N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Saida- Dr.Moulay Taher
Faculté des Sciences

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Filière : Mathématiques
Spécialité : Géométrie différentielle

Par

ADDAD Khadidja

Thème :

Les applications harmoniques et biharmoniques relatives aux $\alpha-$connexions sur les variétés statistiques

Thèse soutenue le 01 juin 2022 devant le jury composé de :

N°	Nom et prénom	Grade	Etablissement	Qualité
01	Rahmani Saadia	Prof	Université Dr Moulay Taher de Saida	Président
02	Ouakkas Seddik	Prof	Université Dr Moulay Taher de Saida	Rapporteur
03	M.Ahmed Cherif	Prof	Université De Mascara	Examinateur
04	Zegga Kaddour	MCA	Université De Mascara	Examinateur
05	Zoubir Hanifi	Prof	E.N.P. Maurice Audin d'Oran	Examinateur

Remerciements

Dans ces lignes où il m'est donné l'occasion de remercier les personnes qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre dans l'élaboration de mon travail de thèse, je voudrais commencer par exprimer toute ma gratitude envers le Prof Ouakkas Seddik. Après m'avoir proposé ce beau sujet et accepté de diriger ma thèse, il a toujours été présent pour guider mon cheminement. Grâce à son écoute, son savoir et son conseil, j'ai pu être formée à la recherche en mathématiques et parvenir, au bout de cet exercice de cinq ans, à achever la rédaction de ce manuscrit. Ma thèse n'aurait évidemment pas la même couleur si Prof Seddik n'avait pas été là pour m'aider, et je lui en suis infiniment reconnaissante. Je tiens ensuite à remercier Mme Rahmani Saadia qui a accepté de présider le jury et Messieurs M.Ahmed Cherif, Zegga Kaddour et Zoubir Hanifi d'avoir accepté de rapporter ma thèse et de m'avoir communiqué leurs précieux commentaires et suggestions sur mon travail. Merci infiniment à mon frère Dr Djelloul Djabbouri qui m'a proposé de suivre la recherche à l'université de Saida.

Dédicaces

Je dédie cette thèse particulièrement à mes parents qui ne sont plus ici. Ma mère qui a tout sacrifié pour moi, qui m'a appris que les bonnes choses dans la vie n'arrivent pas facilement, qui m'a toujours soutenu et conseillé, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçoit à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mon éternelle gratitude. Mon père, a ce bel homme qui a toujours était et restera toujours mon exemple, qui a sacrifié tout ce qu'il pouvait pour nous voir heureux, je te remercie pour les valeurs nobles et pour ton éducation. Je pense aussi à mon fils unique Abdel Khalek qui m'a encouragé plus durant ces dernières années. Il me tient à coeur d'exprimer ma gratitude envers mes frères et sœurs qui m'ont sans cesse soutenu dans mes efforts et m'ont appris à toujours essayer de faire du mieux possible.

Résumé

L'objectif de notre travail se situe dans le cadre de l'étude des applications harmoniques et biharmoniques entre variétés statistiques, de définir les α-connexions et de l'étude de l'harmonicité et la biharmonicité relativement aux variétés statistiques α-conformément équivalentes. l'étude et l'existence des applications biharmoniques est plus difficile que celle des applications harmoniques. Une première question naturelle est de savoir quand est-ce qu'une application biharmonique est harmonique ? Il était alors très intéressant de construire des applications biharmoniques non-harmoniques alors, on a pu construire de nouveaux exemples d'applications biharmoniques en particulier sur l'espace euclidien.

Mot clés : Applications harmoniques, Applications biharmoniques, α-Connexions, Variétés statistiques α-Conformément équivalentes.

Abstract

The objective of our work is within the framework of the study of harmonic and biharmonic applications between statistical manifolds, to define the α-connections and the study of harmonicity and biharmonicity relative to statistical manifolds α-according to equivalents. The study and existence of biharmonic applications is more difficult than that of harmonic applications. A first natural question is when is a biharmonic application harmonic? It was then very interesting to build non-harmonic biharmonic applications then, we were able to build new examples of biharmonic applications in particular on Euclidean space.

Keywords : Harmonic applications, Biharmonic applications, α-Connections, Statistical varieties α-Correspondingly equivalent.

ملخص

الهدف من عملنا هو في إطار دراسة التطبيقات التوافقية وثنائية التوافقية بين الأصناف الإحصائية,لتحديد α اتصالات ودراسة التوافقية وثنائية التوافقية بالنسبة إلى الأصناف الإحصائية α- مكافئة التطابق. دراسة ووجود التطبيقات ثنائية التوافقية أكثر صعوبة من التطبيقات التوافقية. السؤال الطبيعي الأول هو معرفة متى تكون التطبيقات ثنائية التوافقية توافقية ؟ كان من المثير للإهتمام بعد ذلك إعطاء أمثلة على تطبيقات ثنائية توافقية غير توافقية, اذن تمكنا من بناء أمثلة جديدة للتطبيقات ثنائية التوافقية على وجه الخصوص في الفضاء الإقليدي.

الكلمات المفتاحية: تطبيقات توافقية, تطبيقات ثنائية توافقية, α- اتصالات, أصناف إحصائية α- المكافئة التطابق.

Historique

Les notions d'applications harmoniques et biharmoniques sont définies sur des variétés riemanniennes munies de leurs connexions de Levi-Civita. Il est très intéressant de définir ces deux notions sur des variétés riemanniennes munies d'une connexion affine sans torsion et symétrique (non nécessairement de Levi-Civita). Cette thèse rentre dans ce cadre où on considère des variétés statistiques et on essaie de définir l'harmonicité et la biharmonicité sur ce type de variétés. Dans ce contexte, on note le travail de FATMA MUAZZEZ SIMSIR, intitulé « A NOTE ON HARMONIC MAPS OF STATISTICAL MANIFOLDS » où elle montre un résultat d'existence et d'unicité pour une classe d'applications d'une variété statistique dans une variété riemannienne dans une classe d'homotopie donnée lorsque la variété riemannienne est de courbure négative sous une condition de non-trivialité topologique globale, elle montre également qu'en raison de la structure dualistique de la variété de domaine, le résultat est toujours valable en coordonnées duales. On cite aussi le travail de Keiko Uohashi intitulé « Harmonic maps relative to α-connections on statistical manifolds » où l'auteur a étudié les applications harmoniques relatives aux α -connexions, mais pas nécessairement les applications harmoniques standards. Une application harmonique standard est définie par la première variation de la fonctionnelle énergie d'une application. Une application harmonique relative à une α-connexion est définie par une équation similaire à une première équation variationnelle, bien qu'elle ne soit pas induite par la première variation de la fonctionnelle d'énergie standard. Une partie de cette thèse est une généralisation de ces notions, le cas des variétés riemanniennes munies de leurs connexions de Levi-Civita devient un cas particulier.

Introduction

Dans la première partie du premier chapitre, on rappelle quelques notions fondamentales de la géométrie riemannienne et on introduit la notion d'applications harmoniques et bihamoniques et nous citons certaines propriétés de la manière suivante : On considère $(M^m; g)$ et $(N^n; h)$ deux variétés riemanniennes munies de leurs connexions de Lévi-Civita et soit $\phi : (M^m; g) \to (N^n; h)$ de classe C^∞. La fonctionnelle énergie $E(\phi)$ de l'application $\phi : (M^m; g) \to (N^n; h)$ est la fonctionnelle définie par :

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\int_D |\, d\phi|^2 dv_g$$

Où D est un domaine compact de M. On dit que ϕ est harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie $E(\phi)$, c'est à dire si

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t)|_{t=0} = 0,$$

Pour toute variation ϕ_t à support inclus dans D. En appliquant les équations d'Euler-Lagrange à la fonctionnelle énergie, on obtient la première variation de $E(\phi)$ donnée par

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t)|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\phi))dv_g$$

où $v = \frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x)|_{t=0}$ et $\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi$ est le champ de tension de l'application ϕ. On déduit que ϕ est harmonique si et seulement si son champ de tension est identiquement nul, d'où l'harmonicité de ϕ est traduite par l'équation suivante :

$$\tau(\phi) = 0$$

Une généralisation naturelle des applications harmoniques est obtenue en considérant les points critiques de la fonctionnelle obtenue en intégrant le carré de la norme du champ de tension. La bi-énergie $E_2(\phi)$ de l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est la fonctionnelle définie par :

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2}\int_D |\,\tau(\phi)|^2 dv_g$$

Où D est un domaine compact de M. L'application ϕ est dite biharmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle bi-énergie, c'est à dire

$$\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)|_{t=0} = 0.$$

les équations d'Euler-Lagrange associées à la bi-énergie nous permettent d'obtenir la première variation de la bi-énergie et qui est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)|_{t=0} = \int_D h(v, \tau_2(\phi))dv_g$$

où

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g(\nabla^\phi)^2\tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)d\phi,$$

avec

$$Tr_g(\nabla^\phi)^2 = Tr_g\left(\nabla^\phi\nabla^\phi - \nabla^\phi_{\nabla^M}\right)$$

est le Laplacien sur les sections du fibré $\phi^{-1}TN$ et R^N désigne le tenseur de courbure sur $(N^n; h)$. L'application ϕ est dite biharmonique si et seulement si

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g(\nabla^\phi)^2\tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)d\phi = 0.$$

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on s'intéresse aux variétés statistiques. On rappelle qu'une variété riemannienne (M^m, g) munie d'une connexion ∇ sans torsion telle que ∇g est symétrique, pour ce type de variété, on définit la connexion duale de ∇ relativement à la métrique g qu'on note $\overset{*}{\nabla}$ par la formule

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Comme premier résultat, on a :

Si (M, ∇, g) est une variété statistique, alors $(M, \overset{*}{\nabla}, g)$ l'est aussi.

Pour les résultats obtenus dans la suite de cette thèse, on définit un champ de tenseur de type $(1, 2)$, noté K de la manière suivante :

$$K(X,Y) = \overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

Le champ de tenseur K est appelé le tenseur de différence entre ∇ et $\overset{*}{\nabla}$. Le lien entre $\nabla_X g$, $\overset{*}{\nabla}_X g$ et K est donné par la proposition suivante :

Proposition. *Soit* (M, ∇, g) *une variété statistique et soit* $\overset{*}{\nabla}$ *la connexion duale de* ∇ *relativement à la métrique* g*. On a :*

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = g(K(X,Y), Z)$$

et

$$(\overset{*}{\nabla}_X g)(Y,Z) = -g(K(X,Y), Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

On a donc

(M, ∇, g) est sans trace si et seulement si $(M, \overset{*}{\nabla}, g)$ l'est aussi.

$$g(K(X,Y), Z) = g(K(Z,Y), X) = g(K(X,Z), Y).$$

et

$$g(R(X,Y)Z, W) = -g(\overset{*}{R}(X,Y)W, Z)$$

où R et $\overset{*}{R}$ sont respectivement les tenseurs de courbure associés aux connexions ∇ et $\overset{*}{\nabla}$.

Enfin, notons qu'on a $\left(\overset{*}{\overset{*}{\nabla}}\right) = \nabla$. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des α-connexions, notées $\nabla^{(\alpha)}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ sur les variétés statistiques qui sont définies par :

$$\nabla^{(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{2}\nabla + \frac{1-\alpha}{2}\overset{*}{\nabla}$$

Où $\overset{*}{\nabla}$ est la connexion duale de ∇. Rappelons que la connexion de Levi-Civita sur (M, g) qu'on note par $\widehat{\nabla}$ est la seule connexion sans torsion compatible avec la métrique g. Pour $\alpha = 0$, on a

$$\nabla^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\nabla + \overset{*}{\nabla}\right) = \widehat{\nabla}.$$

En introduisant le champ de tenseur K, on a

$$\nabla^{(\alpha)} = \widehat{\nabla} - \frac{\alpha}{2} K.$$

Pour $\alpha = 1$ et pour $\alpha = -1$, on obtient

$$\nabla^{(1)} = \nabla, \qquad \nabla^{(-1)} = \overset{*}{\nabla}.$$

On démontre les résultats suivants :

Proposition. *Soit (M^m, ∇, g) une variété statistique de structure duale $\left(\nabla, \overset{*}{\nabla}, g\right)$. Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M, nous avons :*

$$\begin{aligned} \left(\nabla_X^{(\alpha)} K\right)(Y, Z) &= \left(\nabla_X^{(\beta)} K\right)(Y, Z) - \frac{\alpha - \beta}{2} K\left(X, K\left(Y, Z\right)\right) \\ &+ \frac{\alpha - \beta}{2} K\left(K\left(X, Y\right), Z\right) + \frac{\alpha - \beta}{2} K\left(Y, K\left(X, Z\right)\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Pour une structure statistique $\left(\nabla, \overset{*}{\nabla}, g\right)$, on note par R, $\overset{*}{R}$, $\widehat{R}$ les tenseurs de courbure respectivement à ∇, $\overset{*}{\nabla}$, $\widehat{\nabla}$ et $R^{(\alpha)}$ le tenseur de courbure de $\nabla^{(\alpha)}$. Dans un premier résultat, nous allons établir une relation entre $R^{(\alpha)}$ et $R^{(\beta)}$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Théorème. *Soit (M^m, ∇, g) une variété statistique . La relation entre $R^{(\alpha)}$ et $R^{(\beta)}$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}\left(X, Y\right) Z &= R^{(\beta)}\left(X, Y\right) Z + \frac{\beta - \alpha}{2}\left(\nabla_X^{(\beta)} K\right)(Y, Z) - \frac{\beta - \alpha}{2}\left(\nabla_Y^{(\beta)} K\right)(X, Z) \\ &+ \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} K\left(X, K\left(Y, Z\right)\right) - \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} K\left(Y, K\left(X, Z\right)\right), \end{aligned} \tag{2}$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma\left(TM\right)$.

Ensuite, on passe à la construction d'applications harmoniques et biharmoniques à l'aide des α-connexions sur les variétés statistiques en définissant le champ de tension et le champ de bitension relativement aux connexions données. Soit $\phi : (M^m, \nabla^M, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^N, h)$ une application entre deux variétés statistiques. On définit $\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ par

$$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = \nabla_{e_i}^{(\alpha)} d\phi(e_i) - d\phi\left(\nabla_{e_i}^{(\beta)} e_i\right),$$

alors, on obtient

$$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = \widehat{\tau}(\phi) - \frac{\alpha}{2} Tr_g(K^N \circ d\phi) + \frac{\beta}{2} Tr_g(d\phi \circ K^M),$$

où

$$Tr_g(d\phi \circ K^M) = d\phi\left(K^M(e_i, e_i)\right),$$

et

$$Tr_g(K^N \circ d\phi) = K^N\left(d\phi(e_i), d\phi(e_i)\right)$$

$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ est appelé le champ de tension de l'application $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$.

L'application $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$ est dite harmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si

$$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = 0.$$

De la même manière, on définit $\tau_2(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ par

$$\begin{aligned}\tau_2(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) &= -Tr_g(\nabla^{\phi(\alpha)})^2\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})\\ &\quad -Tr_g R^{(\alpha)}\left(\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}), d\phi(.)\right)d\phi(.).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = \widehat{\tau}(\phi) - \frac{\alpha}{2}F + \frac{\beta}{2}d\phi(E),$$

où

$$F = Tr_g(K^N \circ d\phi), \qquad E = Tr_g K^M,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\tau_2(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) &= \widehat{\tau}_2(\phi) + \tfrac{\alpha}{2}K^N(\widehat{\tau}(\phi), \widehat{\tau}(\phi)) + \alpha Tr_g K^N\left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi\widehat{\tau}(\phi)\right)\\ &+ \tfrac{\alpha}{2}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_{\widehat{\tau}(\phi)}K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) - \tfrac{\alpha^2}{4}K^N(\widehat{\tau}(\phi), F)\\ &- \tfrac{\beta}{2}\widehat{\nabla}^\phi_E\widehat{\tau}(\phi) + \tfrac{\alpha\beta}{4}K^N\left(d\phi(E), \widehat{\tau}(\phi)\right) + \tfrac{\alpha}{2}Tr_g(\widehat{\nabla}^\phi)^2F\\ &+ \tfrac{\alpha}{2}Tr_g\widehat{R}\left(F, d\phi(.)\right)d\phi(.) - \tfrac{\alpha^2}{4}K^N(\widehat{\tau}(\phi), F)\\ &- \tfrac{\alpha^2}{2}Tr_g K^N\left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi F\right) - \tfrac{\alpha^2}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_F K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.))\\ &+ \tfrac{\alpha^3}{8}K^N(F, F) + \tfrac{\alpha\beta}{4}\widehat{\nabla}^\phi_E F - \tfrac{\alpha^2\beta}{8}K^N\left(d\phi(E), F\right)\\ &- \tfrac{\beta}{2}Tr_g(\widehat{\nabla}^\phi)^2 d\phi(E) - \tfrac{\beta}{2}Tr_g\widehat{R}\left(d\phi(E), d\phi(.)\right)d\phi(.)\\ &+ \tfrac{\alpha\beta}{4}K^N\left(\widehat{\tau}(\phi), d\phi(E)\right) + \tfrac{\alpha\beta}{2}Tr_g K^N\left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi d\phi(E)\right)\\ &+ \tfrac{\alpha\beta}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_{d\phi(E)}K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) - \tfrac{\alpha^2\beta}{8}Tr_g K^N\left(d\phi(E), F\right)\\ &- \tfrac{\beta^2}{4}\widehat{\nabla}^\phi_E d\phi(E) + \tfrac{\alpha\beta^2}{8}K^N\left(d\phi(E), d\phi(E)\right),\end{aligned} \tag{3}$$

avec

$$\widehat{\tau}_2(\phi) = -Tr_g\left(\widehat{\nabla}^\phi\right)^2\widehat{\tau}(\phi) - Tr_g\widehat{R}\left(\widehat{\tau}(\phi), d\phi(.)\right)d\phi(.).$$

L'application $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$ est dite biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si

$$\tau_2(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = 0.$$

Théorème. *Soit $\phi : (M^m, \nabla^M, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^N, h)$ une application entre deux variétés statistiques. En utilisant l'expression de $\tau_2(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$, on déduit que*

$\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$ est biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
& \widehat{\tau}_2(\phi) + \tfrac{\alpha}{2}K^N(\widehat{\tau}(\phi), \widehat{\tau}(\phi)) + \alpha Tr_g K^N\left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi\widehat{\tau}(\phi)\right) \\
+ \;& \tfrac{\alpha}{2}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_{\widehat{\tau}(\phi)}K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) - \tfrac{\alpha^2}{4}K^N(\widehat{\tau}(\phi), F) \\
- \;& \tfrac{\beta}{2}\widehat{\nabla}^\phi_E\widehat{\tau}(\phi) + \tfrac{\alpha\beta}{4}K^N\left(d\phi(E), \widehat{\tau}(\phi)\right) + \tfrac{\alpha}{2}Tr_g(\widehat{\nabla}^\phi)^2F \\
+ \;& \tfrac{\alpha}{2}Tr_g\widehat{R}\left(F, d\phi(.)\right)d\phi(.) - \tfrac{\alpha^2}{4}K^N(\widehat{\tau}(\phi), F) \\
- \;& \tfrac{\alpha^2}{2}Tr_g K^N\left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi F\right) - \tfrac{\alpha^2}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_F K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) \\
+ \;& \tfrac{\alpha^3}{8}K^N(F, F) + \tfrac{\alpha\beta}{4}\widehat{\nabla}^\phi_E F - \tfrac{\alpha^2\beta}{8}K^N\left(d\phi(E), F\right) \\
- \;& \tfrac{\beta}{2}Tr_g(\widehat{\nabla}^\phi)^2 d\phi(E) - \tfrac{\beta}{2}Tr_g\widehat{R}\left(d\phi(E), d\phi(.)\right)d\phi(.) \\
+ \;& \tfrac{\alpha\beta}{4}K^N\left(\widehat{\tau}(\phi), d\phi(E)\right) + \tfrac{\alpha\beta}{2}Tr_g K^N\left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi d\phi(E)\right) \\
+ \;& \tfrac{\alpha\beta}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_{d\phi(E)}K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) - \tfrac{\alpha^2\beta}{8}Tr_g K^N\left(d\phi(E), F\right) \\
- \;& \tfrac{\beta^2}{4}\widehat{\nabla}^\phi_E d\phi(E) + \tfrac{\alpha\beta^2}{8}K^N\left(d\phi(E), d\phi(E)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\alpha = \beta = 0$, nous obtenons les notions d'applications harmoniques et applications biharmoniques relativement aux connexions de Levi-Civita. En particulier, si ϕ est l'application identité, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire. *Soient (M^m, ∇^M, g) une variété statistique et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ où $\alpha \neq \beta$. Alors, l'application identité $Id : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (M^m, \nabla^{(\alpha)}, g)$ est biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si et seulement si*

$$Tr_g(\widehat{\nabla})^2E + \widehat{Ricci}(E) + \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{4}K(E,E)$$
$$-\frac{\alpha-\beta}{2}\widehat{\nabla}_E E + \alpha Tr_g K([E,.],.) = 0,$$

où $\widehat{Ricci}(E) = Tr_g \widehat{R}(E,.)$.

Corollaire. *La même méthode de calcul nous donne une autre version de la biharmonicité de l'application identité. Soient* (M^m, ∇^M, g) *une variété statistique et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *avec* $\alpha \neq \beta$. *Alors l'application identité* $Id : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (M^m, \nabla^{(\alpha)}, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ *si et seulement si*

$$Tr_g\left(\overset{*}{\nabla}\right)^2 E + \overset{*}{Ricci}(E) + \frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{4}K(E,E)$$
$$-\frac{\alpha-\beta}{2}\overset{*}{\nabla}_E E + (\alpha+1)Tr_g K([E,.],.) = 0,$$

où

$$Tr_g\left(\overset{*}{\nabla}\right)^2 E = \overset{*}{\nabla}_{e_i}\overset{*}{\nabla}_{e_i}E - \overset{*}{\nabla}_{\overset{*}{\nabla}_{e_i}e_i}E$$

et

$$\overset{*}{Ricci}(E) = Tr_g \overset{*}{R}(E,.).,$$

Grâce au corollaire , nous pouvons donner quelques cas particuliers où $\alpha, \beta \in \{-1, 0, 1\}$.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse aux structures conformément équivalentes sur les variétés statistiques. Pour un réel α , deux variétés statistiques (M, ∇, g) et $(M, \overline{\nabla}, \overline{g})$ sont dites α-conformément équivalentes s'il existe une fonction γ sur M telles que les métriques riemanniennes $\overline{g}$ et g sont liées par la relation suivante :

$$\overline{g}(X,Y) = e^{2\gamma}g(X,Y)$$

et la connexion $\overline{\nabla}$ est donnée par

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-\alpha)Y(\gamma)X + (1-\alpha)X(\gamma)Y - (1+\alpha)g(X,Y)grad\gamma$$

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

En utilisant le fait que $\nabla_X Y = \widehat{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}K(X,Y)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \widehat{\nabla}_X Y + (1-\alpha)\, Y(\gamma)\, X + (1-\alpha)\, X(\gamma)\, Y \\ &- (1+\alpha)\, g(X,Y)\, grad\gamma - \tfrac{1}{2} K(X,Y)\,.\end{aligned}$$

Comme premier résultat dans cette section, nous allons établir la relation entre $\overline{R}$ le tenseur de courbure sur la variété $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g})$ et $\widehat{R}$ le tenseur de courbure associé à la connexion de Lévi-Civita sur la variété (M^m, g).

Théorème.

Soient (M, ∇, g) et $(M, \overline{\nabla}, \overline{g})$ deux variétés statistiques α-conformément équivalentes. Alors la relation entre $\overline{R}$ et $\widehat{R}$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= \widehat{R}(X,Y)Z - (1+\alpha)g(Y,Z)\widehat{\nabla}_X grad\gamma + (1+\alpha)g(X,Z)\widehat{\nabla}_Y grad\gamma \\ &+ (1+\alpha)^2 g(Y,Z)X(\gamma)grad\gamma - (1+\alpha)^2 g(X,Z)Y(\gamma)grad\gamma \\ &+ \tfrac{1+\alpha}{2} g(Y,Z)\, K(X, grad\gamma) - \tfrac{1+\alpha}{2} g(X,Z)\, K(Y, grad\gamma) \\ &+ (1-\alpha)^2 Y(\gamma)Z(\gamma)X - (1-\alpha^2)g(Y,Z)|grad\gamma|^2 X \\ &- (1-\alpha)^2 X(\gamma)Z(\gamma)Y + (1-\alpha^2)g(X,Z)|grad\gamma|^2 Y \\ &- (1-\alpha)\, g\left(\widehat{\nabla}_Y grad\gamma, Z\right) X - \tfrac{1-\alpha}{2} K(Y,Z)(\gamma)\, X \\ &+ (1-\alpha)\, g\left(\widehat{\nabla}_X grad\gamma, Z\right) Y + \tfrac{1-\alpha}{2} K(X,Z)(\gamma)\, Y \\ &- \tfrac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_X K\right)(Y,Z) + \tfrac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_Y K\right)(X,Z) \\ &+ \tfrac{1}{4} K(X, K(Y,Z)) - \tfrac{1}{4} K(Y, K(X,Z))\,.\end{aligned}$$

Deuxièmement, on a aussi donné une relation entre $\overline{R}$ et R les tenseurs de courbure associés respectivement aux connexions $\overline{\nabla}$ et ∇ :

Théorème. *Soient (M, ∇, g) et $(M, \overline{\nabla}, \overline{g})$ deux variétés statistiques α-conformément équivalentes. La relation entre $\overline{R}$ et R les tenseurs de courbure associés respectivement aux connexions $\overline{\nabla}$ et ∇ est :*

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z-(1+\alpha)\,g(Y,Z)\,\nabla_X grad\gamma+(1+\alpha)\,g(X,Z)\,\nabla_Y grad\gamma\\ &- (1+\alpha)^2 g(X,Z)\,Y(\gamma)\,grad\gamma+(1+\alpha)^2 g(Y,Z)\,X(\gamma)\,grad\gamma\\ &- (1-\alpha^2)\,g(Y,Z)\,|grad\gamma|^2 X+(1-\alpha^2)\,g(X,Z)\,|grad\gamma|^2 Y\\ &- (1-\alpha)\,g(\nabla_Y grad\gamma,Z)\,X+(1-\alpha)\,g(\nabla_X grad\gamma,Z)\,Y\\ &+ (1-\alpha)^2 Y(\gamma)\,Z(\gamma)\,X-(1-\alpha)^2 X(\gamma)\,Z(\gamma)\,Y\\ &- (1-\alpha)\,g(K(Y,Z),grad\gamma)\,X+(1-\alpha)\,g(K(X,Z),grad\gamma)\,Y\end{aligned}$$

Corollaire. *Le théorème 3.2.2 nous donne deux cas particuliers :*

1. *Si $\alpha=1$, on obtient*

$$\overline{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z-2g(Y,Z)\,\nabla_X grad\gamma+2g(X,Z)\,\nabla_Y grad\gamma$$

$$-4g(X,Z)\,Y(\gamma)grad\gamma+4g(Y,Z)\,X(\gamma)grad\gamma,$$

$$\overline{Ricci}(X)=e^{-2\gamma}\left(Ricci(X)+4(m-1)\,X(\gamma)\,grad\gamma-2(m-1)\,\nabla_X grad\gamma\right),$$

$$\overline{Ric}(X,Y)=Ric(X,Y)+4(m-1)\,X(\gamma)\,Y(\gamma)-2(m-1)\,g(\nabla_X grad\gamma,Y)$$

Et

$$S_{\overline{g}}=e^{-2\gamma}\left(S_g+4(m-1)\,|grad\gamma|^2-2(m-1)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)+(m-1)\,E(\gamma)\right).$$

2. *Si $\alpha=-1$, on obtient*

$$\overline{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z-2g(\nabla_Y grad\gamma,Z)\,X+2g(\nabla_X grad\gamma,Z)\,Y$$

$$+4Y(\gamma)Z(\gamma)X-4X(\gamma)Z(\gamma)Y-2g(K(Y,Z),grad\gamma)\,X$$

$$+2g(K(X,Z),grad\gamma)\,Y$$

$$\begin{aligned}\overline{Ricci}(X)&=e^{-2\gamma}Ricci(X)-4e^{-2\gamma}X(\gamma)\,grad\gamma+2e^{-2\gamma}\nabla_X grad\gamma\\ &+4e^{-2\gamma}|grad\gamma|^2 X-2e^{-2\gamma}\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)X-e^{-2\gamma}E(\gamma)\,X\\ &+2e^{-2\gamma}K(X,grad\gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(X,Y)&=Ric(X,Y)-4X(\gamma)\,Y(\gamma)+2g(\nabla_X grad\gamma,Y)\\ &+4\,|grad\gamma|^2 g(X,Y)-2\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)g(X,Y)\\ &-E(\gamma)\,g(X,Y)+2g(K(X,Y),grad\gamma)\end{aligned}$$

Et

$$S_{\overline{g}} = e^{-2\gamma} S_g + (m-1)\, e^{-2\gamma} \left(4\, |grad\gamma|^2 - 2\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + E\,(\gamma)\right),$$

où

$$\widehat{\Delta}\gamma = g\left(\widehat{\nabla}_{e_i} grad\gamma, e_i\right) = e_i\,(e_i\,(\gamma)) - \left(\widehat{\nabla}_{e_i} e_i\right)(\gamma)\,.$$

En reprenant le même raisonnement utilisé dans le deuxième chapitre, on dit que $\phi : (M, \overline{\nabla}, \overline{g}) \longrightarrow (N, \nabla, h)$ est harmonique relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$ si

$$\tau(\phi) + \{(m+2)\alpha + m - 2\}\, d\phi(grad\gamma) = 0.$$

En particulier, si on considère l'application identité, l'harmonicité se traduit par l'équation suivante :

$$(m+2)\alpha + m - 2 = 0,$$

c'est à dire

$$\alpha = -\frac{m-2}{m+2}.$$

De même, l'application $\phi : (M, \nabla, g) \longrightarrow (N, \overline{\nabla}, \overline{h} = e^{2\gamma} h)$ est harmonique relativement à $(\nabla, \overline{\nabla})$ si

$$\tau(\phi) + 2(1-\alpha) d\phi(grad\gamma) - (1+\alpha)|d\phi|^2 (grad\gamma) \circ \phi = 0.$$

A la fin de cette thèse, on définit la biharmonicité relative aux structures α-conformément équivalentes, nous obtenons les théorèmes suivants :

Théorème. *L'application identité :* $Id : (M, \nabla, g) \to (M, \overline{\nabla}, \overline{g})$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned}
&Tr_g \nabla^2 grad\gamma - \frac{(m+6)\alpha + m - 6}{2} grad\left(|grad\gamma|^2\right)\\
&+ \{(m-10)\alpha^2 + 2(m+2)\alpha + m - 2\}\, |grad\gamma|^2 grad\gamma\\
&-2(1+\alpha)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) grad\gamma - \frac{3(\alpha+1)}{2} E(\gamma) grad\gamma\\
&+\frac{(m+2)\alpha + m - 2}{2} K(grad\gamma, grad\gamma) + Ricci(grad\gamma) = 0.
\end{aligned}$$

Et

Théorème. *Soient* (M^m, ∇, g) *et* $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ *deux variétés statistiques* α*-conformément équivalentes où* γ *est une fonction non constante sur* M *avec*

$$(m+2)\alpha + m - 2 \neq 0.$$

Alors,l'application identité $Id : (M^m, \overline{\nabla}, \overline{g}) \to (M^m, \nabla, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\overline{\nabla}, \nabla)$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned}
& grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + \frac{(m+2)\alpha + m - 6}{2} grad\left(|grad\gamma|^2\right) - 2\left\{\widehat{\Delta}\gamma + \tfrac{1}{2}E(\gamma)\right\} grad\gamma \\
& -2\left\{(m+2)\alpha + m - 4\right\} |grad\gamma|^2 grad\gamma - \tfrac{1}{2}K(grad\gamma, grad\gamma) \\
& -\tfrac{1}{2}\widehat{\nabla}_{grad\gamma} E + 2\widehat{Ricci}(grad\gamma) + Tr_g K([grad\gamma, .], .) \\
& +\tfrac{1}{4} Tr_g K(K(grad\gamma, .), .) = 0.
\end{aligned}$$

Table des matières

Chapitre 1

Généralités

1.1 Notions générales de la géométrie riemannienne

Définition 1.1.1. *Soit M une variété différentiable, l'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\Gamma(TM)$ et l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M est noté $C^\infty(M)$. Une métrique sur M est une forme*

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$-bilinéaire, symétrique et définie positive. Le couple (M, g) est appelé une variété riemannienne.

Définition 1.1.2. *Soit M une variété différentiable, une connexion linéaire sur M est une application*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

Qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

2. $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$

3. $\nabla_{X+fY} Z = \nabla_X Z + f\nabla_Y Z$

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *et pour toute fonction* $f \in C^\infty(M)$. *Pour une telle connexion* ∇, *on définit un champ de tenseur* T *de type* $(1,2)$ *dit le tenseur de torsion associé à* ∇ *par*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. *La connexion linéaire* ∇ *est dite sans torsion si le champ de tenseur* T *est identiquement nul, c'est à dire : pour tous* $X, Y \in \Gamma(TM)$, *on a*

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Notons que T *est un champ de tenseur antisymétrique.*

On considère (M,g) une variété riemannienne, on a le résultat suivant :

Théorème 1.1.1. *Soit* (M,g) *une variété riemannienne. L'application*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

définie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &+ g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) + g(X,[Y,Z]) \end{aligned} \tag{1.1}$$

est une connexion linéaire sur M, dite connexion de Lévi-Civita. L'équation (1.1) est appelée la formule de Koszul.

Pour cette connexion, on a le résultat suivant, dit théorème fondamental de la géométrie riemannienne.

Théorème 1.1.2. *Soit* (M,g) *une variété riemannienne. La connexion de Lévi-Civita est l'unique connexion linéaire* ∇ *sur* M *sans torsion et compatible avec la métrique* g. *La compatibilité avec la métrique* g *est traduite par la formule suivante :*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. *La connexion de Lévi-Civita sur* (M,g) *est complètement déterminée par la formule de Koszul.*

Remarque 1.1.1. *Soit M une variété différentiable, une connexion linéaire ∇ sur M est complètement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k donnés par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^i},$$

de plus, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ alors :

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dans le cas d'une variété riemannienne munie de la connexion de Lévi-Civita, on a la remarque suivante :

Remarque 1.1.2. *Soit (M^m, g) une variété riemannienne de dimension m et soit ∇ la connexion de Lévi-Civita. Localement, les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par la formule suivante :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Définition 1.1.3. *Soit M une variété différentiable munie d'une connexion linéaire ∇. Le tenseur de courbure R associé à la connexion ∇ est défini par*

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y, Z) \longmapsto R(X, Y)Z$$

Où

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Remarque 1.1.3. *Sur une variété riemannienne (M^m, g) de dimension m, le tenseur de courbure de la connexion de Lévi-Civita est appelé tenseur de courbure riemannienne. Localement, on a*

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^{m} R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$

Où

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} (\Gamma_{jk}^l) - \frac{\partial}{\partial x^j} (\Gamma_{ik}^l) + \sum_{p=1}^{m} (\Gamma_{ip}^l \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^l \Gamma_{ik}^p)$$

Comme propriétés, on a :

1. *R est un champ de tenseurs de type $(1,3)$.*

2. $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y)W,Z)$.

3. $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Z,W)X,Y)$.

4. *R vérifie l'identité algébrique de Bianchi*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

5. *R vérifie l'identité différentielle de Bianchi*

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0$$

Pour tous $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.1.4. *Soit (M^m, g) une variété de dimension m, la courbure de Ricci est un champ de tenseur de type $(0,2)$ définie pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ par*

$$Ric\,(X,Y) = Tr_g R\,(\cdot, X)\,Y = \sum_{i=1}^{m} g(R\,(e_i, X)\,Y, e_i)$$

Où $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur M . Notons que la courbure de Ricci est une forme bilinéaire symétrique. De même, le tenseur de Ricci est un champ de tenseur de type $(1,1)$ défini pour tout $X \in \Gamma(TM)$ par

$$Ricci\,(X) = Tr_g R\,(X, \cdot) \cdot = \sum_{i=1}^{m} R\,(X, e_i)\,e_i.$$

Sur la variété riemannienne (M^m, g), la courbure de Ricci et le tenseur de Ricci sont liés par la relation suivante :

$$Ric\,(X,Y) = g(Ricci\,(X)\,, Y).$$

1.2 Applications harmoniques

Dans cette section, on considère (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes munies de leurs connexions de Lévi-Civita et soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞. On définit le fibré inverse (appelé fibré pull-back) qu'on note $\phi^{-1}TN$ par :

$$\begin{aligned} \phi^{-1}TN &= \Big\{(x,v) \in M \times T_{\phi(x)}N\Big\}) \\ &= \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_{\phi(x)}N \end{aligned}$$

L'ensemble des sections sur le fibré inverse est noté par $\Gamma(\phi^{-1}TN)$, cet ensemble est défini de la manière suivante :

$$\Gamma(\phi^{-1}TN) = \Big\{V : M \longrightarrow TN, V_x \in T_{\phi(x)}N, \forall x \in M\Big\}$$

Ou encore

$$V \in \Gamma(\phi^{-1}TN) \Leftrightarrow V_x \in T_{\phi(x)}N, \forall x \in M$$

Comme exemples, on a

$$\forall X \in \Gamma(TM), d\phi(X) \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$$

Et

$$\forall Y \in \Gamma(TN), Y \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$$

Définition 1.2.1. *Sur le fibré inverse $\Gamma(\phi^{-1}TN)$, on définit la connexion suivante, notée ∇^ϕ par :*

$$\nabla^\phi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\phi^{-1}TN) \longrightarrow \Gamma(\phi^{-1}TN)$$

$$(X, V) \longmapsto \nabla^\phi_X V$$

Avec

$$\nabla^\phi_X (H \circ \phi) = (\nabla^N_{d\phi(X)} H) \circ \phi,$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et pour tout $H \in \Gamma(TN)$. Comme propriété, on a :

$$\nabla^\phi_X d\phi(Y) = \nabla^\phi_Y d\phi(X) + d\phi([X,Y]),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. Localement, on a

$$\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\phi(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \left(\frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j}({}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \phi)\right)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \phi.$$

Définition 1.2.2. *En utilisant* ∇^{ϕ} , *on définit la deuxième forme fondamentale de l'application* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$, *notée* $\nabla d\phi$, *par :*

$$\nabla d\phi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(\phi^{-1}TN)$$

$$(X, Y) \longmapsto \nabla d\phi(X, Y)$$

Où

$$\nabla d\phi(X, Y) = \nabla^{\phi}_X d\phi(Y) - d\phi(\nabla^M_X Y)$$

La seconde forme fondamentale $\nabla d\phi$ *de l'application* ϕ *est une forme* $C^{\infty}(M)$*-bilinéaire symétrique. L'application* ϕ *est dite totalement géodésique si sa deuxième forme fondamentale est identiquement nulle.*

Définition 1.2.3. *Le champ de tension de l'application* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *noté* $\tau(\phi)$ *est défini par*

$$\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi = \nabla d\phi(e_i, e_i) = \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla^M_{e_i} e_i)$$

Où $(e_i)_{i=1}^m$ *est une base orthonormée sur la variété* (M^m, g). *Localement, on a :*

$$\tau(\phi) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \phi^{\gamma}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x^k} {}^M\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x^j} ({}^N\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \circ \phi) \right) \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} \circ \phi$$

Remarque 1.2.1. *Si on considère deux applications différentiables* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *et* $\psi : (N^n, h) \longrightarrow (P^p, k)$, *on a la propriété suivante :*

$$\nabla d(\psi \circ \phi) = d\psi(\nabla d\phi) + (\nabla d\psi)(d\phi, d\phi),$$

et en passant à la trace dans cette dernière équation, il suit que :

$$\tau(\psi \circ \phi) = d\psi(\tau(\phi)) + Tr_g(\nabla d\psi)(d\phi, d\phi).$$

Définition 1.2.4. *La densité de l'application* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *est la fonction* $e(\phi) : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par :* $e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2$, *avec* $|d\phi|^2$ *la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle* $d\phi$ *donnée par la formule suivante :*

$$|d\phi|^2 = Tr_g \phi^* h = \sum_{i=1}^{m} h(d\phi(e_i), d\phi(e_i)),$$

Où $(e_i)_{i=1}^m$ *est une base orthonormée sur la variété* (M^m, g)*. Localement, on a :*

$$|d\phi|^2 = g^{ij}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}(h_{\alpha\beta}\circ\phi).$$

Définition 1.2.5. *La fonctionnelle énergie* $E(\phi)$ *de l'application* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *est la fonctionnelle définie par :*

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\int_D |\, d\phi|^2 dv_g$$

Où D *est un domaine compact de* M*. On dit que* ϕ *est harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie* $E(\phi)$*, c'est à dire si*

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t)|_{t=0} = 0,$$

pour toute variation ϕ_t *à support inclus dans* D*. En appliquant les équations d'Euler-Lagrange à la fonctionnelle énergie, on obtient la première variation de* $E(\phi)$ *donnée par :*

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t)|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\phi))dv_g$$

où $v = \frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x)|_{t=0}$ *et* $\tau(\phi) = Tr_g\nabla d\phi$ *est le champ de tension de l'application* ϕ*.*

On déduit que ϕ *est harmonique si et seulement si son champ de tension est identiquement nul. D'où l'harmonicité de* ϕ *est traduite par l'équation suivante :*

$$\tau(\phi) = 0 \tag{1.2}$$

Remarque 1.2.2. *Si on considère deux applications différentiables* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *et* $\psi : (N^n, h) \longrightarrow (P^p, k)$*, l'équation :*

$$\tau(\psi\circ\phi) = d\psi(\tau(\phi)) + Tr_g(\nabla d\psi)(d\phi, d\phi)$$

montre que la composée de deux applications harmoniques n'est pas nécessairement une application harmonique, en particulier si ϕ *est harmonique et si* ψ *est totalement géodésique, alors* $\psi\circ\phi$ *est harmonique.*

Définition 1.2.6. *Soit* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application de classe* C^∞*, le tenseur impulsion-énergie de* ϕ *est le champ de tenseur symétrique de type* $(0, 2)$ *sur* M *défini par :*

$$S(\phi) = e(\phi)g - \phi^* h, \tag{1.3}$$

Théorème 1.2.1. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, la relation de base entre le tenseur impulsion-énergie et les applications harmoniques est donnée par le résultat suivant :*

$$divS(\phi) = -h(\tau(\phi), d\phi) \tag{1.4}$$

De cette dernière formule, il suit que

Corollaire 1.2.1. *Si $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique, alors $divS(\phi) = 0$.*

De plus si ϕ est une submersion et si $divS(\phi) = 0$, alors ϕ est harmonique.

Une généralisation naturelle des applications harmoniques est obtenue en considérant les points critiques de la fonctionnelle obtenue en intégrant le carré de la norme du champ de tension.

1.3 Applications biharmoniques

Définition 1.3.1. *La bi-énergie $E_2(\phi)$ de l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est la fonctionnelle définie par :*

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2}\int_D |\,\tau(\phi)|^2 dv_g$$

Où D est un domaine compact de M. L'application ϕ est dite biharmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle bi-énergie, c'est à dire si

$$\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)|_{t=0} = 0,$$

les équations d'Euler-Lagrange associées à la bi-énergie nous permettent d'obtenir la première variation de la bi-énergie et qui est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)|_{t=0} = \int_D h(v, \tau_2(\phi))dv_g$$

Où

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g(\nabla^\phi)^2\tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)d\phi$$

Avec

$$Tr_g(\nabla^\phi)^2 = Tr_g\left(\nabla^\phi\nabla^\phi - \nabla^\phi_{\nabla^M}\right)$$

est le Laplacien sur les sections du fibré $\phi^{-1}TN$ et R^N désigne le tenseur de courbure sur $(N^n; h)$. L'application ϕ est dite biharmonique si et seulement si

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g(\nabla^{\phi})^2\tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)d\phi = 0.$$

Remarque 1.3.1. *Il est clair que toute application harmonique est biharmonique.*

Comme pour les applications harmoniques, il existe un tenseur symétrique de type $(0, 2)$ appelé le tenseur impulsion bi-énergie associé aux applications biharmoniques et qui a été introduit par G.Y.Jiang. (voir[10])

Définition 1.3.2. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, le tenseur impulsion bi-énergie de ϕ noté $S_2(\phi)$ est défini par :*

$$S_2(\phi) = \left(-\frac{1}{2}|\tau(\phi)|^2 + divh(\tau(\phi), d\phi)\right) g - 2symh(\nabla\tau(\phi), d\phi) \tag{1.5}$$

Où

$$symh(\nabla\tau(\phi), d\phi)(X, Y) = \frac{1}{2}\{h(\nabla_X\tau(\phi), d\phi(Y)) + h(\nabla_Y\tau(\phi), d\phi(X))\}$$

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Théorème 1.3.1. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, il existe une relation entre $\tau_2(\phi)$ et la divergence de ce tenseur :*

$$divS_2(\phi) = h(\tau_2(\phi), d\phi) \tag{1.6}$$

Comme résultat du Théorème 1.3.1, nous obtenons :

Corollaire 1.3.1. *Si $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est biharmonique, alors*

$$divS_2(\phi) = 0.$$

Si ϕ est une submersion et si $divS_2(\phi) = 0$ alors, ϕ est biharmonique.

1.4 Notions générales sur les variétés statistiques.

Définition 1.4.1. *Soit* (M^m, g) *une variété riemannienne.*

— *Une connexion* ∇ *sur M est dite sans torsion si*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$$

C'est à dire

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

— *On dit que* ∇g *est symétrique si pour tous* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, *on a*

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z),$$

où

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

La symétrie de ∇g *se traduit par la formule suivante :*

$$X(g(Y,Z)) - Y(g(X,Z)) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0.$$

Définition 1.4.2. *Soit* (M^m, g) *une variété riemannienne munie d'une connexion* ∇ *sans torsion telle que* ∇g *est symétrique.*

— *Le couple* (∇, g) *est appelé structure statistique sur M.*

— *Le triplet* (M, ∇, g) *est appelé variété statistique .*

Si de plus, on a $Tr_g(\nabla_X g)(.,.) = 0$, *alors cette structure est dite sans trace.*

Définition 1.4.3. *Soit* (M, ∇, g) *une variété statistique, on définit la connexion duale de* ∇ *relativement à la métrique g qu'on note* $\overset{*}{\nabla}$ *par la formule*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Proposition 1.4.1. *Si (M, ∇, g) est une variété statistique, alors $(M, \overset{*}{\nabla}, g)$ l'est aussi.*

Démonstration. Montrons cette proposition en deux étapes.

1. Dans la première étape, nous allons montrer que $\overset{*}{\nabla} g$ est symétrique, c'est à dire

$$(\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) = (\overset{*}{\nabla}_Y g)(X, Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Pour cela, calculons $(\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) - (\overset{*}{\nabla}_Y g)(X, Z)$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} (\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) - (\overset{*}{\nabla}_Y g)(X, Z) \quad &= \quad X(g(Y, Z)) - g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) \\ &- \quad Y(g(X, Z)) + g(\overset{*}{\nabla}_Y X, Z) + g(X, \overset{*}{\nabla}_Y Z) \end{aligned}$$

En utilisant la relation entre la connexion ∇ et sa connexion duale, on obtient

$$\begin{aligned} (\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) - (\overset{*}{\nabla}_Y g)(X, Z) \quad &= \quad Y(g(X, Z)) - g(\nabla_Y X, Z) - g(X, \nabla_Y Z) \\ &- \quad X(g(Y, Z)) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

Enfin la définition de ∇g nous ramène à l'équation suivante :

$$(\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) - (\overset{*}{\nabla}_Y g)(X, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z) - (\nabla_X g)(Y, Z)$$

Et comme ∇g est symétrique, on déduit que :

$$(\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) - (\overset{*}{\nabla}_Y g)(X, Z) = 0$$

D'où $\overset{*}{\nabla} g$ est symétrique.

2. Montrons maintenant que $\overset{*}{\nabla} g$ est sans torsion, c'est à dire

$$\overset{*}{\nabla}_X Y - \overset{*}{\nabla}_Y X = [X, Y],$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Pour tout $Z \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned} g\left(\overset{*}{\nabla}_X Y - \overset{*}{\nabla}_Y X, Z\right) \quad &= \quad g\left(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z\right) - g\left(\overset{*}{\nabla}_Y X, Z\right) \\ &= \quad X(g(Y, Z)) - Y(g(X, Z)) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

et

$$(\nabla_Y g)(X,Z) = Y(g(X,Z)) - g(\nabla_Y X, Z) - g(X, \nabla_Y Z)$$

on obtient

$$\begin{aligned} g\left(\overset{*}{\nabla}_X Y - \overset{*}{\nabla}_Y X, Z\right) &= (\nabla_X g)(Y,Z) - (\nabla_Y g)(X,Z) \\ &+ g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) \end{aligned}$$

Comme ∇g est symétrique et

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = g([X,Y], Z),$$

on conclut que

$$\overset{*}{\nabla}_X Y - \overset{*}{\nabla}_Y X = [X,Y].$$

Donc $\overset{*}{\nabla}$ est sans torsion et par suite $(M, \overset{*}{\nabla}, g)$ est bien une variété statistique.

□

Définition 1.4.4. *Soit (M,∇,g) une variété statistique et soit $\overset{*}{\nabla}$ la connexion duale de ∇ relativement à la métrique g. On définit un champ de tenseur de type $(1,2)$, noté K de la manière suivante :*

$$K : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X,Y) \longmapsto K(X,Y) = \overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

Le champ de tenseur K est appelé le tenseur de différence entre ∇ et $\overset{*}{\nabla}$.

Proposition 1.4.2. *Soit (M,∇,g) une variété statistique et soit $\overset{*}{\nabla}$ la connexion duale de ∇ relativement à la métrique g. Le champ de tenseur K ainsi défini, vérifie les propriétés suivantes :*

1. *K est symétrique,c'est à dire $K(X,Y) = K(Y,X)$.*
2. *$K(fX,Y) = K(X,fY) = fK(X,Y)$.*

Pour tous $X,Y \in \Gamma(TM)$ et pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

Démonstration. Soit (M, ∇, g) une variété statistique et soit $\overset{*}{\nabla}$ la connexion duale de ∇ relativement à la métrique g.

1. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$K(X,Y) = \overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

Et

$$K(Y,X) = \overset{*}{\nabla}_Y X - \nabla_Y X$$

Il suit que

$$K(X,Y) - K(Y,X) = \overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - \overset{*}{\nabla}_Y X + \nabla_Y X$$

Comme les deux connexions ∇ et $\overset{*}{\nabla}$ sont sans torsion, on déduit que

$$K(X,Y) - K(Y,X) = 0,$$

c'est à dire

$$K(X,Y) = K(Y,X),$$

et donc K est symétrique.

2. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$K(fX,Y) = \overset{*}{\nabla}_{fX} Y - \nabla_{fX} Y = f\left(\overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y\right) = fK(X,Y).$$

Et

$$\begin{aligned} K(X,fY) &= \overset{*}{\nabla}_X fY - \nabla_X fY \\ &= f\overset{*}{\nabla}_X Y + X(f)Y - f\nabla_X Y - X(f)Y \\ &= f\left(\overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y\right) \\ &= fK(X,Y). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.4.3. *Soit (M, ∇, g) une variété statistique et soit $\overset{*}{\nabla}$ la connexion duale de ∇ relativement à la métrique g, on a pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$:*

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = g(K(X,Y),Z) \text{ et } (\overset{*}{\nabla}_X g)(Y,Z) = -g(K(X,Y),Z).$$

Démonstration. Soit (M, ∇, g) une variété statistique et soit $\overset{*}{\nabla}$ la connexion duale de ∇ relativement à la métrique g et soient $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Par définition de ∇g, on a :

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

En utilisant la connexion duale $\overset{*}{\nabla}$, on obtient :

$$X(g(Y, Z)) = (\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) + g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z),$$

il suit que :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X g)(Y, Z) &= (\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) + g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) \\
&\quad -g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
&= X(g(Y, Z)) - g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) + g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) \\
&\quad +g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) - g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) \\
&= X(g(Y, Z)) - g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) \\
&= g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
&= g(\overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z). \\
&= g(K(X, Y), Z).
\end{aligned}$$

D'où

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = g(K(X, Y), Z).$$

De la preuve de la première partie de cette proposition, on déduit que :

$$\begin{aligned}
(\overset{*}{\nabla}_X g)(Y, Z) &= (\nabla_X g)(Y, Z) - g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) \\
&\quad +g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
&= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) - g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) \\
&\quad -g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_X Y, Z) \\
&= X(g(Y, Z)) - g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overset{*}{\nabla}_X Z) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) - g(\overset{*}{\nabla}_X Y, Z) \\
&= -g(\overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z). \\
&= -g(K(X, Y), Z).
\end{aligned}$$

D'où

$$(\overset{*}{\nabla}_X g)(Y,Z) = -g(K(X,Y),Z).$$

$\square$

Remarque 1.4.1. *Grâce à cette dernière proposition, on a pour tous* $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$:

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = -(\overset{*}{\nabla}_X g)(Y,Z),$$

d'où :

$$Tr_g(\nabla_X g)(.,.) = -Tr_g(\overset{*}{\nabla}_X g)(.,.).$$

Par suite, on a le résultat suivant :

(M,∇,g) *est sans trace si et seulement si* $(M,\overset{*}{\nabla},g)$ *l'est aussi.*

Remarque 1.4.2. *A partir du tenseur K, on peut définir un champ de tenseur de type (0,3), qu'on note encore K par :*

$$K(X,Y,Z) = g(K(X,Y),Z),$$

pour tous $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$.

Remarque 1.4.3. *Pour tous* $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$, *on a :*

$$g(K(X,Y),Z) = g(K(Z,Y),X) = g(K(X,Z),Y).$$

et

$$g(R(X,Y)Z,W) = -g(\overset{*}{R}(X,Y)W,Z)$$

où R *et* $\overset{*}{R}$ *sont respectivement les tenseurs de courbure associés aux connexions* ∇ *et* $\overset{*}{\nabla}$.
Enfin, notons qu'on a $\left(\overset{*}{\overset{*}{\nabla}}\right) = \nabla$.

Chapitre 2

α-connexion, applications harmoniques et biharmoniques

2.1 Quelques résultats sur les α-connexions

Définition 2.1.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Sur une variété statistique (M, ∇, g), on définit la α-connexion, notée $\nabla^{(\alpha)}$ par :*

$$\nabla^{(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{2}\nabla + \frac{1-\alpha}{2}\overset{*}{\nabla}$$

Où $\overset{*}{\nabla}$ est la connexion duale de ∇.

Rappelons que la connexion de Levi-Civita sur (M, g) qu'on note par $\widehat{\nabla}$ est la seule connexion sans torsion compatible avec la métrique g. Pour $\alpha = 0$, on a

$$\nabla^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\nabla + \overset{*}{\nabla}\right) = \widehat{\nabla}.$$

En introduisant le champ de tenseur K, on a :

$$\nabla^{(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{2}\nabla + \frac{1-\alpha}{2}\overset{*}{\nabla} = \frac{1}{2}(\nabla + \overset{*}{\nabla}) - \frac{\alpha}{2}(\overset{*}{\nabla} - \nabla),$$

d'où

$$\nabla^{(\alpha)} = \widehat{\nabla} - \frac{\alpha}{2}K.$$

Pour $\alpha = 1$ *et pour* $\alpha = -1$, *on obtient* $\nabla^{(1)} = \nabla$ *et* $\nabla^{(-1)} = \overset{*}{\nabla}$.

On a aussi : $\nabla^{(-\alpha)} = \widehat{\nabla} + \frac{\alpha}{2}K = \left(\overset{*}{\nabla}\right)^{(\alpha)}$, *d'où* $\nabla^{(\alpha)} - \nabla^{(-\alpha)} = -\alpha K$.

C'est à dire, pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\nabla_X^{(\alpha)} Y - \nabla_X^{(-\alpha)} Y = -\alpha K(X,Y).$$

Enfin, il est simple de voir que :

$$\nabla_X Y = \widehat{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}K(X,Y) \textit{ et } \overset{*}{\nabla}_X Y = \widehat{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}K(X,Y).$$

Le triplet $(M^m, \nabla^{(\alpha)}, g)$ est aussi une variété statistique et $\nabla^{(-\alpha)}$ est la connexion duale de $\nabla^{(\alpha)}$, de plus nous avons les égalités suivantes :

$$\nabla_X^{(\alpha)} Y = \widehat{\nabla}_X Y - \frac{\alpha}{2}K(X,Y)$$

En général, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il est très simple de voir que :

$$\nabla_X^{(\alpha)} Y = \nabla_X^{(\beta)} Y - \frac{\alpha-\beta}{2}K(X,Y) \tag{2.1}$$

Proposition 2.1.1. *[1] Soit* (M^m, ∇, g) *une variété statistique de structure duale* $\left(\nabla, \overset{*}{\nabla}, g\right)$. *Pour tous champs de vecteurs* X, Y, Z *sur* M, *nous avons :*

$$\begin{aligned} \left(\nabla_X^{(\alpha)} K\right)(Y,Z) &= \left(\nabla_X^{(\beta)} K\right)(Y,Z) - \frac{\alpha-\beta}{2}K(X, K(Y,Z)) \\ &\quad + \frac{\alpha-\beta}{2}K(K(X,Y), Z) + \frac{\alpha-\beta}{2}K(Y, K(X,Z)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Démonstration. Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Par définition, nous avons :

$$\left(\nabla_X^{(\alpha)} K\right)(Y,Z) = \nabla_X^{(\alpha)} K(Y,Z) - K\left(\nabla_X^{(\alpha)} Y, Z\right) - K\left(Y, \nabla_X^{(\alpha)} Z\right).$$

Les propriétés du tenseur de différence K nous donnent :

$$\nabla_X^{(\alpha)} K(Y,Z) = \nabla_X^{(\beta)} K(Y,Z) - \frac{\alpha-\beta}{2}K(X, K(Y,Z)),$$

$$K\left(\nabla_X^{(\alpha)} Y, Z\right) = K\left(\nabla_X^{(\beta)} Y, Z\right) - \frac{\alpha-\beta}{2}K(K(X,Y), Z)$$

Et

$$K\left(Y, \nabla_X^{(\alpha)} Z\right) = K\left(Y, \nabla_X^{(\beta)} Z\right) - \frac{\alpha-\beta}{2}K(Y, K(X,Z))$$

alors,

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{(\alpha)}_X K\right)(Y,Z) &= \nabla^{(\beta)}_X K(Y,Z) - \frac{\alpha-\beta}{2}K(X,K(Y,Z)) - K\left(\nabla^{(\beta)}_X Y, Z\right)\\ &+ \frac{\alpha-\beta}{2}K(K(X,Y),Z) - K\left(Y,\nabla^{(\beta)}_X Z\right) + K(Y,K(X,Z))\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que :

$$\left(\nabla^{(\beta)}_X K\right)(Y,Z) = \nabla^{(\beta)}_X K(Y,Z) - K\left(\nabla^{(\beta)}_X Y, Z\right) - K\left(Y,\nabla^{(\beta)}_X Z\right)$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{(\alpha)}_X K\right)(Y,Z) &= \left(\nabla^{(\beta)}_X K\right)(Y,Z) - \frac{\alpha-\beta}{2}K(X,K(Y,Z))\\ &+ \frac{\alpha-\beta}{2}K(K(X,Y),Z) + \frac{\alpha-\beta}{2}K(Y,K(X,Z)).\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.1. *Comme cas particulier de l'équation (2.2), nous avons*

$$\begin{aligned}(\nabla^{(\alpha)}_X K)(Y,Z) &= (\widehat{\nabla}_X K)(Y,Z) - \tfrac{\alpha}{2}K(X,K(Y,Z)) + \tfrac{\alpha}{2}K(K(X,Y),Z)\\ &\quad + \tfrac{\alpha}{2}K(Y,K(X,Z))\\ &= (\nabla_X K)(Y,Z) - \tfrac{\alpha-1}{2}K(X,K(Y,Z)) + \tfrac{\alpha-1}{2}K(K(X,Y),Z)\\ &\quad + \tfrac{\alpha-1}{2}K(Y,K(X,Z))\\ &= (\overset{*}{\nabla}_X K)(Y,Z) - \tfrac{\alpha+1}{2}K(X,K(Y,Z)) + \tfrac{\alpha+1}{2}K(K(X,Y),Z)\\ &\quad + \tfrac{\alpha+1}{2}K(Y,K(X,Z))\end{aligned}$$

Pour une structure statistique $\left(\nabla, \overset{*}{\nabla}, g\right)$, on note R, R^*, $\widehat{R}$ les tenseurs de courbure respectivement à ∇, $\overset{*}{\nabla}$, $\widehat{\nabla}$ et $R^{(\alpha)}$ le tenseur de courbure de $\nabla^{(\alpha)}$. Dans un premier résultat, nous allons établir une relation entre $R^{(\alpha)}$ et $R^{(\beta)}$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.1.1. *[1] Soit (M^m, ∇, g) une variété statistique . La relation entre $R^{(\alpha)}$ et $R^{(\beta)}$ est donnée par :*

$$\begin{aligned}R^{(\alpha)}(X,Y)Z &= R^{(\beta)}(X,Y)Z + \frac{\beta-\alpha}{2}\left(\nabla^{(\beta)}_X K\right)(Y,Z) - \frac{\beta-\alpha}{2}\left(\nabla^{(\beta)}_Y K\right)(X,Z)\\ &+ \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}K(X,K(Y,Z)) - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}K(Y,K(X,Z)),\end{aligned} \tag{2.3}$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Démonstration. Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, Par définition, on a :

$$R^{(\alpha)}(X,Y)Z = \nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\alpha)}Z - \nabla_Y^{(\alpha)}\nabla_X^{(\alpha)}Z - \nabla_{[X,Y]}^{(\alpha)}Z. \tag{2.4}$$

Pour le premier terme $\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\alpha)}Z$, nous avons :

$$\nabla_Y^{(\alpha)}Z = \nabla_Y^{(\beta)}Z + \frac{\beta-\alpha}{2}K(Y,Z),$$

donc,

$$\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\alpha)}Z = \nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z + \frac{\beta-\alpha}{2}\nabla_X^{(\alpha)}K(Y,Z).$$

Il est simple de voir que

$$\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z = \nabla_X^{(\beta)}\nabla_Y^{(\beta)}Z + \frac{\beta-\alpha}{2}K\left(X,\nabla_Y^{(\beta)}Z\right)$$

Et

$$\nabla_X^{(\alpha)}K(Y,Z) = \nabla_X^{(\beta)}K(Y,Z) + \frac{\beta-\alpha}{2}K(X,K(Y,Z)),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\alpha)}Z &= \nabla_X^{(\beta)}\nabla_Y^{(\beta)}Z + \frac{\beta-\alpha}{2}K\left(X,\nabla_Y^{(\beta)}Z\right)\\ &\quad+\frac{\beta-\alpha}{2}\nabla_X^{(\beta)}K(Y,Z) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}K(X,K(Y,Z)).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Un calcul similaire donne :

$$\begin{aligned}\nabla_Y^{(\alpha)}\nabla_X^{(\alpha)}Z &= \nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\beta)}Z + \frac{\beta-\alpha}{2}K\left(Y,\nabla_X^{(\beta)}Z\right)\\ &\quad+\frac{\beta-\alpha}{2}\nabla_Y^{(\beta)}K(X,Z) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}K(Y,K(X,Z)).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Finalement, nous avons

$$\nabla_{[X,Y]}^{(\alpha)}Z = \nabla_{[X,Y]}^{(\beta)}Z + \frac{\beta-\alpha}{2}K([X,Y],Z) \tag{2.7}$$

Si on remplace (2.5),(2.6) et (2.7) dans (2.4), on déduit que :

$$\begin{aligned}R^{(\alpha)}(X,Y)Z &= R^{(\beta)}(X,Y)Z + \frac{\beta-\alpha}{2}\nabla_X^{(\beta)}K(Y,Z) - \frac{\beta-\alpha}{2}\nabla_Y^{(\beta)}K(X,Z)\\ &\quad+\frac{\beta-\alpha}{2}K\left(X,\nabla_Y^{(\beta)}Z\right) - \frac{\beta-\alpha}{2}K\left(Y,\nabla_X^{(\beta)}Z\right) - \frac{\beta-\alpha}{2}K([X,Y],Z)\\ &\quad+\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}K(X,K(Y,Z)) - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}K(Y,K(X,Z))\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\nabla_X^{(\beta)} K(Y,Z) = \left(\nabla_X^{(\beta)} K\right)(Y,Z) + K\left(\nabla_X^{(\beta)} Y, Z\right) + K\left(Y, \nabla_X^{(\beta)} Z\right),$$

$$\nabla_Y^{(\beta)} K(X,Z) = \left(\nabla_Y^{(\beta)} K\right)(X,Z) + K\left(\nabla_Y^{(\beta)} X, Z\right) + K\left(X, \nabla_Y^{(\beta)} Z\right)$$

Et

$$K([X,Y],Z) = K\left(\nabla_X^{(\beta)} Y, Z\right) - K\left(\nabla_Y^{(\beta)} X, Z\right),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}(X,Y)Z = R^{(\beta)}(X,Y)Z &+ \frac{\beta-\alpha}{2}\left(\nabla_X^{(\beta)} K\right)(Y,Z) - \frac{\beta-\alpha}{2}\left(\nabla_Y^{(\beta)} K\right)(X,Z) \\ &+ \frac{(\beta-\alpha)^2}{4} K(X,K(Y,Z)) - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4} K(Y,K(X,Z)). \end{aligned}$$

□

Cas particuliers du Théorème 2.1.1, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1. *Soit (M^m, ∇, g) une variété statistique de structure duale $\left(\nabla, \overset{*}{\nabla}, g\right)$. Les relations entre $R^{(\alpha)}$, $\widehat{R}$, R et R^* sont données par :*

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}(X,Y)Z = \widehat{R}(X,Y)Z &- \frac{\alpha}{2}\left(\widehat{\nabla}_X K\right)(Y,Z) + \frac{\alpha}{2}\left(\widehat{\nabla}_Y K\right)(X,Z) \\ &+ \frac{\alpha^2}{4} K(X,K(Y,Z)) - \frac{\alpha^2}{4} K(Y,K(X,Z)), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}(X,Y)Z = R(X,Y)Z &+ \frac{1-\alpha}{2}\left(\nabla_X K\right)(Y,Z) - \frac{1-\alpha}{2}\left(\nabla_Y K\right)(X,Z) \\ &+ \frac{(1-\alpha)^2}{4} K(X,K(Y,Z)) - \frac{(1-\alpha)^2}{4} K(Y,K(X,Z)), \end{aligned} \tag{2.9}$$

et

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}(X,Y)Z = \overset{*}{R}(X,Y)Z &- \frac{1+\alpha}{2}\left(\overset{*}{\nabla}_X K\right)(Y,Z) + \frac{1+\alpha}{2}\left(\overset{*}{\nabla}_Y K\right)(X,Z) \\ &+ \frac{(1+\alpha)^2}{4} K(X,K(Y,Z)) - \frac{(1+\alpha)^2}{4} K(Y,K(X,Z)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Remarque 2.1.2. *Du Théorème 2.1.1, nous pouvons donner d'autres relations :*

1. *La relation entre $R^{(\alpha)}$ et $R^{(-\alpha)}$ est donnée par (voir [9])*

$$R^{(\alpha)}(X,Y)Z = R^{(-\alpha)}(X,Y)Z + \alpha\left(R(X,Y)Z - \overset{*}{R}(X,Y)Z\right).$$

2. *La relation entre $R^{(\alpha)}$, R et R^{*} est donnée par (voir [9])*

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}(X,Y)Z &= \frac{1+\alpha}{2}R(X,Y)Z + \frac{1-\alpha}{2}\overset{*}{R}(X,Y)Z \\ &- \frac{1-\alpha^2}{4}K(X,K(Y,Z)) + \frac{1-\alpha^2}{4}K(Y,K(X,Z)). \end{aligned}$$

Corollaire 2.1.2. *Soit $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ une base orthonormée sur (M^m,g), pour une structure statistique $\left(\nabla,\overset{*}{\nabla},g\right)$ si on note par :*

$$Ricci^{(\alpha)}(X) = Tr_g R^{(\alpha)}(X,\cdot)\cdot = R^{(\alpha)}(X,e_i)e_i,$$

et

$$Ricci^{(\beta)}(X) = Tr_g R^{(\beta)}(X,\cdot)\cdot = R^{(\beta)}(X,e_i)e_i,$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, alors la relation entre $Ricci^{(\alpha)}(X)$ et $Ricci^{(\beta)}(X)$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} Ricci^{(\alpha)}(X) &= Ricci^{(\beta)}(X) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}K(X,E) + \frac{\beta-\alpha}{2}Tr_g\left(\nabla_X^{(\beta)}K\right)(\cdot,\cdot) \\ &- \frac{\beta-\alpha}{2}Tr_g\left(\nabla_{\cdot}^{(\beta)}K\right)(X,\cdot) - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}Tr_g K(K(X,\cdot),\cdot) \end{aligned}$$

où

$$Tr_g\left(\nabla_X^{(\beta)}K\right)(\cdot,\cdot) = \left(\nabla_X^{(\beta)}K\right)(e_i,e_i),$$

$$Tr_g\left(\nabla_{\cdot}^{(\beta)}K\right)(X,\cdot) = \left(\nabla_{e_i}^{(\beta)}K\right)(X,e_i),$$

$$Tr_g K(K(X,\cdot),\cdot) = K(K(X,e_i),e_i),$$

et

$$E = Tr_g K = K(e_i,e_i).$$

En particulier pour $\beta \in \{-1,0,1\}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Ricci^{(\alpha)}(X) &= \widehat{Ricci}(X) + \frac{\alpha^2}{4}K(X,E) - \frac{\alpha}{2}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_X K\right)(\cdot,\cdot) \\ &+ \frac{\alpha}{2}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_{\cdot}K\right)(X,\cdot) - \frac{\alpha^2}{4}Tr_g K(K(X,\cdot),\cdot), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ricci^{(\alpha)}(X) &= Ricci(X) + \frac{(1-\alpha)^2}{4}K(X,E) + \frac{1-\alpha}{2}Tr_g(\nabla_X K)(\cdot,\cdot) \\ &\quad - \frac{1-\alpha}{2}Tr_g(\nabla.K)(X,\cdot) - \frac{(1-\alpha)^2}{4}Tr_g K(K(X,\cdot),\cdot), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Ricci^{(\alpha)}(X) &= \overset{*}{Ricci}(X) + \frac{(1+\alpha)^2}{4}K(X,E) - \frac{1+\alpha}{2}Tr_g\left(\overset{*}{\nabla}_X K\right)(\cdot,\cdot) \\ &\quad + \frac{1+\alpha}{2}Tr_g\left(\overset{*}{\nabla}.K\right)(X,\cdot) - \frac{(1+\alpha)^2}{4}Tr_g K(K(X,\cdot),\cdot). \end{aligned}$$

Exemple 2.1.1. *Soit* $(\mathbb{R}^2, g)$ *une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = dx^2 + dy^2$$

et ∇ *une connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1}e_1 = e_2, \quad \nabla_{e_2}e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = e_1.$$

Où $\left\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *est une une base orthonormée. Un calcul simple nous donne*

$$\overset{*}{\nabla}_{e_1}e_1 = -e_2, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2}e_2 = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_1}e_2 = \overset{*}{\nabla}_{e_2}e_1 = -e_1.$$

On déduit que

$$K(e_1,e_1) = -2e_2, \quad K(e_2,e_2) = 0, \quad K(e_1,e_2) = K(e_2,e_1) = -2e_1,$$

et

$$E = Tr_g K = K(e_1,e_1) + K(e_2,e_2) = -2e_2.$$

Dans ce cas, nous avons

$$\nabla^{(\alpha)}_{e_1}e_1 = \alpha e_2, \quad \nabla^{(\alpha)}_{e_2}e_2 = 0, \quad \nabla^{(\alpha)}_{e_1}e_2 = \nabla^{(\alpha)}_{e_2}e_1 = \alpha e_1,$$

$$R^{(\alpha)}(e_1,e_2)e_2 = -\alpha^2 e_1, \quad R^{(\alpha)}(e_2,e_1)e_1 = -\alpha^2 e_2$$

et

$$Ricci^{(\alpha)}(X) = -\alpha^2 X, \quad Ric^{(\alpha)}(X,Y) = -\alpha^2 g(X,Y), \quad S_g^{(\alpha)} = -2\alpha^2.$$

Alors, $\left(\mathbb{R}^2, \nabla^{(\alpha)}, g\right)$ *est une variété statistique de courbure constante* $(-\alpha^2)$.

Exemple 2.1.2. *Soit* $\left(H^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\right\}, g\right)$ *une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

et soit ∇ *une connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = 2e_2, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_1 = e_1,$$

où $\left\{e_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, e_2 = y\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *est une base orthonormée. Un calcul direct nous donne*

$$\overset{*}{\nabla}_{e_1} e_1 = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_2 = -2e_2, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_1} e_2 = -2e_1, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_1 = -e_1.$$

Donc

$$\nabla^{(\alpha)}_{e_1} e_1 = (1+\alpha)\, e_2, \quad \nabla^{(\alpha)}_{e_2} e_2 = 2\alpha e_2, \quad \nabla^{(\alpha)}_{e_1} e_2 = -(1-\alpha)\, e_1, \quad \nabla^{(\alpha)}_{e_2} e_1 = \alpha e_1.$$

On déduit que :

$$R^{(\alpha)}(e_1, e_2)\, e_2 = \left(\alpha^2 - 1\right) e_1, \quad R^{(\alpha)}(e_2, e_1)\, e_1 = \left(\alpha^2 - 1\right) e_2.$$

Il suit que

$$Ricci^{(\alpha)}(X) = \left(\alpha^2 - 1\right) X, \quad Ric^{(\alpha)}(X, Y) = \left(\alpha^2 - 1\right) g(X, Y), \quad S^{(\alpha)}_g = 2\left(\alpha^2 - 1\right).$$

Dans ce cas, $\left(H^2, \nabla^{(\alpha)}, g\right)$ *est une variété statistique de courbure constante égale à* $\alpha^2 - 1$.

2.2 Les α-connexions, applications harmoniques

Soit $\phi : (M^m, \nabla^M, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^N, h)$ une application entre deux variétés statistiques. On veut définir le champ de tension de $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$. Pour cela, choisissons $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ une base orthonormée sur M. Par définition, nous avons

$$\widehat{\tau}(\phi) = \widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi\left(\widehat{\nabla}^M_{e_i} e_i\right).$$

D'où

$$\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) = \nabla^{(\alpha)}_{e_i} d\phi(e_i) + \frac{\alpha}{2} K^N \alpha\left(d\phi(e_i), d\phi(e_i)\right)$$

et

$$\widehat{\nabla}^M_{e_i} e_i = \nabla^{(\beta)}_{e_i} e_i + \frac{\beta}{2} K^M\left(e_i, e_i\right)$$

Il suit que

$$\widehat{\tau}(\phi) = \nabla^{(\alpha)}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla^{(\beta)}_{e_i} e_i) + \frac{\alpha}{2} K^N \alpha\left(d\phi(e_i), d\phi(e_i)\right) - \frac{\beta}{2} d\phi\left(K^M\left(e_i, e_i\right)\right).$$

On définit $\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ par

$$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = \nabla^{(\alpha)}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi\left(\nabla^{(\beta)}_{e_i} e_i\right),$$

alors, on obtient

$$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = \widehat{\tau}(\phi) - \frac{\alpha}{2} Tr_g(K^N \circ d\phi) + \frac{\beta}{2} Tr_g(d\phi \circ K^M),$$

où

$$Tr_g(d\phi \circ K^M) = d\phi\left(K^M(e_i, e_i)\right),$$

et

$$Tr_g(K^N \circ d\phi) = K^N\left(d\phi(e_i), d\phi(e_i)\right)$$

$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ est appelé le champ de tension de l'application $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$.

Définition 2.2.1. *L'application $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$ est dite harmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si*

$$\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = 0.$$

2.3 α-connections et applications biharmoniques.

2.3.1 Le champ de bi-tension de $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$

Soit $\phi : (M^m, \nabla^M, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^N, h)$ une application entre deux variétés statistiques, nous allons donner l'expression du champ de bi-tension de $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$. Pour tout $V \in \phi^{-1}TN$. On définit

$$Tr_g(\nabla^{\phi(\alpha)})^2 V = \nabla^{\phi(\alpha)}_{e_i}\nabla^{\phi(\alpha)}_{e_i} V - \nabla^{\phi(\alpha)}_{\nabla^{(\beta)}_{e_i} e_i} V,$$

où $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ est une base orthonormée locale sur (M^m, g) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Grâce à la proposition 2.1.1, nous avons

$$\nabla^{\phi(\alpha)}_{e_i}\nabla^{\phi(\alpha)}_{e_i} V = \widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i}\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} V - \frac{\alpha}{2} K^N\left(d\phi(e_i), \widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} V\right) - \frac{\alpha}{2}\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} K^N\left(d\phi(e_i), V\right)$$
$$+\frac{\alpha^2}{4} K^N\left(d\phi(e_i), K^N\left(d\phi(e_i), V\right)\right),$$

et le fait que

$$\left(\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} K^N\right)\left(d\phi(e_i), V\right) = \widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} K^N\left(d\phi(e_i), V\right) - K^N\left(\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i), V\right) - K^N\left(d\phi(e_i), \widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} V\right),$$

on a, donc

$$\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} K^N\left(d\phi(e_i), V\right) = \left(\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} K^N\right)\left(d\phi(e_i), V\right) + K^N\left(\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i), V\right) + K^N\left(d\phi(e_i), \widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} V\right).$$

Il suit que

$$\nabla^{\phi(\alpha)}_{e_i}\nabla^{\phi(\alpha)}_{e_i} V = \widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i}\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} V - \frac{\alpha}{2}\left(\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} K^N\right)\left(d\phi(e_i), V\right) - \frac{\alpha}{2} K^N\left(\widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i), V\right)$$
$$-\alpha K^N\left(d\phi(e_i), \widehat{\nabla}^{\phi}_{e_i} V\right) + \frac{\alpha^2}{4} K^N\left(d\phi(e_i), K^N\left(d\phi(e_i), V\right)\right).$$

Pour le terme $\nabla^{\phi(\alpha)}_{\nabla^{(\beta)}_{e_i} e_i} V$, il est simple de voir que

$$\nabla^{\phi(\alpha)}_{\nabla^{(\beta)}_{e_i} e_i} V = \widehat{\nabla}^{\phi}_{\widehat{\nabla}_{e_i} e_i} V - \frac{\alpha}{2} K^N\left(d\phi(\widehat{\nabla}_{e_i} e_i), V\right)$$
$$-\frac{\beta}{2}\widehat{\nabla}^{\phi}_{E} V + \frac{\alpha\beta}{4} K^N\left(d\phi(E), V\right),$$

où

$$E = Tr_g K^M = K^M(e_i, e_i).$$

Nous déduisons que

$$
\begin{aligned}
Tr_g(\nabla^{(\alpha)})^2 V &= Tr_g(\widehat{\nabla})^2 V - \tfrac{\alpha}{2} Tr_g(\widehat{\nabla}_{d\phi(.)} K^N)(d\phi(.), V) \\
&- \tfrac{\alpha}{2} K^N(\widehat{\tau}(\phi), V) - \alpha Tr_g K^N(d\phi(.), \widehat{\nabla}^{\phi} V) \\
&+ \tfrac{\alpha^2}{4} Tr_g K^N\left(d\phi(.), K^N\left(d\phi(.), V\right)\right) \\
&+ \tfrac{\beta}{2} \widehat{\nabla}^{\phi}_E V - \tfrac{\alpha\beta}{4} K^N\left(d\phi(E), V\right).
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Par le théorème 2.1.1, on obtient

$$
\begin{aligned}
Tr_g R^{(\alpha)}(V, d\phi(.))d\phi(.) &= R^{(\alpha)}(V, d\phi(e_i))d\phi(e_i) \\
&= Tr_g \widehat{R}(V, d\phi(.))d\phi(.) - \tfrac{\alpha}{2} Tr_g\left(\widehat{\nabla}_V K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) \\
&+ \tfrac{\alpha}{2} Tr_g\left(\widehat{\nabla}_\phi K^N\right)(V, d\phi(.)) + \tfrac{\alpha^2}{4} Tr_g K^N\left(V, K^N\left(d\phi(.), d\phi(.)\right)\right) \\
&- \tfrac{\alpha^2}{4} Tr_g K^N\left(d\phi(.), K^N\left(V, d\phi(.)\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Si nous sommons les deux équations (2.11) et (2.12), nous concluons que

$$
\begin{aligned}
Tr_g(\nabla^{(\alpha)})^2 V + Tr_g R^{(\alpha)}(V, d\phi(.))d\phi(.) &= Tr_g(\widehat{\nabla})^2 V + Tr_g \widehat{R}(V, d\phi(.))d\phi(.) \\
&- \tfrac{\alpha}{2} K^N(\widehat{\tau}(\phi), V) - \alpha Tr_g K^N(d\phi(.), \widehat{\nabla}^{\phi} V) \\
&+ \tfrac{\alpha^2}{4} Tr_g K^N\left(V, (K^N \circ d\phi)(.,.)\right) \\
&- \tfrac{\alpha}{2} Tr_g\left(\widehat{\nabla}_V K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) \\
&+ \tfrac{\beta}{2} \widehat{\nabla}^{\phi}_E V - \tfrac{\alpha\beta}{4} K^N\left(d\phi(E), V\right)
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

On définit $\tau_2(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ par

$$
\tau_2(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = -Tr_g(\nabla^{\phi(\alpha)})^2 \tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})
$$

$$
-Tr_g R^{(\alpha)}\left(\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}), d\phi(.)\right) d\phi(.)
$$

En utilisant le fait que

$$
\tau(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)}) = \widehat{\tau}(\phi) - \frac{\alpha}{2} F + \frac{\beta}{2} d\phi(E),
$$

où

$$
F = Tr_g(K^N \circ d\phi), \qquad E = Tr_g K^M,
$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\tau_2(\phi,\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)}) &= \widehat{\tau}_2(\phi)+\tfrac{\alpha}{2}K^N(\widehat{\tau}(\phi),\widehat{\tau}(\phi))+\alpha Tr_g K^N\left(d\phi(.),\widehat{\nabla}^\phi\widehat{\tau}(\phi)\right)\\
&+ \tfrac{\alpha}{2}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_{\widehat{\tau}(\phi)}K^N\right)(d\phi(.),d\phi(.))-\tfrac{\alpha^2}{4}K^N(\widehat{\tau}(\phi),F)\\
&- \tfrac{\beta}{2}\widehat{\nabla}^\phi_E\widehat{\tau}(\phi)+\tfrac{\alpha\beta}{4}K^N\left(d\phi(E),\widehat{\tau}(\phi)\right)+\tfrac{\alpha}{2}Tr_g(\widehat{\nabla}^\phi)^2F\\
&+ \tfrac{\alpha}{2}Tr_g\widehat{R}\left(F,d\phi(.)\right)d\phi(.)-\tfrac{\alpha^2}{4}K^N(\widehat{\tau}(\phi),F)\\
&- \tfrac{\alpha^2}{2}Tr_gK^N\left(d\phi(.),\widehat{\nabla}^\phi F\right)-\tfrac{\alpha^2}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_FK^N\right)(d\phi(.),d\phi(.))\\
&+ \tfrac{\alpha^3}{8}K^N(F,F)+\tfrac{\alpha\beta}{4}\widehat{\nabla}^\phi_EF-\tfrac{\alpha^2\beta}{8}K^N\left(d\phi(E),F\right)\\
&- \tfrac{\beta}{2}Tr_g(\widehat{\nabla}^\phi)^2d\phi(E)-\tfrac{\beta}{2}Tr_g\widehat{R}\left(d\phi(E),d\phi(.)\right)d\phi(.)\\
&+ \tfrac{\alpha\beta}{4}K^N\left(\widehat{\tau}(\phi),d\phi(E)\right)+\tfrac{\alpha\beta}{2}Tr_gK^N\left(d\phi(.),\widehat{\nabla}^\phi d\phi(E)\right)\\
&+ \tfrac{\alpha\beta}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_{d\phi(E)}K^N\right)(d\phi(.),d\phi(.))-\tfrac{\alpha^2\beta}{8}Tr_gK^N\left(d\phi(E),F\right)\\
&- \tfrac{\beta^2}{4}\widehat{\nabla}^\phi_Ed\phi(E)+\tfrac{\alpha\beta^2}{8}K^N\left(d\phi(E),d\phi(E)\right),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

avec

$$\widehat{\tau}_2(\phi)=-Tr_g\left(\widehat{\nabla}^\phi\right)^2\widehat{\tau}(\phi)-Tr_g\widehat{R}\left(\widehat{\tau}(\phi),d\phi(.)\right)d\phi(.).$$

Définition 2.3.1. *Soit $\phi:(M^m,\nabla^M,g)\longrightarrow(N^n,\nabla^N,h)$ une application entre deux variétés statistiques. On définit $\tau_2(\phi,\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)})$le champ de bi-tension de $\phi:(M^m,\nabla^{(\beta)},g)\longrightarrow(N^n,\nabla^{(\alpha)},h)$ par*

$$\begin{aligned}
\tau_2(\phi,\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)}) &= -Tr_g(\nabla^{\phi(\alpha)})^2\tau(\phi,\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)})\\
&\quad -Tr_gR^{(\alpha)}\left(\tau(\phi,\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)}),d\phi(.)\right)d\phi(.)
\end{aligned}$$

et $\phi:(M^m,\nabla^{(\beta)},g)\longrightarrow(N^n,\nabla^{(\alpha)},h)$ est dite biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)})$ si

$$\tau_2(\phi,\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)})=0$$

.

Théorème 2.3.1. *Soit $\phi : (M^m, \nabla^M, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^N, h)$ une application entre deux variétés statistiques. En utilisant l'expression de $\tau_2(\phi, \nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$, on déduit que $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$ est biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si et seulement si*

$$\begin{aligned}
& \widehat{\tau}_2(\phi) + \tfrac{\alpha}{2} K^N(\widehat{\tau}(\phi), \widehat{\tau}(\phi)) + \alpha Tr_g K^N \left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi \widehat{\tau}(\phi)\right) \\
+ \quad & \tfrac{\alpha}{2} Tr_g \left(\widehat{\nabla}_{\widehat{\tau}(\phi)} K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) - \tfrac{\alpha^2}{4} K^N(\widehat{\tau}(\phi), F) \\
- \quad & \tfrac{\beta}{2} \widehat{\nabla}^\phi_E \widehat{\tau}(\phi) + \tfrac{\alpha\beta}{4} K^N(d\phi(E), \widehat{\tau}(\phi)) + \tfrac{\alpha}{2} Tr_g (\widehat{\nabla}^\phi)^2 F \\
+ \quad & \tfrac{\alpha}{2} Tr_g \widehat{R}(F, d\phi(.))\, d\phi(.) - \tfrac{\alpha^2}{4} K^N(\widehat{\tau}(\phi), F) \\
- \quad & \tfrac{\alpha^2}{2} Tr_g K^N \left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi F\right) - \tfrac{\alpha^2}{4} Tr_g \left(\widehat{\nabla}_F K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) \\
+ \quad & \tfrac{\alpha^3}{8} K^N(F, F) + \tfrac{\alpha\beta}{4} \widehat{\nabla}^\phi_E F - \tfrac{\alpha^2\beta}{8} K^N(d\phi(E), F) \\
- \quad & \tfrac{\beta}{2} Tr_g (\widehat{\nabla}^\phi)^2 d\phi(E) - \tfrac{\beta}{2} Tr_g \widehat{R}(d\phi(E), d\phi(.))\, d\phi(.) \\
+ \quad & \tfrac{\alpha\beta}{4} K^N(\widehat{\tau}(\phi), d\phi(E)) + \tfrac{\alpha\beta}{2} Tr_g K^N \left(d\phi(.), \widehat{\nabla}^\phi d\phi(E)\right) \\
+ \quad & \tfrac{\alpha\beta}{4} Tr_g \left(\widehat{\nabla}_{d\phi(E)} K^N\right)(d\phi(.), d\phi(.)) - \tfrac{\alpha^2\beta}{8} Tr_g K^N(d\phi(E), F) \\
- \quad & \tfrac{\beta^2}{4} \widehat{\nabla}^\phi_E d\phi(E) + \tfrac{\alpha\beta^2}{8} K^N(d\phi(E), d\phi(E)) = 0.
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.1. *Dans le cas où $\alpha = \beta = 0$, nous obtenons les notions d'applications harmoniques et applications biharmoniques relativement aux connexions de Levi-Civita.*

2.3.2 La biharmonicité de l'application $Id : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (M^m, \nabla^{(\alpha)}, g)$

Si on suppose que l'application ϕ est harmonique relativement aux connexions de Lévi-Civita, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.3.1. *Soit $\phi : (M^m, \nabla^M, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^N, h)$ une application entre deux variétés statistiques. Si ϕ est harmonique relativement aux connexions de Lévi-Civita, c'est à dire $\widehat{\tau}(\phi) = 0$, alors $\phi : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (N^n, \nabla^{(\alpha)}, h)$ est biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si et seulement si*

$$\tfrac{\alpha}{2}Tr_g\left(\widehat{\nabla}^{\phi}\right)^2 F+\tfrac{\alpha^3}{8}K^N(F,F)-\tfrac{\alpha^2\beta}{8}K^N\left(d\phi(E),F\right)$$

$$-\tfrac{\beta}{2}Tr_g\left(\widehat{\nabla}^{\phi}\right)^2 d\phi(E)+\tfrac{\alpha}{2}Tr_g\widehat{R}\left(F,d\phi(.)\right)d\phi(.)-\tfrac{\beta^2}{4}\widehat{\nabla}^{\phi}_E d\phi(E)$$

$$-\tfrac{\beta}{2}Tr_g\widehat{R}\left(d\phi(E),d\phi(.)\right)d\phi(.)-\tfrac{\alpha^2}{2}Tr_gK^N\left(d\phi(.),\widehat{\nabla}^{\phi}F\right)$$

$$-\tfrac{\alpha^2}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_F K^N\right)\left(d\phi(.),d\phi(.)\right)+\tfrac{\alpha\beta}{2}Tr_gK^N\left(d\phi(.),\widehat{\nabla}^{\phi}d\phi(E)\right)$$

$$-\tfrac{\alpha^2\beta}{8}Tr_gK^N\left(d\phi(E),F\right)+\tfrac{\alpha\beta}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_{d\phi(E)}K^N\right)\left(d\phi(.),d\phi(.)\right)+\tfrac{\alpha\beta}{4}\widehat{\nabla}^{\phi}_E F$$

$$+\tfrac{\alpha\beta^2}{8}K^N\left(d\phi(E),d\phi(E)\right)=0.$$

En particulier, si ϕ est l'application identité, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.2. *Soient (M^m,∇^M,g) une variété statistique et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ où $\alpha\neq\beta$. Alors, l'application identité $Id:(M^m,\nabla^{(\beta)},g)\longrightarrow(M^m,\nabla^{(\alpha)},g)$ est biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)})$ si et seulement si*

$$Tr_g(\widehat{\nabla})^2E+\widehat{Ricci}(E)+\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{4}K(E,E)$$

$$-\frac{\alpha-\beta}{2}\widehat{\nabla}_E E+\alpha Tr_gK([E,.],.)=0,$$

où

$$\widehat{Ricci}(E)=Tr_g\widehat{R}(E,.).$$

Démonstration. Par le théorème 2.3.1, l'application $Id:(M^m,\nabla^{(\beta)},g)\longrightarrow(M^m,\nabla^{(\alpha)},g)$ est biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)},\nabla^{(\alpha)})$ si et seulement si

$$\frac{\alpha-\beta}{2}Tr_g\left(\widehat{\nabla}\right)^2E+\frac{\alpha-\beta}{2}Tr_g\widehat{R}(E,.).+\frac{\alpha(\alpha-\beta)^2}{8}K(E,E)$$

$$+\frac{\beta(\alpha-\beta)}{4}\widehat{\nabla}_E E-\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{2}Tr_gK(.,\widehat{\nabla}_. E)$$

$$-\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{4}Tr_g\left(\widehat{\nabla}_E K\right)(.,.)=0.$$

Utilisons le fait que

$$Tr_gK(.,\widehat{\nabla}_. E)=K\left(e_i,\widehat{\nabla}_{e_i}E\right)$$

et

$$Tr_g\left(\widehat{\nabla}_E K\right)(.,.)=\left(\widehat{\nabla}_E K\right)(e_i,e_i)=\widehat{\nabla}_E E-2K\left(\widehat{\nabla}_E e_i,e_i\right)$$

Nous déduisons que l'application $Id : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (M^m, \nabla^{(\alpha)}, g)$ est biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si et seulement si

$$Tr_g(\widehat{\nabla})^2 E + \widehat{Ricci}(E) + \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{4} K(E,E)$$
$$-\frac{\alpha-\beta}{2}\widehat{\nabla}_E E + \alpha Tr_g K([E,.],.) = 0$$

$\square$

Exemple 2.3.1. *Soit* $(\mathbb{R}^2, g)$ *une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = dx^2 + dy^2$$

et ∇ *la connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1} e_1 = e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = e_1$$

Où $\left\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *est une une base orthonormée. Un simple calcul nous donne*

$$\overset{*}{\nabla}_{e_1} e_1 = -e_2, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_2 = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_1} e_2 = \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_1 = -e_1.$$

On déduit que :

$$K(e_1, e_1) = -2e_2, \quad K(e_2, e_2) = 0, \quad K(e_1, e_2) = K(e_2, e_1) = -2e_1$$

alors,

$$E = Tr_g K = K(e_1, e_1) + K(e_2, e_2) = -2e_2.$$

Dans ce cas, l'application identité $Id : (\mathbb{R}^2, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \nabla^{(\alpha)}, g)$ *est toujours biharmonique non-harmonique relativement à* $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$*, pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *où* $\alpha \neq \beta$.

Exemple 2.3.2. *Soit* $\left(H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}, g\right)$ *une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

et ∇ *la connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = 2e_2, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_1 = e_1,$$

où $\left\{e_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, e_2 = y\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *est une structure orthonormée . un long calcul donne*

$$\overset{*}{\nabla}_{e_1} e_1 = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_2 = -2e_2, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_1} e_2 = -2e_1, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_1 = -e_1.$$

Dans ce cas, on a

$$K(e_1, e_1) = -2e_2, \quad K(e_2, e_2) = -4e_2, \quad E = -6e_2.$$

Alors, l'application identité $Id : (H^2, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (H^2, \nabla^{(\alpha)}, g)$ *n'est jamais harmonique relativement à* $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$*, pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *où* $\alpha \neq \beta$*. En utilisant le corollaire 2.3.1, on déduit que* $Id : (H^2, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (H^2, \nabla^{(\alpha)}, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ *si et seulement si* α *et* β *sont solutions de l'équation algébrique suivante :*

$$3\alpha^2 - \alpha - 3\alpha\beta - 1 = 0,$$

ce qui nous donne la condition suivante :

$$\beta = \frac{3\alpha^2 - \alpha - 1}{3\alpha}$$

Exemple 2.3.3. *Soit* $(\mathbb{R}^3, g)$ *une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = \sum_{i=1}^{3} de_i de_i$$

et soit ∇ *la connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1} e_1 = be_1, \quad \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_3} e_3 = \frac{b}{2} e_1, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = \frac{b}{2} e_2$$

$$\nabla_{e_1} e_3 = \nabla_{e_3} e_1 = \frac{b}{2} e_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_2 = 0$$

Où $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une base orthonormée et* b *est une constante non-nulle. Après un calcul, on obtient*

$$\overset{*}{\nabla}_{e_1} e_1 = -be_1, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_2 = \overset{*}{\nabla}_{e_3} e_3 = -\frac{b}{2} e_1, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_1} e_2 = \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_1 = -\frac{b}{2} e_2$$

$$\overset{*}{\nabla}_{e_1} e_3 = \overset{*}{\nabla}_{e_3} e_1 = -\frac{b}{2} e_3, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_3 = \overset{*}{\nabla}_{e_3} e_2 = 0$$

On déduit que :

$$K(e_1,e_1) = \overset{*}{\nabla}_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}e_1 = -2be_1$$

$$K(e_2,e_2) = \overset{*}{\nabla}_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}e_2 = -be_1$$

$$K(e_3,e_3) = \overset{*}{\nabla}_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}e_3 = -be_1$$

Donc,

$$E = Tr_g K = K(e_1,e_1) + K(e_2,e_2) + K(e_3,e_3) = -4be_1$$

En utilisant le corollaire 2.3.1, on déduit que $Id : (\mathbb{R}^3, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \nabla^{(\alpha)}, g)$ *est biharmonique non-harmonique relativement à* $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ *si et seulement si* $\alpha = 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}^*$.

En se basant sur les formules suivantes :

$$\begin{aligned} Tr_g\left(\widehat{\nabla}\right)^2 E &= Tr_g\nabla^2 E - \tfrac{1}{2}\nabla_E E - \tfrac{1}{4}K(E,E) + \tfrac{1}{2}Tr_g\left(\nabla_. K\right)(E,.) \\ &+ Tr_g K\left(\nabla_. E,.\right) + \tfrac{1}{4}Tr_g K\left(K(E,.),.\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{Ricci}(E) &= Ricci(E) + \tfrac{1}{4}K(E,E) + \tfrac{1}{2}Tr_g\left(\nabla_E K\right)(.,.) \\ &- \tfrac{1}{2}Tr_g\left(\nabla_. K\right)(E,.) - \tfrac{1}{4}Tr_g K\left(K(E,.),.\right), \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\nabla}_E E = \nabla_E E + \frac{1}{2}K(E,E),$$

où

$$Tr_g\nabla^2 E = \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}E - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}E$$

et

$$Ricci(E) = Tr_g R(E,.).$$

On a le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.3. *Soit* (M^m, ∇^M, g) *une variété statistique et soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *avec* $\alpha \neq \beta$. *L'application* $Id : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (M^m, \nabla^{(\alpha)}, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ *si et seulement si*

$$\begin{gathered} Tr_g\nabla^2 E + Ricci(E) + \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}K(E,E) \\ -\frac{\alpha-\beta}{2}\nabla_E E + (\alpha-1)Tr_g K([E,.],.) = 0. \end{gathered}$$

La même méthode de calcul nous donne une autre version de la biharmonicité de l'application identité.

Corollaire 2.3.4. *Soit (M^m, ∇^M, g) une variété statistique et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq \beta$. Alors, l'application identité $Id : (M^m, \nabla^{(\beta)}, g) \longrightarrow (M^m, \nabla^{(\alpha)}, g)$ est biharmonique relativement à $(\nabla^{(\beta)}, \nabla^{(\alpha)})$ si et seulement si*

$$Tr_g \left(\overset{*}{\nabla}\right)^2 E + \overset{*}{Ricci}(E) + \frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{4} K(E,E)$$
$$-\frac{\alpha-\beta}{2} \overset{*}{\nabla}_E E + (\alpha+1) Tr_g K([E,.],.) = 0,$$

où

$$Tr_g \left(\overset{*}{\nabla}\right)^2 E = \overset{*}{\nabla}_{e_i} \overset{*}{\nabla}_{e_i} E - \overset{*}{\nabla}_{\overset{*}{\nabla}_{e_i} e_i} E$$

et

$$\overset{*}{Ricci}(E) = Tr_g \overset{*}{R}(E,.).,$$

Grâce au corollaire 2.3.1, nous pouvons donner quelques cas particuliers où $\alpha, \beta \in \{-1, 0, 1\}$.

Remarque 2.3.2. *Dans le cas où α et β prennent les valeurs -1 et 1, on a :*

1. *L'application identité $Id : (M^m, \overset{*}{\nabla}, g) \longrightarrow (M^m, \nabla, g)$ est biharmonique relativement à $(\overset{*}{\nabla}, \nabla)$ si et seulement si*

$$Tr_g \left(\widehat{\nabla}\right)^2 E + \widehat{Ricci}(E) + \frac{1}{2} K(E,E) - \widehat{\nabla}_E E + Tr_g K([E,.],.) = 0$$

2. *L'application identité $Id : (M^m, \nabla, g) \longrightarrow (M^m, \overset{*}{\nabla}, g)$ est biharmonique relativement à $(\nabla, \overset{*}{\nabla})$ si et seulement si*

$$Tr_g \left(\widehat{\nabla}\right)^2 E + \widehat{Ricci}(E) + \frac{1}{2} K(E,E) + \widehat{\nabla}_E E - Tr_g K([E,.],.) = 0$$

Remarque 2.3.3. *En regardant le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = \pm 1$, on obtient :*

1. *L'application identité $Id : (M^m, \nabla, g) \longrightarrow (M^m, \widehat{\nabla}, g)$ est biharmonique relativement à $(\nabla, \widehat{\nabla})$ si et seulement si*

$$Tr_g \left(\widehat{\nabla}\right)^2 E + \widehat{Ricci}(E) + \frac{1}{2} \widehat{\nabla}_E E = 0$$

2. *L'application identité* $Id : (M^m, \overset{*}{\nabla}, g) \longrightarrow (M^m, \widehat{\nabla}, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\overset{*}{\nabla}, \widehat{\nabla})$ *si et seulement si*

$$Tr_g\left(\widehat{\nabla}\right)^2 E + \widehat{Ricci}(E) - \frac{1}{2}\widehat{\nabla}_E E = 0$$

Remarque 2.3.4. *Enfin, le cas où* $\alpha = \pm 1$ *et* $\beta = 0$, *nous donne :*

1. *L'application identité* $Id : (M^m, \widehat{\nabla}, g) \longrightarrow (M^m, \nabla, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\widehat{\nabla}, \nabla)$ *si et seulement si*

$$Tr_g\left(\widehat{\nabla}\right)^2 E + \widehat{Ricci}(E) + \frac{1}{4}K(E,E) - \frac{1}{2}\widehat{\nabla}_E E + Tr_g K([E,.],.) = 0$$

2. *L'application identité* $Id : (M^m, \widehat{\nabla}, g) \longrightarrow (M^m, \overset{*}{\nabla}, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\widehat{\nabla}, \overset{*}{\nabla})$ *si et seulement si*

$$Tr_g\left(\widehat{\nabla}\right)^2 E + \widehat{Ricci}(E) + \frac{1}{4}K(E,E) + \frac{1}{2}\widehat{\nabla}_E E - Tr_g K([E,.],.) = 0$$

Chapitre 3

Structures conformément équivalentes et applications biharmoniques.

3.1 Rappel sur la déformation conforme d'une métrique riemannienne.

Les applications biharmoniques sont solutions d'un système elliptique non linéaire d'ordre quatre. En général, c'est un système très difficile à résoudre même dans le cas le plus simple, par exemple les courbes biharmoniques non-harmoniques dans les surfaces, il est alors très intéressant de construire des applications biharmoniques non-harmoniques. Il existe plusieurs résultats concernant l'étude de telles applications. Une manière naturelle de lever cette difficulté est de déformer conformément les métriques de départ ou d'arrivée pour construire une application biharmonique non-harmonique par rapport à cette nouvelle métrique.

3.1.1 La déformation conforme de la métrique de départ.

Soit (M^m, g) et $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ une métrique conformément équivalente à g, $\gamma \in C^\infty(M)$. La relation entre $\widetilde{\nabla}$ et ∇ est donnée par l'équation suivante (voir [3])

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\gamma)Y + Y(\gamma)X - g(X,Y) grad\gamma$$

où ∇ et $\widetilde{\nabla}$ sont respectivement les connexions sur M associées à g et $\widetilde{g}$. On choisit $\{e_i\}_{i=1}^m$ comme base orthonormée locale sur (M^m, g), alors une base orthonormée sur $(M^m, \widetilde{g} = e^{2\gamma} g)$ est donnée par $\{\widetilde{e_i} = e^{-\gamma} e_i\}_{i=1}^m$. On a :

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i = \nabla_{e_i} e_i - (m-2) grad\gamma$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e_i}} \widetilde{e_i} = e^{-2\gamma} g \left(\nabla_{e_i} e_i - (m-1) grad\gamma\right)$$

Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application différentiable, on a :

$$\widetilde{\tau}(\phi) = e^{-2\gamma} \left(\tau(\phi) + (m-2) d\phi \left(grad\gamma\right)\right),$$

où $\widetilde{\tau}(\phi)$ désigne le champ de tension de l'application ϕ par rapport à $\widetilde{g}$. Dans un premier résultat, nous rappelons la relation entre $\widetilde{\tau}_2(\phi)$ et $\tau_2(\phi)$.

Théorème 3.1.1. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application différentiable et soit $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ une métrique conformément équivalente à g. Alors, la relation entre $\widetilde{\tau}_2(\phi)$ et $\tau_2(\phi)$ est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_2(\phi) &= e^{-4\gamma} \left\{\tau_2(\phi) + 2(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2)\tau(\phi) - (m-6)\nabla^{\phi}_{grad\gamma}\tau(\phi)\right\} \\
&- (m-2)e^{-4\gamma} \left(Tr_g \left(\nabla\right)^2 d\phi \left(grad\gamma\right) + (m-6)\nabla^{\phi}_{grad\gamma} d\phi \left(grad\gamma\right)\right) \\
&+ 2(m-2)e^{-4\gamma} \left(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2\right) d\phi \left(grad\gamma\right) \\
&- (m-2)e^{-4\gamma} Tr_g R^N (d\phi \left(grad\gamma\right), d\phi) d\phi.
\end{aligned}$$

P. Baird et D. Kamissoko ont construit de telles applications en déformant conformément la métrique de départ **g**. Ils considèrent l'application identité $Id : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ qui est harmonique, puis si $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ où $\gamma \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est une métrique conforme à **g**, ils donnent une condition necessaire et suffisante sur γ pour que l'application identité $Id : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ soit biharmonique. Plus précisément, ils obtiennent :

Théorème 3.1.2. *Soit (M^m, g) une variété riemannienne et soit $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ un changement conforme de la métrique g, alors l'application identité $Id : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (M^m, g)$ est biharmonique si et seulement si γ vérifie l'équation différentielle suivante :*

$$Tr_g \nabla^2 grad\gamma + (m-6)\nabla_{grad\gamma} grad\gamma - 2\left(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2\right) grad\gamma$$

$$+Ricci^M(grad\gamma) = 0.$$

3.1.2 La déformation conforme de la métrique d'arrivée.

Nous allons rappeler dans cette partie quelques résultats connus. Comme premier résultat, on donne le champ de tension d'une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ après déformation conforme de la métrique d'arrivée.

Proposition 3.1.1. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et soit $\widetilde{h} = e^{2\gamma} h$ une métrique conformément équivalente à h, alors le champ de tension de $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, \widetilde{h})$ est égal à*

$$\widetilde{\tau}(\phi) = \tau(\phi) + 2d\phi\left(grad(\gamma \circ \phi)\right) - |d\phi|^2 (grad\gamma) \circ \phi$$

Proposition 3.1.2. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, on note par R^N la courbure riemannienne associée à la variété (N^n, h) et par $\widetilde{R}^N$ la courbure riemannienne associée à la variété $(N^n, \widetilde{h} = e^{2\gamma} h)$, pour tous $X, Y \in \Gamma(TN)$, on a :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^N(X,Y)Z &= R^N(X,Y)Z + X(\gamma)Z(\gamma)Y + Y(\gamma)Z(\gamma)X - X(\gamma)h(Y,Z)grad\gamma \\
&- Y(\gamma)h(X,Z)grad\gamma + h(X,Z)|grad\gamma|^2 Y - h(Y,Z)|grad\gamma|^2 X \\
&+ h(\nabla_X grad\gamma, Z)Y - h(\nabla_Y grad\gamma, Z)X \\
&+ h(X,Z)\nabla_Y grad\gamma - h(Y,Z)\nabla_X grad\gamma.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation permet de donner l'effet d'une déformation conforme de la métrique sur la courbure de Ricci.

Proposition 3.1.3. *Soit (N^n, h) une variété riemannienne. Une déformation conforme de la métrique h en $\widetilde{h} = e^{2\gamma}h$ transforme la courbure de Ricci suivant la formule suivante :*

$$\begin{aligned}\widetilde{Ricci}^N(X) &= e^{-2\gamma}\Big(Ricci^N(X) - (\Delta\gamma)X\Big)\\ &+ (n-2)e^{-2\gamma}\left(grad\gamma d\gamma(X) - \nabla_X grad\gamma - ||grad\gamma||^2 X\right).\end{aligned}$$

A. Balmus a présenté une méthode de construction en déformant conformément la métrique d'arrivée. Elle considère l'application identité $Id : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ qui est harmonique, puis si $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$ où $\gamma \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est une métrique conforme à g, elle donne une condition nécessaire et suffisante sur γ pour que l'application identité $Id : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, \widetilde{g})$ soit biharmonique. Elle obtient le résultat suivant :

Théorème 3.1.3. *Soit $Id : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ l'application identité et $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$ une métrique conformément équivalente à g. Alors, $Id : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, \widetilde{g})$ est biharmonique si et seulement si*

$$\begin{gathered} grad(\Delta\gamma) + \frac{6-m}{2} grad(|grad\gamma|^2) - 2\Big(\Delta\gamma + (m-2)|grad\gamma|^2\Big)\, grad\gamma \\ + 2Ricci^M(grad\gamma) = 0.\end{gathered}$$

Ces formules ont permis de construire beaucoup d'exemples d'applications biharmoniques non-harmoniques et qui ont fait l'objet de plusieurs articles.

3.2 Quelques résultats sur les structures conformément équivalentes.

Définition 3.2.1. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, deux variétés statistiques (M, ∇, g) et $(M, \overline{\nabla}, \overline{g})$ sont dites α-conformément équivalentes s'il existe une fonction γ sur M telles que les métriques riemanniennes $\overline{g}$ et g sont liées par la relation suivante :*

$$\overline{g}(X, Y) = e^{2\gamma}g(X, Y) \tag{3.1}$$

et pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, la connexion $\overline{\nabla}$ est donnée par :

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-\alpha)Y(\gamma)X + (1-\alpha)X(\gamma)Y - (1+\alpha)g(X, Y)grad\gamma \tag{3.2}$$

Remarque 3.2.1. *En utilisant le fait que* $\nabla_X Y = \widehat{\nabla}_X Y - \frac{1}{2} K(X,Y)$, *nous obtenons :*

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X Y &= \widehat{\nabla}_X Y + (1-\alpha) Y(\gamma) X + (1-\alpha) X(\gamma) Y \\ &- (1+\alpha) g(X,Y)\, grad\gamma - \tfrac{1}{2} K(X,Y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Comme premier résultat dans cette section, nous allons établir la relation entre $\overline{R}$ le tenseur de courbure sur la variété $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g})$ et $\widehat{R}$ le tenseur de courbure associé à la connexion de Lévi-Civita sur la variété (M^m, g).

Théorème 3.2.1. *[1] Soient* (M, ∇, g) *et* $(M, \overline{\nabla}, \overline{g})$ *deux variétés statistiques* α*-conformément équivalentes. La relation entre* $\overline{R}$ *et* $\widehat{R}$ *les tenseurs de courbure associés respectivement aux connexions* $\overline{\nabla}$ *et de Lévi-Civita est :*

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z &= \widehat{R}(X,Y)Z - (1+\alpha)g(Y,Z)\widehat{\nabla}_X grad\gamma + (1+\alpha)g(X,Z)\widehat{\nabla}_Y grad\gamma \\ &+ (1+\alpha)^2 g(Y,Z)X(\gamma)grad\gamma - (1+\alpha)^2 g(X,Z)Y(\gamma)grad\gamma \\ &+ \tfrac{1+\alpha}{2} g(Y,Z) K(X, grad\gamma) - \tfrac{1+\alpha}{2} g(X,Z) K(Y, grad\gamma) \\ &+ (1-\alpha)^2 Y(\gamma)Z(\gamma)X - (1-\alpha^2)g(Y,Z)|grad\gamma|^2 X \\ &- (1-\alpha)^2 X(\gamma)Z(\gamma)Y + (1-\alpha^2)g(X,Z)|grad\gamma|^2 Y \\ &- (1-\alpha)\, g\left(\widehat{\nabla}_Y grad\gamma, Z\right) X - \tfrac{1-\alpha}{2} K(Y,Z)(\gamma) X \\ &+ (1-\alpha)\, g\left(\widehat{\nabla}_X grad\gamma, Z\right) Y + \tfrac{1-\alpha}{2} K(X,Z)(\gamma) Y \\ &- \tfrac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_X K\right)(Y,Z) + \tfrac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_Y K\right)(X,Z) \\ &+ \tfrac{1}{4} K(X, K(Y,Z)) - \tfrac{1}{4} K(Y, K(X,Z)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Démonstration. Par définition, on a :

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z. \tag{3.5}$$

Nous allons étudier terme par terme le membre droit de cette dernière équation .De (3.3), on obtient :

$$\overline{\nabla}_Y Z = \widehat{\nabla}_Y Z + (1-\alpha) Z(\gamma) Y + (1-\alpha) Y(\gamma) Z$$

$$- (1+\alpha) g(Y,Z)\, grad\gamma - \frac{1}{2} K(Y,Z),$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z + (1-\alpha)\,\overline{\nabla}_X Z(\gamma)\,Y \\
&- (1-\alpha)\,\overline{\nabla}_X Y(\gamma)\,Z - (1+\alpha)\,\overline{\nabla}_X g(Y,Z)\,grad\gamma - \tfrac{1}{2}\overline{\nabla}_X K(Y,Z)\,.
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.3), on déduit que :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z &= \widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z + (1-\alpha)\left(\widehat{\nabla}_Y Z\right)(\gamma)\,X + (1-\alpha)\,X(\gamma)\,\widehat{\nabla}_Y Z \\
&- (1+\alpha)\,g\left(X,\widehat{\nabla}_Y Z\right) grad\gamma - \tfrac{1}{2}K\left(X,\widehat{\nabla}_Y Z\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Z(\gamma)\,Y &= Z(\gamma)\,\widehat{\nabla}_X Y + (1-\alpha)\,Y(\gamma)\,Z(\gamma)\,X \\
&+ (1-\alpha)\,X(\gamma)\,Z(\gamma)\,Y - (1+\alpha)\,g(X,Y)\,Z(\gamma)\,grad\gamma \\
&- \tfrac{1}{2}Z(\gamma)\,K(X,Y) + g\left(\widehat{\nabla}_X grad\gamma, Z\right)Y + g\left(grad\gamma,\widehat{\nabla}_X Z\right)Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y(\gamma)\,Z &= Y(\gamma)\,\widehat{\nabla}_X Z + (1-\alpha)\,Y(\gamma)\,Z(\gamma)\,X + (1-\alpha)\,X(\gamma)\,Y(\gamma)\,Z \\
&- (1+\alpha)\,g(X,Z)\,Y(\gamma)\,grad\gamma - \tfrac{1}{2}Y(\gamma)\,K(X,Z) \\
&+ g\left(\widehat{\nabla}_X grad\gamma, Y\right)Z + g\left(grad\gamma,\widehat{\nabla}_X Y\right)Z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X g(Y,Z)\,grad\gamma &= g(Y,Z)\,\widehat{\nabla}_X grad\gamma + (1-\alpha)\,g(Y,Z)\,|grad\gamma|^2\,X \\
&- 2\alpha g(Y,Z)\,X(\gamma)\,grad\gamma - \tfrac{1}{2}g(Y,Z)\,K(X,grad\gamma) \\
&+ g\left(\widehat{\nabla}_X Y, Z\right)grad\gamma + g\left(Y,\widehat{\nabla}_X Z\right)grad\gamma
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X K(Y,Z) &= \widehat{\nabla}_X K(Y,Z) + (1-\alpha)\,K(Y,Z)(\gamma)\,X + (1-\alpha)\,X(\gamma)\,K(Y,Z) \\
&- (1+\alpha)\,g(X,K(Y,Z))\,grad\gamma - \tfrac{1}{2}K(X,K(Y,Z))
\end{aligned}$$

Il suit que :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z - (1+\alpha)\,g(Y,Z)\,\widehat{\nabla}_X grad\gamma - (1-\alpha^2)\,g(X,Z)\,Y(\gamma)\,grad\gamma \\
&+ 2\alpha(1+\alpha)\,g(Y,Z)\,X(\gamma)\,grad\gamma - (1+\alpha)\,g\left(X,\widehat{\nabla}_Y Z\right)grad\gamma \\
&- (1+\alpha)\,g\left(Y,\widehat{\nabla}_X Z\right)grad\gamma - (1-\alpha^2)\,g(X,Y)\,Z(\gamma)\,grad\gamma \\
&+ \frac{1+\alpha}{2}g(X,K(Y,Z))grad\gamma - (1+\alpha)\,g\left(\widehat{\nabla}_X Y, Z\right)grad\gamma \\
&- (1-\alpha^2)\,g(Y,Z)\,|grad\gamma|^2\,X + 2(1-\alpha)^2\,Y(\gamma)\,Z(\gamma)\,X \\
&+ (1-\alpha)\,g\left(grad\gamma,\widehat{\nabla}_X Z\right)Y + (1-\alpha)\,g\left(\widehat{\nabla}_X grad\gamma, Y\right)Z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
- &\ \frac{1-\alpha}{2} X(\gamma) K(Y,Z) - \frac{1-\alpha}{2} Y(\gamma) K(X,Z) - \frac{1-\alpha}{2} Z(\gamma) K(X,Y) \\
+ &\ (1-\alpha) X(\gamma) \widehat{\nabla}_Y Z + (1-\alpha) Y(\gamma) \widehat{\nabla}_X Z + (1-\alpha) Z(\gamma) \widehat{\nabla}_X Y \\
+ &\ (1-\alpha)^2 X(\gamma) Z(\gamma) Y + (1-\alpha) g\left(\widehat{\nabla}_X grad\gamma, Z\right) Y + (1-\alpha)^2 X(\gamma) Y(\gamma) Z \\
+ &\ (1-\alpha) g\left(grad\gamma, \widehat{\nabla}_X Y\right) Z + \frac{1+\alpha}{2} g(Y,Z) K(X, grad\gamma) + \frac{1}{4} K(X, K(Y,Z)) \\
+ &\ (1-\alpha)\left(\widehat{\nabla}_Y Z\right)(\gamma) X - \frac{1-\alpha}{2} K(Y,Z)(\gamma) X - \frac{1}{2} K\left(X, \widehat{\nabla}_Y Z\right) - \frac{1}{2} \widehat{\nabla}_X K(Y,Z)
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Grâce toujours à l'équation (3.3), un calcul similaire nous ramène à l'égalité suivante :

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = &\ \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X Z - (1+\alpha) g(X,Z) \widehat{\nabla}_Y grad\gamma - \left(1-\alpha^2\right) g(Y,Z) X(\gamma)\, grad\gamma \\
&+ 2\alpha(1+\alpha) g(X,Z) Y(\gamma)\, grad\gamma - (1+\alpha) g\left(Y, \widehat{\nabla}_X Z\right) grad\gamma \\
&- (1+\alpha) g\left(X, \widehat{\nabla}_Y Z\right) grad\gamma - \left(1-\alpha^2\right) g(X,Y) Z(\gamma)\, grad\gamma \\
&+ \frac{1+\alpha}{2} g(Y, K(X,Z))\, grad\gamma - (1+\alpha) g\left(\widehat{\nabla}_Y X, Z\right) grad\gamma \\
&- \left(1-\alpha^2\right) g(X,Z) |grad\gamma|^2 Y + 2(1-\alpha)^2 X(\gamma) Z(\gamma) Y \\
&+ (1-\alpha)\left(\widehat{\nabla}_X Z\right)(\gamma) Y - \frac{1-\alpha}{2} K(X,Z)(\gamma) Y \\
&+ (1-\alpha)^2 Y(\gamma) Z(\gamma) X + (1-\alpha) g\left(\widehat{\nabla}_Y grad\gamma, Z\right) X \\
&+ (1-\alpha) g\left(grad\gamma, \widehat{\nabla}_Y Z\right) X + (1-\alpha) g\left(\widehat{\nabla}_Y grad\gamma, X\right) Z \\
&+ (1-\alpha) g\left(grad\gamma, \widehat{\nabla}_Y X\right) Z + (1-\alpha)^2 X(\gamma) Y(\gamma) Z \\
&+ (1-\alpha) Y(\gamma) \widehat{\nabla}_X Z + (1-\alpha) X(\gamma) \widehat{\nabla}_Y Z + (1-\alpha) Z(\gamma) \widehat{\nabla}_Y X \\
&- \frac{1-\alpha}{2} Y(\gamma) K(X,Z) - \frac{1-\alpha}{2} X(\gamma) K(Y,Z) - \frac{1-\alpha}{2} Z(\gamma) K(X,Y) \\
&+ \frac{1+\alpha}{2} g(X,Z) K(Y, grad\gamma) + \frac{1}{4} K(Y, K(X,Z)) \\
&- \frac{1}{2} K\left(Y, \widehat{\nabla}_X Z\right) - \frac{1}{2} \widehat{\nabla}_Y K(X,Z)
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Finalement, il est simple de voir que :

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z &= \widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z - (1+\alpha) g([X,Y], Z)\, grad\gamma \\
&+ (1-\alpha)([X,Y])(\gamma) Z + (1-\alpha) Z(\gamma) [X,Y] \\
&- \tfrac{1}{2} K([X,Y], Z),
\end{aligned}
$$

d'où

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z &= \widehat{\nabla}_{[X,Y]}Z - (1+\alpha)\, g\left(\widehat{\nabla}_X Y, Z\right) grad\gamma + (1+\alpha)\, g\left(\widehat{\nabla}_Y X, Z\right) grad\gamma \\
&+ (1-\alpha)\left(\widehat{\nabla}_X Y\right)(\gamma)\, Z - (1-\alpha)\left(\widehat{\nabla}_Y X\right)(\gamma)\, Z \\
&+ (1-\alpha)\, Z(\gamma)\, \widehat{\nabla}_X Y - (1-\alpha)\, Z(\gamma)\, \widehat{\nabla}_Y X \\
&- \tfrac{1}{2}K\left(\widehat{\nabla}_X Y, Z\right) + \tfrac{1}{2}K\left(\widehat{\nabla}_Y X, Z\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

En remplaçant (3.6), (3.7) et (3.8) dans (3.5), on conclut que :

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \widehat{R}(X,Y)Z - (1+\alpha)\, g(Y,Z)\, \widehat{\nabla}_X grad\gamma + (1+\alpha)\, g(X,Z)\, \widehat{\nabla}_Y grad\gamma \\
&+ (1+\alpha)^2 g(Y,Z)\, X(\gamma)\, grad\gamma - (1+\alpha)^2 g(X,Z)\, Y(\gamma)\, grad\gamma \\
&+ \tfrac{1+\alpha}{2} g(Y,Z)\, K(X, grad\gamma) - \tfrac{1+\alpha}{2} g(X,Z)\, K(Y, grad\gamma) \\
&+ (1-\alpha)^2\, Y(\gamma)\, Z(\gamma)\, X - (1-\alpha^2)\, g(Y,Z)\, |grad\gamma|^2 X \\
&- (1-\alpha)^2\, X(\gamma)\, Z(\gamma)\, Y + (1-\alpha^2)\, g(X,Z)\, |grad\gamma|^2 Y \\
&- (1-\alpha)\, g\left(\widehat{\nabla}_Y grad\gamma, Z\right) X - \tfrac{1-\alpha}{2} K(Y,Z)(\gamma)\, X \\
&+ (1-\alpha)\, g\left(\widehat{\nabla}_X grad\gamma, Z\right) Y + \tfrac{1-\alpha}{2} K(X,Z)(\gamma)\, Y \\
&- \tfrac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_X K\right)(Y,Z) + \tfrac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_Y K\right)(X,Z) \\
&+ \tfrac{1}{4}K(X, K(Y,Z)) - \tfrac{1}{4}K(Y, K(X,Z))
\end{aligned}$$

□

La même méthode de calcul utilisée dans le théorème 3.2.1 et les deux équations suivantes :

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}K(X,Y),$$

$$\widehat{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{2}(\nabla_X K)(Y,Z) - \frac{1}{2}(\nabla_Y K)(X,Z)$$
$$+ \frac{1}{4}K(X, K(Y,Z)) - \frac{1}{4}K(Y, K(X,Z))$$

Nous donnent le théorème suivant :

Théorème 3.2.2. *Soient (M, ∇, g) et $(M, \overline{\nabla}, \overline{g})$ deux variétés statistiques α-conformément équivalentes. La relation entre $\overline{R}$ et R les tenseurs de courbure associés respectivement aux connexions $\overline{\nabla}$ et ∇ est :*

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - (1+\alpha)g(Y,Z)\nabla_X grad\gamma + (1+\alpha)g(X,Z)\nabla_Y grad\gamma \\ &- (1+\alpha)^2 g(X,Z)Y(\gamma)grad\gamma + (1+\alpha)^2 g(Y,Z)X(\gamma)grad\gamma \\ &- \left(1-\alpha^2\right)g(Y,Z)|grad\gamma|^2 X + \left(1-\alpha^2\right)g(X,Z)|grad\gamma|^2 Y \\ &- (1-\alpha)g(\nabla_Y grad\gamma, Z)X + (1-\alpha)g(\nabla_X grad\gamma, Z)Y \\ &+ (1-\alpha)^2 Y(\gamma)Z(\gamma)X - (1-\alpha)^2 X(\gamma)Z(\gamma)Y \\ &- (1-\alpha)g(K(Y,Z), grad\gamma)X + (1-\alpha)g(K(X,Z), grad\gamma)Y\end{aligned} \tag{3.9}$$

Remarque 3.2.2. *Soit $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ une base orthonormée sur (M^m, ∇, g) et soit $\{\overline{e}_i = e^{-\gamma}e_i\}_{1\leq i\leq m}$ une base orthonormée sur $\left(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma}g\right)$. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on définit :*

$$Ricci(X) = Tr_g R(X,\cdot)\cdot = R(X,e_i)e_i, \quad \overline{Ricci}(X) = Tr_{\overline{g}}\overline{R}(X,\cdot)\cdot = \overline{R}(X,\overline{e_i})\overline{e_i},$$

$$Ric(X,Y) = g(Ricci(X), Y), \quad \overline{Ric}(X,Y) = \overline{g}\left(\overline{Ricci}(X), Y\right)$$

et

$$S_g = Tr_g Ric = Ric(e_i, e_i), \quad S_{\overline{g}} = Tr_{\overline{g}}\overline{Ric} = \overline{Ric}(\overline{e_i}, \overline{e_i}).$$

Grâce à ces définitions et en utilisant le théorème 3.2.2, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1. *Soient (M^m, ∇, g) et $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g})$ deux variétés statistiques α-conformément équivalentes. La relation entre $\overline{Ricci}$ et $Ricci$ associés respectivement aux connexions $\overline{\nabla}$ et ∇ est :*

$$\begin{aligned}\overline{Ricci}(X) &= e^{-2\gamma}Ricci(X) + \left((m-2)\alpha^2 + 2m\alpha + m - 2\right)e^{-2\gamma}X(\gamma)grad\gamma \\ &- (m\alpha + m - 2)e^{-2\gamma}\nabla_X grad\gamma + \left(m\alpha^2 - 2\alpha - m + 2\right)e^{-2\gamma}|grad\gamma|^2 X \\ &- (1-\alpha)e^{-2\gamma}\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)X - \frac{(1-\alpha)}{2}e^{-2\gamma}E(\gamma)X + (1-\alpha)e^{-2\gamma}K(X, grad\gamma),\end{aligned}$$

et il suit que :

$$\overline{Ric}(X,Y) = Ric(X,Y) + \Big((m-2)\alpha^2 + 2m\alpha + m - 2\Big) X(\gamma) Y(\gamma)$$
$$+ \Big(m\alpha^2 - 2\alpha - m + 2\Big) |grad\gamma|^2 g(X,Y) - (1-\alpha)\Big(\widehat{\Delta}\gamma\Big) g(X,Y)$$
$$- (m\alpha + m - 2) g(\nabla_X grad\gamma, Y) - \frac{(1-\alpha)}{2} E(\gamma) g(X,Y)$$
$$+ (1-\alpha) g(K(X,Y), grad\gamma)$$

et

$$S_{\overline{g}} = e^{-2\gamma} S_g + (m-1)\Big((m+2)\alpha^2 - m + 2\Big) e^{-2\gamma} |grad\gamma|^2$$
$$- 2(m-1) e^{-2\gamma}\Big(\widehat{\Delta}\gamma\Big) + (m-1)\alpha e^{-2\gamma} E(\gamma)$$

Corollaire 3.2.2. *Le théorème 3.2.2 et le corollaire 3.2.1 nous donnent deux cas particuliers :*

1. *Si $\alpha = 1$, on obtient*

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - 2g(Y,Z)\nabla_X grad\gamma + 2g(X,Z)\nabla_Y grad\gamma$$
$$-4g(X,Z)Y(\gamma)grad\gamma + 4g(Y,Z)X(\gamma)grad\gamma,$$
$$\overline{Ricci}(X) = e^{-2\gamma}\left(Ricci(X) + 4(m-1)X(\gamma)grad\gamma - 2(m-1)\nabla_X grad\gamma\right),$$
$$\overline{Ric}(X,Y) = Ric(X,Y) + 4(m-1)X(\gamma)Y(\gamma) - 2(m-1)g(\nabla_X grad\gamma, Y)$$

Et

$$S_{\overline{g}} = e^{-2\gamma}\Big(S_g + 4(m-1)|grad\gamma|^2 - 2(m-1)\Big(\widehat{\Delta}\gamma\Big) + (m-1)E(\gamma)\Big).$$

2. *Si $\alpha = -1$, on obtient*

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - 2g(\nabla_Y grad\gamma, Z)X + 2g(\nabla_X grad\gamma, Z)Y$$
$$+4Y(\gamma)Z(\gamma)X - 4X(\gamma)Z(\gamma)Y - 2g(K(Y,Z), grad\gamma)X$$
$$+2g(K(X,Z), grad\gamma)Y$$
$$\overline{Ricci}(X) = e^{-2\gamma}Ricci(X) - 4e^{-2\gamma}X(\gamma)grad\gamma + 2e^{-2\gamma}\nabla_X grad\gamma$$
$$+ 4e^{-2\gamma}|grad\gamma|^2 X - 2e^{-2\gamma}\Big(\widehat{\Delta}\gamma\Big)X - e^{-2\gamma}E(\gamma)X$$
$$+ 2e^{-2\gamma}K(X, grad\gamma),$$

$$\overline{Ric}(X,Y) = Ric(X,Y) - 4X(\gamma)Y(\gamma) + 2g(\nabla_X grad\gamma, Y)$$

$$+ 4|grad\gamma|^2 g(X,Y) - 2\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)g(X,Y)$$

$$- E(\gamma)g(X,Y) + 2g(K(X,Y), grad\gamma)$$

et

$$S_{\overline{g}} = e^{-2\gamma}S_g + (m-1)e^{-2\gamma}\left(4|grad\gamma|^2 - 2\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + E(\gamma)\right),$$

où

$$\widehat{\Delta}\gamma = g\left(\widehat{\nabla}_{e_i} grad\gamma, e_i\right) = e_i(e_i(\gamma)) - \left(\widehat{\nabla}_{e_i}e_i\right)(\gamma).$$

Exemple 3.2.1. *Soit* $(\mathbb{R}^2, g)$ *une variété statistique équipée de la métrique Riemannienne*

$$g = dx^2 + dy^2$$

et ∇ *la connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1}e_1 = e_2, \quad \nabla_{e_2}e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = e_1$$

Où $\left\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *est est une base orthonormée. Alors,* $(\mathbb{R}^2, \nabla, g)$ *est une variété statistique de constante de courbure* -1 *et* $S_g = -2$*. On veut déterminer une fonction* γ *telle que :* $S_{\overline{g}} = 0$*. Par le corollaire 3.2.1, on déduit que :* $S_{\overline{g}}$ *est nulle si et seulement si*

$$2\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) - \alpha E(\gamma) - 4\alpha^2|grad\gamma|^2 + 2 = 0.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons présenter deux cas :

1. *Si on suppose que la fonction* γ *dépend seulement de la variable* x *alors,* $S_{\overline{g}}$ *est nulle si et seulement si :*

$$\gamma'' - 2\alpha^2(\gamma')^2 + 1 = 0.$$

Notons que si $\alpha = 0$*, la solution de cette équation est :*

$$\gamma(x) = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b.$$

Dans le cas où $\alpha \neq 0$*, une solution particulière est donnée par*

$$\gamma(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}x + b$$

2. *Si on suppose que la fonction γ dépend seulement de la variable y, on conclut que $S_{\overline{g}} = 0$ si et seulement si*

$$\gamma'' + \alpha\gamma' - 2\alpha^2 (\gamma')^2 + 1 = 0.$$

En utilisant la même méthode, si $\alpha = 0$, la solution obtenue est :

$$\gamma(y) = -\frac{1}{2}y^2 + ay + b$$

Et si on prend $\alpha \neq 0$, une solution particulière est donnée par

$$\gamma(y) = \frac{1}{\alpha}y + b.$$

3.3 Structures α-conformément équivalentes et applications biharmoniques

Dans cette section, nous allons étudier l'harmonicité et la biharmonicité relativement aux structures α-conformément équivalentes. Grâce aux expressions suivantes :

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-\alpha) Y(\gamma) X + (1-\alpha) X(\gamma) Y - (1+\alpha) g(X,Y)\, grad\gamma,$$

et

$$\overline{\nabla}_X Y = \widehat{\nabla}_X Y + (1-\alpha) Y(\gamma) X + (1-\alpha) X(\gamma) Y$$
$$- (1+\alpha) g(X,Y)\, grad\gamma - \frac{1}{2}K(X,Y),$$

on déduit que :

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_i = \nabla_{e_i} e_i - \{(m+2)\alpha + m - 2\}\, grad\gamma,$$

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_i = \widehat{\nabla}_{e_i} e_i - \{(m+2)\alpha + m - 2\}\, grad\gamma - \frac{1}{2}E,$$

$$\overline{\nabla}_{\overline{e_i}} \overline{e_i} = e^{-\gamma} \overline{\nabla}_{e_i} e^{-\gamma} e_i = e^{-2\gamma} \overline{\nabla}_{e_i} e_i - e^{-2\gamma} grad\gamma$$

$$= e^{-2\gamma} \left(\nabla_{e_i} e_i - \{(m+2)\alpha + m - 1\}\, grad\gamma\right)$$

et

$$\overline{\nabla}_{\overline{e_i}} \overline{e_i} = e^{-2\gamma} \left(\nabla_{e_i} e_i - \{(m+2)\alpha + m - 1\}\, grad\gamma - \frac{1}{2}E\right),$$

où

$$E = Tr_g K = K(e_i, e_i)$$

avec $(ei)_{i=1}^m$ est une base orthonormée sur (M, g) et $(\overline{e_i} = e^{-\gamma} e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée sur $(M^m, \overline{g})$. Comme premier résultat, on considère (M^m, ∇, g) et $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ et (N^n, ∇, g) trois variétés statistiques où on suppose que les deux variétés (M^m, ∇, g) et $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ sont α-conformément équivalentes et soit $\phi : (M, \nabla, g) \longrightarrow (N, \nabla, h)$ une application différentiable, notre but est de définir le champ de tension de l'application $\phi : (M, \overline{\nabla}, \overline{g}) \longrightarrow (N, \nabla, h)$ relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$. Notons $\widehat{\nabla}$ la connexion de Lévi-Civita sur M associée à la métrique g et $\overline{\widehat{\nabla}}$ la connexion de Lévi-Civita sur M associée à la métrique $\overline{g} = e^{2\gamma} g$. On a

$$\overline{\widehat{\nabla}}_X Y = \widehat{\nabla}_X Y + X(\gamma) Y + Y(\gamma) X - g(X, Y) \, grad\gamma$$

3.3.1 La biharmonicité de l'application identité $Id : (M, \nabla, g) \longrightarrow (M, \overline{\nabla}, \overline{g})$

Notons $\widehat{\tau}(\phi)$ le champ de tension de l'application $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ et $\overline{\widehat{\tau}}(\phi)$ le champ de tension de l'application $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, \overline{h} = e^{2\gamma} h)$ relativement aux connexions de Lévi-Civita est donné par :

$$\overline{\widehat{\tau}}(\phi) = \tau(\phi) - |d\phi|^2 (grad\gamma) \circ \phi + 2d\phi \left(grad(\gamma \circ \phi) \right).$$

On sait que

$$\nabla_X Y = \widehat{\nabla}_X Y - \frac{1}{2} K(X, Y),$$

et

$$\overline{\nabla}_X Y = \overline{\widehat{\nabla}}_X Y - \alpha Y(\gamma) X - \alpha X(\gamma) Y - \alpha g(X, Y) \, grad\gamma - \frac{1}{2} K(X, Y),$$

Autrement dit

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2} K(X, Y),$$

et

$$\overline{\widehat{\nabla}}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \alpha Y(\gamma) X + \alpha X(\gamma) Y + \alpha g(X, Y) \, grad\gamma + \frac{1}{2} K(X, Y)$$

On définit le champ de tension de l'application $\phi : (M, \nabla, g) \longrightarrow (N, \overline{\nabla}, \overline{h} = e^{2\gamma}h)$, noté $\overline{\tau}(\phi)$ où (N, ∇, h) et $(N, \overline{\nabla}, \overline{h} = e^{2\gamma}h)$ sont deux variétés statistiques α-conformément équivalentes. Dans ce cas, on obtient :

$$\overline{\tau}(\phi) = \tau(\phi) + 2(1-\alpha)d\phi(grad\gamma) - (1+\alpha)|d\phi|^2(grad\gamma)\circ\phi.$$

où $\tau(\phi)$ est le champ de tension de ϕ défini par :

$$\tau(\phi) = \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi\left(\nabla_{e_i} e_i\right).$$

L'application $\phi : (M, \nabla, g) \longrightarrow (N, \overline{\nabla}, \overline{h} = e^{2\gamma}h)$ est harmonique relativement à $(\nabla, \overline{\nabla})$ si

$$\tau(\phi) + 2(1-\alpha)d\phi(grad\gamma) - (1+\alpha)|d\phi|^2(grad\gamma)\circ\phi = 0.$$

On considère l'application identité $Id : (M, \nabla, g) \to (M, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma}g)$, on a :

$$\overline{\overline{\tau}}(Id) = (2-m)grad\gamma$$

et

$$\overline{\tau}(\phi) = -\left((m+2)\alpha + m - 2\right) grad\gamma.$$

De cette dernière équation, on en déduit la condition d'harmonicité de l'application $Id : (M, \nabla, g) \to (M, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma}g)$

Proposition 3.3.1. *Soient (M^m, ∇, g) et $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma}g)$ deux variétés statistiques α-conformément équivalentes. Alors, $Id : (M^m, \nabla, g) \longrightarrow (M^m, \overline{\nabla}, \overline{g})$ est harmonique relativement à $(\nabla, \overline{\nabla})$ si et seulement si*

$$(m+2)\alpha + m - 2 = 0,$$

c'est à dire

$$\alpha = -\frac{m-2}{m+2}.$$

Nous allons passer maintenant à la caractérisation de la biharmonicité de l'application Id : $(M, \nabla, g) \longrightarrow (M, \overline{\nabla}, \overline{g})$.

Théorème 3.3.1. *Soient (M,∇,g) et $(M,\overline{\nabla},\overline{g}=e^{2\gamma}g)$ deux variétés statistiques α-conformément équivalentes. L'application identité $Id:(M,\nabla,g)\rightarrow(M,\overline{\nabla},\overline{g})$ est biharmonique relativement à $(\nabla,\overline{\nabla})$ si et seulement si*

$$\begin{aligned}
& grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)+(3\alpha-1)(m\alpha+2\alpha+m-2)|grad\gamma|^2 grad\gamma \\
& -\frac{(m\alpha+6\alpha+m-6)}{2}grad\left(|grad\gamma|^2\right)-2(\alpha+1)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)grad\gamma \\
& +\frac{(m\alpha+2\alpha+m-2)}{2}K(grad\gamma,grad\gamma)+\frac{1}{2}\left[E,grad\gamma\right] \\
& +2\widehat{Ricci}(grad\gamma)+Tr_g K([grad\gamma,.],.)=0.
\end{aligned}$$

Démonstration. Comme pour le champ de tension, on définit le champ de bi-tension de l'application identité $Id:(M,\nabla,g)\rightarrow(M,\overline{\nabla},\overline{g})$ relatif à $(\nabla,\overline{\nabla})$ par

$$\overline{\tau}_2(Id)=-Tr_g\overline{\nabla}^2\overline{\tau}(Id)-Tr_g\overline{R}(\overline{\tau}(Id),.).,$$

où

$$\overline{\tau}(Id)=\{(m+2)\alpha+m-2\}\,grad\gamma.$$

En utilisant le fait que

$$(m+2)\alpha+m-2\neq 0,$$

On déduit que l'application identité $Id:(M,\nabla,g)\rightarrow(M,\overline{\nabla},\overline{g})$ est biharmonique relativement à $(\nabla,\overline{\nabla})$ si et seulement si

$$Tr_g\overline{\nabla}^2 grad\gamma-Tr_g\overline{R}(grad\gamma,.).=0.$$

Nous allons développer les deux termes de cette dernière équation. Pour le premier terme $Tr_g\overline{\nabla}^2 grad\gamma$, on a

$$Tr_g\overline{\nabla}^2 grad\gamma=\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}grad\gamma-\overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}grad\gamma$$

En utilisant l'équation (3.6), on déduit que :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}grad\gamma &= \widehat{\nabla}_{e_i}\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma-(1+\alpha)\,g\left(e_i,grad\gamma\right)\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma-(1-\alpha^2)\left|grad\gamma\right|^2grad\gamma\\
&+ 2\alpha\left(1+\alpha\right)g\left(e_i,grad\gamma\right)e_i\left(\gamma\right)grad\gamma-(1+\alpha)\,g\left(e_i,\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma\right)grad\gamma\\
&- (1+\alpha)\,g\left(e_i,\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma\right)grad\gamma-(1-\alpha^2)\,g(e_i,e_i)\left|grad\gamma\right|^2grad\gamma\\
&+ \frac{1+\alpha}{2}g\left(e_i,K\left(e_i,grad\gamma\right)\right)grad\gamma-(1+\alpha)\,g\left(\widehat{\nabla}_{e_i}e_i,grad\gamma\right)grad\gamma\\
&- (1-\alpha^2)\,g\left(e_i,grad\gamma\right)\left|grad\gamma\right|^2e_i+2\left(1-\alpha\right)^2\left|grad\gamma\right|^2e_i\left(\gamma\right)e_i\\
&+ (1-\alpha)\,g\left(grad\gamma,\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma\right)e_i+(1-\alpha)\,g\left(\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma,e_i\right)grad\gamma\\
&- \frac{1-\alpha}{2}e_i\left(\gamma\right)K\left(e_i,grad\gamma\right)-\frac{1-\alpha}{2}e_i\left(\gamma\right)K\left(e_i,grad\gamma\right)-\frac{1-\alpha}{2}\left|grad\gamma\right|^2K\left(e_i,e_i\right)\\
&+ (1-\alpha)\,e_i\left(\gamma\right)\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma+(1-\alpha)\,e_i\left(\gamma\right)\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma+(1-\alpha)\,grad\gamma\left(\gamma\right)\widehat{\nabla}_{e_i}e_i\\
&+ (1-\alpha)^2\left|grad\gamma\right|^2e_i\left(\gamma\right)e_i+(1-\alpha)\,g\left(\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma,grad\gamma\right)e_i\\
&+ (1-\alpha)\,g\left(grad\gamma,\widehat{\nabla}_{e_i}e_i\right)grad\gamma+(1-\alpha)^2e_i\left(\gamma\right)e_i\left(\gamma\right)grad\gamma\\
&- \frac{1-\alpha}{2}e_i\left(\gamma\right)K\left(e_i,grad\gamma\right)+\frac{1}{4}K\left(e_i,K\left(e_i,grad\gamma\right)\right)\\
&+ (1-\alpha)\left(\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma\right)\left(\gamma\right)e_i-\frac{1-\alpha}{2}K\left(e_i,grad\gamma\right)\left(\gamma\right)e_i\\
&- \frac{1}{2}K\left(e_i,\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma\right)-\frac{1}{2}\widehat{\nabla}_{e_i}K\left(e_i,grad\gamma\right)
\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}grad\gamma &= \widehat{\nabla}_{e_i}\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma+(2-3\alpha)grad(|grad\gamma|^2)-(3\alpha+1)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)grad\gamma\\
&+ ((m+8)\alpha^2-6\alpha-m+2)\left|grad\gamma\right|^2grad\gamma+\frac{1+\alpha}{2}E(\gamma)grad\gamma\\
&+ (2\alpha-1)K(grad\gamma,grad\gamma)-(1+\alpha)\left(\widehat{\nabla}_{e_i}e_i\right)(\gamma)grad\gamma\\
&+ \frac{1}{4}K\left(e_i,K\left(e_i,grad\gamma\right)\right)+(1-\alpha)\left|grad\gamma\right|^2\widehat{\nabla}_{e_i}e_i\\
&- \frac{1-\alpha}{2}|grad\gamma|^2E+(1-\alpha)\left(\widehat{\nabla}_{e_i}e_i\right)(\gamma)grad\gamma\\
&- \frac{1}{2}K\left(e_i,\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma\right)-\frac{1}{2}\widehat{\nabla}_{e_i}K\left(e_i,grad\gamma\right)
\end{aligned}$$

Pour terminer cette première partie de démonstration, nous allons regarder le terme $\overline{\nabla}_{\nabla_{e_i e_i}}grad\gamma$.

Grâce à la relation suivante :

$$\overline{\nabla}_XY=\nabla_XY+(1-\alpha)\,Y\left(\gamma\right)X+(1-\alpha)\,X\left(\gamma\right)Y-(1+\alpha)\,g\left(X,Y\right)grad\gamma,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}grad\gamma &= \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}grad\gamma+(1-\alpha)|grad\gamma|^2\nabla_{e_i}e_i\\
&+ (1-\alpha)\left(\nabla_{e_i}e_i\right)(\gamma)grad\gamma-(1+\alpha)g(\nabla_{e_i}e_i,grad\gamma)grad\gamma
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$\nabla_X Y = \widehat{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}K\left(X, Y\right),$$

on a :

$$\nabla_{e_i} e_i = \widehat{\nabla}_{e_i} e_i - \frac{1}{2}E$$

$$\left(\nabla_{e_i} e_i\right)(\gamma) = \left(\widehat{\nabla}_{e_i} e_i\right)(\gamma) - \frac{1}{2}E\left(\gamma\right)$$

Et

$$\begin{aligned}
\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} grad\gamma &= \widehat{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} grad\gamma - \frac{1}{2}K\left(\nabla_{e_i} e_i, grad\gamma\right) \\
&= \widehat{\nabla}_{\widehat{\nabla}_{e_i} e_i} grad\gamma - \tfrac{1}{2}\widehat{\nabla}_E grad\gamma \\
&+ \frac{1}{4}K\left(E, grad\gamma\right) - \tfrac{1}{2}K\left(\widehat{\nabla}_{e_i} e_i, grad\gamma\right)
\end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} grad\gamma &= \widehat{\nabla}_{\widehat{\nabla}_{e_i} e_i} grad\gamma - \frac{1}{2}\widehat{\nabla}_E grad\gamma + \frac{1}{4}K\left(E, grad\gamma\right) + \alpha E(\gamma) grad\gamma \\
&- 2\alpha\left(\widehat{\nabla}_{e_i} e_i\right)(\gamma) grad\gamma - \frac{1}{2}K\left(\widehat{\nabla}_{e_i} e_i, grad\gamma\right) + (1-\alpha)|grad\gamma|^2 \widehat{\nabla}_{e_i} e_i \\
&- \frac{1-\alpha}{2}|grad\gamma|^2 E.
\end{aligned}$$

Il est bien connu que :

$$Tr_g \widehat{\nabla}^2 grad\gamma = grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + \widehat{Ricci}(grad\gamma),$$

où

$$\widehat{\Delta}\gamma = g(\widehat{\nabla}_{e_i} grad\gamma, e_i) = e_i\left(e_i(\gamma)\right) - \left(\widehat{\nabla}_{e_i} e_i\right)(\gamma)$$

et

$$\widehat{Ricci}(grad\gamma) = Tr_g \widehat{R}(grad\gamma, .). = \widehat{R}(grad\gamma, e_i) e_i.$$

D'où

$$\begin{aligned}
Tr_g \overline{\nabla}^2 grad\gamma &= grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) - (3\alpha - 2) grad\left(|grad\gamma|^2\right) - (3\alpha + 1)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) grad\gamma \\
&+ ((m+8)\alpha^2 - 6\alpha - m + 2)|grad\gamma|^2 grad\gamma - \frac{\alpha - 1}{2}E(\gamma) grad\gamma \\
&+ (2\alpha - 1)K(grad\gamma, grad\gamma) + \frac{1}{2}\widehat{\nabla}_E grad\gamma - \frac{1}{4}K\left(E, grad\gamma\right) \\
&+ \frac{1}{4}K\left(e_i, K\left(e_i, grad\gamma\right)\right) - \frac{1}{2}K\left(e_i, \widehat{\nabla}_{e_i} grad\gamma\right) + \widehat{Ricci}(grad\gamma) \\
&- \frac{1}{2}\widehat{\nabla}_{e_i} K\left(e_i, grad\gamma\right) + \frac{1}{2}K\left(\widehat{\nabla}_{e_i} e_i, grad\gamma\right).
\end{aligned}$$

Pour compléter la preuve de ce théorème, on va utiliser la relation entre $\overline{R}$ et $\widehat{R}$, qui est donnée par (3.4), on aura :

$$\begin{aligned}
Tr_g\overline{R}(grad\gamma,.). &= \widehat{R}(grad\gamma,e_i)e_i-(1+\alpha)g(e_i,e_i)\widehat{\nabla}_{grad\gamma}grad\gamma+(1+\alpha)\widehat{\nabla}_{grad\gamma}grad\gamma\\
&+ (1+\alpha)^2g(e_i,e_i)|grad\gamma|^2grad\gamma-(1+\alpha)^2g(grad\gamma,e_i)e_i(\gamma)grad\gamma\\
&+ \frac{1+\alpha}{2}g\left(e_i,e_i\right)K\left(grad\gamma,grad\gamma\right)-\frac{1+\alpha}{2}g\left(grad\gamma,e_i\right)K\left(e_i,grad\gamma\right)\\
&+ (1-\alpha)^2e_i(\gamma)e_i(\gamma)grad\gamma-(1-\alpha^2)g(e_i,e_i)|grad\gamma|^2grad\gamma\\
&- (1-\alpha)^2|grad\gamma|^2e_i(\gamma)e_i+(1-\alpha^2)g(grad\gamma,e_i)|grad\gamma|^2e_i\\
&- (1-\alpha)\,g\left(\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma,e_i\right)grad\gamma-\frac{1-\alpha}{2}K\left(e_i,e_i\right)(\gamma)\,grad\gamma\\
&+ (1-\alpha)\,g\left(\widehat{\nabla}_{grad\gamma}grad\gamma,e_i\right)e_i+\frac{1-\alpha}{2}K\left(grad\gamma,e_i\right)(\gamma)\,e_i\\
&- \frac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_{grad\gamma}K\right)(e_i,e_i)+\frac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_{e_i}K\right)(grad\gamma,e_i)\\
&+ \frac{1}{4}K\left(grad\gamma,K\left(e_i,e_i\right)\right)-\frac{1}{4}K\left(e_i,K\left(grad\gamma,e_i\right)\right),
\end{aligned}$$

ce qui nous ramène au résultat suivant :

$$\begin{aligned}
Tr_g\overline{R}(grad\gamma,.). &= \widehat{Ricci}(grad\gamma)-\frac{(m\alpha+m-2)}{2}grad\left(|grad\gamma|^2\right)-(1-\alpha)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)grad\gamma\\
&+ 2\alpha(\alpha+1)(m-1)|grad\gamma|^2grad\gamma+\frac{(m-2\alpha+m\alpha)}{2}K(grad\gamma,grad\gamma)\\
&- \frac{1-\alpha}{2}E(\gamma)grad\gamma-\frac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_{grad\gamma}K\right)(e_i,e_i)+\frac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_{e_i}K\right)(grad\gamma,e_i)\\
&+ \frac{1}{4}K\left(grad\gamma,E\right)-\frac{1}{4}K\left(K\left(grad\gamma,e_i\right),e_i\right).
\end{aligned}$$

En utilisant les formules suivantes :

$$\left(\widehat{\nabla}_{e_i}K\right)(grad\gamma,e_i)=\widehat{\nabla}_{e_i}K\left(grad\gamma,e_i\right)-K\left(\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma,e_i\right)-K\left(grad\gamma,\widehat{\nabla}_{e_i}e_i\right),$$

$$\left(\widehat{\nabla}_{grad\gamma}K\right)(e_i,e_i)=\widehat{\nabla}_{grad\gamma}E-2K\left(\widehat{\nabla}_{grad\gamma}e_i,e_i\right),$$

$$Tr_gK\left([grad\gamma,.]\,,.\right)=K\left([grad\gamma,e_i]\,,e_i\right)=K\left(\widehat{\nabla}_{grad\gamma}e_i,e_i\right)-K\left(\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma,e_i\right)$$

et

$$[E,grad\gamma]=\widehat{\nabla}_Egrad\gamma-\widehat{\nabla}_{grad\gamma}E,\qquad E=Tr_gK=K\left(e_i,e_i\right).$$

On déduit finalement que l'application identité $Id : (M, \nabla, g) \to (M, \overline{\nabla}, \overline{g})$ est biharmonique relativement à $(\nabla, \overline{\nabla})$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
& grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + (3\alpha - 1)(m\alpha + 2\alpha + m - 2)|grad\gamma|^2 grad\gamma \\
& -\frac{(m\alpha + 6\alpha + m - 6)}{2} grad\left(|grad\gamma|^2\right) - 2(\alpha + 1)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) grad\gamma \\
& +\frac{(m\alpha + 2\alpha + m - 2)}{2} K(grad\gamma, grad\gamma) + \frac{1}{2}\left[E, grad\gamma\right] \\
& +2\widehat{Ricci}(grad\gamma) + Tr_g K([grad\gamma, .], .) = 0.
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.3.1. *Soit* $(\mathbb{R}^2, g)$ *une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = dx^2 + dy^2$$

et ∇ *une connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1} e_1 = e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = e_1.$$

Où $\left\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *est une une base orthonormée. On déduit que :*

$$K(e_1, e_1) = -2e_2, \qquad K(e_2, e_2) = 0, \qquad K(e_1, e_2) = K(e_2, e_1) = -2e_1.$$

$$\widehat{\nabla}_{e_1} e_1 = \widehat{\nabla}_{e_2} e_2 = \widehat{\nabla}_{e_1} e_2 = \widehat{\nabla}_{e_2} e_1 = 0$$

et

$$E = Tr_g K = K(e_1, e_1) + K(e_2, e_2) = -2e_2.$$

La condition de biharmonicité de l'application identité : $Id : (\mathbb{R}^2, \nabla, g) \to (\mathbb{R}^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ *relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *est donnée par l'équation suivante :*

$$\begin{aligned}
& grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + 4\alpha(3\alpha - 1)|grad\gamma|^2 grad\gamma + \frac{1}{2}\left[E, grad\gamma\right] \\
& -(4\alpha - 2) grad\left(|grad\gamma|^2\right) - 2(\alpha + 1)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) grad\gamma \\
& +2\alpha K(grad\gamma, grad\gamma) + Tr_g K([grad\gamma, .], .) \\
& +2\widehat{Ricci}(grad\gamma) = 0.
\end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation, nous allons présenter deux cas :

1. *Si on suppose que la fonction* γ *dépend seulement de la variable* x*, donc* $Id : (\mathbb{R}^2, \nabla, g) \to (\mathbb{R}^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *si et seulement si :*

$$\begin{cases} \gamma^{(3)} - 2(5\alpha - 1)\gamma'\gamma'' + 4\alpha(3\alpha - 1)(\gamma')^3 &= 0 \\ \gamma'' - 2\alpha(\gamma')^2 &= 0. \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$*, on déduit que* $Id : (\mathbb{R}^2, \nabla, g) \to (\mathbb{R}^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *si et seulement si :*

$$\gamma = Ax + B$$

Dans le cas où $\alpha \neq 0$*, on déduit que :* $Id : (\mathbb{R}^2, \nabla, g) \to (\mathbb{R}^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *si et seulement si :*

$$\gamma = \ln(Ax + B)$$

et

$$\alpha = -\frac{1}{2}.$$

2. *Si on suppose que la fonction* γ *dépend seulement de la variable* y*, on conclut que* $Id : (\mathbb{R}^2, \nabla, g) \to (\mathbb{R}^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *si et seulement si* $\beta = \gamma'$ *est solution de l'équation différentielle suivante :*

$$\beta'' - 2(5\alpha - 1)\beta\beta' - 2\beta' + 4\alpha(3\alpha - 1)\beta^3 = 0.$$

Pour $\alpha = 0$*, on déduit que :* $Id : (M, \nabla, g) \to (M, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *si et seulement si :*

$$\gamma = (1 - A)y + \ln(e^{2Ay} - B)$$

Pour $\alpha = \frac{1}{3}$*, la biharmonicité dans ce cas est équivalente à*

$$\gamma = \frac{(\sqrt{3}A - 3)y}{2} - \frac{3}{2}\ln(e^{\frac{2}{3}\sqrt{3}Ay} - B).$$

Exemple 3.3.2. *Soit* $\left(H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}, g\right)$ *une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

et soit ∇ *une connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_2}e_2 = 2e_2, \quad \nabla_{e_1}e_2 = 0, \quad \nabla_{e_2}e_1 = e_1,$$

où $\left\{e_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, e_2 = y\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *est une structure orthonormée. Un calcul direct nous donne :*

$$\overset{*}{\nabla}_{e_1}e_1 = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2}e_2 = -2e_2, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_1}e_2 = -2e_1, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2}e_1 = -e_1,$$

et

$$\widehat{\nabla}_{e_1}e_1 = e_2, \quad \widehat{\nabla}_{e_2}e_2 = 0, \quad \widehat{\nabla}_{e_1}e_2 = -e_1, \quad \widehat{\nabla}_{e_2}e_1 = 0.$$

On déduit que :

$$K(e_1,e_1) = -2e_2, \quad K(e_2,e_2) = -4e_2, \quad K(e_1,e_2) = K(e_2,e_1) = -2e_1, \quad E = -6e_2.$$

et

$$\widehat{R}(e_1,e_2)e_2 = -e_1, \qquad \widehat{R}(e_2,e_1)e_1 = -e_2, \qquad \widehat{Ricci}(X) = -X.$$

Dans ce cas, $Id : (H^2, \nabla, g) \to (H^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma}g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned}
& grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + 4\alpha(3\alpha-1)|grad\gamma|^2 grad\gamma \\
& -(4\alpha-2)grad\left(|grad\gamma|^2\right) + \frac{1}{2}\left[E, grad\gamma\right] \\
& +2\alpha K(grad\gamma, grad\gamma) - 2(\alpha+1)\left(\widehat{\Delta}\gamma\right)grad\gamma \\
& +2\widehat{Ricci}(grad\gamma) + Tr_g K([grad\gamma, .], .) = 0.
\end{aligned}$$

Pour la résolution de cette équation, nous allons distinguer deux cas : Si on suppose que la fonction γ *dépend seulement de la variable* x*, donc* $Id : (H^2, \nabla, g) \to (H^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma}g)$ *est biharmonique relativement à* $(\nabla, \overline{\nabla})$ *si et seulement si :*

$$\begin{cases} \gamma^{(3)} - 2(5\alpha-1)\gamma'\gamma'' + 4\alpha(3\alpha-1)(\gamma')^2 - 3\gamma' &= 0 \\ \gamma'' - 2\alpha(\gamma')^2 &= 0. \end{cases}$$

On remarque que si $\alpha = 0$,l'application $Id : (H^2, \nabla, g) \to (H^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma}g)$ est biharmonique relativement à $(\nabla, \overline{\nabla})$ si et seulement si la fonction γ est constante.

Lorsque $\alpha \in \{-1, 1\}$, on obtient certains cas particuliers donnés par le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1. *Dans certains cas, la condition de biharmonicité se traduit par une équation moins compliquée.*

1. *Pour $\alpha = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned} &Tr_g\nabla^2 grad\gamma - mgrad\left(|grad\gamma|^2\right) - 4\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) grad\gamma \\ &+4(m-2)|grad\gamma|^2 grad\gamma - 3E(\gamma)grad\gamma \\ &+mK(grad\gamma, grad\gamma) + Ricci(grad\gamma) = 0. \end{aligned}$$

2. *Pour $\alpha = -1$, on obtient*

$$\begin{aligned} &Tr_g\nabla^2 grad\gamma + 6grad\left(|grad\gamma|^2\right) - 16|grad\gamma|^2 grad\gamma \\ &-2K(grad\gamma, grad\gamma) + Ricci(grad\gamma) = 0. \end{aligned}$$

3.3.2 La biharmonicité de l'application identité $Id : (M^m, \overline{\nabla}, \overline{g}) \longrightarrow (M^m, \nabla, g)$

Comme dernier résultat dans ce chapitre, nous allons caractériser la biharmonicité de l'application identité $Id : (M^m, \overline{\nabla}, \overline{g}) \to (M^m, \nabla, g)$ relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$. Pour une application $\phi : (M, \nabla, g) \longrightarrow (N, \nabla, h)$, on définit le champ de tension $\tau(\phi)$ par :

$$\tau(\phi) = \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi\left(\nabla_{e_i} e_i\right).$$

De même pour $\phi : (M, \overline{\nabla}, \overline{g}) \longrightarrow (N, \nabla, h)$, on définit le champ de tension $\overline{\tau}(\phi)$ par :

$$\overline{\tau}(\phi) = \nabla^{\phi}_{\overline{e_i}} d\phi(\overline{e_i}) - d\phi\left(\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i}\right).$$

La relation entre $\overline{\tau}(\phi)$ et $\tau(\phi)$ est donnée par la formule suivante :

$$\overline{\tau}(\phi) = e^{-2\gamma}\left(\tau(\phi) + \{(m+2)\alpha + m - 2\}\, d\phi(grad\gamma)\right)$$

On dit que $\phi : (M, \overline{\nabla}, \overline{g}) \longrightarrow (N, \nabla, h)$, est harmonique relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$ si

$$\tau(\phi) + \{(m+2)\alpha + m - 2\} \, d\phi(grad\gamma) = 0.$$

En particulier, si on considère l'application identité, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.3.2. *Soient (M^m, ∇, g) et $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ deux variétés statistiques α-conformément équivalentes. Alors, $Id : (M^m, \overline{\nabla}, \overline{g}) \longrightarrow (M^m, \nabla, g)$ est harmonique relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$ si et seulement si*

$$(m+2)\alpha + m - 2 = 0,$$

c'est à dire

$$\alpha = -\frac{m-2}{m+2}.$$

Pour la biharmonicité de l'application identité dans ce cas, nous allons supposer que $(m+2)\alpha + m - 2 \neq 0$. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *Soient (M^m, ∇, g) et $(M^m, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g)$ deux variétés statistiques α-conformément équivalentes où γ est une fonction non constante sur M avec*

$$(m+2)\alpha + m - 2 \neq 0.$$

Alors, l'application identité $Id : (M^m, \overline{\nabla}, \overline{g}) \to (M^m, \nabla, g)$ est biharmonique relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + \frac{(m+2)\alpha + m - 6}{2} grad\left(|grad\gamma|^2\right) - 2\left\{\widehat{\Delta}\gamma + \tfrac{1}{2}E(\gamma)\right\} grad\gamma \\
&-2\left\{(m+2)\alpha + m - 4\right\} |grad\gamma|^2 grad\gamma - \tfrac{1}{2}K(grad\gamma, grad\gamma) \\
&-\tfrac{1}{2}\widehat{\nabla}_{grad\gamma}E + 2\widehat{Ricci}(grad\gamma) + Tr_g K([grad\gamma, .], .) \\
&+\tfrac{1}{4}Tr_g K(K(grad\gamma, .), .) = 0.
\end{aligned}$$

Démonstration. Le champ de tension de l'application identité $Id : (M^m, \overline{\nabla}, \overline{g}) \to (M^m, \nabla, g)$ relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$ est donné par :

$$\overline{\tau}(Id) = \{(m+2)\alpha + m - 2\} \, e^{-2\gamma} grad\gamma,$$

comme $(m+2)\alpha+m-2\neq 0$, on déduit que $Id:(M^m,\overline{\nabla},\overline{g})\to(M^m,\nabla,g)$ est biharmonique relativement à $(\overline{\nabla},\nabla)$ si et seulement si

$$Tr_{\overline{g}}\nabla^2 e^{-2\gamma}grad\gamma+Tr_{\overline{g}}R\left(e^{-2\gamma}grad\gamma,.\right).=0.$$

Pour le terme $Tr_{\overline{g}}\nabla^2 e^{-2\gamma}grad\gamma$, on a

$$Tr_{\overline{g}}\nabla^2 e^{-2\gamma}grad\gamma=\nabla_{\overline{e_i}}\nabla_{\overline{e_i}}e^{-2\gamma}grad\gamma-\nabla_{\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i}}e^{-2\gamma}grad\gamma.$$

Or

$$\nabla_{\overline{e_i}}e^{-2\gamma}grad\gamma=e^{-3\gamma}\nabla_{e_i}grad\gamma-2e^{-3\gamma}e_i(\gamma)grad\gamma,$$

il suit que

$$\begin{aligned}\nabla_{\overline{e_i}}\nabla_{\overline{e_i}}e^{-2\gamma}grad\gamma &= e^{-\gamma}\nabla_{e_i}e^{-3\gamma}\nabla_{e_i}grad\gamma-2e^{-\gamma}\nabla_{e_i}e^{-3\gamma}e_i(\gamma)grad\gamma\\ &= e^{-4\gamma}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}grad\gamma-5e^{-4\gamma}\nabla_{grad\gamma}grad\gamma\\ &- 2e^{-4\gamma}e_i\left(e_i(\gamma)\right)grad\gamma+6e^{-4\gamma}|grad\gamma|^2grad\gamma\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le fait que

$$\overline{\nabla}_{e_i}e_i=\nabla_{e_i}e_i-\left\{(m+2)\alpha+m-2\right\}grad\gamma,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\nabla_{\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i}}e^{-2\gamma}grad\gamma &= e^{-2\gamma}\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}e^{-2\gamma}grad\gamma-\left\{(m+2)\alpha+m-1\right\}e^{-2\gamma}\nabla_{grad\gamma}e^{-2\gamma}grad\gamma\\ &= e^{-4\gamma}\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}grad\gamma-2e^{-4\gamma}\left(\nabla_{e_i}e_i\right)(\gamma)grad\gamma\\ &- \left\{(m+2)\alpha+m-1\right\}e^{-4\gamma}\nabla_{grad\gamma}grad\gamma\\ &+ 2\left\{(m+2)\alpha+m-1\right\}e^{-4\gamma}|grad\gamma|^2grad\gamma.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}Tr_{\overline{g}}\nabla^2e^{-2\gamma}grad\gamma &= e^{-4\gamma}Tr_g\nabla^2grad\gamma+\left\{(m+2)\alpha+m-6\right\}e^{-4\gamma}\nabla_{grad\gamma}grad\gamma\\ &- 2e^{-4\gamma}\left\{e_i\left(e_i(\gamma)\right)-\left(\nabla_{e_i}e_i\right)(\gamma)\right\}grad\gamma\\ &- 2\left\{(m+2)\alpha+m-4\right\}e^{-4\gamma}|grad\gamma|^2grad\gamma.\end{aligned}$$

Grâce aux formules suivantes :

$$\begin{aligned}Tr_g\nabla^2grad\gamma &= Tr_g\left(\widehat{\nabla}\right)^2grad\gamma-\tfrac{1}{2}\widehat{\nabla}_{e_i}K(e_i,grad\gamma)+\tfrac{1}{2}K(\widehat{\nabla}_{e_i}e_i,grad\gamma)\\ &- \tfrac{1}{2}K(e_i,\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma)+\tfrac{1}{4}K(e_i,K(e_i,grad\gamma))\end{aligned}$$

$$\nabla_{e_i}e_i = \widehat{\nabla}_{e_i}e_i - \frac{1}{2}E$$

$$\begin{aligned} e_i\left(e_i(\gamma)\right) - \left(\nabla_{e_i}e_i\right)(\gamma) &= e_i\left(e_i(\gamma)\right) - \left(\widehat{\nabla}_{e_i}e_i\right)(\gamma) + \frac{1}{2}E(\gamma) \\ &= \widehat{\Delta}(\gamma) + \frac{1}{2}E(\gamma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_{grad\gamma}grad\gamma &= \widehat{\nabla}_{grad\gamma}grad\gamma - \frac{1}{2}K(grad\gamma, grad\gamma) \\ &= \frac{1}{2}grad\left(|grad\gamma|^2\right) - \frac{1}{2}K(grad\gamma, grad\gamma), \end{aligned}$$

on conclut que

$$\begin{aligned} Tr_{\overline{g}}\nabla^2 e^{-2\gamma}grad\gamma &= e^{-4\gamma}Tr_g\left(\widehat{\nabla}\right)^2 grad\gamma + \frac{(m+2)\alpha+m-6}{2}e^{-4\gamma}grad\left(|grad\gamma|^2\right) \\ &- 2e^{-4\gamma}\left\{\widehat{\Delta}\gamma + \tfrac{1}{2}E(\gamma)\right\}grad\gamma - \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma}K(grad\gamma, grad\gamma) \\ &- 2\left\{(m+2)\alpha+m-4\right\}e^{-4\gamma}|grad\gamma|^2 grad\gamma \\ &- \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma}\widehat{\nabla}_{e_i}K(e_i, grad\gamma) + \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma}K(\widehat{\nabla}_{e_i}e_i, grad\gamma) \\ &- \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma}K(e_i, \widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma) + \tfrac{1}{4}e^{-4\gamma}K(e_i, K(e_i, grad\gamma) \end{aligned}$$

Pour compléter la preuve de ce théorème, on va regarder le terme $Tr_{\overline{g}}R\left(e^{-2\gamma}grad\gamma, .\right).$, on a

$$Tr_{\overline{g}}R\left(e^{-2\gamma}grad\gamma, .\right). = e^{-2\gamma}R\left(grad\gamma, \overline{e_i}\right)\overline{e_i} = e^{-4\gamma}Tr_gR\left(grad\gamma, .\right).$$

Comme

$$\begin{aligned} Tr_gR\left(grad\gamma, .\right). &= \widehat{Ricci}(grad\gamma) - \tfrac{1}{2}\widehat{\nabla}_{grad\gamma}E + K(\widehat{\nabla}_{grad\gamma}e_i, e_i) \\ &+ \tfrac{1}{2}\widehat{\nabla}_{e_i}K(grad\gamma, e_i) - \tfrac{1}{2}K(\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma, e_i) \\ &- \tfrac{1}{2}K(grad\gamma, \widehat{\nabla}_{e_i}e_i) \end{aligned}$$

il suit que

$$\begin{aligned} Tr_{\overline{g}}R\left(grad\gamma, .\right). &= e^{-4\gamma}\widehat{Ricci}(grad\gamma) - \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma}\widehat{\nabla}_{grad\gamma}E + e^{-4\gamma}K(\widehat{\nabla}_{grad\gamma}e_i, e_i) \\ &+ \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma}\widehat{\nabla}_{e_i}K(grad\gamma, e_i) - \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma}K(\widehat{\nabla}_{e_i}grad\gamma, e_i) - \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma}K(grad\gamma, \widehat{\nabla}_{e_i}e_i) \end{aligned}$$

Finalement, on déduit que $Id : (M^m, \overline{\nabla}, \overline{g}) \to (M^m, \nabla, g)$ est biharmonique relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + \frac{(m+2)\alpha + m - 6}{2} grad\left(|grad\gamma|^2\right) - 2\left\{\widehat{\Delta}\gamma + \tfrac{1}{2}E(\gamma)\right\} grad\gamma \\
&-2\left\{(m+2)\alpha + m - 4\right\}|grad\gamma|^2 grad\gamma - \tfrac{1}{2}K(grad\gamma, grad\gamma) \\
&-\tfrac{1}{2}\widehat{\nabla}_{grad\gamma}E + 2\widehat{Ricci}(grad\gamma) + Tr_g K([grad\gamma, .], .) + \tfrac{1}{4}Tr_g K(K(grad\gamma, .), .) = 0.
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.3.3. *Soit* $(\mathbb{R}^2, g)$ *une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = dx^2 + dy^2$$

et ∇ *une connexion affine définie par :*

$$\nabla_{e_1} e_1 = e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = e_1.$$

Où $\left\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ *est une une base orthonormée. On déduit que :*

$$K(e_1, e_1) = -2e_2, \qquad K(e_2, e_2) = 0, \qquad K(e_1, e_2) = K(e_2, e_1) = -2e_1.$$

$$\widehat{\nabla}_{e_1} e_1 = \widehat{\nabla}_{e_2} e_2 = \widehat{\nabla}_{e_1} e_2 = \widehat{\nabla}_{e_2} e_1 = 0$$

et

$$E = Tr_g K = K(e_1, e_1) + K(e_2, e_2) = -2e_2.$$

La condition de biharmonicité de l'application identité $Id : (\mathbb{R}^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g) \to (\mathbb{R}^2, \nabla, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\overline{\nabla}, \nabla)$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned}
&grad\left(\widehat{\Delta}\gamma\right) + (2\alpha - 2) grad\left(|grad\gamma|^2\right) - 2\left\{\widehat{\Delta}\gamma + \tfrac{1}{2}E(\gamma)\right\} grad\gamma \\
&-2\left\{\alpha - 2\right\}|grad\gamma|^2 grad\gamma - \tfrac{1}{2}K(grad\gamma, grad\gamma) \\
&-\tfrac{1}{2}\widehat{\nabla}_{grad\gamma}E + 2\widehat{Ricci}(grad\gamma) + Tr_g K([grad\gamma, .], .) \\
&+\tfrac{1}{4}Tr_g K(K(grad\gamma, .), .) = 0.
\end{aligned}$$

Pour cette équation, on suppose que la fonction γ *dépend seulement de la variable* y*, on conclut que :* $Id : (\mathbb{R}^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma} g) \to (\mathbb{R}^2, \nabla, g)$ *est biharmonique relativement à* $(\overline{\nabla}, \nabla)$ *si et seulement si* $\beta = \gamma'$ *est solution de l'équation différentielle suivante :*

$$\beta'' + 2(2\alpha - 3)\beta\beta' + 2\beta^2 - 2(\alpha - 2)\beta^3 + \beta = 0.$$

Notons que pour cette équation, on peut trouver beaucoup de solutions. Pour $\alpha = 2$, une solution particulière nous donne :

$$\gamma = -\frac{1}{2}y + B.$$

Pour $\alpha \neq 2$, on trouve deux solutions particulières :

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\alpha - 3} + 1}{2\alpha - 4}y + B, \qquad \gamma = -\frac{\sqrt{2\alpha - 3} - 1}{2\alpha - 4}y + B.$$

Exemple 3.3.4. *Soit $\left(H^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\right\}, g\right)$ une variété statistique équipée de la métrique riemannienne*

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

et soit ∇ une connexion affine définie par :

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = 2e_2, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_1 = e_1,$$

où $\left\{e_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, e_2 = y\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ est une structure orthonormée. Un calcul direct nous donne :

$$\overset{*}{\nabla}_{e_1} e_1 = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_2 = -2e_2, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_1} e_2 = -2e_1, \quad \overset{*}{\nabla}_{e_2} e_1 = -e_1,$$

et

$$\widehat{\nabla}_{e_1} e_1 = e_2, \quad \widehat{\nabla}_{e_2} e_2 = 0, \quad \widehat{\nabla}_{e_1} e_2 = -e_1, \quad \widehat{\nabla}_{e_2} e_1 = 0.$$

On déduit que :

$$K(e_1, e_1) = -2e_2, \quad K(e_2, e_2) = -4e_2, \quad K(e_1, e_2) = K(e_2, e_1) = -2e_1, \quad E = -6e_2.$$

et

$$\widehat{R}(e_1, e_2) e_2 = -e_1, \qquad \widehat{R}(e_2, e_1) e_1 = -e_2, \qquad \widehat{Ricci}(X) = -X.$$

Alors, l'application identité $Id : (H^2, \overline{\nabla}, \overline{g} = e^{2\gamma}g) \to (H^2, \nabla, g)$ est biharmonique relativement à $(\overline{\nabla}, \nabla)$ si et seulement si $\beta(y) = \gamma'(y)$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\beta'' + 2(2\alpha - 3)\beta\beta' + 7\beta' + 8\beta^2 - 2(\alpha - 2)\beta^3 + 16\beta = 0.$$

Pour $\alpha = 2$, on trouve une solution particulière donnée par :

$$\gamma = -2y + B.$$

Pour $\alpha \neq 2$, *on trouve deux solutions particulières :*

$$\gamma = \frac{1}{\alpha - 2}(2\sqrt{2\alpha - 3} + 2)y + B$$

et

$$\gamma = -\frac{1}{\alpha - 2}(2\sqrt{2\alpha - 3} - 2)y + B.$$

Conclusion

Dans cette thèse, on a donné quelques exemples sur les applications biharmoniques non harmoniques dans des variétés statistiques, on a rappelé la déformation conforme de la métrique de départ ou d'arrivée, en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que l'application soit biharmonique et on a représenté quelques résultats sur les structures conformément équivalentes, sur la relation entre R et $\widehat{R}$ et $\overline{R}$ les tenseurs de courbure pour montrer la biharmonicité de l'application identité dans des variétés statistiques.

Bibliographie

[1] K. Addad and S. Ouakkas : *On the α-connections and the α-conformal equivalence on statistical manifolds*, Arab Journal of Mathematical Sciences, (2021).

[2] S. Amari : *Information Geometry and Its Applicati ons*, Springer : Tokyo, Japon, 2016.

[3] P. Baird : *Harmonic maps with symmetry, harmonic morphisms and deformation of metrics,* Pitman Books Limited, (1983), 27-39.

[4] P. Baird et J. Eells : *A conservation law for harmonic maps,* Lecture Notes in Math. 894, Springer (1981), 1-25.

[5] P. Baird et J. Eells : *Harmonic morphisms between Riemannain manifolds,* Oxford Sciences Publications (2003).

[6] J.Eells and L.Lemaire : *A report on harmonic maps,*.Bull. London Math. Soc. 16 (1978), 1-68.

[7] J.Eells and L.Lemaire : *Another report on harmonic maps,*.Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.

[8] J.Eells and A.Ratto : *Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries,*.Princeton University Press (1993).

[9] J. Eells et J.H. Sampson : *Harmonic mappping of Riemannian manifolds,* Amer. J.Math 86 (1964), 109-160

[10] G.Y. Jiang : *2-harmonic Maps and their first and second variational formulas,*Chinese Ann. Math. Ser. A 7(1986), 389-402.

[11] T. Kurose :*On the divergence of 1-conformally flat statistical manifolds,* Tohoku Math. J., 46(1994),427-433.

[12] C. R. Min, S. O. Choe and Y. H. An : *Statistical immersions between statistical manifolds of constant curvature,* Glob. J. Adv. Res. Class. Mod. Geom. 3(2014)66.

[13] I. Okamoto, S. Amari and K. Takeuchi : *Asymptotic theory of sequential estimation : differential geometrical approach,* Ann. Statist. 19(1991), 961-981.

[14] F. M. SIMSIR : *A note on harmonic maps of statistical manifolds,* Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. Vol 68 number 2 (2019), 1370-1376.

[15] K. Uohashi, A. Ohara and T. Fuji : *1-Conformally Flat Statistical Submanifolds,* Osaka J. Math., 37(2000), 501-507.

[16] K. Uohashi : *On α-conformal equivalence of statistical submanifolds,* J.Geom.75 (2002), 179-184.

[17] K. Uohashi : *α-Connections and a Symmetric Cubic Form on a Riemannian Manifold,* J. Geom. Phys. Volume 56(3), 358-374(2006).

[18] K. Uohashi : *Harmonic maps relative to α-connections,* Geometric Theory of Information. Springer, Switzerland, (2014), 81-96.

[19] K. Uohashi : *α-Connections and a Symmetric Cubic Form on a Riemannian Manifold,* Entropy (MDPI) 2017, 19, 344.

[20] J. Zhang : *A note on curvature of α-connections of a statistical manifold*, AISM, 59 (2007), 161-170.