



N°Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Année: 2022

Estimation non-paramétrique des processus semi-markoviens à temps discret et ses applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Analyse stochastique, statistique des processus et
applications (ASSPA)

par

Bendjellal Houari Charaf eddine¹

Sous la direction de

Professeur Sâadia Rahmani

Soutenue le 20/06/2022 devant le jury composé de

Dr. Fatiha Mokhtari	Université Dr. Moulay Tahar. Saïda	Présidente
Pr. Sâadia Rahmani	Université Dr. Moulay Tahar. Saïda	Encadreur
Dr. Fatima Benziadi	Université Dr. Moulay Tahar. Saïda	Examinatrice

1. e-mail : charafeddinehouari1997@gmail.com

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

*A ma chère **Professeur Saadia Rahmani**, ma grande support, et qui m'a
enseignée à être solide et modeste.*

*A ma chère **mère**, ma raison d'être, ma raison de vivre, la lanterne qui éclaire
mon chemin de douceur et d'amour.*

*A mon cher **père**. en signe d'encouragement et de gratitude pour les soutiens et les
sacrifices dont il a fait preuve à mon égard.*

A mon précieux et aimable frère Ahmed.

*Aucun mot ne pourra décrire vos dévouements et vos sacrifices qu'ils m'accordent
de confiance et de fierté.*

*A toute ma **famille** et les **proches**.*

*A tous mes amis, Amine Houbad, Zaoui Chams Eddine, Bourahla Youssef, Aissa
Malek, Mohamed Salim Chalbi mon amie Tunisien, Mohammad de l'Iraq Mahmoud Al
Qedara mon ami Paléstinien, Talal mon ami de la Lybie, Heset Brahimi de la Kosovo, et
finalement mon ami Sakib du Bangladesh en témoignage de l'amitié sincère qui nous a
liés et les bons moments passés ensemble.*

Remerciements

Avant de commencer à vous présenter ce modeste travail, je tiens tout d'abord à remercier sans fin notre Dieu **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Je tiens à présenter tout mon respect et ma gratitude à ma directrice Professeur **Saâdia Rahmani**, ma directrice de mémoire qui est à l'origine de ce travail, pour son support, ses idées constructives, sa guidance valeureuse, et pour son encouragement et patience tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Je veut adresser à remercier aussi bien les membres de jury pour le temps et l'attention qu'ils ont bien voulu me consacrer pour cette évaluation, Docteur **Fatiha Mokhtari** et Docteur **Fatima Benziadi**, J'ai une profonde dette de gratitude envers vous et envers notre université, le **Laboratoire des Modèles Stochastiques, Statistiques et Application** ainsi que ses membres pour nous avoir donné l'opportunité de terminer ce travail.

Je tiens à présenter mon vif remerciement à Melle **Chafiaa Ayhar**, Melle **Boubred Maroua**, Docteur **Mokhtar Kadi**, Docteur **Yahiaoui Lahcen** et à tous les personnes qui ont contribué, de pès ou de loin, au bon déroulement de mon projet.

Merci à mes chers amis ici et mes amis **étrangers**, pour les souvenirs inoubliables qu'on a passé ensemble et à toute ma promotion 2021/2022. Merci à la flamme qui m'a toujours éclairée, à la plus parfaite Maman qui m'a toujours orienté, soutenue, et supporté.

Merci à toute ma famille je suis honoré de vous voir fière de moi.

Table des matières

Remerciements	3
Table des figures	6
Notations	7
1 Introduction générale	10
1.1 Motivation et contexte bibliographique	10
1.2 Organisation du mémoire	12
1.3 Préliminaires	13
2 Généralités sur les chaînes de Markov	16
2.1 Définitions	16
2.2 Exemple de CM	18
2.3 Graphe associé à une matrice de transition	20
2.4 Caractérisations d'une chaîne de Markov homogène	21
2.4.1 Propriétés fondamentales	21
2.4.2 Équations de Chapman Kolmogorov	22
2.4.3 Classification des états	23
3 Chaîne semi-markovienne	27
3.1 Chaînes de renouvellement de Markov et chaînes semi-markoviennes	27
3.1.1 Chaîne de renouvellement markovienne	28

3.2	Temps de séjour	30
3.2.1	Lois du temps de séjour	30
3.3	Chaîne semi-markovienne	32
3.3.1	Fonction de transition de la chaîne semi-markovienne	33
3.4	Équation de renouvellement semi-markovien	34
4	Estimation non-paramétrique des chaîne semi-markoviennes	37
4.1	Processus de comptage associés à la chaîne de renouvellement markovien . .	37
4.2	Construction des estimateurs	38
4.3	Propriétés asymptotiques des estimateurs	43
4.3.1	Convergence presque sûre	43
4.3.2	Normalité asymptotique	48
5	Application et conclusion	60
5.1	Concept général de la fiabilité et les mesures associées	60
5.2	Fiabilité des systèmes via les chaînes semi-markoviennes à temps discret . .	62
5.2.1	Estimation non paramétrique de la fiabilité et Propriétés asymptotiques	66
5.2.2	Exemple numérique	68
5.3	Conclusion	71
	Bibliographie	73

Table des figures

2.1	Graphe associé au modèle de diffusion d'Ehrenfest.	20
2.2	Graphe associé à une matrice de transition à deux états.	20
2.3	Graphe associé à la matrice de transition $\mathcal{P}_2$	25
2.4	Graphe de transition.	26
3.1	Une trajectoire d'un chaîne SM	28
5.1	Graphe de la fiabilité.	61
5.2	Une fonction de disponibilité typique.	61
5.3	Taux de défaillance.	62
5.4	Un système semi-markovien à temps discret à trois états.	69
5.5	Distribution du temps de séjour pour l'état actuel $i="2"$ et le prochain état j="3".	70
5.6	Estimateur de la fiabilité : intervalle de confiance au niveau 95	70
5.7	Estimation empirique de la fiabilité.	71

Notations

Abréviations

CM	Chaîne de Markov
CSM	Chaîne semi-markovienne
CRM	Chaîne de Renouvellement markovien
CMI	Chaîne de Markov Immergée
NSM	Noyau Semi-markovien
ERM	Équation de Renouvellement markovien
EMV	Estimateur du maximum de vraisemblance
LFGN	Loi forte des grands nombres
TCL	Théorème Centrale Limite

Probabilistes

$\mathbb{P}$	Probabilité
$\mathbb{N}$	Ensemble de nombres naturels positifs
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité
$\mathbb{E}$	Espérance à l'égard de $\mathbb{P}$
$E = \{1, \dots, s\}$	Espace d'état fini
$\mathcal{M}_E$	Ensemble des matrices réelles sur $E \times E$
$\mathcal{M}_E(\mathbb{N})$	Fonctions matricielles définies sur $\mathbb{N}$, avec des valeurs dans $\mathcal{M}_E$
$Z := (Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$	Chaîne semi-markovienne (CSM)
$(J, S) := (J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Chaîne de renouvellement de Markov (CRM)

$J := (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$	États visités, chaîne de Markov Immergée (CMI)
$S := (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Temps de saut
$X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Temps de séjour
M	Temps de censure fixe
$N(M)$	Nombre de sauts de Z dans l'intervalle de temps $[[1, M]]$
$N_i(M)$	Nombre de visites à l'état i de la CMI, jusqu'à temps M
$N_{ij}(M)$	Nombre de transitions de l'état i à l'état j de CMI, jusqu'à l'instant M
$N_{ij}(k, M)$	Nombre de transitions de l'état i à l'état j jusqu'à l'instant M , avec un temps de séjour dans l'état i égal à k
$\mathbf{p} := (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{E}}$	Matrice de transition de la CMI J
$\mathbf{q} := (q_{ij}(k))_{i,j \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}}$	Noyau semi-markovien
$\mathbf{Q} := (Q_{ij}(k))_{i,j \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}}$	Noyau semi-markovien cumulé
$\mathbf{f} := (f_{ij}(k))_{i,j \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}}$	Distribution conditionnelle du temps de séjour dans l'état i , avant de visiter l'état j
$\mathbf{F} := (F_{ij}(k))_{i,j \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}}$	Distribution conditionnelle du temps de séjour cumulé dans l'état i , avant de visiter l'état j
$\mathbf{h} := (h_i(k))_{i \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}}$	Distribution du temps de séjour dans l'état i
$\mathbf{H} := (H_i(k))_{i \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}}$	Distribution cumulée du temps de séjour dans l'état i
$\overline{\mathbf{H}} := (\overline{H}_i(k))_{i \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}}$	Fonction de survie à l'état i
$\mathbf{P} := (P_{ij}(k))_{i,j \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}}$	Fonction de transition de la chaîne semi-markovienne Z
μ_{ij}	Temps moyen du premier passage de l'état i à l'état j , pour le processus semi-markovien Z
μ_{ij}^*	Temps moyen du premier passage de l'état i à l'état j , pour la chaîne de Markov Immergée J
$\nu = (\nu(j))_{j \in \mathbb{E}}$	Distribution stationnaire de la CMI J
$\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{E}}$	Distribution initiale du processus semi-markovien Z

$A * B$	Produit de convolution matricielle en temps discret de A, B
$A^{(n)}$	Convolution n fois de $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{E}}(\mathbb{N})$
v.a.	Variable aléatoire
<i>Symboles divers</i>	
δ_{ij}	symbole de Kronecker
$\mathbf{1}$	vecteur où chaque élément vaut 1
$\mathbb{1}$	fonction indicatrice d'un sous-ensemble A
<i>Convergence</i>	
$\xrightarrow{p.s.}$	Convergence presque sûre
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Convergence en loi
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	Convergence en probabilité
i.i.d.	Indépendantes, identiquement distribuées

Introduction générale

1.1 Motivation et contexte bibliographique

Les processus semi-markoviens sont une généralisation des processus de Markov, ayant une méthode d'investigation propre et un domaine d'application. Dans les années 1950, certains problèmes pratiques, en particulier les problèmes du service de masse, ont obligé les chercheurs à rechercher une description mathématique adéquate. Les tentatives d'application des modèles de Markov à ces problèmes ont parfois été insatisfaisantes en raison de conclusions injustifiées sur la distribution exponentielle des intervalles de temps correspondants. Afin de réduire cette limitation, P. Lévy [10] and B. Smith [18] ont proposé presque simultanément la classe des processus étagés, appelés processus semi-markoviens. Pour ces processus, la propriété de Markov par rapport à un instant de temps fixé non aléatoire n'est pas satisfaite dans les cas généraux, mais ils restent des processus de Markov par rapport à certains temps aléatoires, par exemple, les temps de saut de leurs trajectoires. Par conséquent, un tel processus n'est pas un processus de Markov, bien qu'il hérite de certaines propriétés importantes des processus de Markov. D'autre part, dans plusieurs secteurs, tels que la fiabilité de logiciel et les réseaux de communication, les centrales nucléaires. . . , les systèmes deviennent de plus en plus complexes. par conséquent, au cours des dernières années, on voit un intérêt croissant pour l'évaluation de la performance de ces systèmes complexes. L'évolution d'un certain système est modélisée par un processus stochastique.

Parmi les outils standards pour décrire l'évolution d'un système, on peut citer les modèles markoviens et les modèles semi-markoviens. Et comme il était déjà mentionné que les modèles semi-markoviens sont plus généraux que les modèles markoviens car ces derniers sont limités par l'hypothèse markovienne. La condition markovienne est très forte puisque les lois des temps entre deux sauts successifs du système sont supposées exponentielles en temps continu (resp. géométriques en temps discret), ce qui caractérise l'absence de mémoire. En revanche, les modèles semi-markoviens permettent de s'affranchir de l'hypothèse markovienne. Pour les systèmes semi-markoviens, les lois des temps de séjour peuvent être des lois quelconques, et l'évolution future dépend du temps passé au travers de la dernière transition. En outre, le processus semi-Markov s'est avéré être une description appropriée de systèmes isolés avec un nombre dénombrable d'états et des distributions arbitraires de temps de séjour. Le processus semi-markovien peut être défini, de manière très simple, par un processus de renouvellement markovien à deux dimensions où une variable représente les états et l'autre le temps des changements d'état (temps de saut). Ainsi toutes les propriétés du processus semi-markovien sont déjà contenues dans la définition de ce processus de renouvellement. Cette définition, dans sa forme habituelle, requiert essentiellement à deux choses : Une condition de Markov restrictive qui provoque l'invariance du processus de renouvellement sous décalage temporel (stationnarité), et l'homogénéité, c'est-à-dire l'indépendance des probabilités de transition du nombre de renouvellements. Les processus semi-markoviens s'appliquent aux systèmes où les distributions de probabilité des durées de séjour dans les états ne dépendent pas du moment où le système entre dans un état. Une condition nécessaire est que le système soit physiquement isolé ; les transitions d'état sont dues uniquement à des mécanismes internes et les effets du vieillissement sont négligeables.

La théorie des processus semi-markoviens a été introduite par Pyke [14] et [15]. Pour des références récentes dans ce domaine ainsi que des applications statistiques, voir, par exemple, Limnios et Oprisan, [12] et Barbu et Limnios [4]. L'estimation non paramétrique du noyau semi-markovien et de la probabilité de transition conditionnelle a fait l'objet de plusieurs recherches pendant de nombreuses années, ce qui a conduit au développement d'une grande variété de méthodes, voir, par exemple, Limnios [11] et les références qui s'y trouvent. Récemment, et plus précisément, en cette année (2022), le problème de

l'estimation non-paramétrique par la méthode à noyau a été attaquée par Ayhar et al. [1]

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la transition vers le prochain état ne dépend pas de l'histoire du processus avant son entrée dans l'état actuel. Par conséquent, la première composante du processus de renouvellement markovien forme une chaîne de Markov, dit chaîne de Markov immergée. Étant donné l'état du système, les temps de séjour, qui déterminent la deuxième composante de ce processus sont indépendants puisque la loi du temps de séjour dans l'état actuel ne dépend pas de l'histoire du processus avant d'entrer dans cet état.

Nous nous intéressons, également dans ce mémoire au concept de fiabilité qui est de plus en plus utilisé dans le monde scientifique et technique. Il est souvent utilisé pour évaluer la durée de vie d'un composant d'un système simple ou complexe. Plusieurs chercheurs ont étudié les mesures de fiabilité des processus semi-markoviens. Des exemples de processus semi-Markov en temps discret avec les mesures de fiabilité associées et les sujets statistiques ont été abordés par Barbu et al. [2], qui ont proposé un modèle d'utilisation de la chaîne semi-markovienne en temps discret, et ils ont fourni des formules analytiques pour la moyenne et variance de la fiabilité à usage unique du système. L'évaluation des indicateurs de fiabilité pour les processus semi-markoviens et l'inférence statistique peut être trouvée dans Ouhbi et limnios [13].

1.2 Organisation du mémoire

Notre travail est scindé en cinq chapitres :

Après une partie introductive comprenant le contexte bibliographique et la motivation, nous y énonçons les définitions et outils probabilistes auxquels nous avons eu recours tout au long de ce mémoire.

Concernant le deuxième chapitre, nous l'avons consacré à quelques généralités sur les chaînes de Markov, en s'intéressant uniquement au cas discret.

Dans le troisième chapitre nous définissons une chaîne semi-markovienne ainsi que les mesures associées.

Le quatrième chapitre est consacré à l'inférence statistique des chaînes semi-markoviennes. Plus précisément, nous construisons des estimateurs empiriques des différentes mesures as-

sociées à la chaîne semi-markovienne et nous établissons des propriétés asymptotiques des estimateurs construits.

Dans le cinquième chapitre, nous nous intéressons à la fiabilité et son estimation non-paramétrique. Certains résultats théoriques obtenus sur la fiabilité sont illustrés à travers un exemple numérique. Ce chapitre est achevé par une conclusion générale. Une bibliographie abondante est présentée dans la fin de ce mémoire.

1.3 Préliminaires

Cette section couvre des notions de base, des définitions et des outils nécessaires pour l'établissement des résultats présentés dans ce mémoire.

Toutes les variables (vecteurs) aléatoires sont définis dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Théorème 1.1. (Loi Forte des Grands Nombres)[6] Soit $(X_n)_n$ une suite infinie de variables aléatoires i.i.d. intégrables d'espérance commune μ , alors on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mu.$$

Théorème 1.2. (Glivenko Cantelli) [9] Soit $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k \leq x\}}$ la fonction de distribution empirique d'un échantillon aléatoire i.i.d. $X_1, \dots, X_n$. Soit F la fonction de distribution commune de X_i , $i = 1, \dots, n$. Ainsi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Théorème 1.3. [6] Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires et $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus stochastique à valeurs entiers positifs. Supposons que

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} Y \text{ et } N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty,$$

alors,

$$Y_{N(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} Y.$$

Définition 1.1. (Produit de convolution matricielle en temps discret)

Soit $E = \{1, 2, \dots\}$ un espace d'états fini. On note $\mathcal{M}_E$ l'ensemble des matrices positives

sur $E \times E$ et $\mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ l'ensemble des fonctions matricielles définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_E$.

Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ deux fonctions à valeurs matricielles. Le produit de convolution matricielle $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ est la fonction matricielle $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ définie par

$$C_{ij}(k) = \sum_{r \in E} \sum_{l=0}^k A_{ir}(k-l) B_{rj}(l), \quad i, j \in E, \quad k \in \mathbb{N},$$

ou, sous forme matricielle,

$$\mathbf{C}(k) = \sum_{l=0}^k \mathbf{A}(k-l) \mathbf{B}(l).$$

Définition 1.2. Soit $\delta \mathbf{I} = (\delta_{ij}(k); i, j \in E) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ la fonction à valeurs matricielles définie par

$$\delta_{ij}(k) := \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ et } k = 0, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.1)$$

ou, sous forme matricielle,

$$\delta \mathbf{I}(k) := \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{si } k = 0, \\ \mathbf{0}, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors $\delta \mathbf{I}$ satisfait

$$\delta \mathbf{I} * \mathbf{A} = \mathbf{A} * \delta \mathbf{I} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N}),$$

c'est-à-dire que $\delta \mathbf{I}$ est l'élément d'identité pour le produit de convolution matricielle en temps discret.

Théorème 1.4. (*Theorem central limit pour martingales*) [7]

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$; et considérons la différence martingale $Y_n = X_n - X_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ (avec $Y_1 := X_1$). Si

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2 > 0$;
2. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2 \mathbb{1}_{\{|Y_k| > \epsilon \sqrt{n}\}}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, pour tout $\epsilon > 0$,

alors

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{n}} X_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Théorème 1.5. (Théorème d'Anscombe) [5] Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires et $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus stochastique à valeurs entiers positifs. Supposons que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n Y_m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{et} \quad N(t)/t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta,$$

où θ est une constante, $0 < \theta < \infty$. Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{N(t)}} \sum_{m=1}^{N(t)} Y_m \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Définition 1.3. (Convergence presque sûre) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires. On dit que cette suite converge presque sûrement vers une variable aléatoire X si : $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$. On note $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} X$.

Théorème 1.6. (Théorème de Slutsky) [8]. Soient $X, X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires ou vecteurs. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} c$, avec c une constante, alors :

- $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X + c$,
- $Y_n X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} cX$,
- $Y_n^{-1} X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} c^{-1} X$, pour $c \neq 0$.

Le résultat suivant est de Karlin et Taylor (1981) (page 73, Théorème 1.1).

Proposition 1.7. Pour i et j états récurrents¹, nous avons

$$N_i(n)/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 1/\mu_{ii}^*,$$

$$N_{ij}(n)/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} p_{ij}/\mu_{ii}^*$$

.

1. Un état i d'une chaîne de Markov $J = (J_n)_{n \geq 0}$ est dit récurrent si une trajectoire « typique » de la chaîne de Markov passe par i une infinité de fois, sinon l'état i est dit transitoire.

Généralités sur les chaînes de Markov

Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires indicées par le temps. Le cas le plus simple est celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes où ces variables n'ont aucune influence les unes sur les autres. Ce qui les rends (de point de vue de la modélisation) inadéquates, car elles ne prennent pas en compte la dynamique des systèmes en évolution, à cause de l'indépendance. Par contre, les chaînes de Markov peuvent introduire cette dynamique. Ce sont des processus aléatoires sans mémoire : à chaque instant leur évolution future ne dépend que de leur position, et non de leur trajectoire passée. Dans ce chapitre, nous considérons uniquement le cas des processus aléatoires à temps discret et à espace d'états E discret.

Soit $(J_n)_{n \geq 0}$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace mesurable (E, ε) . Sauf indication contraire, nous supposons que $E = \{1, 2, \dots, s\}$ ou $E = \{1, 2, \dots\}$.

2.1 Définitions

Dans ce qui suit, nous regroupons quelques définitions et quelques outils qui vont être nécessaires à l'élaboration de ce mémoire, l'outil le plus essentiel est la définition d'une

chaîne de Markov.

Définition 2.1. Soit $\{J_n, n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des états E supposé égal à $\mathbb{N}$. On dit que cette suite est une chaîne de Markov (CM) si, pour tout $n \geq 0$ et toute suite $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, j)$, on a :

$$\mathbb{P}(\underbrace{J_{n+1} = j}_{\text{le futur}} \mid \underbrace{J_n = i, J_{n-1} = i_{n-1}, J_{n-2} = i_{n-2}, \dots, J_0 = i_0}_{\text{le passé et le présent}}) = \mathbb{P}(\underbrace{J_{n+1} = j}_{\text{le futur}} \mid \underbrace{J_n = i}_{\text{le présent}}).$$

Les états successifs d'un système peuvent donc être d'écrits par une chaîne de Markov si la connaissance de l'état du système à l'instant présent apporte autant d'information sur le futur que la connaissance de tout le passé. Les chaînes de Markov sont des processus sans mémoire.

On définit aussi un outil de base d'une chaîne de Markov.

Définition 2.2. (Probabilité de transition) pour tout $i, j \in E$ et $n \geq 0$, on définit la probabilité de transition de l'état i à l'état j entre les instants n et $n + 1$ par la quantité :

$$p_{ij}(n) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j \mid J_n = i). \quad (2.1)$$

La probabilité de transition $\mathcal{P} = (p_{ij})_{ij}$ avec $(i, j \in E)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $p_{ij} \geq 0$, pour toute $i, j \in E$,
2. $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$, pour toute $i \in E$.

Une matrice de transition, de par sa construction, possède une propriété remarquable, qui est que chaque ligne correspond à une loi de probabilité.

Si E est fini, on peut représenter la probabilité de transition comme une matrice carrée (matrice de transition),

$$\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in E} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{s1} & \cdots & p_{ss} \end{pmatrix}$$

Dans les modèles de Markov, on peut faire différentes hypothèses sur l'évolution du processus. En particulier, les paramètres du modèle peuvent dépendre ou non de la durée totale du suivi : on parle alors de modèle non-homogène et de modèle homogène. L'hypothèse d'homogénéité qui rend les forces de transition constantes au cours du temps simplifie la modélisation et la méthodologie. Dans ce chapitre, on se concentre sur les modèles de Markov homogènes.

Définition 2.3. Une chaîne de Markov est dite homogène (dans le temps), si la probabilité (2.1) ne dépend pas de n ; c'est-à-dire pour tout $n \geq 0$, on a :

$$p_{ij}(n) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_n = i) = p_{ij} = \mathbb{P}(J_1 = j | J_0 = i).$$

Remarque 2.1. La loi de la chaîne de Markov homogène $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est entièrement déterminée par sa matrice de transition $\mathbb{P}$ et de la loi initiale de J_n notée π_0 , pour tout $i \in E = \{1, 2, \dots, s\}$,

$$\pi_0 = (\mathbb{P}(J_0 = 1), \mathbb{P}(J_0 = 2), \dots, \mathbb{P}(J_0 = s - 1), \mathbb{P}(J_0 = s)).$$

Proposition 2.1. [17] Soit $(J_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{p}$.

1. Le temps de séjour de la chaîne dans un état $i \in E$ est une variable aléatoire géométrique de paramètre $1 - p_{ii}$.
2. La probabilité que la chaîne entre dans l'état j lorsqu'elle quitte l'état i est $\frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}}$ ($p_{ii} \neq 1$).

Définition 2.4. (Distribution stationnaire) Une distribution de probabilité ν sur E est dite stationnaire ou invariante pour la chaîne de Markov $(J_n)_{n \geq 0}$ si, pour tout $j \in E$

$$\sum_{i \in E} \nu(i) p_{ij} = \nu(j),$$

ou, sous forme matricielle,

$$\nu \mathbf{p} = \nu,$$

où $\nu = (\nu(1), \dots, \nu(s))$ est un vecteur ligne.

2.2 Exemple de CM

Il y a des modèles classiques de CM homogènes souvent rencontrés, avec les quels, il est bon de se familiariser dès le début. En voici un exemple concret.

Le modèle de diffusion d'Ehrenfest :

On considère 2 urnes A et B . On dispose de a boules numérotées de 1 à a avec $a \geq 1$. Au départ (à l'étape 0), les a boules sont dans l'urne A . A chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et a (avec équiprobabilité) et l'on change d'urne la boule portant le numéro tiré : par exemple, si on a tiré le nombre 4, on change la boule numéro 4 d'urne (si la boule 4 est dans A , on la retire de A et on la met dans B ; si la boule 4 est dans B , on la retire de B et on la met dans A). On note J_n le nombre de boules dans l'urne A à la fin de la n ème étape. L'ensemble des états est donc $E = \{0, 1, \dots, a\}$.

$(J_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov, et si à un instant, A contient i boules, $0 < i < a$, à l'instant suivant, elle contiendra $i - 1$ ou $i + 1$ boules, avec probabilité respectivement $\frac{i}{a}$ et $\frac{a-i}{a}$. La matrice de transition est donc donnée par :

$$\mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_n = i) = \begin{cases} \frac{i}{a} & \text{si } j = i - 1, i \in \{1, \dots, a\}, \\ \frac{a-i}{a} & \text{si } j = i + 1, i \in \{1, \dots, a-1\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous forme matricielle, la matrice de transition est donc donnée par :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & (a-1)/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/a & 0 & (a-2)/a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (a-1)/a & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice carrée est de dimension $a + 1$. Elle s'interprète par ligne :

- La première ligne donne les probabilités d'avoir 0, 1, ..., tel que a boules dans l'urne A à l'étape suivante, sachant qu'il y en a 0 dans A .
- La deuxième ligne donne les probabilités d'avoir 0, 1, ..., tel que a boules dans l'urne A à l'étape suivante, sachant qu'il y en a 1 dans A , ...

2.3 Graphe associé à une matrice de transition

A tout matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène, on peut associer son graphe, ses sommets sont les états de la chaîne et il y a une flèche p_{ij} , entre les sommets i et j si et seulement si $p_{ij} > 0$.

Le graphe donne les mêmes informations que la matrice de transition mais, comme toute représentation graphique, il a l'avantage d'être plus parlant.

Dans l'exemple précédent, le graphe associé à la matrice de transition de la chaîne de Markov est représentée dans la figure suivante suivante :

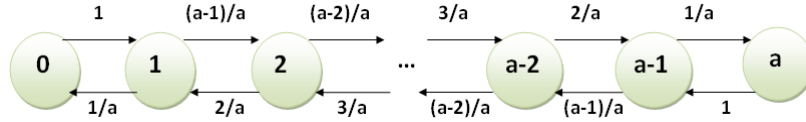


FIGURE 2.1 – Graphe associé au modèle de diffusion d'Ehrenfest.

Exemple 2.1. (Chaîne à deux états)

Dans le cas général d'une chaîne de Markov à deux états, représentés par 0 et 1, la matrice de transition est de la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

où $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ de telle sorte que toutes les probabilités de transition sont strictement positives, et $E = \{1, 2\}$.

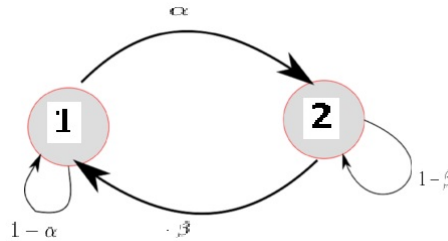


FIGURE 2.2 – Graphe associé à une matrice de transition à deux états.

2.4 Caractérisations d'une chaîne de Markov homogène

2.4.1 Propriétés fondamentales

On commence cette partie en donnant quelques propriétés nécessaires.

Proposition 2.2. *Soit $i_0, \dots, i_n \in E$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

$$\mathbb{P}(J_{n+k} = i_n, \dots, J_{k+1} = i_1 | J_k = i_0) = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \dots p_{i_{n-1} i_n}. \quad (2.2)$$

Preuve. Posons $A_j = \{J_{k+j} = i_j\}$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n \cap \dots \cap A_1 | A_0) &= \frac{\mathbb{P}(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots \cap A_0)}{\mathbb{P}(A_0)} \\ &= \mathbb{P}(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_0) \mathbb{P}(A_{n-1} \cap \dots \cap A_0) \frac{1}{\mathbb{P}(A_0)} \\ &= \mathbb{P}(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_0) \mathbb{P}(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_0) \\ &\quad \times \mathbb{P}(A_{n-2} \cap \dots \cap A_0) \frac{1}{\mathbb{P}(A_0)}. \end{aligned}$$

Ainsi de suite, ce qui conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_0), \dots, \mathbb{P}(A_1 | A_0) \mathbb{P}(A_0) \frac{1}{\mathbb{P}(A_0)} \\ &= \mathbb{P}(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_0) \mathbb{P}(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_0), \dots, \mathbb{P}(A_1 | A_0). \end{aligned}$$

Comme $(J_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_j | A_{j-1} \cap \dots \cap A_0) &= \mathbb{P}(J_{k+j} = i_j | J_{k+j-1} = i_{j-1} \cap \dots \cap J_k = i_0) \\ &= \mathbb{P}(J_{k+j} = i_j | J_{k+j-1} = i_{j-1}) \\ &= p_{i_{j-1} i_j}, \end{aligned}$$

pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, ce qui permet de conclure. ■

La proposition suivant montre que la donnée de la loi initiale π_0 et de la matrice de transition $\mathcal{P}$ caractérise une chaîne de Markov.

Proposition 2.3. *$(J_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(J_n = i_0, \dots, J_n = i_n) = \pi_0 p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}. \quad (2.3)$$

Preuve. Premièrement, si $(J_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène, alors d'après (2.2) avec $k = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_0 = i_0, \dots, J_n = i_n) &= \mathbb{P}(J_n = i_n, J_{n-1} = i_{n-1}, \dots, J_1 = i_1 | J_0 = i_0) \mathbb{P}(J_0 = i_0) \\ &= \pi_0 p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}. \end{aligned}$$

Deuxièmement, si (2.3) est vérifiée, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_{n+1} = i_{n+1} | J_0 = i_0, \dots, J_n = i_n) &= \frac{\mathbb{P}(J_0 = i_0, \dots, J_n = i_n, J_{n+1} = i_{n+1})}{\mathbb{P}(J_0 = i_0, \dots, J_n = i_n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(J_0 = i_0) p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_{n+1}}}{\mathbb{P}(J_0 = i_0) p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}} \\ &= p_{i_n i_{n+1}} \\ &= \mathbb{P}(J_{n+1} = i_{n+1} | J_n = i_n). \end{aligned}$$

donc $(J_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène. ■

2.4.2 Équations de Chapman Kolmogorov

Les probabilités de transition en n pas sont complètement déterminées par les probabilités de transition en un pas, c'est-à-dire par la matrice de transition. Ceci est explicité par les équations de Chapman Kolmogorov, que nous allons aborder dans ce qui suit.

Proposition 2.4. Pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}^n$.

Preuve. On montre par récurrence.

Pour $n = 0$, nous avons $\mathcal{P}^{(0)} = \mathcal{P}^0 = I$ (matrice identité).

Supposons que $\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}^n$; ce qui implique :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ij}^{(n+1)} &= \mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(J_{n+1} = j, J_n = k | J_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_n = k) \mathbb{P}(J_n = k | J_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathcal{P}_{kj}^{(1)} \mathcal{P}_{ik}^{(n)}. \end{aligned}$$

Ce qui signifie : $\mathcal{P}^{(n+1)} = \mathcal{P}^{(1)}\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}.\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}.\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{n+1}$. ■

Proposition 2.5. (Relation de Chapman-Kolmogorov)

Pour tout $(i, j) \in E$ et tout couple (m, n) d'entiers positifs, on a l'identité :

$$\mathbb{P}(J_{n+m} = j | J_0 = i) = \sum_{k \in E} \mathbb{P}(J_m = j | J_0 = i) \mathbb{P}(J_n = k | J_0 = i).$$

ou encore

$$\mathcal{P}_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} \mathcal{P}_{kj}^{(n)} \mathcal{P}_{ik}^{(m)}.$$

Preuve. Cette identité résulte immédiatement de l'associativité du produit matricielle :

$$\mathcal{P}^{(n+m)} = \mathcal{P}^{m+n} = \mathcal{P}^m \mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{(m)} \mathcal{P}^{(n)}.$$

2.4.3 Classification des états

Dans cette partie nous définissons la classification des états et nous déduisons des propriétés des chaînes de Markov. Les états d'une chaîne de Markov se répartissent en classes que l'on définit à partir de la matrice de transition.

Définition 2.5. (État accessible) On dit que l'état j est accessible depuis l'état i , et on note $i \longrightarrow j$ si $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(J_n = j | J_0 = i) > 0$. Nous supposons que chaque état est accessible depuis lui-même puisque $p_{ii}^{(0)} = 1$.

Définition 2.6. (États communicants) Deux états i et j sont dits communicants, notés $i \longleftrightarrow j$ s'ils sont accessibles l'un de l'autre. Autrement dit,

$$i \longleftrightarrow j \text{ signifie } i \longrightarrow j \text{ et } j \longrightarrow i.$$

Proposition 2.6. La relation d'accessibilité entre états est réflexive et transitive.

Preuve.

a)- Réflexivité : Comme $p_{ii}^{(0)} = \mathbb{P}(J_0 = i | J_0 = i) = 1 > 0$, pour tout état i , on a bien $i \longrightarrow i$.

b)- Transitivité : Supposons que pour les états i, j et k on ait : $i \longrightarrow j$ et $j \longrightarrow k$:
Alors, il existe deux entiers positifs m et n , tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{jk}^{(n)} > 0$. D'où, on aura

$$p_{jk}^{(n)} = \sum_{l \in E} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0.$$

Ce qui montre bien que l'on a : $i \longrightarrow k$ une relation transitive.

c)- Symétrie : $i \longrightarrow j \Rightarrow j \longrightarrow i$, évident par définition. ■

Remarque 2.1. La relation $\longleftrightarrow$ est une relation d'équivalence.

Définition 2.7. (État absorbant) Un état i d'une chaîne de Markov est dit absorbant, si la chaîne ne peut plus quitter cet état une fois qu'elle y est entrée ; en d'autres termes si $\mathcal{P}_{ii} = 1$.

Définition 2.8. (Chaîne de Markov absorbante) Un état $i \in E$ est dit absorbant si $\mathcal{P}_{ii} = 1$ (et donc nécessairement $\mathcal{P}_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$). Une chaîne de Markov est dite absorbante s'il existe, pour tout état de E , un état absorbant accessible depuis cet état.

Définition 2.9. (Chaîne de Markov irréductible) Une chaîne de Markov est dite irréductible si tous les états communiquent entre eux.

Exemple 2.2. Considérons la chaîne de Markov à espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition :

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

La chaîne comporte trois classes : $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1\}$ et $C_2 = \{2, 3, 4\}$.

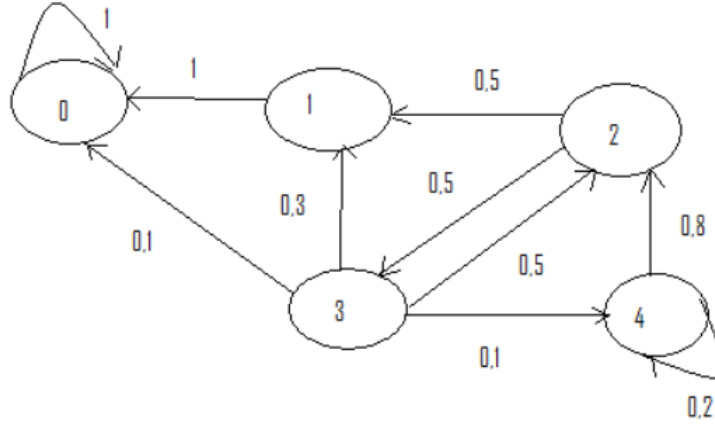


FIGURE 2.3 – Graphe associé à la matrice de transition $\mathcal{P}_2$.

Définition 2.10. (État récurrent) Un état est dit récurrent si, chaque fois que nous quittons cet état, nous reviendrons à cet état dans le futur avec une probabilité de un. En revanche, si la probabilité de retour est inférieure à un, l'état est dit transitoire. Ici, nous donnons une définition formelle : Pour tout état i , on définit

$$G_{ii} = \mathbb{P}(J_n = i, \text{ pour certains } n \geq 1 | J_0 = i).$$

L'état i est récurrent si $G_{ii} = 1$, et il est transitoire si $G_{ii} < 1$.

Définition 2.11. (Périodicité, état apériodique) Un état $i \in E$ est dit périodique de période $d > 1$, ou d-périodique, si d est égal au plus grand diviseur commun (pgcd) de tous les n tel que $\mathbb{P}(J_{n+1} = i | J_1 = i) > 0$. Si $d = 1$, alors l'état i est dit apériodique.

Exemple 2.3. Considérons la chaîne de Markov dont le graphe de transition est donné par : Nous avons :

$$\begin{aligned} d(1) &= \text{pgcd} \{ n \geq 1, \mathcal{P}_{11}^{(n)} > 0 \} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \\ d(2) &= \text{pgcd} \{ n \geq 1, \mathcal{P}_{22}^{(n)} > 0 \} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \\ d(3) &= \text{pgcd} \{ n \geq 1, \mathcal{P}_{33}^{(n)} > 0 \} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \\ d(4) &= \text{pgcd} \{ n \geq 1, \mathcal{P}_{44}^{(n)} > 0 \} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}. \end{aligned}$$

On constate que la période des états est 2.

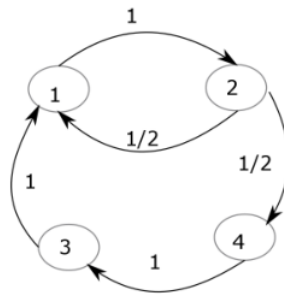


FIGURE 2.4 – Graphe de transition.

Définition 2.12. (État ergodique) Un état récurrent apériodique est dit ergodique. Une chaîne de Markov irréductible avec un état ergodique (puis tous les états ergodiques) est dite ergodique.

Chaîne semi-markovienne

Les chaînes semi-markoviennes constituent une extension des processus de Markov et des processus de renouvellement. La flexibilité des chaînes semi-markoviennes par rapport à celles de Markov est due au fait qu'ils autorisent des temps de séjour distribués arbitrairement au lieu d'être distribués géométriquement en temps discret. En pratique, il y a des cas où l'approche markovienne ne peut être acceptée et l'extension à un modèle semi-markovien semble naturelle, relâchant l'hypothèse markovienne sous-jacente mais, simultanément, ayant toujours l'hypothèse markovienne. En particulier, les processus d'espace d'états finis sont d'un grand intérêt pour les applications. Les chaînes semi-markoviens ont été largement utilisés pour construire des modèles de systèmes stochastiques dans diverses disciplines, telles que la fiabilité des systèmes, l'épidémiologie et la finance.

3.1 Chaînes de renouvellement de Markov et chaînes semi-markoviennes

Dans ce qui suit, nous regroupons quelques définitions et quelques outils qui vont être nécessaires :

On se place, toujours sur un espace d'état fini $E = \{1, \dots, s\}$.

- La chaîne de sauts $\mathbf{J} = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à espace d'état E , J_n est l'état du système au $n^{ième}$ temps de saut.
- La chaîne de temps de sauts $\mathbf{S} = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à espace d'état $\mathbb{N}$, S_n est l'état du système

au $n^{\text{ième}}$ temps de saut. On suppose que $S_0 = 0$ et que $0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n < S_{n+1} < \dots$

- La chaîne de temps d'inter-sauts $\mathbf{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à espaces d'états $\mathbb{N}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = S_n - S_{n-1}$, et $X_0 = 0$ p.s. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est le temps de séjour dans l'état J_{n-1} avant le $n^{\text{ième}}$ saut .

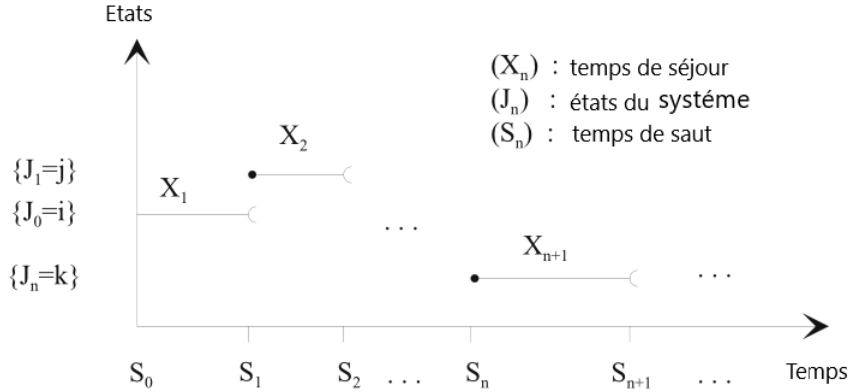


FIGURE 3.1 – Une trajectoire d'un chaîne SM .

3.1.1 Chaîne de renouvellement markovienne

Définition 3.1. La chaîne $(\mathbf{J}, \mathbf{S}) = (J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite chaîne de renouvellement markovienne (CRM) à temps discret si pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $i, j \in E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ elle satisfait presque sûrement,

$$\mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n = k | J_0, \dots, J_n; S_0, \dots, S_n) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n = k | J_n) \quad (3.1)$$

Cette équation signifie que si l'on connaît les états passés visités et les temps de saut du système, ainsi que son état présent, l'état futur visité et le temps de séjour dans l'état présent ne dépendent que de l'état présent. Autrement dit, on a essentiellement une hypothèse de type markovienne, à la différence que la propriété sans mémoire n'agit pas sur le temps calendaire $(0, 1, \dots, k, k+1, \dots)$ mais sur un temps régie par le processus de temps de saut J , $(J_0, J_1, \dots, J_n, J_{n+1}, \dots)$. C'est ce que nous appelons une hypothèse markovienne plus souple.

De plus, si l'équation (3.1) ne dépend pas de n , la chaîne (J, S) est dite homogène, et on peut alors introduire la notion du noyau semi-markovien.

Définition 3.2. (Noyau semi-markovien à temps discret)

Une fonction à valeurs dans l'espace des matrices $\mathbf{q} = (q_{ij}(k)) \in \mathcal{M}_{\mathbb{E}}(\mathbb{N})$ est un noyau semi-markovien à temps discret s'il satisfait les trois propriétés suivantes :

- i) $0 \leq q_{ij}(k) \leq 1, i, j \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N}$,
- ii) $q_{ij}(0) = 0, \forall i, j \in \mathbb{E}$,
- iii) $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j \in \mathbb{E}} q_{ij}(k) = 1, \forall i \in \mathbb{E}$.

Où le noyau semi-markovien à temps discret $\mathbf{q} = (q_{ij}(k); i, j \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{N})$ est défini par :

$$q_{ij}(k) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} = k | J_n = i). \quad (3.2)$$

Cette équation signifie que la probabilité de passer de i en j après un temps de séjour de k unités de temps en i .

Introduisons le noyau semi-markovien cumulé :

$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}(k), k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{E}}(\mathbb{N})$ est défini, pour tout $i, j \in \mathbb{E}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, par

$$Q_{ij}(k) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} \leq k | J_n = i) = \sum_{l=0}^k q_{ij}(l).$$

Définition 3.3. (Chaîne de Markov immergée)

Si $(\mathbf{J}, \mathbf{S})$ est une chaîne de renouvellement markovien (homogène) alors $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov (homogène). Elle est appelée chaîne de Markov immergée associée à la CRM $(\mathbf{J}, \mathbf{S})$. La matrice de transition $\mathbf{p} = (p_{ij})_{i, j \in \mathbb{E}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{E}}(\mathbb{N})$ de (J_n) est donnée par :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_n = i), \quad i, j \in \mathbb{E}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Remarque 3.1. – Pour tout $i, j \in \mathbb{E}$ $p_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} q_{ij}(k)$.

- On interdit les transitions instantanées i.e. $\forall i, j \in \mathbb{E}, q_{ij}(0) = 0$ car la chaîne de temps de saut (S_n) est supposée strictement croissante. On interdit également les transitions vers un même état i.e. $\forall i \in \mathbb{E}, p_{ii} = 0$. Cela permet d'identifier un saut avec un changement d'état.

3.2 Temps de séjour

soit (J_n, S_n) une CRM homogène et J_n une chaîne de Markov de matrice de transition $p_{ij} = \mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_n = i)$.

3.2.1 Lois du temps de séjour

Introduisons les définitions de certaines mesures conditionnelles et inconditionnelles liées au NSM :

Définition 3.4. (Distributions conditionnelles du temps de séjour). Pour tout $i, j \in E$, on appelle :

- $f_{ij}(\cdot)$, la loi conditionnelle du temps de séjour dans l'état i , étant donné que le prochain état visité est j , $j \neq i : \forall k \in \mathbb{N}$

$$f_{ij}(k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k | J_n = i, J_{n+1} = j) = \begin{cases} \frac{q_{ij}(k)}{p_{ij}} & \text{si } p_{ij} \neq 0, \\ \mathbb{1}_{\{k=\infty\}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $F_{ij}(\cdot)$, la distribution conditionnelle cumulée du temps de séjour dans l'état i , étant donné que le prochain état visité est j , $j \neq i : \forall k \in \mathbb{N}$

$$F_{ij}(k) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq k | J_n = i, J_{n+1} = j) = \sum_{l=0}^k f_{ij}(l) = \begin{cases} \frac{Q_{ij}(k)}{p_{ij}} & \text{si } p_{ij} \neq 0, \\ \mathbb{1}_{\{k=\infty\}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 3.5. (Distributions du temps de séjour dans un état donné)

- $h_i(\cdot)$, la loi du temps de séjour dans l'état i :

$$h_i(k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k | J_n = i) = \sum_{j \in E} q_{ij}(k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

- $H_i(\cdot)$, la distribution du temps de séjour cumulée dans l'état i :

$$H_i(k) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq k | J_n = i) = \sum_{l=1}^k h_i(l) = \sum_{l=0}^k \sum_{j \in E} q_{ij}(l), \forall k \in \mathbb{N}.$$

- $\bar{H}_i(\cdot)$, la fonction de survie dans l'état i :

$$\bar{H}_i(k) = \mathbb{P}(X_{n+1} > k | J_n = i) = 1 - H_i(k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

La proposition suivante confirme la définition 3.4 et représente la relation entre le noyau SM et la probabilité de transition ainsi que la distribution du temps de séjours.

Proposition 3.1. *Pour tout $i, j \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit le noyau semi-markovien par la quantité :*

$$q_{ij}(k) = p_{ij}(k)f_{ij}(k).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} q_{ij}(k) &= \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} = k | J_n = i) \\ &= \frac{\mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} = k, J_n = i)}{\mathbb{P}(J_n = i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(J_{n+1} = j, J_n = i) \mathbb{P}(X_{n+1} = k | J_{n+1} = j, J_n = i)}{\mathbb{P}(J_n = i)} \\ &= \mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_n = i) \mathbb{P}(X_{n+1} = k | J_{n+1} = j, J_n = i) \\ &= p_{ij}(k)f_{ij}(k). \end{aligned}$$

■

Définition 3.6. (Convolution n fois en temps discret) Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ une fonction à valeur matricielle et $n \in \mathbb{N}$. La convolution n fois $\mathbf{A}^{(n)}$ est la fonction à valeur matricielle définie récursivement par :

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(0)}(k) &= \delta_{ij}(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ et } k = 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \\ A_{ij}^{(1)}(k) &= A_{ij}(k), \end{aligned}$$

$$A_{ij}^{(n)}(k) := \sum_{r \in E} \sum_{l=0}^k A_{ir}(l) A_{rj}^{(n-1)}(kl), \quad n \geq 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

C'est-à-dire,

$$\mathbf{A}^{(0)} = \delta \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A} * \mathbf{A}^{(n-1)}.$$

Proposition 3.2. [3] Pour tout $i, j \in E$, pour tout n et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(J_n = j, S_n = k | J_0 = i) = q_{ij}^{(n)}(k). \quad (3.3)$$

Preuve. On prouve le résultat par la méthode de récurrence.

– Pour $n = 0$, on a

$$\mathbb{P}(J_0 = j, S_0 = k | J_0 = i) = q_{ij}^{(0)}(k).$$

Pour $k \neq 0$ ou $i \neq j$, cette probabilité est nulle. D'autre part, si $i = j$ et $k = 0$, la probabilité est un. C'est-à-dire :

$$q_{ij}^{(0)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } k = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\mathbf{q}^{(0)} = \delta \mathbf{I})$$

- Pour $n = 1$, le résultat est évidemment vrai, en utilisant la définition du noyau semi-markovien $\mathbf{q}$ et de $q_{ij}^{(1)}(k)$. C'est-à-dire : $q_{ij}^{(1)}(k) = q_{ij}(k)$
- Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_n = j, S_n = k | J_0 = i) &= \sum_{r \in E} \sum_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}(J_n = j, S_n = k, J_1 = r, S_1 = l | J_0 = i) \\ &= \sum_{r \in E} \sum_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}(J_n = j, S_n = k | J_1 = r, S_1 = l, J_0 = i) \\ &\quad \mathbb{P}(J_1 = r, S_1 = l | J_0 = i) \\ &= \sum_{r \in E} \sum_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}(J_{n-1} = j, S_{n-1} = k - l | J_0 = r) \mathbb{P}(J_1 = r, S_1 = l | J_0 = i) \\ &= \sum_{r \in E} \sum_{l=1}^{k-1} q_{rj}^{(n-1)}(k-l) q_{ir}(l) = q_{ij}^{(n)}(k). \end{aligned}$$

■

3.3 Chaîne semi-markovienne

Définition 3.7. Soit $(\mathbf{J}, \mathbf{S})$ une chaîne de renouvellement de Markov.

La chaîne $Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une chaîne semi-markovienne associée à la CRM (J, S) si

$$Z_k = J_{N(k)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

où $N(k) = \max\{n \geq 0; S_n \leq k\}$, est le processus de comptage à temps discret du nombre de sauts dans $[1, k] \subset \mathbb{N}$. Donc Z_k donne l'état du système à l'instant k .

La formule (3.4) est équivalente à $J_n = Z_{S_n}$, avec $S_n = \min\{k > S_{n-1} | Z_k \neq Z_{k-1}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Le vecteur ligne $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ représente la loi initiale de la chaîne semi-markovienne $Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Précisément, $\alpha_i = \mathbb{P}(Z_0 = i) = \mathbb{P}(J_0 = i)$, $i \in E$.

Remarque 3.2. La loi initiale α et le noyau semi-markovien $\mathbf{q}(t)$ définissent complètement la CSM.

3.3.1 Fonction de transition de la chaîne semi-markovienne

Définition 3.8. La fonction de transition de la chaîne semi-markovienne est la fonction matricielle

$\mathbf{P} = (P_{ij}(k); i, j \in E, k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ défini par :

$$P_{ij}(k) = \mathbb{P}(Z_k = j | Z_0 = i), \quad i, j \in E, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Le résultat suivant consiste en une formule récursive de calcul de la fonction de transition P de la chaîne semi-markovienne Z . Cette équation est le premier exemple d'équation de renouvellement de Markov.

Proposition 3.3. [3] Pour tout $i, j \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_{ij}(k) = \delta_{ij} \times [1 - H_i(k)] + \sum_{r \in E} \sum_{l=0}^k q_{ir}(l) P_{rj}(k-l), \quad (3.5)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, définissons $\mathbf{H}(k) := \text{diag}(H_i(k); i \in E)$, $\mathbf{H} = (\mathbf{H}(k); k \in \mathbb{N})$. Dans la notation des fonctions matricielles, l'équation (3.5) devient :

$$\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{H})(k) + \mathbf{q} * \mathbf{P}(k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Preuve. Pour tout $i, j \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(k) &= \mathbb{P}(Z_k = j | Z_0 = i) \\
 &= \mathbb{P}(Z_k = j, S_1 \leq k | Z_0 = i) + \mathbb{P}(Z_k = j, S_1 > k | Z_0 = i) \\
 &= \sum_{r \in E} \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(Z_k = j, Z_{S_1} = r, S_1 = l | Z_0 = i) + \delta_{ij}(1 - H_i(k)) \\
 &= \sum_{r \in E} \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(Z_k = j | Z_{S_1} = r, S_1 = l, Z_0 = i) \mathbb{P}(J_1 = r, S_1 = l | J_0 = i) + \delta_{ij}(1 - H_i(k)) \\
 &= \sum_{r \in E} \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(Z_{k-l} = j | Z_0 = r) \mathbb{P}(J_1 = r, X_1 = l | J_0 = i) + \delta_{ij}(1 - H_i(k)) \\
 &= \delta_{ij}(1 - H_i(k)) + \sum_{r \in E} \sum_{l=0}^k P_{rj}(k-l) q_{ir}(l).
 \end{aligned}$$

■

3.4 Équation de renouvellement semi-markovien

Dans cette section, nous étudierons des équations telles que l'équation (3.5) (ou, de manière équivalente, l'équation (3.6)) données dans la section précédente, appelées équations de renouvellement semi-markovienne (EMR).

Définition 3.9. Soit $\mathbf{L} = (L_{ij}(k); i, j \in E, k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ une fonction inconnue à valeurs matricielles, et $\mathbf{U} = (U_{ij}(k); i, j \in E, k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ soit connu. L'équation

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{U}(k) + \mathbf{q} * \mathbf{L}(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

est appelée équation de renouvellement de Markov (ERM).

Avant d'introduire la fonction à valeurs matricielles nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.4. Soit $(J, S) = (J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de renouvellement de Markov et $q \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ son noyau semi-markovien associé. Alors, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq k+1$ on a $q^{(n)}(k) = 0$.

Preuve. Comme le processus de temps de saut $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation $S_n \geq n$, $n \in \mathbb{N}$. Écrire l'équation (3.3) pour n et $k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq k+1$ achève le résultat souhaité. ■

Définition 3.10. La fonction à valeurs matricielles $\psi = (\psi(k), k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ est définie par :

$$\psi_{ij}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)}(k) = \sum_{n=0}^k q_{ij}^{(n)}(k) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^k \{J_n = j, S_n = k\} \mid J_0 = i \right), \quad i, j \in E, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Remarque 3.3. – Les séries infinies qui apparaissent dans la définition de ψ s'avèrent être des séries finies du fait que $q^{(n)}(k) = 0$ pour tout n et $k \in \mathbb{N}$ tel que $n > k$ d'après le Lemme 3.4.

– La fonction à valeurs matricielles $\psi = (\psi(k), k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ peut être définie par

$$\psi(k) = (\delta \mathbf{I} - \mathbf{q})^{-1}(k) \quad (3.8)$$

– En utilisant (3.5) et (3.7), l'unique solution de l'équation de renouvellement de Markov $P = I - H + q * P$ est

$$\mathbf{P}(k) = \psi * (\mathbf{I} - \mathbf{H})(k) = (\delta \mathbf{I} - \mathbf{q})^{-1} * (\mathbf{I} - \mathbf{H})(k), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.9)$$

Proposition 3.5. La fonction de renouvellement de Markov $\Psi = (\Psi(k), k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ est la fonction de renouvellement matriciel de la CRM donné par :

$$\Psi_{ij}(k) = \sum_{l=0}^k \psi_{ij}(l) = \mathbb{E}_i(\tilde{N}_j(k)), \quad i, j \in E \text{ et } k \in \mathbb{N},$$

où $\tilde{N}_j(k)$ est le nombre de visites à l'état j de la chaîne de Markov Immersée jusqu'à l'instant k .

Preuve. On a $\tilde{N}_j(k) = \sum_{n=0}^{N(k)} \mathbb{1}_{\{J_n=j\}} = \sum_{n=0}^k \mathbb{1}_{\{J_n=j; S_n \leq k\}}$, alors

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}(k) &= \mathbb{E}_i[\tilde{N}_j(k)] = \mathbb{E}_i \left[\sum_{n=0}^k \mathbb{1}_{\{J_n=j; S_n \leq k\}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^k \mathbb{P}(J_n = j; S_n \leq k \mid J_0 = i) \\ &= \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(J_n = j; S_n = l \mid J_0 = i) \\ &= \sum_{l=0}^k \sum_{n=0}^k q_{ij}^{(n)}(l). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.4, nous savons que $q_{ij}^{(n)}(l) = 0$ pour $n > l$, et on obtient

$$\Psi_{ij}(k) = \sum_{l=0}^k \sum_{n=0}^k q_{ij}^{(n)}(l) = \sum_{l=0}^k \psi_{ij}(l).$$

■

Estimation non-paramétrique des chaîne semi-markoviennes

Dans ce chapitre nous nous intéressons au comportement asymptotique des estimateurs empiriques des mesures liées à la chaîne semi-markovienne à temps discret. Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous définissons les différents processus de comptages associés à la CRM. Dans la deuxième section, nous construisons des estimateurs non-paramétriques des différents mesures liées à la CSM. La troisième section est consacrée à l'établissement de la consistance forte et la normalité asymptotique des estimateurs construits.

4.1 Processus de comptage associés à la chaîne de renouvellement markovien

pour tout $i, j \in E$ et $k \leq M$, on définit :

- $N_i(M) := \sum_{n=1}^{N(M)} \mathbb{1}_{\{J_n=i\}}$: C'est le nombre de visites à l'état i , jusqu'à l'instant M .
- $N_{ij}(M) := \sum_{n=1}^{N(M)} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j\}}$: C'est le nombre de transitions de i à j , jusqu'à l'instant M .
- $N_{ij}(k, M) := \sum_{n=1}^{N(M)} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n=k\}}$: C'est le nombre de transitions de i à j , jusqu'à l'instant M , avec un temps de séjour dans l'état i égal à k , $1 \leq k \leq M$.

Avant de construire les estimateurs, on commence par introduire la définition suivante :

Définition 4.1. (Temps de récurrence en arrière) On définit la suite de temps de récurrence en arrière $(u_M)_{M \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_M = M - S_{N(M)} \quad \forall M \in \mathbb{N}^*$$

u_M correspond au temps écoulé entre l'instant M et le dernier temps de saut $S_{N(M)}$ ou encore le temps de séjour censuré dans le dernier état visité $J_{N(M)}$.

Maintenant, on définit la trajectoire d'une chaîne semi-markovienne.

Définition 4.2. Considérons une trajectoire de la CRM $(J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, censuré à un temps arbitraire $M \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{H}(M) := (J_0, X_1, \dots, J_{N(M)-1}, X_{N(M)}, J_{N(M)}, u_M),$$

4.2 Construction des estimateurs

Dans cette partie, nous construisons des estimateurs non paramétriques pour les principales caractéristiques d'un système semi-markovien à temps discret, telles que le noyau semi-markovien, la matrice de transition de la chaîne de Markov immergé, les distributions conditionnelles des temps de séjour ou les fonction de transition semi-markovienne. Nous étudions les propriétés asymptotiques de ces estimateurs, à savoir la convergence presque sûre et la normalité asymptotique.

Hypothèses : Dans la suite, nous supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

A1 La chaîne de Markov $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible.

A2 Les temps de séjour moyens sont finis, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{\infty} k h_i(k) < \infty$ pour tout état $i \in E$.

A3 Le processus de renouvellement de Markov $(J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est apériodique.

Nous prenons une trajectoire $\mathcal{H}(M)$ d'un CRM, pour tout $i, j \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \leq M$.

Définition 4.3. La fonction de vraisemblance correspondant à l'histoire $\mathcal{H}(M)$ est

$$L(M) = \alpha_{J_0} \prod_{k=1}^{N(M)} p_{J_{k-1}J_k} f_{J_{k-1}J_k}(X_k) \overline{H}_{J_{N(M)}}(u_M),$$

Puisque $u_M < \infty$, on a $\lim_{M \rightarrow \infty} (u_M/M) = 0$, et pour un grand M , u_M n'ajoute pas d'information significative à la fonction de vraisemblance. Pour ces raisons, nous négligerons le terme $\overline{H}_{J_{N(M)}}(u_M)$ dans l'expression de la fonction de vraisemblance $L(M)$. D'autre part, la trajectoire $\mathcal{H}(M)$ de la CRM $(J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne contient qu'une seule observation de la distribution initiale α de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc l'information sur α_{J_0} n'augmente pas avec M . Comme nous nous intéressons à l'estimation en grand échantillon des chaînes semi-markoviennes, le terme α_{J_0} sera également négligé dans l'expression de la fonction de vraisemblance. Par conséquent, nous nous intéresserons à la maximisation de la fonction de vraisemblance approchée définie par :

$$L_1(M) = \prod_{k=1}^{N(M)} p_{J_{k-1}J_k} f_{J_{k-1}J_k}(X_k). \quad (4.1)$$

Proposition 4.1. [3] Pour une trajectoire d'une CRM $(J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, censuré au temps $M \in \mathbb{N}$, les estimateurs empiriques $\hat{p}_{ij}(M)$, $\hat{f}_{ij}(k, M)$ et $\hat{q}_{ij}(k, M)$, proposés dans les équations :

$$\hat{p}_{ij}(M) := \begin{cases} \frac{N_{ij}(M)}{N_i(M)} & \text{si } N_i(M) \neq 0, \\ 0 & \text{si } N_i(M) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\hat{f}_{ij}(k, M) := \begin{cases} \frac{N_{ij}(k, M)}{N_{ij}(M)} & \text{si } N_{ij}(M) \neq 0, \\ 0 & \text{si } N_{ij}(M) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\hat{q}_{ij}(k, M) := \begin{cases} \frac{N_{ij}(k, M)}{N_i(M)} & \text{si } N_i(M) \neq 0, \\ 0 & \text{si } N_i(M) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

sont des estimateurs du maximum de vraisemblance non paramétriques approchés, c'est-à-dire qu'ils maximisent la fonction de vraisemblance L_1 , donnée dans l'équation (4.1).

Preuve.

Preuve de (4.2) : Nous considérons la fonction de vraisemblance approchée $L_1(M)$ donnée par l'équation (4.1). En utilisant l'égalité

$$\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1, \quad (4.5)$$

la fonction de log-vraisemblance approchée peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \log(L_1(M)) &= \sum_{k=1}^M \sum_{i,j=1}^s [N_{ij}(M) \log(p_{ij}) + N_{ij}(k, M) \log(f_{ij}(k))] \\ &+ \lambda_i (1 - \sum_{j=1}^s p_{ij}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

où les multiplicateurs de Lagrange λ_i sont des constantes choisies arbitrairement. Afin d'obtenir le EMV approché de p_{ij} nous maximisons la dernière équation par rapport à p_{ij} , donc

$$\frac{\partial}{\partial p_{ij}} \log(L_1(M)) = \frac{N_{ij}(M)}{p_{ij}} - \lambda_i.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \log(L_1(M)) = 0 &\iff \frac{N_{ij}(M)}{p_{ij}} = \lambda_i \\ &\iff p_{ij} = \frac{N_{ij}(M)}{\lambda_i}, \end{aligned}$$

et obtenons $p_{ij} = N_{ij}(M)/\lambda_i$. En combinant ce dernier résultat avec l'équation (4.5), on obtient

$$1 = \sum_{j=1}^s p_{ij} = \sum_{j=1}^s \frac{N_{ij}(M)}{\lambda_i} = \frac{N_i(M)}{\lambda_i}.$$

Enfin, on en déduit que les valeurs λ_i qui maximisent l'équation (4.6) par rapport à p_{ij} sont données par $\lambda_i = N_i(M)$ et on obtient

$$\hat{p}_{ij}(M) := \frac{N_{ij}(M)}{N_i(M)}.$$

Preuve de (4.3) : L'expression de $\hat{f}_{ij}(k, M)$ peut être obtenue par la même méthode.

En effet, en utilisant l'égalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k) = 1, \quad (4.7)$$

on écrit la fonction log-vraisemblance approchée sous la forme :

$$\begin{aligned} \log(L_1(M)) &= \sum_{k=1}^M \sum_{i,j=1}^s [N_{ij}(M) \log(p_{ij}) + N_{ij}(k, M) \log(f_{ij}(k))] \\ &+ \lambda_{ij} (1 - \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

où λ_{ij} sont des constantes choisies arbitrairement. En maximisant (4.8) par rapport à $f_{ij}(k)$, on aura

$$\frac{\partial}{\partial f_{ij}} \log(L_1(M)) = \frac{N_{ij}(K, M)}{f_{ij}} - \lambda_{ij}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f_{ij}} \log(L_1(K, M)) = 0 &\iff \frac{N_{ij}(K, M)}{f_{ij}} = \lambda_{ij} \\ &\iff f_{ij} = \frac{N_{ij}(K, M)}{\lambda_{ij}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.7), nous déduisons

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{ij}(K, M)}{\lambda_{ij}} = \frac{N_{ij}(M)}{\lambda_{ij}}.$$

Enfin, on en déduit que les valeurs λ_{ij} qui maximisent l'équation (4.8) par rapport à $f_{ij}(k)$ sont données par $\lambda_{ij} = N_{ij}(M)$, et on obtient

$$\hat{f}_{ij}(k) := \frac{N_{ij}(k, M)}{N_{ij}(M)}.$$

Preuve de (4.4) : L'expression de $\hat{q}_{ij}(k, M)$ peut être obtenue par la même méthode.

En effet, en utilisant l'égalité

$$\sum_{j \in E} \sum_{k \in \mathbb{N}} q_{ij}(k) = 1, \quad (4.9)$$

on écrit la fonction log-vraisemblance approchée sous la forme :

$$\begin{aligned} \log(L_1(M)) &= \sum_{k=1}^{N(m)} [\log(q_{J_{k-1}J_k}(X_k))] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i,j \in E} [N_{ij}(k, M) \log(q_{ij}(k))] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i,j \in E} [N_{ij}(k, M) \log(q_{ij}(k)) + \lambda_i (1 - \sum_{j \in E} \sum_{k \in \mathbb{N}} q_{ij}(k))] \end{aligned} \quad (4.10)$$

où λ_i sont des constantes choisies arbitrairement. En maximisant (4.10) par rapport à $q_{ij}(k)$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial q_{ij}(k)} \log(L_1(M)) = \frac{N_{ij}(K, M)}{q_{ij}(k)} - \lambda_i.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_{ij}(k)} \log(L_1(M)) = 0 &\iff \frac{N_{ij}(K, M)}{q_{ij}(k)} = \lambda_i \\ &\iff q_{ij}(k) = \frac{N_{ij}(K, M)}{\lambda_i}, \end{aligned}$$

et obtenons $q_{ij}(k, M) = N_{ij}(K, M)/\lambda_i$. En se servant de l'équation (4.9), nous déduisons

$$1 = \sum_{j \in E} \sum_{k \in \mathbb{N}} q_{ij}(k) = \sum_{j \in E} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{N_{ij}(K, M)}{\lambda_i} = \sum_{j \in E} \frac{N_{ij}(M)}{\lambda_i} = \frac{N_i(M)}{\lambda_i}.$$

Enfin, on en déduit que les valeurs λ_i qui maximisent l'équation (4.10) par rapport à $q_{ij}(k)$ sont données par $\lambda_i = N_i(M)$ et on obtient

$$\hat{q}_{ij}(k) := \frac{N_{ij}(k, M)}{N_i(M)}.$$

■

Corollaire 4.2. *En utilisant la relation*

$$\hat{\Psi}_{ij}(k) = \sum_{l=0}^k \hat{\psi}_{ij}(l)$$

Donc l'estimateur $\Psi(k, M)$ de $\psi(k)$ est défini par

$$\hat{\Psi}_{ij}(k, M) = \sum_{l=0}^k \hat{\psi}_{ij}(l, M) = \sum_{l=0}^k \sum_{n=0}^l \hat{q}_{ij}^{(n)}(l, M) \quad i, j \in E \text{ et } k \in \mathbb{N}.$$

La proposition suivante donne la formule de l'estimateur non-paramétrique de la fonction de transition.

Proposition 4.3. *L'estimateur empirique de la fonction de transition est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} \hat{P}(k, M) &= (\delta \mathbf{I} - \hat{q}(\cdot, M))^{(-1)} * (\mathbf{I} - \text{diag}(\hat{Q}(\cdot, M).1))(k) \\ &= \psi(\cdot, M) * (\mathbf{I} - \text{diag}(\hat{Q}(\cdot, M).1)(\mathbf{k})). \end{aligned}$$

Lemme 4.4. [4] *Pour une CRM qui satisfait les hypothèses A1 et A2, nous avons :*

1. $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = \infty$ p.s. ;
2. $\lim_{M \rightarrow \infty} N(M) = \infty$ p.s.

Preuve.

1. Puisque $S_n \geq n$, la conclusion est simple.
2. Le résultat est une conséquence directe de 1. et La définition de $N(n)$ montre que $N(n) \geq k$ si et seulement si $k \leq n$, donc l'égalité :

$$\mathbb{P}(N(n) \geq k) = \mathbb{P}(S_k \leq n) \quad \text{est vrai pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixe on a :

$$\mathbb{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} N(k) \leq n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N(k) \leq n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \geq k),$$

Comme la chaîne de renouvellement est récurrente, $\mathbb{P}(X_n < \infty) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $S_n = X_0 + \dots + X_n < \infty$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, on a

$$\mathbb{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} N(k) \leq n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \geq k) = 0,$$

ce qui prouve le résultat. ■

Lemme 4.5. [4] Pour la CRM $(J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous avons

$$\frac{N_i(M)}{M} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{1}{\mu_{ii}}, \quad \frac{N_{ij}(M)}{M} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{p_{ij}}{\mu_{ii}}, \quad \frac{N(M)}{M} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{1}{\nu(l)\mu_{ll}}.$$

où μ_{ii} est le temps de récurrence moyen de l'état i pour le processus semi-markovien $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4.3 Propriétés asymptotiques des estimateurs

Dans cette section, nous étudions les propriétés asymptotiques (consistance et normalité asymptotique) des estimateurs proposés.

4.3.1 Convergence presque sûre

Commençons d'abord par établir la convergence uniforme presque sûre des estimateurs $\hat{p}_{ij}(M)$, $\hat{f}_{ij}(k, M)$, $\hat{F}_{ij}(k, M)$ et $\hat{q}_{ij}(k, M)$.

Corollaire 4.6. [3] Pour tout $i, j \in E$, sous A1, on a

$$\hat{p}_{ij}(M) = \frac{N_{ij}(M)}{N_i(M)} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} p_{ij}.$$

Pour $i, j \in E$ deux états fixés, définissons également l'estimateur empirique de la distribution cumulative conditionnelle de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\hat{F}_{ij}(k, M) := \sum_{l=0}^k \hat{f}_{ij}(l, M) = \sum_{l=0}^k \frac{N_{ij}(l, M)}{N_{ij}(M)}. \quad (4.11)$$

Le résultat suivant concerne la convergence de $\hat{f}_{ij}(K, M)$ et $\hat{F}_{ij}(K, M)$.

Proposition 4.7. [3] Pour tout états arbitraires fixés $i, j \in E$, les estimateurs empiriques $\hat{f}_{ij}(k, M)$ et $\hat{F}_{ij}(k, M)$ proposés dans les équations (4.2) et (4.11), sont presque sûrement uniformément convergents, c'est-à-dire :

1. $\max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{F}_{ij}(k, M) - F_{ij}(k)| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$
2. $\max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{f}_{ij}(k, M) - f_{ij}(k)| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$

Preuve. Nous prouvons d'abord la convergence ponctuelle forte des estimateurs en utilisant le Théorème LFGN 1.1.

Deuxièmement, nous montrons la consistance uniforme, c'est-à-dire que la convergence ne dépendent pas de k , où $0 \leq k \leq M$ choisi. Cette deuxième partie se fait au moyen du Théorème de Glivenko-Cantelli 1.2.

Notons $\{n_1, n_2, \dots, n_{N_{ij}(M)}\}$ les temps de transition de l'état i à l'état j , jusqu'au temps M . On a

$$\hat{F}_{ij}(k, M) = \frac{1}{N_{ij}(M)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(M)} \mathbb{1}_{\{X_{n_l} \leq k\}},$$

et

$$\hat{f}_{ij}(k, M) = \frac{1}{N_{ij}(M)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(M)} \mathbb{1}_{\{X_{n_l} = k\}}.$$

Pour tout $l \in \{1, 2, \dots, N_{ij}(M)\}$ nous avons

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_{n_l} \leq k\}}] = \mathbb{P}(X_{n_l} \leq k) = F_{ij}(k),$$

et

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_{n_l} = k\}}] = \mathbb{P}(X_{n_l} = k) = f_{ij}(k).$$

D'après le Lemme 4.4, on a $N_{ij}(M) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$. En appliquant le Théorème des LFGN 1.1 aux suites de variables aléatoires i.i.d $\{\mathbb{1}_{\{X_{n_l} \leq k\}}\}_{l \in \{1, 2, \dots, N_{ij}(M)\}}$ et $\{\mathbb{1}_{\{X_{n_l} = k\}}\}_{l \in \{1, 2, \dots, N_{ij}(M)\}}$, et en utilisant le Théorème 1.3, on obtient

$$\widehat{F}_{ij}(k, M) = \frac{1}{N_{ij}(M)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(M)} \mathbb{1}_{\{X_{n_l} \leq k\}} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_{n_l} \leq k\}}] = F_{ij}(k),$$

et

$$\widehat{f}_{ij}(k, M) = \frac{1}{N_{ij}(M)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(M)} \mathbb{1}_{\{X_{n_l} = k\}} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_{n_l} = k\}}] = f_{ij}(k).$$

Afin d'obtenir la convergence uniforme, à partir du Théorème de Glivenko-Cantelli 1.2, on a

$$\max_{0 \leq k \leq M} \left| \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \mathbb{1}_{\{X_{n_l} \leq k\}} - F_{ij}(k) \right| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Si on dénote $\xi_M := \max_{0 \leq k \leq M} \left| \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \mathbb{1}_{\{X_{n_l} \leq k\}} - F_{ij}(k) \right|$, La convergence précédente nous indique que $\xi_M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0$. Comme $N(M) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$ (Lemme 4.4), en appliquant le Théorème 1.3 on obtient $\xi_{N(M)} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0$, c'est-à-dire

$$\max_{0 \leq k \leq M} |\widehat{F}_{ij}(k, M) - F_{ij}(k)| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Comme l'espace d'états E est fini, on prend le maximum par rapport à $i, j \in E$ et le résultat souhaité pour $\widehat{F}_{ij}(k, M)$ est achevé.

Concernant la convergence uniforme de $\widehat{f}_{ij}(k, M)$, on a

$$\begin{aligned} \max_{i, j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\widehat{f}_{ij}(k, M) - f_{ij}(k)| &= \max_{i, j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\widehat{F}_{ij}(k, M) - \widehat{F}_{ij}(k-1, M) - F_{ij}(k) + F_{ij}(k-1)| \\ &\leq \max_{i, j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\widehat{F}_{ij}(k, M) - F_{ij}(k)| \\ &\quad + \max_{i, j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\widehat{F}_{ij}(k-1, M) - F_{ij}(k-1)|, \end{aligned}$$

et le résultat découle de la convergence forte uniforme de $\widehat{F}_{ij}(k, M)$. ■

Le résultat suivant concerne la consistance forte de l'estimateur empirique du noyau semi-markovien.

Proposition 4.8. [3] *L'estimateur empirique du noyau semi-markovien proposé dans l'équation (4.2) est uniformément fortement convergent, c'est-à-dire*

$$\max_{i, j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\widehat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Preuve. Premièrement, à partir du Corollaire (4.6), on obtient immédiatement la convergence presque sûre de $\hat{p}_{ij}(M)$. La convergence forte uniforme de $\hat{q}_{ij}(k, M)$ découle de la convergence des estimateurs $\hat{p}_{ij}(M)$, $\hat{f}_{ij}(k, M)$ (Proposition (4.1)) et de l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)| &= \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{p}_{ij}(M) \hat{f}_{ij}(k, M) - \hat{p}_{ij}(M) f_{ij}(k) \\ &\quad + \hat{p}_{ij}(M) f_{ij}(k) - p_{ij} f_{ij}(k)| \\ &\leq \max_{i,j \in E} \hat{p}_{ij}(M) \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{f}_{ij}(k, M) - f_{ij}(k)| \\ &\quad + \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} f_{ij}(k) \max_{i,j \in E} |\hat{p}_{ij}(M) - p_{ij}| \\ &\leq \max_{i,j \in E} |\hat{p}_{ij}(M) - p_{ij}| + \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{f}_{ij}(k, M) - f_{ij}(k)|. \end{aligned}$$

La conclusion découle de la convergence de $\hat{p}_{ij}(M)$ et $\hat{f}_{ij}(k, M)$. ■

Soient $\hat{\mathbf{Q}}(k, M)$ et $\hat{\psi}(k, M)$ les estimateurs de $\mathbf{Q}(k)$ et de $\psi(k)$ définis par

$$\hat{\mathbf{Q}}(k, M) = \sum_{l=1}^k \hat{\mathbf{q}}(l, M) \quad (4.12)$$

et

$$\hat{\psi}(k, M) = \sum_{l=1}^k \hat{\mathbf{q}}^{(n)}(l, M), \quad (4.13)$$

où $\hat{\mathbf{q}}^{(n)}(k, M)$ est la convolution n fois de $\hat{\mathbf{q}}(k, M)$ (Définition 3.6). Nous pouvons prouver la convergence de $\hat{\mathbf{Q}}(k, M)$ lorsque M tend vers l'infini.

Théorème 4.9. $\hat{\mathbf{Q}}$ est uniformément fortement convergent, c'est-à-dire :

$$\max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{Q}_{ij}(t, M) - Q_{ij}(t)| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Preuve. On a $Q_{ij}(k) = F_{ij}(k)p_{ij}$ et donc $\hat{Q}_{ij}(k, M) = \hat{F}_{ij}(k, M)\hat{p}_{ij}(M)$.

La Preuve est similaire à celle du Théorème 4.8. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{Q}_{ij}(k, M) - Q_{ij}(k)| &= \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{F}_{ij}(k, M)\hat{p}_{ij}(M) - F_{ij}(k, M)\hat{p}_{ij} \\ &\quad + F_{ij}(k, M)\hat{p}_{ij} - F_{ij}(k)p_{ij}| \\ &\leq \max_{i,j \in E} |\hat{p}_{ij}(M) - p_{ij}| + \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} |\hat{F}_{ij}(k, M) - F_{ij}(k)|, \end{aligned}$$

et de la consistance de $\hat{p}_{ij}(M)$ et $\hat{F}_{ij}(k, M)$ (Corollaire 4.6 et Proposition 4.21), on obtient le résultat désiré. ■

Proposition 4.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, nous avons*

$$\max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \left| \widehat{q}_{ij}^{(n)}(k, M) - q_{ij}^{(n)}(k) \right| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Preuve. Nous allons prouver le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, la convergence était obtenu dans la Proposition 4.8. Supposons que le résultat soit vrai pour $n - 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \left| \widehat{q}_{ij}^{(n)}(k, M) - q_{ij}^{(n)}(k) \right| &= \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \left| \sum_{r=1}^s (\widehat{q}_{ir} * \widehat{q}_{rj}^{(n-1)})(k, M) - \sum_{r=1}^s (q_{ir} * q_{rj}^{(n-1)})(k) \right| \\ &\leq \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \sum_{r=1}^s \left| (\widehat{q}_{ir} * \widehat{q}_{rj}^{(n-1)})(k, M) - (q_{ir} * q_{rj}^{(n-1)})(k) \right| \\ &\quad - (q_{ir} * \widehat{q}_{rj}^{(n-1)})(k, M) + (q_{ir} * \widehat{q}_{rj}^{(n-1)})(k, M) \\ &\leq \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \sum_{r=1}^s \left| q_{ir} * (\widehat{q}_{rj}^{(n-1)} - q_{rj}^{(n-1)})(k, M) \right| \\ &\quad + \max_{i,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \sum_{r=1}^s \left| (\widehat{q}_{ir} - q_{ir}) * \widehat{q}_{rj}^{(n-1)}(k, M) \right| \\ &\leq \max_{r,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \left| (\widehat{q}_{rj}^{(n-1)} - q_{rj}^{(n-1)})(k, M) \right| \max_{i,r \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \sum_{r=1}^s q_{ir}(k) \\ &\quad + \max_{i,r \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \left| (\widehat{q}_{ir} - q_{ir})(k, M) \right| \max_{r,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \sum_{r=1}^s \widehat{q}_{rj}^{(n-1)}(k, M) \\ &\leq \max_{r,j \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \left| (\widehat{q}_{rj}^{(n-1)} - q_{rj}^{(n-1)})(k, M) \right| \\ &\quad + s \max_{i,r \in E} \max_{0 \leq k \leq M} \left| (\widehat{q}_{ir} - q_{ir})(k, M) \right| \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et la proposition 4.8, la preuve est réalisée. ■

Théorème 4.11. *Les estimateurs de la fonction matricielle $\psi = (\psi(k), k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ et celle du renouvellement de Markov $\Psi = (\Psi(k), k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_E(\mathbb{N})$ sont fortement consistants, c'est-à-dire*

$$\max_{i,j \in E} \left| \widehat{\psi}_{ij}(k, M) - \psi_{ij}(k) \right| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \quad (4.14)$$

$$\max_{i,j \in E} \left| \widehat{\Psi}_{ij}(k, M) - \Psi_{ij}(k) \right| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \quad (4.15)$$

Preuve. Puisque $\psi_{ij}(k)$ (resp $\widehat{\psi}_{ij}(k, M)$) est une somme finie de $q_{ij}^{(n)}(k, M)$ (resp $\widehat{q}_{ij}^{(n)}(k, M)$), la première convergence est une application directe de la proposition 4.10. La deuxième convergence est obtenue selon la même méthode. ■

Théorème 4.12. *L'estimateur de la matrice de transition semi-markovienne est fortement convergent, c'est-à-dire, pour tout états arbitraires fixés $i, j \in E$ et tout entier positif fixé arbitraire $k \in \mathbb{N}$, $k \leq M$, on a*

$$\max_{i,j \in E} \left| \hat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k) \right| \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{P.S.} 0.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \left| \hat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k) \right| &= \left| \left[\hat{\psi} * (I - \text{diag}(\hat{Q} \cdot \mathbf{1})) \right]_{ij}(k, M) - \left[\psi * (I - \text{diag}(\hat{Q} \cdot \mathbf{1})) \right]_{ij}(k) \right| \\ &= \left| \hat{\psi}_{ij} * (I - \text{diag}(\hat{Q} \cdot \mathbf{1}))_{jj}(k, M) - \psi_{ij} * (I - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1}))_{jj}(k) \right. \\ &\quad \left. + \psi_{ij} * \text{diag}(\hat{Q} \cdot \mathbf{1})_{jj}(k, M) - \psi_{ij} * \text{diag}(\hat{Q} \cdot \mathbf{1})_{jj}(k, M) \right| \\ &= \left| (\hat{\psi}_{ij} - \psi_{ij}) * I_{jj}(k, M) - (\hat{\psi}_{ij} - \psi_{ij}) * \text{diag}(\hat{Q} \cdot \mathbf{1})_{jj}(k, M) \right. \\ &\quad \left. - \psi_{ij} * (\text{diag}(\hat{Q} \cdot \mathbf{1})_{jj} - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1})_{jj})(k, M) \right| \\ &\leq \left| \hat{\psi}_{ij}(k, M) - \psi_{ij}(k) \right| + \left| (\hat{\psi}_{ij} - \psi_{ij}) * \text{diag}(\hat{Q} \cdot \mathbf{1})_{jj}(k, M) \right| \\ &\quad + \left| \psi_{ij} * \text{diag}((\hat{Q} - Q) \cdot \mathbf{1})_{jj}(k, M) \right|. \end{aligned}$$

Puisque $\text{diag}(\hat{Q}(k, M) \cdot \mathbf{1})_{jj} = \sum_{l=1}^s \hat{Q}_{jl}(k, M) = \hat{H}_j(k, M) \leq 1$ et les estimateurs des fonctions matricielles Q et ψ sont fortement convergents, on obtient la convergence forte de l'estimateur de la matrice de transition semi-markovienne.

4.3.2 Normalité asymptotique

Dans cette partie, nous prouvons la normalité asymptotique des l'estimateur empiriques du noyau semi-markovien, la fonction de renouvellement semi-markovien et la probabilité de transition de la chaîne semi-markovienne. Dans ce contexte, nous commençons par présenter deux preuves différentes de la normalité asymptotique du noyau semi-markovien. La première démonstration est basée sur le TCL pour les chaînes de renouvellement de Markov (Théorème 4.13); et la seconde s'appuie sur le TCL de Lindeberg–Lévy pour les martingales (Théorème 1.4).

Nous présentons ensuite le Théorème LFGN et le théorème TCL 4.13 pour les fonctionnelles additives des chaînes de renouvellement de Markov.

Soit f une fonction réelle définie sur $E \times E \times \mathbb{N}$. Définissons, pour chaque $M \in \mathbb{N}$, la

fonctionnelle $W_f(M)$ comme

$$W_f(M) := \sum_{n=1}^{N(M)} f(J_{n-1}, J_n, X_n),$$

ou d'une manière équivalente,

$$W_f(M) := \sum_{i,j=1}^s \sum_{n=1}^{N_{ij}(M)} f(i, j, X_{ijn}),$$

où X_{ijn} est le $n^{ième}$ temps de séjour de la chaîne dans l'état i , avant de passer à l'état j .

Soient les ensembles

$$\begin{aligned} A_{ij} &:= \sum_{x=1}^{\infty} f(i, j, x) q_{ij}(x), & A_i &:= \sum_{j=1}^s A_{ij}, \\ B_{ij} &:= \sum_{x=1}^{\infty} f^2(i, j, x) q_{ij}(x), & B_i &:= \sum_{j=1}^s B_{ij}, \end{aligned}$$

si les sommes existent. Définissons

$$\begin{aligned} r_i &:= \sum_{j=1}^s A_j \frac{\mu_{ii}^*}{\mu_{jj}^*}, & m_f &:= \frac{r_i}{\mu_{ii}} \\ \sigma_i^2 &:= -r_i^2 + \sum_{j=1}^s B_j \frac{\mu_{ii}^*}{\mu_{jj}^*} + 2 \sum_{r=1}^s \sum_{l \neq i} \sum_{k \neq i} A_{rl} A_k \mu_{ii}^* \frac{\mu_{li}^* + \mu_{ik}^* - \mu_{lk}^*}{\mu_{rr}^* \mu_{kk}^*}, & B_f &:= \frac{\sigma_i^2}{\mu_{ii}}, \end{aligned}$$

où μ_{ii}^* est le temps récurrent moyen de l'état i pour la chaîne de Markov $(J_n)_{n \geq 0}$.

Théorème 4.13. (Théorème central limite) [16] *Pour une chaîne de renouvellement de Markov apériodique qui satisfait les hypothèses A1 et A2, nous avons*

$$\sqrt{M} \left[\frac{W_f(M)}{M} - m_f \right] \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, B_f).$$

Théorème 4.14. [3] *Pour tout états arbitraires fixés $i, j \in E$, et tout entier positif $k \in \mathbb{N}$, $k \leq M$, on a*

$$\sqrt{M} [\hat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)] \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_q^2(i, j, k)),$$

avec la variance asymptotique

$$\sigma_q^2(i, j, k) = \mu_{ii} q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)].$$

Preuve. Méthode 1.

$$\sqrt{M}[\widehat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)] = \sqrt{M} \left[\frac{N_{ij}(k, M)}{N_i(M)} - q_{ij} \right] = \sqrt{M} \left[\frac{\sum_{n=1}^{N(M)} \mathbb{1}_{\{J_n=j, J_{n-1}=i, X_n=k\}}}{N_i(M)} - q_{ij} \right]$$

On a $N_i(M) = \sum_{n=1}^{N(M)} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}}$, donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{M}[\widehat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)] &= \frac{M}{\sqrt{M}} \frac{1}{N_i(M)} \left[\sum_{n=1}^{N(M)} \mathbb{1}_{\{J_n=j, X_n=k\}} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}} - q_{ij} \sum_{n=1}^{N(M)} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}} \right] \\ &= \frac{M}{N_i(M)} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{N(M)} [\mathbb{1}_{\{J_n=j, X_n=k\}} - q_{ij}(k)] \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}}. \end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$f(m, l, u) := \mathbb{1}_{\{m=i, l=j, u=k\}} - q_{ij}(k) \mathbb{1}_{\{m=i\}}.$$

En utilisant la notation du TCL de Pyke (Théorème 4.13), nous avons

$$W_f(M) = \sum_{n=1}^{N(M)} f(J_{n-1}, J_n, X_n) = \sum_{n=1}^{N(M)} [\mathbb{1}_{\{J_n=j, X_n=k\}} - q_{ij}(k)] \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}}.$$

Afin d'appliquer le théorème central limite de Pyke et Schaufele pour les chaines de renouvellement de Markov (Théorème 4.13), nous devons calculer $A_{ml}, A_m, B_{ml}, B_m, m_f$

et B_f pour $m, l \in E$.

$$\begin{aligned}
 A_{ml} &= \sum_{u=1}^{\infty} f(m, l, u) q_{ml}(u), \\
 &= \sum_{u=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m=i, l=j, u=k\}} q_{ml}(u) - \sum_{u=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m=i\}} q_{ij}(k) q_{ml}(u) \\
 &= \delta_{mi} \delta_{lj} \sum_{u=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{u=k\}} q_{ij}(u) - \delta_{mi} q_{ij}(k) \sum_{u=1}^{\infty} q_{il}(u) = q_{ij}(k) \delta_{mi} (\delta_{lj} - p_{il}) \\
 A_m &= \sum_{l=1}^s A_{ml} = q_{ij}(k) \delta_{mi} \left[\sum_{l=1}^s \delta_{lj} - \sum_{l=1}^s p_{il} \right] = 0. \\
 B_{ml} &:= \sum_{u=1}^{\infty} f^2(m, l, u) q_{ml}(u) \\
 &= \sum_{u=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m=i, l=j, u=k\}} q_{ml}(u) + \sum_{u=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m=i\}} q_{ij}^2(k) q_{ml}(u) \\
 &\quad - 2 \sum_{u=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{m=i, l=j, u=k\}} q_{ij}(k) q_{ml}(u) \\
 &= q_{ij}(k) \delta_{mi} \delta_{lj} + q_{ij}^2(k) \delta_{mi} p_{il} - 2 q_{ij}^2(k) \delta_{mi} \delta_{lj} \\
 B_m &:= \sum_{l=1}^s B_{ml} = \delta_{mi} q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)].
 \end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$\begin{aligned}
 r_i &:= \sum_{m=1}^s A_m \frac{\mu_{ii}^*}{\mu_{mm}^*} = 0, & m_f &:= \frac{r_i}{\mu_{ii}} = 0, \\
 \sigma_i^2 &:= \sum_{m=1}^s B_m \frac{\mu_{ii}^*}{\mu_{mm}^*} = q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)], & B_f &:= \frac{\sigma_i^2}{\mu_{ii}} = \frac{q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)]}{\mu_{ii}}.
 \end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.5, $N_i(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 1/\mu_{ii}$, nous déduisons :

$$\sqrt{M} [\hat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)] \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mu_{ii} q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)]).$$

■

Méthode 2. Pour $i, j \in E$ états arbitrairement fixés et $k \in \mathbb{N}$ entier positif arbitrairement fixé, on écrit la variable aléatoire $\sqrt{M} [\hat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)]$ comme

$$\sqrt{M} [\hat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)] = \frac{M}{N_i(M)} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{N(M)} \left[\mathbb{1}_{\{J_n=j, X_n=k\}} - q_{ij}(k) \right] \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}}.$$

Soit $\mathcal{F}_n$ la σ -algèbre définie par $\mathcal{F}_n := \sigma(J_l, X_l; l \leq n), n \geq 0$, et soit Y_n la variable aléatoire

$$Y_n = \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n=k\}} - q_{ij}(k) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}}.$$

Y_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable et $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{P}(J_{n-1} = i, J_n = j, X_n = k \mid \mathcal{F}_{n-1}) - q_{ij}(k) \mathbb{P}(J_{n-1} = i \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}} \mathbb{P}(J_n = j, X_n = k \mid J_{n-1} = i) - q_{ij}(k) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i\}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une différence $\mathcal{F}_n$ -martingale et $(\sum_{l=1}^n Y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$ -martingale.

En outre, comme Y_l est borné pour tout $l \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(Y_l^2 \mathbb{1}_{\{|Y_l| > \epsilon \sqrt{n}\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$. En utilisant le TCL pour les martingales (Théorème 1.4), on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n Y_l \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (4.16)$$

où $\sigma^2 > 0$ est donné par

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(Y_l^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}) > 0.$$

Comme $N(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 1/\nu(l)\mu_{ll}$, en appliquant le Théorème d'Anscombe (Théorème 1.5) on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{N(M)}} \sum_{l=1}^{N(M)} Y_l \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (4.17)$$

Pour obtenir σ^2 , nous devons calculer Y_l^2 et $\mathbb{E}(Y_l^2 \mid \mathcal{F}_{l-1})$. D'une part, nous avons

$$Y_l^2 = \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i, J_l=j, X_l=k\}} + (q_{ij}(k))^2 \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} - 2q_{ij}(k) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i, J_l=j, X_l=k\}}.$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_l^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}) &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \mathbb{P}(J_l = j, X_l = k \mid J_{l-1} = i) \\ &\quad + (q_{ij}(k))^2 \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} - 2 \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} q_{ij}(k) \mathbb{P}(J_l = j, X_l = k \mid J_{l-1} = i) \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} q_{ij}(k) + (q_{ij}(k))^2 \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} - 2(q_{ij}(k))^2 \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)]. \end{aligned}$$

Ainsi, σ^2 est donné par

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)] \right) = \nu(i) q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)],$$

où ν est la loi stationnaire de la chaîne de Markov immergée $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La variable aléatoire d'intérêt $\sqrt{M}[\hat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)]$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \sqrt{M}[\hat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)] &= \frac{M}{N_i(M)} \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{N(M)} \frac{1}{\sqrt{N(M)}} \sum_{l=1}^{N(M)} Y_l \\ &= \frac{M}{N_i(M)} \sqrt{\frac{N(M)}{M}} \frac{1}{\sqrt{N(M)}} \sum_{l=1}^{N(M)} Y_l. \end{aligned}$$

Remarquons que d'après le Lemme 4.5, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{N_i(M)}{M} &\xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{1}{\mu_{ii}}, \\ \frac{N(M)}{M} &\xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{1}{\nu(i)\mu_{ii}}. \end{aligned}$$

En combinant ces résultats avec (4.17), nous déduisons que

$$\sqrt{M}[\hat{q}_{ij}(k, M) - q_{ij}(k)] \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_q^2(i, j, k)),$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_q^2(i, j, k) &= (\mu_{ii} \sqrt{1/\mu_{ii}\nu(i)})^2 \nu(i) q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)] \\ &= \mu_{ii} q_{ij}(k) [1 - q_{ij}(k)]. \end{aligned}$$

■

Le résultat suivant s'articule sur la loi limite de la fonction de renouvellement semi-markovien.

Théorème 4.15. *Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et $i, j \in E$, on a*

$$\sqrt{M}[\hat{\psi}_{ij}(k, M) - \psi_{ij}(k)] \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\psi^2(i, j, k)),$$

où

$$\sigma_\psi^2(i, j, k) = \sum_{m=1}^s \mu_{mm} \left\{ \sum_{r=1}^s [(\psi_{im} * \psi_{rj})^2 * q_{mr}](k) - \left[\sum_{r=1}^s (\psi_{im} * q_{mr} * \psi_{rj})(k) \right]^2 \right\} \quad (4.18)$$

Preuve Comme la fonction matricielle ψ est la solution de l'équation de renouvellement

de Markov $\psi = \delta I + q * \psi$ et peut s'écrire sous la forme $\psi = (\delta I + q)^{(-1)}$, alors, nous avons

$$\begin{aligned}
 \sqrt{M}[\widehat{\psi}_{ij}(k, M) - \psi_{ij}(k)] &= \sqrt{M}[\psi_{ij} - (\widehat{\psi} * \psi)_{ij} + (\widehat{\psi} * \psi)_{ij} - \psi_{ij}](k) \\
 &= \sqrt{M}[(\widehat{\psi} * (\delta I - \psi))_{ij} + ((\widehat{\psi} - \delta I) * \psi)_{ij}](k) \\
 &= \sqrt{M}[-[\widehat{\psi} * q * \psi]_{ij} + [\widehat{\psi} * \widehat{q} * \psi]_{ij}](k) \\
 &= \sqrt{M}[\widehat{\psi} * (\widehat{q} - q) * \psi]_{ij}(k) \\
 &= \sqrt{M}[(\widehat{\psi} - \psi) * (\widehat{q} - q) * \psi]_{ij}(k) + \sqrt{M}[\psi * (\widehat{q} - q) * \psi]_{ij}(k)
 \end{aligned}$$

Pour chaque $t \in \mathbb{N}$, $t \leq M$, et pour chaque $r, l, u, v \in E$, $\sqrt{M}(\widehat{q}_{rl}(t, M) - q_{rl}(t))$ converge en distribution vers une variable aléatoire normale (Théorème 4.14), lorsque M tend vers l'infini, et $\widehat{\psi}_{uv}(t, M) - \psi_{uv}(t) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ (Théorème 4.11). Ainsi, le Théorème de Slutsky (Théorème 1.6) permet d'obtenir $\sqrt{M}[(\widehat{\psi} - \psi) * (\widehat{q} - q) * \psi]_{ij}(k) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$. Par conséquent, en appliquant à nouveau le Théorème de Slutsky, nous déduisons $\sqrt{M}[\widehat{\psi}_{ij}(k, M) - \psi_{ij}(k)]$ à la même limite en distribution que $\sqrt{M}(\psi * (\widehat{q} - q) * \psi)_{ij}(k)$. Le dernier terme peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{M}(\psi * (\widehat{q} - q) * \psi)_{ij}(k) &= \sqrt{M} \sum_{l=1}^s \sum_{r=1}^s (\psi_{il} * (\widehat{q}(\cdot, M) - q)_{lr} * \psi_{rj})(k) \\
 &= \sqrt{M} \sum_{l=1}^s \sum_{r=1}^s (\psi_{il} * (\widehat{q}(\cdot, M)_{lr} * \psi_{rj}))(k) - \sqrt{M} \sum_{l=1}^s \sum_{r=1}^s (\psi_{il} * q_{lr} * \psi_{rj})(k) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{N(M)} \sum_{l=1}^s \frac{M}{N_l(M)} \sum_{r=1}^s [(\psi_{il} * \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, j_n=r, X_n=\cdot\}} * \psi_{rj})(k) \\
 &\quad - (\psi_{il} * q_{lr} \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l\}} * \psi_{rj})(k)]
 \end{aligned}$$

Comme $N_l(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 1/\mu_{ll}$ (Lemme 4.5), en utilisant le Théorème de Slutsky, on obtient que $\sqrt{M}[\widehat{\psi}_{in}(k, M) - \psi_{in}(k)]$ à la même limite en distribution que

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{N(M)} \sum_{l=1}^s \mu_{ll} \sum_{r=1}^s [(\psi_{il} * \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, j_n=r, X_n=\cdot\}} * \psi_{rj})(k) - (\psi_{il} * q_{lr} \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l\}} * \psi_{rj})(k)] \\
 &= \sqrt{\frac{N(M)}{M}} \frac{1}{\sqrt{N(M)}} \sum_{n=1}^{N(M)} Y_n
 \end{aligned}$$

où les variables aléatoires Y_n sont définies par

$$Y_n = \sum_{l=1}^s \mu_{ll} \sum_{r=1}^s [(\psi_{il} * \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, j_n=r, X_n=\cdot\}} * \psi_{rj})(k) - (\psi_{il} * q_{lr} \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l\}} * \psi_{rj})(k)]$$

Soit $\mathcal{F}_n$ la σ -algèbre définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(J_l, X_l, l \leq n)$. Notons que Y_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on peut vérifier que $\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$. Par conséquent, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$ -différence martingale et $(\sum_{l=1}^n Y_l)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$ -martingale. Comme Y_m est borné pour $m \in \mathbb{N}$ fixe, on a pour tout $\epsilon > 0$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}(Y_m^2 \mathbb{1}_{|Y_m| > \epsilon \sqrt{n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En utilisant le TCL pour les martingales (Théorème 1.4), on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n Y_m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (4.19)$$

où $\sigma^2 > 0$ est donné par

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}(Y_m^2 | \mathcal{F}_{m-1}) \quad (4.20)$$

Comme $N(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 1/\nu(l)\mu_{ll}$ (Lemme 4.5), d'après (4.19) et du Théorème d'Anscombe (Théorème 1.5), on peut déduire

$$\frac{1}{\sqrt{N(M)}} \sum_{n=1}^{N(M)} Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Puisque $N_l(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 1/\nu(l)\mu_{ll}$ pour tout état $l \in E$, on obtient

$$\sqrt{M}[\widehat{\psi}_{ij}(k, M) - \psi_{ij}(k)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2/\nu(l)\mu_{ll}) \quad (4.21)$$

Pour obtenir la variance asymptotique $\sigma_{\psi}^2(i, j, k)$, nous devons calculer Y_l^2 , $\mathbb{E}(Y_l^2 | \mathcal{F}_{l-1})$ et σ^2 .

$$\begin{aligned} Y_n^2 &= \sum_{l=1}^s \mu_{ll}^2 \left[\sum_{r=1}^s \sum_{k_1=0}^k (\psi_{il} * \psi_{rj})^2(k - k_1) \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, j_n=r, X_n=k_1\}} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l\}} \sum_{r_1, r_2=1}^s \sum_{k_1, k_2=0}^k (\psi_{il} * \psi_{r_1j})(k - k_1) ((\psi_{il} * \psi_{r_2j}))(k - k_2) \times q_{lr_1}(k_1) q_{lr_2}(k_2) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{r_1, r_2=1}^s \sum_{k_1, k_2=0}^k (\psi_{il} * \psi_{r_1j})(k - k_1) ((\psi_{il} * \psi_{r_2j}))(k - k_2) \times \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, j_n=r, X_n=k_1\}} q_{lr_2}(k_2) \right]. \end{aligned}$$

En conséquence, on obtient

$$\mathbb{E}(Y_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \sum_{l=1}^s \mu_{ll}^2 \mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l\}} \left[\sum_{r=1}^s (\psi_{il} * \psi_{rj})^2 * q_{lr}(k) - \left(\sum_{r=1}^s \psi_{il} * \psi_{rj} * q_{lr}(k) \right)^2 \right],$$

et, en utilisant l'Équation (4.20) et la Proposition 1.7, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{l=1}^s \mu_{ll}^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbb{1}_{\{j_{m-1}=l\}} \right) \times \left[\sum_{r=1}^s (\psi_{il} * \psi_{rj})^2 * q_{lr}(k) - \left(\sum_{r=1}^s \psi_{il} * \psi_{rj} * q_{lr}(k) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{l=1}^s \mu_{ll}^2 \nu(l) \left[\sum_{r=1}^s (\psi_{il} * \psi_{rj})^2 * q_{lr}(k) - \left(\sum_{r=1}^s \psi_{il} * \psi_{rj} * q_{lr}(k) \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Finalement, cette forme de σ^2 avec la convergence (4.21) confirment la convergence de $\sqrt{M}[\hat{\psi}_{ij}(k, M) - \psi_{ij}(k)]$, lorsque M tend vers l'infini, vers une variable aléatoire normale à moyenne nulle de variance $\sigma_\psi^2(i, j, k)$ donnée par l'équation (4.18). ■

Pour ce qui concerne la loi limite de l'estimateur empirique de la matrice de transition de la CSM, on déduit d'abord cet estimateur par le fait que la matrice de transition semi-markovienne P est l'unique solution de l'équation de renouvellement markovien associée et qu'elle peut s'écrire

$$P(k) = (\delta I - q)^{(-1)} * (I - H)(k) = \psi * (I - \text{diag}(\mathbf{Q}, \mathbf{1}))(k),$$

avec $\mathbf{1}$ un vecteur colonne de dimension s dont tous les éléments sont égaux à 1. Par conséquent, nous avons l'estimateur suivant de $\mathbf{P}(\cdot)$:

$$\hat{P}(k, M) = (\delta I - \hat{q}(\cdot, M))^{(-1)} * ((I - \text{diag}(\hat{Q})(\cdot, M), \mathbf{1}))(k) = \hat{\psi}(\cdot, M) * ((I - \text{diag}(\hat{Q})(\cdot, M), \mathbf{1}))(k)$$

Nous avons donc, le résultat suivant :

Théorème 4.16. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq M$ et $i, j \in E$ fixés, nous avons*

$$\sqrt{M}[\hat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k)] \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_P^2(i, j, k)),$$

où

$$\begin{aligned}\sigma_P^2(i, j, k) &= \sum_{m=1}^s \mu_{mm} \sum_{r=1}^s [\delta_{mj} \Psi_{ij} - (1 - H_j) * \psi_{im} * \psi_{rj}]^2 * q_{mr}(k) \\ &\quad - [\delta_{mj} \psi_{ij} * H_m(k) - \sum_{r=1}^s (1 - H_j) * \psi_{im} * \psi_{rj} * q_{mr}]^2(k)\end{aligned}\quad (4.22)$$

Preuve. La preuve de ce théorème est similaire à celle des Théorèmes 4.14 et 4.15. Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{M}[\widehat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k)] &= \sqrt{M}[\widehat{\psi}_{ij} * (I - \text{diag}(\widehat{Q} \cdot \mathbf{1}))_{jj} - \psi_{ij} * (I - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1}))_{jj} \\
&\quad + \widehat{\psi}_{ij} * (I - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1}))_{jj} - \widehat{\psi}_{ij} * (I - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1}))_{jj} \\
&\quad + \psi_{ij} * \text{diag}(\widehat{Q} \cdot \mathbf{1})_{jj} - \psi_{ij} * \text{diag}(\widehat{Q} \cdot \mathbf{1})_{jj} \\
&\quad + \psi_{ij} * \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1})_{jj} - \psi_{ij} * \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1})_{jj}](k, M) \\
&= \sqrt{M}[(\widehat{\psi}_{ij} - \psi_{ij}) * (I - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1}))_{jj} - \psi_{ij} * (\text{diag}(\widehat{Q} - Q) \cdot \mathbf{1})_{jj}] \\
&\quad - \sqrt{M}[(\widehat{\psi}_{ij} - \psi_{ij}) * (\text{diag}(\widehat{Q} - Q) \cdot \mathbf{1})_{jj}](k, M).
\end{aligned}$$

Le dernier terme peut s'écrire

$$(\widehat{\psi}_{ij} - \psi_{ij}) * (\text{diag}(\widehat{Q} - Q) \cdot \mathbf{1})_{jj}(k, M) = \sum_{r=1}^s \sum_{l=0}^k (\widehat{\psi}_{ij} - \psi_{ij})(l, M) \Delta Q_{jr}(k-l, M).$$

Pour chaque $l \in \mathbb{N}$, $l \leq M$, $\sqrt{M}(\widehat{\psi}_{ij} - \psi_{ij})(l, M)$ converge en distribution vers une variable aléatoire normale (Théorème 4.15) et $\Delta Q_{jr}(k-l, M)$ converge en probabilité vers zéro (Théorème 4.9). Ainsi, en utilisant le théorème de Slutsky (Théorème 1.6) on obtient que $\sqrt{M}[(\widehat{\psi}_{ij} - \psi_{ij}) * (\text{diag}(\widehat{Q} - Q) \cdot \mathbf{1})_{jj}](k, M) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$. Ainsi, $\sqrt{M}[\widehat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k)]$ a la même loi limite que

$$\sqrt{M}[(\widehat{\psi}_{ij} - \psi_{ij}) * (I - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1}))_{jj} - \psi_{ij} * (\text{diag}(\widehat{Q} - Q) \cdot \mathbf{1})_{jj}](k, M).$$

D'après la preuve du Théorème 4.15, nous savons que $\sqrt{M}[\widehat{\psi}_{ij}(k, M) - \psi_{ij}(k)]$ a la même limite en distribution comme $\sqrt{M}[\psi * \Delta q * \psi]_{ij}(k, M)$ quand M tend vers l'infini. En écrivant

$$\begin{aligned}
\Delta q_{ij}(\cdot) &= \frac{1}{N_i(M)} \sum_{l=1}^{N(M)} [\mathbb{1}_{\{j_{l-1}=i, J_l=j, X_t=\cdot\}} - q_{ij}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{t-1}=i\}}], \\
\Delta Q_{ij}(\cdot) &= \frac{1}{N_i(M)} \sum_{l=1}^{N(M)} [\mathbb{1}_{\{j_{l-1}=i, J_l=j, X_t \leq \cdot\}} - Q_{ij}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{t-1}=i\}}]
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{u=1}^s \psi_{ij} * \Delta Q_{ju} = \sum_{u=1}^s \sum_{n=1}^s \delta_{nj} \psi_{ij} * \Delta Q_{nu},$$

on déduit $\sqrt{M} [\hat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k)]$ a la même limite de distribution que

$$\begin{aligned} & \sqrt{M} \left\{ \sum_{i=1}^s \sum_{u=1}^s [(1 - H_j) * \psi_{il} * \psi_{uj} * \Delta q_{lu}](k) - \sum_{u=1}^s \psi_{ij} * \Delta Q_{ju}(k) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{N(M)} \sum_{l=1}^s \sum_{u=1}^s \frac{M}{N_l(M)} \\ & \quad \times [-\delta_{ij} \psi_{ij} * (\mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, J_n=u, X_n \leq \cdot\}} - Q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}})(k) \\ & \quad + (1 - H_j) * \psi_{il} * \psi_{uj} * (\mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, J_n=u, X_n = \cdot\}} - q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}})(k)]. \end{aligned}$$

Puisque $N_l(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{a.s.} 1/\mu_{ll}$ (Lemme 4.5), en utilisant le Théorème de Slutsky on obtient que $\sqrt{M} [\hat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k)]$ a la même limite de distribution que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{N(M)} \sum_{l=1}^s \sum_{u=1}^s \mu_{ll} [-\delta_{ij} \psi_{ij} * (\mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, J_n=u, X_n \leq \cdot\}} - Q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}}) \\ & \quad + (1 - H_j) * \psi_{il} * \psi_{uj} * (\mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, J_n=u, X_n = \cdot\}} - q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}})](k) \\ &= \sqrt{\frac{N(M)}{M}} \frac{1}{\sqrt{N(M)}} \sum_{n=1}^{N(M)} Y_n, \end{aligned}$$

où les variables aléatoires Y_n sont définies par

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{l=1}^s \sum_{u=1}^s \mu_{ll} [-\delta_{ij} \psi_{ij} * (\mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, J_n=u, X_n \leq \cdot\}} - Q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}})(k) \\ & \quad + (1 - H_j) * \psi_{il} * \psi_{uj} * (\mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, J_n=u, X_n = \cdot\}} - q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}})(k)] \end{aligned}$$

Comme nous l'avons fait précédemment, soit $\mathcal{F}_n$ la σ -algèbre $\mathcal{F}_n = \sigma(J_l, X_l, l \leq n)$, avec Y_n , $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le fait que pour tout $l, u \in E$ et $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, J_n=u, X_n \leq \cdot\}} - q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{j_{n-1}=l, J_n=u, X_n = \cdot\}} - Q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

En remarquant que $\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$, on déduit que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une différence $\mathcal{F}_n$ -martingale et $(\sum_{l=1}^n Y_l)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$ -martingale.

Comme $N(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 1/\nu(l)\mu_{ll}$, en utilisant le TCL pour les martingales (Théorème 1.4) et le Théorème d'Anscombe (Théorème 1.5), on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{N(M)}} \sum_{n=1}^{N(M)} Y_n \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\sigma^2 > 0$ est donné par

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}(Y_m^2 | \mathcal{F}_{m-1}).$$

En utilisant à nouveau le fait que $N(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 1/\nu(l)\mu_l$, nous obtenons

$$\sqrt{M}[\hat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2/\nu(l)\mu_u) \quad (4.23)$$

Pour obtenir la variance asymptotique $\sigma_P^2(i, j, k)$, nous devons calculer Y_l^2 , $\mathbb{E}(Y_l^2 | \mathcal{F}_{l-1})$ et σ^2 . En utilisant la Proposition 1.7, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbb{1}_{\{J_{m-1}=l\}} = \nu(l)$$

et après le calcul nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{l=1}^s \mu_{ll}^2 \nu(l) \left\{ \sum_{u=1}^s [\delta_{lj} \Psi_{ij} - (\mathbf{1} - H_j) * \psi_{il} * \psi_{uj}]^2 * q_{lu}(k) \right. \\ &\quad \left. - [\delta_{lj} \psi_{ij} * H_l(k) - \sum_{u=1}^s (\mathbf{1} - H_j) * \psi_{il} * \psi_{uj} * q_{lu}(k)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

En combinant ce dernier résultat avec la convergence (4.23), nous déduisons la loi limite $\sqrt{M}[\hat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k)] \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_P^2(i, j, k))$, où $\sigma_P^2(i, j, k)$ est donnée par l'équation (4.22). ■

Chapitre 5

Application et conclusion

Ce dernier chapitre est consacré à une caractéristique très importante de la sureté de fonctionnement des composants d'un système appelée la fiabilité. Nous nous intéressons à l'inférence statistique de cette mesure. Dans ce contexte, nous construisons un estimateur empirique de cette mesure, et nous établissons sa convergence presque sûre ainsi que sa loi limite. Les résultats théorique obtenus sur la fiabilité sont illustrés à travers un exemple numérique. Nous achevons ce chapitre par un exemple numérique.

5.1 Concept général de la fiabilité et les mesures associées

La fiabilité d'un composant ou d'un système est sa capacité à fonctionner correctement sur une période de temps spécifiée. D'un point de vue mathématique, la fiabilité, $R(t)$, d'un système $\mathcal{S}$ peut être exprimée par : $R(t) = \mathbb{P}(\mathcal{S} \text{ fonctionne très bien dans } [0, t])$. Soit X la variable aléatoire représentant la durée de vie ou le temps jusqu'à la défaillance d'un système ; et soit F la fonction de distribution de la variable X . Alors la fiabilité du système au temps t est

$$R(t) = P(X > t) = 1 - F(t).$$

Il est courant de supposer que le système fonctionne correctement à l'instant $t = 0$ (c'est-à-dire, $R(0) = 1$). Il est possible de tenir compte du cas où le système est défectueux au départ, de sorte que $F(0) = \mathbb{P}(X = 0) = p > 0$. Alors $F(t)$ est une distribution de mélange de masse à l'origine égale à p . Nous supposons qu'aucun système ne peut

fonctionner indéfiniment sans défauts, donc limitée : $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$. Ainsi, $R(t)$ est une fonction monotone continue non croissante avec des valeurs comprises entre 0 et 1 dans l'intervalle $[0, \infty)$. Si nous notons, dans le cas général $f(t)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire X , nous avons $R(t) = \int_t^\infty f(t)dt$. D'un point de vue graphique, la fiabilité représente l'aire sous la courbe $f(x)$ de $x = t$ à l'infini (Figure 5.1).

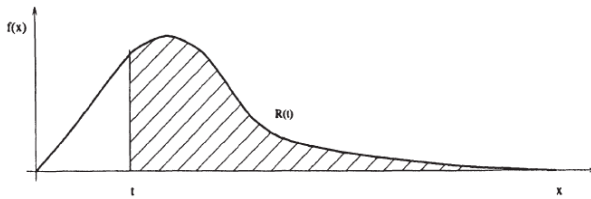


FIGURE 5.1 – Graphe de la fiabilité.

Comme il a été déjà mentionné, la définition de la fiabilité, $R(t)$, est la probabilité qu'aucune défaillance ne se soit produite pendant toute la période $[0, t]$.

Nous pouvons définir une autre mesure appelée disponibilité. La disponibilité instantanée ou ponctuelle (également appelée disponibilité transitoire) d'un système, généralement notée $A(t)$, est définie comme la probabilité que le système fonctionne à l'instant t , quel que soit le nombre de fois qu'il a échoué et a été réparé dans l'intervalle $[0, t]$. Si un système n'est pas réparable, la définition de $A(t)$ est équivalente à celle de la fiabilité, $R(t)$; ceci explique le fait que les notions de fiabilité et de disponibilité sont souvent confondues. La forme typique de la fonction $A(t)$ pour un système réparable est illustrée à la Figure 5.2.

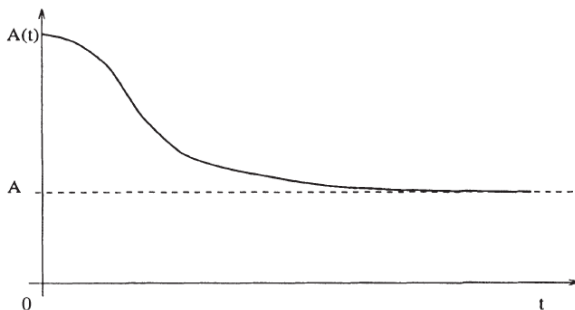


FIGURE 5.2 – Une fonction de disponibilité typique.

Elle est vaut 1 à l'instant initial, puis décroît en tendant vers une valeur limite constante dite de disponibilité stationnaire. La disponibilité en régime permanent est une mesure plus facile à calculer, mais elle manque d'informations importantes qui sont capturées par la disponibilité transitoire, en particulier pour des valeurs relativement petites de t .

Une autre mesure très importante en fiabilité est le taux de défaillance instantané du système $h(t)$ (le taux de hasard). Si $h(t)$ est une fonction croissante avec $t \geq 0$, la fonction de distribution correspondante $F(t)$ est appelée distribution IFR (increasing failure rate). Si le taux de défaillance $h(t)$ est une fonction qui décroît au fur et à mesure que le composant vieillit, la fonction de distribution correspondante est appelée distribution DFR (Decreasing Failure Rate). Si la fonction de taux d'échec est indépendante de l'âge, la distribution est CFR (constant failure rate), voir la Figure 5.3.

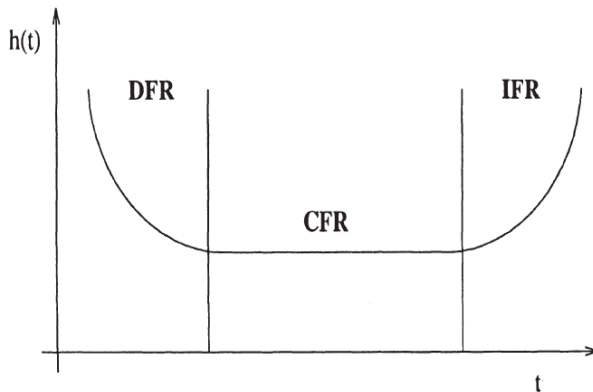


FIGURE 5.3 – Taux de défaillance.

Dans la section suivante nous présentons la fiabilité lorsque l'évolution temporelle du matériel est décrite par une chaîne semi-markovienne, et nous limitons notre étude théorique et pratique sur cette cruciale mesure.

5.2 Fiabilité des systèmes via les chaînes semi-markoviennes à temps discret

Considérons un système (ou un composant) $\mathcal{S}$ dont les états possibles au cours de son évolution dans le temps sont $E = \{1, \dots, s\}$. Soit $U = \{1, \dots, s_1\}$ le sous-ensemble de

états opérationnels du système (les états up) et par $D = \{s_1 + 1, \dots, s\}$ le sous-ensemble des états de défaillance (les états down), avec $0 < s_1 < s$ (évidemment, $E = U \cup D$ et $U \cap D = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$). On peut penser aux états de U comme différents modes de fonctionnement ou niveaux de la performance du système, alors que les états de D peuvent être vus comme des défaillances du système avec différents modes.

Nous nous intéressons à l'étude de la théorie de la fiabilité d'un système semi-markovien à temps discret $\mathcal{S}$. Par conséquent, nous supposons que l'évolution dans le temps du système est gouverné par une chaîne semi-markovienne $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à espace d'états E . Le système commence à fonctionner à l'instant 0 et l'état du système est donné à chaque instant $\{k \in \mathbb{N}\}$ par (Z_k) : l'événement $\{Z_k = i\}$, pour un certain $i \in U$, signifie que le système $\mathcal{S}$ est en mode de fonctionnement i à l'instant k , alors que $\{Z_k = j\}$, pour un certain $(j \in D)$, signifie que le système n'est pas opérationnel à l'instant k à cause du mode de défaillance j ou que le système est sous le mode de réparation j .

Selon la partition de l'espace d'états dans les états (up) et (down), nous allons partitionner les vecteurs, les matrices ou les fonctions matricielles avec lesquelles nous travaillons.

En ce qui concerne α , ν , π , p , $q(k)$, $f(k)$, $\mathbf{Q}(k)$, $F(k)$, $H(k)$ et $\mathbf{m}$, nous considérons la partition matricielle naturelle correspondant à la partition d'espace d'état U et D . Par exemple, nous avons :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} U \\ D \end{matrix}, \quad \mathbf{q}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{11} & \mathbf{q}_{12} \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{q}_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} U \\ D \end{matrix},$$

$$\mathbf{H}(K) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1(k) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2(k) \end{pmatrix} \begin{matrix} U \\ D \end{matrix},$$

où $H_1(k) = \text{diag}(H_i(k))_{i \in U}$, et $H_2(k) = \text{diag}(H_i(k))_{i \in D}$.

Pour $\psi(k)$ et $P(k)$ nous considérons les restrictions à $U \times U$ et $D \times D$ induite par les restrictions correspondantes du noyau semi-markovien $q(k)$. Pour être plus précis, rappelons que la fonction matricielle ψ était exprimée en termes du noyau semi-Markov comme suit (voir les Équations (3.7) et (3.8)) :

$$\psi(k) = (\delta - q)^{(-1)}(k) = \sum_{n=0}^k q^{(n)}(k)$$

et que la matrice de transition semi-markovienne P a été donnée dans l'équation (3.9) comme suit

$$p(k) = \psi * (I - H)(k) = (\delta I - q)^{(-1)} * (I - \text{diag}(Q.1))(k), k \in \mathbb{N}$$

En utilisant la partition donnée ci-dessus pour le noyau q , on note :

- $\psi_{11}(k) = (\delta \mathbf{I} - \mathbf{q}_{11})^{(-1)}(k) = \sum_{n=0}^k \mathbf{q}_{11}^{(n)}(k)$
- $\psi_{22}(k) = (\delta \mathbf{I} - \mathbf{q}_{22})^{(-1)}(k) = \sum_{n=0}^k \mathbf{q}_{22}^{(n)}(k)$
- $\mathbf{P}_{11}(k) = \psi_{11} * (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1)(k) = (\delta \mathbf{I} - \mathbf{q}_{11})^{(-1)} * (\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{Q}.1)_{11})(k)$
- $\mathbf{P}_{22}(k) = \psi_{22} * (\mathbf{I} - \mathbf{H}_2)(k) = (\delta \mathbf{I} - \mathbf{q}_{22})^{(-1)} * (\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{Q}.1)_{22})(k)$

Définition 5.1. (Fiabilité) Considérons un système $\mathcal{S}$ commençant à fonctionner au temps $t = 0$. La fiabilité de $\mathcal{S}$ au temps $k \in \mathbb{N}$ est la probabilité que le système ait fonctionné sans défaillance pendant la période $[0, k]$.

Soit T_D le premier temps de passage dans le sous-ensemble D , appelé la durée de vie du système, c'est-à-dire,

$$T_D = \inf \{n \in \mathbb{N}; Z_n \in D\} \text{ et } \inf \emptyset = \infty$$

La fiabilité au temps $k \in \mathbb{N}$ d'un système semi-markovien à temps discret est

$$R(k) = \mathbb{P}(T_D > k) = \mathbb{P}(Z_n \in U, n = 0, \dots, k)$$

Pour tout état $i \in U$ et $k \in \mathbb{N}$, on introduit :

- $R_i(k) = \mathbb{P}(T_D > k | Z_0 = i)$ est la fiabilité conditionnelle du système à l'instant k , étant donné qu'il commence à l'état $i \in U$
- $\mathbf{R}(k) = (R_1(k), \dots, R_{s_1}(k))^T$ est le vecteur colonne de toutes les fiabilités conditionnelles.

Notons que la fiabilité $R(k)$, les fiabilités conditionnelles $R_i(k)$ et le vecteur de fiabilité $\mathbf{R}$ sont liés par

$$R(k) = \sum_{i \in U} \mathbb{P}(Z_0 = i) \mathbb{P}(T_D > k | Z_0 = i) = \sum_{i \in U} \alpha_i R_i(k) = \alpha_1 R(k) \quad (5.1)$$

Proposition 5.1. *La fiabilité d'un système semi-markovien à temps discret au temps $k \in \mathbb{N}$ est donnée par*

$$R(k) = \alpha_1 P_{11}(k) \mathbf{1}_{s1} = \alpha_1 \psi_{11} * (I - H_1)(k) \mathbf{1}_{s1} \quad (5.2)$$

Preuve. Nous voulons trouver une équation de renouvellement de Markov qui a R comme son solution unique. On procède comme dans la preuve de la Proposition 3.5. Pour tout état up $i \in U$ et tout entier positif $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$R_i(k) = \mathbb{P}_i(T_D > k) = \mathbb{P}_i(T_D > k, S_1 > k) + \mathbb{P}_i(T_D > k, S_1 \leq k) \quad (5.3)$$

Tout d'abord, notons que

$$\mathbb{P}_i(T_D > k, S_1 > k) = 1 - H_i(k) \quad (5.4)$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(T_D > k, S_1 > k) &= \mathbb{E}_i[\mathbb{P}_i(T_D > k, S_1 > k | S_1)] \\ &= \mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{\{S_1 \leq k\}} \mathbb{P}_{Z_{S_1}}(T_D > k - S_1)] \\ &= \sum_{j \in U} \sum_{m=1}^k \mathbb{1}_{\{m \leq k\}} \mathbb{P}_j(T_D > k - m) \mathbb{P}_i(J_1 = j, S_1 = m) \\ &= \sum_{j \in U} \sum_{m=1}^k q_{ij}(m) R_j(k - m) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pour tout état haut $i \in U$ et tout entier positif $k \in \mathbb{N}$, les équations (5.3), (5.4) et (5.5) donnent l'équation de renouvellement de Markov associée à R_i

$$R_i(k) = 1 - H_i(k) + \sum_{j \in U} \sum_{m=1}^k q_{ij}(m) R_j(k - m) \quad (5.6)$$

L'équation (5.6) peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$R(k) = (I - \mathbf{H}_1)(k) \mathbf{1}_{S1} + \mathbf{q}_{11} * \mathbf{R}(k)$$

En résolvant cette équation de renouvellement de Markov, on obtient

$$R(k) = (\delta I - q_{11})^{(-1)} * (I - H_1)(k) \mathbf{1}_{S1}$$

Ainsi, à partir de l'équation (5.1), nous obtenons le résultat souhaité. ■

5.2.1 Estimation non paramétrique de la fiabilité et Propriétés asymptotiques

Dans cette section, nous présentons un estimateur pour la fiabilité et nous étudions ses propriétés asymptotiques. Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 4, la normalité asymptotique des estimateurs peut être prouvée par deux techniques différentes, à savoir, le TCL pour les chaînes de renouvellement de Markov ou le TCL de Lindeberg-Lévy pour les martingales. Nous choisissons ici d'utiliser la deuxième méthode.

Comme nous l'avons vu, la fiabilité est exprimée en fonction du noyau semi-markovien q et de ses puissances au sens de la convolution. Par conséquent, l'estimateur de la fiabilité est immédiatement obtenu en utilisant les estimateurs proposés au Chapitre 4.

En utilisant l'équation (5.2), nous avons l'estimateur suivant pour la fiabilité du système

$$\begin{aligned}\hat{R}(k, M) &= \alpha_1 \cdot \hat{P}_{11}(k, M) \cdot \mathbf{1}_{s_1} \\ &= \alpha_1 [\hat{\psi}(\cdot, M) * (\mathbf{I} - \text{diag}(\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, M) \cdot \mathbf{1})_{11})](k) \mathbf{1}_{s_1}\end{aligned}$$

où les estimateurs $\hat{\mathbf{Q}}$ et $\hat{\psi}$ sont définis respectivement dans (4.12) et (4.13).

Nous établissons dans le théorème suivant, la convergence presque sûre ainsi que la normalité asymptotique de l'estimateur de fiabilité.

Théorème 5.2. *Pour tout entier positif arbitraire fixé $k \in \mathbb{N}$, l'estimateur de la fiabilité d'un système semi-markovien à temps discret à l'instant k est presque sûrement convergent et asymptotiquement normal, en ce sens que*

$$\hat{R}(k, M) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} R(k)$$

et

$$|\hat{R}(k, M) - R(k)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_R^2(k)),$$

avec la variance asymptotique

$$\begin{aligned}\sigma_R^2 &= \sum_{i=1}^s \mu_{ii} \left\{ \sum_{j=1}^s [D_{ij}^U - \mathbb{1}_{\{i \in U\}} \sum_{t \in U} \alpha_t]^2 * q_{ij}(k) \right. \\ &\quad \left. - [\sum_{j=1}^s (D_{ij}^U * q_{ij} - \mathbb{1}_{\{i \in U\}} \sum_{t \in U} \alpha_t \psi_{ti} * Q_{ij})]^2(k) \right\},\end{aligned}\tag{5.7}$$

où

$$D_{ij}^U = \sum_{n \in U} \sum_{r \in U} \alpha_n \psi_{ni} * \psi_{jr} * (I - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1}))_{rr}$$

Preuve. La convergence forte de l'estimateur de fiabilité est obtenue à partir de la convergence forte de l'estimateur de la fonction de transition semi-markovienne $\widehat{P}_{ij}(k, M)$ (Théorème 4.12) et de l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |\widehat{R}(k, M) - R(k)| &= \left| \sum_{i \in U} \sum_{j \in U} \alpha_i \widehat{P}_{ij}(k, M) - \sum_{i \in U} \sum_{j \in U} \alpha_i P_{ij}(k, M) \right| \\ &\leq \sum_{i \in U} \sum_{j \in U} \alpha_i |\widehat{P}_{ij}(k, M) - P_{ij}(k, M)|. \end{aligned}$$

La preuve de la normalité asymptotique est similaire à la preuve des Théorèmes 4.15 et 4.16. En effet, en utilisant la preuve du Théorème 4.15, nous pouvons montrer que $\sqrt{M}|\widehat{R}(k, M) - R(k)|$ a la même loi limite que

$$\begin{aligned} &\sqrt{M} \sum_{r=1}^s \sum_{l=1}^s \left[\sum_{i \in U} \sum_{j \in U} \alpha_i \psi_{ir} * \psi_{lj} * (I - \text{diag}(Q \cdot \mathbf{1}))_{jj} \right] * \Delta q_{rl}(k) \\ &\quad - \sqrt{M} \sum_{i \in U} \sum_{j \in U} \alpha_i \sum_{l=1}^s \psi_{ij} * \Delta Q_{jl}(k) \\ &= \sqrt{M} \sum_{r=1}^s \sum_{l=1}^s D_{rl}^U * \Delta q_{rl}(k) - \sqrt{M} \sum_{r \in U} \sum_{l=1}^s \left(\sum_{n \in U} \alpha_n \psi_{nr} \right) * \Delta Q_{rl}(k) \end{aligned}$$

Puisque $N_i(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 1/\mu_{ll}$, le terme $\sqrt{M}|\widehat{R}(k, M) - R(k)|$ a la même loi limite que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{N(M)} \sum_{r=1}^s \sum_{l=1}^s \mu_{rr} [D_{rl}^U * (\mathbb{1}_{\{J_{n-1}=r, J_n=l, X_n=\cdot\}} - q_{rl}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=r\}})(k) \\ &\quad - \mathbb{1}_{\{r \in U\}} \left(\sum_{t \in U} \alpha_t \psi_{tr} \right) * (\mathbb{1}_{\{J_{n-1}=r, J_n=l, X_n \leq \cdot\}} - Q_{rl}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=r\}})(k)] \\ &= \sqrt{\frac{N(M)}{M}} \frac{1}{N(M)} \sum_{n=1}^{N(M)} Y_n, \end{aligned}$$

où les variables aléatoires Y_n sont définies par

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{r=1}^s \sum_{l=1}^s \mu_{rr} [D_{rl}^U * (\mathbb{1}_{\{J_{n-1}=r, J_n=l, X_n=\cdot\}} - q_{rl}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=r\}})(k) \\ &\quad - \mathbb{1}_{\{r \in U\}} \left(\sum_{t \in U} \alpha_t \psi_{tr} \right) * (\mathbb{1}_{\{J_{n-1}=r, J_n=l, X_n \leq \cdot\}} - Q_{rl}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=r\}})(k)]. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{F}_n$ la σ -algèbre $\mathcal{F}_n := \sigma(J_l, X_l; l \leq n)$, $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le fait que pour tout $l, u \in \mathbb{E}$ et $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l, J_n=u, X_n=k\}} - q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l, J_n=u, X_n \leq k\}} - Q_{lu}(\cdot) \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=l\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

on obtient $\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$. Ainsi, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une différence $\mathcal{F}_n$ -martingale et $(\sum_{l=1}^n Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$ -martingale. Comme $N_i(M)/M \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p.s.} 1/\nu(l) \mu_{ll}$ et

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(Y_n^2 \mathbb{1}_{\{|Y_l| > \epsilon \sqrt{n}\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pour tout $\epsilon > 0$, en utilisant le TCL des martingales (Théorème 1.4) et le Théorème d'Anscombe (Théorème 1.5) on obtient

$$|\hat{R}(k, M) - R(k)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2 / (\nu(r) \mu_{rr}))$$

avec

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}(Y_m^2 | \mathcal{F}_{m-1}) \quad (5.8)$$

Après avoir calculé Y_m^2 , $\mathbb{E}(Y_m^2 | \mathcal{F}_{m-1})$ et pris la limite dans (5.8), on obtient que $\sqrt{M}[\hat{R}(k, M) - R(k)]$ converge en loi, quand M tend à l'infini vers une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $\sigma_R^2(k)$ donnée par (5.7).

5.2.2 Exemple numérique

Dans cette partie, nous appliquons les résultats précédents à une CSM à temps discret à trois états décrit dans la Figure 5.4.

Considérons que l'espace d'états $E = \{1, 2, 3\}$ est partitionné à l'ensemble d'états (up) $U = \{1, 2\}$ et l'ensemble d'un état (down) $D = \{3\}$. Le système est défini par la distribution initiale $\alpha = (1, 0, 0)$, la matrice de probabilité de transition p de la chaîne de Markov immergée $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0.05 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par les distributions conditionnelles du temps de séjour :

$$f(k) = \begin{pmatrix} 0 & f_{12}(k) & 0 \\ f_{21}(k) & 0 & f_{23}(k) \\ f_{31}(k) & 0 & 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}$$

Nous considérons les distributions suivantes pour le temps de séjour conditionnels :

- f_{12} est la loi géométrique définie par
 - . $f_{12}(0) = 0$
 - . $f_{12}(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1$
 où nous prenons $p = 0,8$.
- $f_{21} = W_{q_1, b_1}$, $f_{23} = W_{q_2, b_2}$ et $f_{31} = W_{q_3, b_3}$ sont des lois de Weibull du premier type en temps discret, définies par
 - . $W_{q,b}(0) = 0,$
 - . $W_{q,b}(k) = q^{(k-1)b} - q^{kb}, \quad k \geq 1,$
 où nous prenons $q_1 = 0,3$, $b_1 = 0,5$, $q_2 = 0,5$, $b_2 = 0,7$, $q_3 = 0,6$, $b_3 = 0,9$.

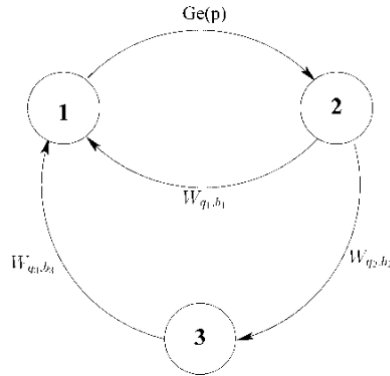


FIGURE 5.4 – Un système semi-markovien à temps discret à trois états.

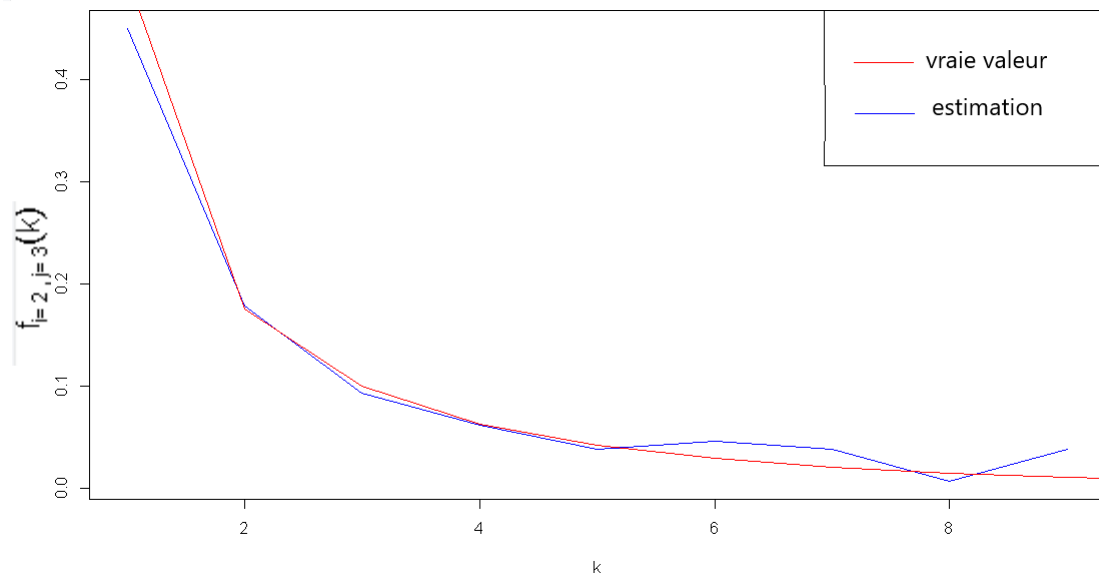


FIGURE 5.5 – Distribution du temps de séjour pour l'état actuel $i="2"$ et le prochain état $j="3"$.

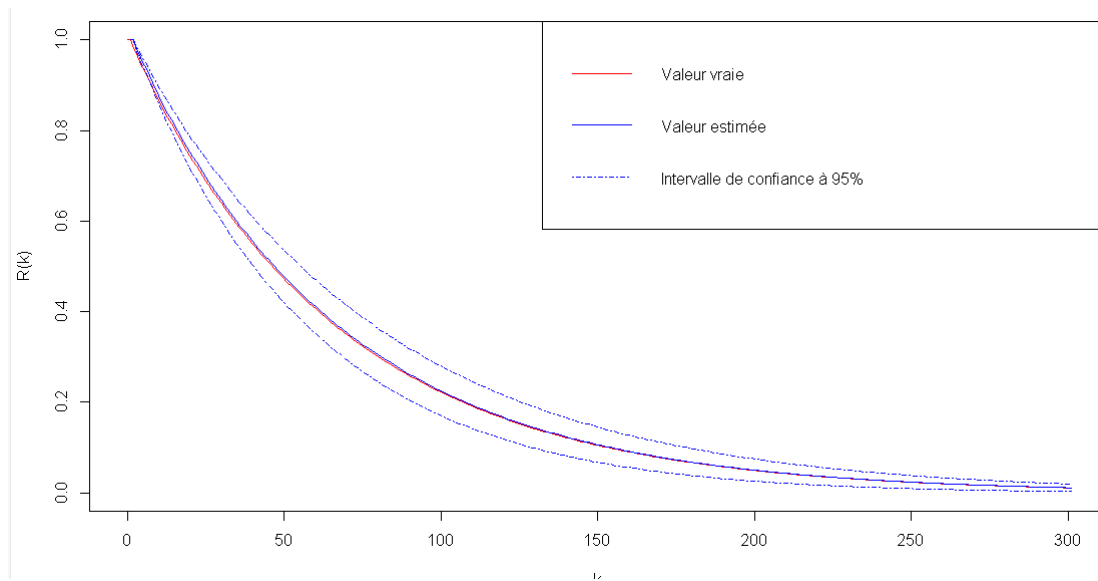


FIGURE 5.6 – Estimateur de la fiabilité : intervalle de confiance au niveau 95 .

La vraie valeur de la fiabilité, son estimateur empirique et l'intervalle de confiance au niveau 95 sont donnés dans la Figure 5.6, pour un temps total d'observation $M = 5000$. Remarquons que l'intervalle la confiance localise très bien la vraie valeur de la fiabilité.

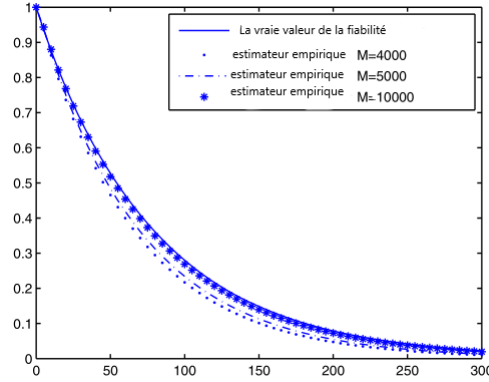


FIGURE 5.7 – Estimation empirique de la fiabilité.

La Figure 5.7 donne une comparaison entre les estimateurs de la fiabilité obtenus pour différentes tailles d'échantillon ($M = 4000$, $M = 5000$ et $M = 10000$). Nous constatons que, lorsque M augmente, les estimateurs se rapprochent de la vraie valeur.

5.3 Conclusion

L'étude des chaînes semi-markoviennes permet d'étudier des processus dont le temps de séjour dans un état peut suivre une loi discrète quelconque, mais qui gardent une évolution de type markovienne (processus sans mémoire). On peut alors choisir les lois discrètes qui s'adaptent le mieux à l'expérience réelle. Nous avons présenté dans ce mémoire, les définitions et les propriétés de base liées à un processus semi-markovien à espace d'état discret.

Afin de se familiariser avec le domaine, nous avons préféré de commencer ce travail par donner une vision globale sur les chaînes de Markov. Ensuite, nous avons défini la chaîne semi-markovienne, ainsi que les différentes mesures associées. Nous nous sommes concentrés sur la chaîne SM avec un espace d'états fini, via des noyaux semi-markoviens, des convolutions de fonctions matricielles, des chaînes de renouvellement (J, S) et de nombreuses relations utiles qu'ils vérifient. Le quatrième chapitre a été consacré à l'inférence statistique des chaînes SM. Plus précisément, nous avons détaillé la construction des esti-

mateurs empiriques des différentes mesures liées aussi bien à la chaîne de renouvellement markovienne que la chaîne SM. Dans ce même chapitre, nous avons établi la convergence presque sure et la normalité asymptotique des estimateurs construits. Le dernier chapitre a été destiné à utilisation des processus semi-markoviens dans les problèmes de fiabilité. Quelques résultats statistiques concernant l'estimation de la fiabilité sont également établis. Tout cela montre que les processus semi-markoviens sont bien adaptés pour étudier les indicateurs de fiabilité. Ce travail a été achevé par un exemple numérique montrant l'efficacité des modèles semi-markoviens dans les applications de la fiabilité.

Bibliographie

- [1] C. Ayhar, V.S. Barbu, F. Mokhtaria, and S. Rahmani. On the asymptotic properties of some kernel estimators for continuous-time semi- Markov processes. *Journal of Nonparametric Statistics*, (2022), **34**, 1–21.
- [2] Barbu, V.S. ; Boussemart, M. ; Limnios, N. Discrete-time semi-Markov model for reliability and survival analysis. *Commun. Stat. Theory Methods* (2004), **33**, 2833–2868.
- [3] V. Barbu and N. Limnios. Empirical estimation for discrete time semi-Markov processes with applications in reliability. *J. Nonparametr.Statist.* (2006).
- [4] V. Barbu and N. Limnios. *Semi-Markov chains and Hidden Semi Markov Models toward Applications* vol.191, Springer, New York.(2008).
- [5] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York, 2nd edition, (1999).
- [6] A. Gut. *Stopped Random Walks. Limit Theorems and Applications*, volume 5 of *Applied Probability*. A Series of the Applied Probability Trust. Springer, New York, (1988).
- [7] P. Hall, C.C. Heyde, *Martingale Limit Theory and its Applications*, Academic Press, (1980).
- [8] I. Bailleul ismael. (2013). bailleul@univ-rennes1.fr. GNU FDL Copyleft.
- [9] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley, New York, 3rd edition, (1995). **5**, 268-269
- [10] Lévy P. Processus semi-markoviens, in *Proc. Int. Congr. Math.* (1956), **3**, 416–426.

- [11] N. Limnios, A functional central limit theorem for the empirical estimator of a semi-Markov kernel, *J. Nonparametr. Stat.* (2004), **16**, 13–18.
- [12] N. Limnios, G. Oprisan, Semi-Markov Processes and Reliability, in : *Statistics for Industry and Technology*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, (2001).
- [13] Ouhbi, B., Limnios, N. Nonparametric reliability estimation of semi-Markov processes. *J. Stat. Plan. Inference* (2003), **109**, 155–165.
- [14] Pyke, R. Markov renewal processes : definitions and preliminary properties, *Ann. Math. Statist.* (1961), **32**, 1231–1242.
- [15] Pyke, R. Markov renewal processes with finitely many states, *Ann. Math. Statist.* **32**, (1961), 1243–1259.
- [16] Pyke, R. and Schaufele, R. Limit theorems for Markov renewal processes. *Ann. Math. Statist.* (1964), **35**, 1746–1764.
- [17] Howard, R. A. *Dynamic probabilistic systems : Markov models* (2012), **1**. Courier Corporation.
- [18] Smith W.L. Regenerative stochastic processes, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, (1955) **232**, 6–31.