partie "sûre", dans le sens où A_{n+1} est connu dès la date n (puisque A est prévisible), et une partie aléatoire centrée qui correspond au M_{n+1} (une perturbation en quelque sorte).

2.3 Décomposition de Riesz

Théorème 2.3.1. *[8] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une sous martingale tel que $X_n \in \mathcal{L}^1$ et $\forall n$ $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(X_n^-) < +\infty$.Il existe une martingale M_n et un precessus* *croissant A_n tel que*

$$X_n = M_n + A_n.$$

En autre, A_n est intégrable et si (X_n) est positive

$$\mathbb{E}(A_n) \leq \mathbb{E}(X_n),\ \forall n.$$

2.4 Application

2.4.1 Exemples d'utilisation :

Sommes de variables iid:

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendentes et équidistribuées (iid) de moyenne $m = \mathbb{E}(X)$ et de variance $\sigma^2 = var(X)$. On s'intéresse au comportement asympotique de

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

On constate immédiatement que:

$$M_n = S_n - n\mathbb{E}(X)$$

est une martingale par raport a la filtration $\mathcal{F}_n$.
Cherchons son processus croissant:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2/\mathcal{F}_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2/\mathcal{F}_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - \mathbb{E}(x))^2/\mathcal{F}_{k-1}) = n\sigma^2$$

Finalement, dans ce cas des sommes de variables iid, la décomposition de Doob s'écrit:

$$(S_n - nm)^2 = M_n + n\sigma^2$$

2.4.2 Proprieté quadratique:

Un cas particulier important se présente si (X_n) est une martingale telle que $X_0 =$ et $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ pour tout n. Dans ce cas, La Proposition 1.2.3.2. implique que $(X_n^2)_n$ est une sous-martingale. La décomposition de Doob de $(X_n^2)_n$ s'écrit alors

$$X_n^2 = M_n + A_n$$

où M_n est une martingale et

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(X_m^2/\mathcal{F}_{m-1}) - X_{m-1}^2 = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}((X_m - X_{m-1})^2 \mathcal{F}_{m-1}).$$

Chapter 3

Inégalités exponentielles pour les martingales

Les inégalités de concentration sont des inégalités portant sur les fonctions d'une collection de plusieurs variables aléatoires. Lorsque les variables en jeu sont indépendantes, ou faiblement dépendantes, ces fonctions se concentrent autour de leur espérance, et les inégalités de concentration permettent de quantifier ce phénomène. Elles sont devenues des outils incontournables en probabilités, et ont trouvé application dans des domaines aussi variés que les statistiques, la géométrie des espaces de grande dimension, les mathématiques discrètes, les graphes aléatoires, l'analyse probabiliste des algorithmes,. . . .

Dans ce chapitre, nous nous intéressons essentiellement à l'inégalité concentration exponentielles de Azuma-Hoeffding qui fait partie de ces beaux outils mathématiques à la fois simples et utiles. Elle mérite d'être connue par tous ceux qui s'intéressent aux probabilités. Ces inégalités ont été obtenues par Hoeffding (1962), pour les sommes de variables aléatoires indépendantes, et étendues aux martingales à accroissements bornées par Azuma (1967).

3.1 Inégalité de Hoeffding

On va tout d'abord revenir sur la célèbre inégalité de Hoeffding pour les sommes de variables aléatoires indépendantes et bornées.

Théorème 3.1.1. *(Inégalité de Hoeffding) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on peut trouver des constantes $a_k < b_k$ telles que $a_k \leq X_k \leq b_k$ p.s. Si:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

alors, pour tout $x \geq 0$, on a:

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq x) \leq 2 \exp\left(- \frac{2x^2}{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2} \right). \tag{3.1}$$

La preuve de l'inégalité de Hoeffding repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Soit X une variable aléatoire réelle centrée telle que $a \leq X \leq b$ p.s. avec $a < b$. Alors, pour tout $t > 0$, on a:*

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{8} (b-a)^2 \right). \tag{3.2}$$

Preuve: Par la convexité de l'exponentielle, on a pour tout $a \leq x \leq b$

$$\exp(tx) \leq \frac{b-x}{b-a} \exp(ta) + \frac{x-a}{b-a} \exp(tb).$$

Par passage à l'espérance, comme $\mathbb{E}[X] = 0$, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(tX)] &\leq \frac{b}{b-a} \exp(ta) - \frac{a}{b-a} \exp(tb) \\ &\leq (1-p) \exp(-py) + p \exp((1-p)y). \end{aligned}$$

avec: $p = -a/(b-a)$ et $y = (b-a)t$ ce qui entraîne: $at = -py$ et $bt = (1-p)y$.

On en déduit que:

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp(h(y))$$

avec: $\exp(h(y)) = \exp(-py)((1-p) + p\,\exp(y))$

$donc: \; h(y) = -py + log(1 - p + p\exp(y))$.

Ce pendant, il est clair que:

$$h'(y) = -p + \frac{p}{p + (1-p)\exp(-y)}$$

$$h''(y) = \frac{p(1-p)\exp(-y)}{(p + (1-p)\exp(-y))^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Comme $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$, on a par la formule de Taylor qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq |\theta| \leq |y|$ tel que:

$$h(y) = h(0) + yh'(0) + \frac{y^2}{2}h''(\theta) \leq \frac{y^2}{8} = \frac{t^2}{8}(b-a)^2$$

ce qui achève la preuve du lemme 2.1.1. □

Preuve du théorème 3.1.1 Pour tous $x \geq 0$ et $t > 0$, on a par l'inégalité de Markov [1]

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq x) &= \mathbb{P}(\exp(t(S_n - \mathbb{E}[S_n])) \geq \exp(tx)) \\
&\leq \exp(-tx)\mathbb{E}[\exp(t(S_n - \mathbb{E}[S_n]))] \\
&\leq \exp(-tx)\mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{k=0}^{n} Y_k\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

avec, pour tout $1 \leq k \leq n$, $Y_k = X_k - \mathbb{E}[X_k]$. La suite (Y_n) est constituée de variables aléatoires indépendantes et centrées avec, pour tout $1 \leq k \leq n$,

[1] Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et supposée presque sûrement positive ou nulle. Alors: $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}[Z]}{a}$.

$c_k \le Y_k \le d_k$ p.s. où $c_k = a_k - \mathbb{E}[X_k]$ et $d_k = b_k - \mathbb{E}[X_k]$. On peut noter que $d_k - c_k = b_k - a_k$. Il d'ecoule alors de l'inégalité (2.2) que pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n}\exp(tY_k)\right] = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\exp(tY_k)], \\ &\le \prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{t^2}{8}(b_k - a_k)^2\right) = \exp\left(\frac{t^2 v_n}{8}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec:

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}(bk - ak)^2.$$

Les inégalités (2.3) et (2.4) entraînent alors que pour tous $x \ge 0$ et $t > 0$

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \ge x) \le \exp\left(-tx + \frac{t^2 v_n}{8}\right).$$

En prenant $t = 4x/v_n$, on en déduit que:

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \ge x) \le \exp\left(-\frac{2x^2}{v_n}\right).$$

En remplaçant X_k par $-X_k$, on montre de la même manière que pour tout $x \ge 0$

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \le -x) \le \exp\left(-\frac{2x^2}{v_n}\right).$$

Finalement, pour tout $x \ge 0$

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \ge x) = \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \ge x) + \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \le -x) \le 2\exp\left(-\frac{2x^2}{v_n}\right).$$

ce qui achève la preuve de l'inégalité de Hoeffding. $\square$

3.2 Inégalité de Azuma-Hoeffding

On revient à présent sur l'inégalité de Hoeffding pour les martingales à accroissements bornés, encore appelée inégalité de Azuma-Hoeffding.

Théorème 3.2.1. *(Inégalité de Azuma-Hoeffding) Soit (M_n) une martingale de carré intégrable avec $M_0 = 0$. On suppose que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on peut trouver des constantes $a_k < b_k$ telles que $a_k \leq \Delta M_k \leq b_k$ p.s. Alors, pour tout $x \geq 0$, on a:*

$$\mathbb{P}(|M_n| \geq x) \leq 2 \exp\left(-\frac{2x^2}{\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2}\right). \tag{3.5}$$

Preuve du théoréme3.2.1: On adopte la même démarche que pour l'inégalité de Hoeffding. Tout d'abord, il est clair que pour tout $n \geq 1$, $M_n = M_{n-1} + \Delta M_n$. Pour tout $t > 0$, on a donc par passage à l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}[\exp(tM_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(tM_n)/\mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[\exp(tM_{n-1})\mathbb{E}[\exp(t\Delta M_n)/\mathcal{F}_{n-1}]]. \tag{3.6}$$

Cependant, (M_n) est une martingale ce qui implique $\mathbb{E}[\Delta M_n/\mathcal{F}_{n-1}] = 0$. De plus, on a $a_n \leq \Delta M_n \leq b_n$ p.s. Il découle alors du lemme 2.1.1 que pour tout $t > 0$

$$\mathbb{E}[\exp(t\Delta M_n)/\mathcal{F}_{n-1}] \leq \exp\left(\frac{t^2}{8}(b_n - a_n)^2\right). \tag{3.7}$$

Par suite, on déduit de (2.6) et (2.7) que:

$$\mathbb{E}[\exp(tM_n)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{8}(b_n - a_n)^2\right)\mathbb{E}[\exp(tM_{n-1})]. \tag{3.8}$$

On tire alors de (2.8) que:

$$\mathbb{E}[\exp(tM_n)] \leq \exp\left(\frac{t^2 v_n}{8}\right) \quad \textit{avec} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2 \tag{3.9}$$

car $M_0 = 0$. L'inégalité de Markov et (2.9) entraînent alors que pour tout $x \geq 0$, $t > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n \geq x) &\leq \exp(-tx)\mathbb{E}[\exp(tM_n)] \leq \exp\left(-tx + \tfrac{t^2 v_n}{8}\right), \\ &\leq \exp\left(-\tfrac{2x^2}{v_n}\right)\end{aligned}$$

avec $t = 4x/v_n$. En remplaçant M_n par $-M_n$, on montre de la même manière que pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(M_n \leq -x) \leq \exp\left(-\frac{2x^2}{v_n}\right).$$

On peut donc conclure que pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(|M_n| \geq x) = \mathbb{P}(M_n \geq x) + \mathbb{P}(Mn \leq -x) \leq 2\exp\left(-\frac{2x^2}{v_n}\right).$$

ce qui achève la preuve de l'inégalité de Azuma-Hoeffding. □

3.3 Applications

3.3.1 Appliquons de l'inégalité de Azuma-Hoeffding au cas d'une marche aléatoire symétrique

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ où les $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes centrées et identiquement distribuées à valeurs dans [-1, 1]. L'hypothèse sur les accroissements est donc satisfaite avec $K_n = 1$ et par conséquent

$$\forall u > 0, \qquad \mathbb{P}(|S_n| \geq u) \leq 2\exp\left(-\frac{2u^2}{n}\right).$$

En particulier, on peut remplacer u par $n\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2).$$

La probabilité de s'écarter de l'espérance est donc exponentiellement petite en n. On peut aussi remplacer u par $x\sqrt{n}$ pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \geq x\right) \leq 2\exp(-2x^2).$$

Cette borne supérieure rappelle l'asymptotique du théorème central limite, mais elle est cette fois valable pour tout n. Ceci est intéressant en pratique car le nombre de données disponibles est parfois faible et cette borne théorique permet de quantifier les écarts dus aux fluctuations.

3.3.2 Application au bin packing

Appelons B_n le nombre de boîtes de taille 1 nécessaires pour ranger n objets de taille $X_1, X_2, ..., X_n$ i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On souhaite étudier la variable aléatoire B_n. On sait par exemple que $\frac{B_n}{n}$ converge presque sûrement vers une constante. On cherche une inégalité de concentration de B_n autour de sa moyenne. Pour cela, on construit

$$\forall i = 0, 1, ..., n \qquad Y_i^{(n)} := \mathbb{E}(B_n/\mathcal{F}_i).$$

Alors $\left(Y_i^{(n)}\right)_{i=0,1,...,n}$ est une $\mathcal{F}_i$-martingale et

$$Y_n^{(n)} = B_n, \qquad Y_0^{(n)} = \mathbb{E}(B_n).$$

Il suffit donc de montrer que les accroissements de cette martingale (Y_i) vérifient la condition (1) pour en déduire grâce au théorème d'Azuma une majoration de

$$\mathbb{P}\left(|Y_n^{(n)} - Y_0^{(n)}| > t\right) = \mathbb{P}(|B_n - \mathbb{E}(B_n)| > t).$$

Pour cela, remarquons que si l'on note $B_n(i)$ le nombre de boîtes nécessaires pour ranger les objets sauf X_i, on a toujours

$$B_n(i) \leq B_n \leq B_n(i) + 1$$

ce qui, en passant aux espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{F}_{i-1}$ et $\mathcal{F}_i$ donne

$$\mathbb{E}(B_n(i)/\mathcal{F}_{i-1}) \leq Y_{i-1} \leq \mathbb{E}(B_n(i)/\mathcal{F}_{i-1}) + 1$$

$$\mathbb{E}(B_n(i)/\mathcal{F}_i) \leq Y_i \leq \mathbb{E}(B_n(i)/\mathcal{F}_i) + 1$$

Mais par définition de $B_n(i)$, les membres de gauche sont égaux, les membres de droite aussi. Donc

$$|Y_i - Y_{i-1}| \leq 1$$

ce qui est une condition de type (1) avec les constantes toutes égales à 1. L'inégalité d'Azuma fournit ainsi

$$\mathbb{P}\left(|Y_n^{(n)} - Y_0^{(n)}| > t\right) = \mathbb{P}(|B_n - \mathbb{E}(B_n)| > t) = 2e^{-\frac{t^2}{2n}}.$$

Chapter 4

Convergence Des Martingale à temps discret

Les principaux théorèmes dans la théorie de martingale sont les théorèmes de convergence : une sous-martingale majorée converge p.s., de même par symétrie pour une surmartingale minorée (comme pour les suites croissantes et décroissantes), et donc (essentiel) une martingale majorée ou minorée converge p.s.. En particulier, une martingale positive converge p.s.. Il y a un autre théorème de convergence important : si une martingale est bornée dans L^p pour un $p \geq 1$,, alors elle converge p.s. et aussi, si $p > 1$, dans $\mathbb{L}^p$.

Ce chapitre est dévoué à des résultats importants de convergence des martingales. Comme précédemment, on se place sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_n, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

4.1 Martingales de carrée intégrable

Définition 4.1.1. *Une martingale $(X_n, n \in \mathbb{N})$ pour la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ est dite de carré intégrable, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$.*

Définition 4.1.2. *Une martingale $(X_n, n \in \mathbb{N})$ pour la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ est dite bornée dans $\mathbb{L}^2$, si pour tout n, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$.*

4.2 Convergence dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Théorème 4.2.1. *Soit* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale ou sous Martingale tq :* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\mathrm{X}_n^2) < +\infty$ *alors* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Preuve : La convergence quadratique s'obtient par des méthodes hilbertiennes classiques : comme L_2 est complet, il suffit en effet de montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Le point clé est le calcul de $\|X_k - X_j\|_2^2$ pour $k \geq j$ où l'on utilise la propriété de martingale $\mathbb{E}(X_k/\mathcal{F}_j) = X_j$, d'où $\mathbb{E}(X_k X_j) = \mathbb{E}(X_j^2)$:

$$\mathbb{E}(X_k - X_j)^2 = \mathbb{E}X_k^2 - \mathbb{E}X_j^2 \tag{4.1}$$

La suite de réels $(\mathbb{E}X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (parce que (X_n^2) est une sous-martingale ou comme sous-produit du calcul ci-dessus qui montre que pour $k \geq j$, $\mathbb{E}X_k^2 - \mathbb{E}X_j^2$ est positif). Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L2$, $(\mathbb{E}X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}^+$. Elle converge donc dans $\mathbb{R}^+$ et c'est une suite de Cauchy. En utilisant 4.1, on en déduit immédiatement que $(X_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite de Cauchy dans L_2. □

4.3 Convergence p.s

Théorème 4.3.1. *[8] Soit* $(\mathrm{X}_n)_n$ *une S.M.G (resp M.G)* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|\mathrm{X}_n|) < +\infty$ *alors* $\exists$ *V.a x integrable t.q* $(\mathrm{X}_n) \longrightarrow X$ *p.s*

4.4 Loi des Grands Nombres

Comme application du théorème 4.2.1, nous allons maintenant montrer la loi des grands nombres pour les suites de v.a. iid intégrables, ceci renforce le résultat de la loi des grands nombres pour les suites de v.a. iid de carré intégrable. Nous commençons par une loi des grands nombres pour les martingales de carré intégrables.

Théorème 4.4.1. *Soit $X_n, n \geq 0$ une martingale de carré intégrable telle que*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[\Delta|M_n|^2] < \infty.$$

Alors, $\frac{1}{M_n} \longrightarrow 0$ *p.s. et dans* $\mathbb{L}^2$.

Preuve : Le processus $X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Delta M_k, \quad n \geq 1$ est une martingale vérifiant les conditions du théorème 4.2.1 Il existe donc une v.a. $X_\infty \in \mathbb{L}^2$ telle que $X_n \longrightarrow X_\infty$ dans $\mathbb{L}^2$ et p.s.
Pour conclure, il suffit de reproduire l'argument classique du lemme de Kronecker pour les suites déterministes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}M_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i(X_i - X_{i-1}) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} iX_i - \sum_{i=1}^{n}(i-1)X_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}\right) \\
&= X_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \longrightarrow 0, \quad \text{dans } \mathbb{L}2 \text{ et p.s.}
\end{aligned}$$

d'après la première étape. □

Pour une suite de v.a. indépendantes, la marche aléatoire correspondante (définie par les sommes partielles) est une martingale à laquelle on peut appliquer le théorème précédent si la condition de convergence est vérifiée. Le résultat suivant construit sur cet argument pour montrer la version la plus forte de la loi des grands nombres.

Théorème 4.4.2. *[4](Loi forte des Grands Nombres) Soit $(X_n)_{n\geq}$ une suite iid de v.a. intégrables. Alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \mathbb{E}(X_1) \quad p.s$$

4.5 Exemple d'utilisation

4.5.1 Série aléatoire

Supposons que les ξ_n soient indépendantes et de même loi dans $\mathbb{L}^2$, centrés ($E[\xi_k] = 0$) et que la suite réelle $(a_n)_n$ est telle que $\sum_n (a_n)^2 < \infty$.

Alors $M_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$: en effet c'est le premier exemple de martingale, et vu que $\mathbb{E}[M_n] = 0$,

$$\mathbb{E}[(M_n)^2] = Var(M_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 Var(\xi_k) = Var(\xi_1) \sum_{k=1}^{n} a_k^2 < Var(\xi_1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

Par suite, $(M_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans $\mathbb{L}^2$. Autrement dit, la série $\sum_n a_n \xi_n$ converge p.s. et dans $\mathbb{L}^2$.

Chapter 5

Exercices

5.1 Espérance conditionnelle

Exercice 5.1.1. *1. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux tribus contenues dans $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2$ la tribu engendrée par la classe $\mathcal{D}_0 = \{B_1 \cap B_2 / B_1 \in \mathcal{D}_1, B_2 \in \mathcal{D}_2\}$, On considére une v.a.r. Y telle que $E|Y| < \infty$, et on suppose que les les tribus, $\sigma(Y) \vee \mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont indépendantes.*
Montrer $E(Y/\mathcal{D}) = E(Y/\mathcal{D}_1)$ p.s.
2. Soit (X_i) une suite de v.a.r. indépentes, équidistribuées, telles que $E|X_i| < +\infty$, on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.
Déterminer $E(X_1/S_n, S_{n+1}, ...)$.

Exercice 5.1.2. *Soient X, Y deux v.a. telles que $E[X] = E[Y] = 0$ et telles que $Z = X + \beta Y$ est independante de Y pour un quelque $\beta \in \mathbb{R}$.Montrer que $E[X/Y] = -\beta Y$.*

Exercice 5.1.3. *On suppose que X est de carré intégrable. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. On pose*

$$Var(X/\mathcal{B}) = E(X^2/\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X/\mathcal{B})^2$$

Montrer que $Var(X) = \mathbb{E}(Var(X/\mathcal{B})) + Var(\mathbb{E}(X/\mathcal{B}))$.

Exercice 5.1.4. *Soient* $X_1; ...; X_n$ *des var indépendantes, intégrables et* $\mathcal{B}$ *la tribu définie par* $\mathcal{B} = \sigma(X_1; ...; X_n)$. *Calculer* $\mathbb{E}(X_1 + ... + X_n/\mathcal{B})$ *et* $E(X_1 ... X_n/\mathcal{B})$.

Exercice 5.1.5. *Une usine produit n lampes. Chacune est défectueuse avec probabilité* ϕ. *On teste chaque lampe pour détecter un éventuel défaut. La probabilité de détecter le défaut quand il est présent est* δ. *Montrer que*

$$\mathbb{E}(X|Y) = \frac{n\phi(1-\delta) + (1-\phi)Y}{1-\phi\delta}.$$

Exercice 5.1.6. *Montrer que* $\mathbb{Z} = \mathbb{E}(Y|X)$ *vérifie*

$$\mathbb{E}(Zg(X)) = \mathbb{E}(Yg(X)) \tag{5.1}$$

pour toute fonction g telle que les deux espérances existent. Montrer qu'il y a une unique fonction $Z = \psi(X)$ *vérifiant (5.1) et que c'est donc* $Z = \mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 5.1.7. *une poule pond N oeufs, N suivant une loi de Poisson de paramètre* λ, *c'est-à-dire* $f_N(n) = \mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$. *Chaque oeuf éclôt avec probabilité p, indépendamment des autres oeufs. On note* $q = 1 - p$. *Soit K le nombre de poussins. Notre but est de calculer, puis d'interpréter les valeurs de* $\mathbb{E}(K|N)$, $\mathbb{E}K$ *et* $\mathbb{E}(N|K)$.

1) Montrer que $f_{K|N}(k|n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ *et que* $\mathbb{E}(K|N) = pN$. *En déduire que* $\mathbb{E}(K) = p\lambda$. *Interpréter.*

2) Si vous ne l'avez jamais vue, montrer la règle de Bayes

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{P(B)}.$$

3) En utilisant la règle de Bayes, montrer que si $n \geq k$,

$$f_{N|K}(n|k) = \mathbb{P}(N = n|K = k) = \frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-q\lambda}.$$

Conclure que $\mathbb{E}(N|K) = K + q\lambda$. Interpréter.

Exercice 5.1.8. *Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a. indépendantes, de méme loi définie par:*
$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{3}$.
on pose $T_1 = \sum_{i=1}^{n} 1_(X_i = 1)$ et $T_2 = \sum_{i=1}^{n} 1(X_i = 0)$.

1. *Soit* f *une fonction réelle de varaible réelle. Déterminer $\mathbb{E}(fox_i/T_1, T_2)$*

2. *On pose* $\mathrm{U} = T_1 + T_2$. *Calculer $\mathbb{E}(f.X_i/\mathrm{u})$.*

3. *Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant $\mathrm{U} = k$ $(0 \leq k \leq n)$ et expliquer le résultat.*

Exercice 5.1.9. *Soient X et Y deux var indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi du couple (X;Z). En déduire la densité conditionnelle de X sachant Z et $\mathbb{E}(X/Z)$.*

Exercice 5.1.10. *Soient X et Y deux var indépendantes, de même loi ayant pour densité $f(z) = \frac{1}{z^2}\mathbf{1}_{]1,+\infty[}(z)$. On pose $U = XY$ et $V = \frac{X}{Y}$. Quelle est la loi de (U; V) ? En déduire la densité conditionnelle de V sachant U et $E(V/U)$*

Exercice 5.1.11. *Soient $X_1; ...; X_n$ des var indépendantes de même densité f(x). On pose $X = max(X_1; ...; X_n)$ et $Y = min(X_1; ...; X_n)$.*

1. *Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ et $\mathbb{E} = (Y/X)$.*

2. *Application: les X_i sont des v.a uniformes sur $[0, 1]$. Donner les résultade la question précédente et les interpréter*

Exercice 5.1.12. *Soit (X_i) une suite de v.a.r iid,avec $\mathbb{E}(X_i) = \mu$,$Var(X_i) = v$. Soit N une v.a entière,indépendante des X_i avec $\mathbb{E}(N) = \gamma$ et $Var(N) = w$.*

1. *Montrer que $\mathbb{E}(S_N/N = n) = \mathbb{E}(S_n)$.*

2. *En déduire $\mathbb{E}(S_N)$ et $Var(S_N)$.*

Exercice 5.1.13. *Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe :*

$$f(x, y) = cx(y - x)e^{-y}\mathbf{1}_{0<x\leq y}$$

1. *Déterminer c pour que f soit effectivement une densité.*

2. *Calculer $f(x/y)$, densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.*

3. *En déduire que $E[X/Y] = Y/2$.*

4. *Calculer $f(y/x)$, densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.*

5. *En déduire que $E[Y/X] = X + 2$.*

6. *Déduire des questions 4 et 6 les quantités $E[X]$ et $E[Y]$.*

Exercice 5.1.14. *Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe :*

$$f(x,y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{Y} - y} 1_{]0,+\infty[^2}(x,y)$$

1. *Déterminer la densité marginale $f(y)$ de Y .*
2. *En déduire la densité conditionnelle $f(x/y)$.*
3. *Que vaut $E[X/Y = y]$. En déduire l'espérance conditionnelle de X sachant Y .*

Exercice 5.1.15. *Soit X une variable aléatoire de densité :*

$$\frac{2}{(\ln 2)^2} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \mathbf{1}_{[0,1](x)}$$

Soit Y une variable aléatoire telle que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} \frac{1}{1+y} \mathbf{1}_{[0,x]}(y)$$

1. *Donner la densité jointe du couple (X, Y).*
2. *Quelle est la densité de Y ? Densité conditionnelle de X sachant Y ?*
3. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
4. *Déterminer l'espérance conditionnelle $E[X/Y]$.*

5.2 Martingale à temps discret

Exercice 5.2.1. *Soit* $(X_n)_n$ *une sMG pour la suite de tribus* $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$.
Montrer que $(X_n)_n$ *est aussi une sMG pour la suite*$(\sigma(X_1, X_2, ..., X_n))_{n\geq 1}$.

Exercice 5.2.2. *Soient* $Y_1, Y_2...$ *des variables i.i.d., et soit* $X_n = \prod_{m=1}^{n} Y_m$.
Sous quelle condition la suite X_n *est-elle une surmartingale? Une sous-martingale? Une martingale?*

Exercice 5.2.3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré, et* $X_n = \sum_{m=1}^{n} 1_{B_m}$, *avec* $B_n \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$.
Montrer que X_n *est une sous-martingale.*

Exercice 5.2.4. *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de v.a.r indépendante, de même espérance m finie. Pour tout* $n \geq 1$, *on pose*
$S_n = X_1 + ... + X_n$.
Montrer que la marche aléatoire $(S_n)_n$ *est un sMG, une MG, une SMG suivant que* $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$.

Exercice 5.2.5. *a) Soit* $(Z_n)_n$ *une suite de v.a.r indépendante, de même loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(P)$. *on pose* $\mathcal{B}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ *et* $\mathcal{B} = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$ *pour* $n \geq 1$. *Soit* $(b_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. positives bornées, telles que* b_n *soit* $\mathcal{B}_{n-1}$-*mesurable pour tout* $n \geq 1$. *On définit un jeu en décidant que si* $Z_n = 1$, *on gagne* b_n, *et si* $Z_n = -1$, *on perd* b_n. *Soit* S_0 *la fortune initiale,* S_n *la fortune aprés le* n^{me} *coup.*
Montrer que (S_n) *est une MG si* $P = \frac{1}{2}$, *une sMG si* $P > \frac{1}{2}$, *une SMG si* $P < \frac{1}{2}$.
b) Soit $(X_n)_n$ *une SMG pour la suite de tribus* $(\mathcal{B}_n)_n$ *et soit* $(\xi_n)_n$ *une suite*

de v.r. positive et bornées, ξ_n étant $\mathcal{B}_{n-1}-$mesurable ($n \geq 1$), ξ_0 constante. On pose $Z_0 = X_0$, et pour $n \geq 1$, $\quad Z_n = X_n - X_{n-1}$.
Montrer que la suite $Y_n = \xi_0 Z_0 + \xi_1 Z_1 + ... + \xi_n Z_n$ est une SMG.
c) soit T un temps d'arrêt adapté à la suite $(\mathcal{B}_n)_n$. $\quad$ Montrer que le processus $\hat{X}_n = X_{T\wedge n}$ arrété à l'instant T est une SMG. (On note $T \wedge n = \inf(T, n)$).

Exercice 5.2.6. *Soit $(X_n)_n$ une MG pour la suite de tribus $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ de carré intégrable.*
a) Montrer que X_n^2 s'écrit de maniére unique comme la somme de deux processus (A_n) et (Y_n) ayant les propriétés suivantes: (A_n) est un processus croissant prévisible, $A_0 = \mathbb{E}(X_0^2)$ et (Y_n) est une MG pour la suite $(\mathcal{B}_n)$.
b) Application: Soit $T_1, T_2, ...$ une suite de v.a.r indépendante, de même loi, de carré intégrable, telles que $\mathbb{E}(T_1) = 0$, $\mathbb{E}(T_1^2) = \sigma^2$, on pose $S_0 = 0$, $S_n = T_1 + ... + T_n$ pour $n \geq 1$.
montrer que $(S_n^2 - n\sigma^2)$ est une MG.

Exercice 5.2.7. *Soit $(X_i)_{\geq}1$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distributées telles que $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$ Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on pose*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. *Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*
2. *Montrer que $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*
3. *Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*
4. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $(\exp(\lambda S_n - \xi n))_{n\geq 0}$ soit une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*

Exercice 5.2.8. *Soit* $X_1; X_2; ...$ *des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note* $m = E(X_n) < +\infty$, *ainsi que* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1; ...; X_n)$ *et*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} iX_i - \frac{n(n+1)}{2}m.$$

Calculer $E(Y_n/\mathcal{F}_{n-1})$. *Que peut-on dire du processus* $(Y_n)_{n\geq 1}$*?*

Bibliography

[1] B. Bercu: Inégalités exponentielles pour les matingales. Polycopié (2008)

[2] B. Chauvin: Martingales discrètes et applications à l'analyse d'algorithmes. Polycopié (2002)

[3] Charles SUQUET *Martingales,*Université des Sciences et Technologies de Lille, U. F. R. de Mathématiques Pures et Appliquées(2009-2010).

[4] Dominique Bakry, Laure Coutin, Thierry Delmotte, *Martingales et Chaînes de Markov,* Université Paul Sabatier,Toulouse, France. (2004).

[5] J. Lacroix, P. Priouret,*Probabilités Approfondies*, Polycopié, (2005).

[6] J. L. Doob, J. Wiley: Stochastic Processes, New-York. Ed. Chapmann Hall, Londres. (1953)

[7] J. Neveu: Martingales à temps discret, Masson, Paris, (1972)

[8] Nizar TOUZI, *MARTINGALES EN TEMPS DISCRET ET CHAINES DE MARKOV,* Ecole Polytechnique Paris, Département de Mathématiques Appliquées (Septembre 2009).

[9] Paul André Merey : Décomposition des surmartingales, Séminaire Brelot-Choquet-Deny.Théorie du potentel (1962)