République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Tahar Moulay de Saïda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

POLYCOPIÉ

Cours d'analyse complexe

Elaboré par :

Dr. DJERFI Kouider
Maître de Conférences "B"

Année Universitaire 2021 – 2022

Cours d'analyse complexe

Dr. DJERFI Kouider, Maitre de conférences -B-

Département de Mathématiques, Université Dr. Tahar Moulay de Saida,
B.P 138, En-nasr, Saida, Algérie.
E-mail : **kouider.djerfi@univ-saida.dz**

Principales notations

$\mathbb{N}$	:	$l'ensmeble\ des\ entiers\ naturels.$
$\mathbb{N}^*$	:	$\mathbb{N}-\{0\}.$
$\mathbb{Z}$	:	$anneau\ des\ entiers\ relatifs.$
$\mathbb{R}$	:	$corps\ des\ réels,\ et\ espace\ métrique\ muni\ de\ la\ distance\ euclidienne.$
$\mathbb{R}_+$	:	$\{x;\ x\in\mathbb{R},\ x\geq 0\}.$
$\mathbb{R}_+^*$	:	$\mathbb{R}_+-\{0\}.$
$\mathbb{C}$	:	$corps\ des\ complexes.$
$\mathcal{B}_{\mathbb{K}(V)}$	:	$base\ du\ \mathbb{K}-espace\ vectoriel\ V.$
$\mathbb{R}^n$	:	$espace\ vectoriel\ sur\ \mathbb{R}\ des\ n-uples\ réels\ ordonnés\ (x_1,...,x_n).$
$\mathbb{C}^n$	:	$espace\ vectoriel\ sur\ \mathbb{C}\ des\ n-uples\ complexes\ ordonnés\ (z_1,...,z_n).$
$\mathbb{R}_n[X]$	:	$espace\ des\ polynômes\ de\ degré\ inférieur\ ou\ égal\ à\ n,\ à\ coefficients\ réels.$
$\mathbb{C}_n[X]$	:	$espace\ des\ polynômes\ de\ degré\ inférieur\ ou\ égal\ à\ n,\ à\ coefficients\ complexes.$
$[x]$	:	$partie\ entière\ duréel\ x.$
$Arg(z)$	:	$argument\ du\ nombre\ complexe\ z.$
$n!$	:	$1.2....(n-1).n.$
$u_n\to u$	:	$u_n\ tend\ vers\ u\ lorsque\ n\ tend\ vers\ l'infini.$
$o(\lvert h\rvert)$	:	$\lvert h\rvert\xi(h)\ \ avec\ \lim\limits_{h\to 0}\xi(h)=0.$
$O(\lvert h\rvert)$	:	$\lvert h\rvert\xi(h)\ \ avec\ \xi(h)\ bornée\ au\ voisinage\ de\ 0.$
$f(z)\mid_{z=a}$	:	$la\ valeur\ de\ la\ fonction\ f\ au\ point\ a.$
$D(z_0,r)$	:	$le\ disque\ ouvert\ de\ centre\ z_0\ de\ rayon\ r.$
$\overline{D(z_0,r)}$	:	$le\ disque\ fermé\ de\ centre\ z_0\ de\ rayon\ r.$

Avant-propos

Ces notes de cours sont une introduction à l'analyse complexe. On trouvera une version révisée de la rédaction d'un cours que j'ai donné dans la licence de mathématiques à l'Université de Saida en 2006, 2007, 2015, 2016 et 2020.

Prérequis

Le lecteur est supposé étudier les notions élémentaires de la topologie générale et du calcul différentiel dans $\mathbb{R}^2$.

Sources et références

Parmi les nombreux ouvrages publies sur l'anaIyse complexe, plusieurs ont été largement utilisés dans cette rédaction, c'est le cas notamment de ceux de H. Cartan [1], P. Dolbeault [3] et W. Rudin [7]. Des références plus précises sont indiquées dans la bibliographie.

Chapitre 1

Corps des nombres complexes

Sommaire

1.1 Rappels sur la structure de l'ensemble $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède de bonnes propriétés algébriques, topologiques et analytiques, on cite en particulier :

1. C'est un corps commutatif et unitaire totalement ordonné archimédien, c'est donc un espace vectoriel sur lui même.
2. $\mathbb{R}$ possède une topologie localement compacte, connexe, acossiée à la métrique usuelle :
$$d(x,y) = |x-y|,$$

et relativement à cette distance, $(\mathbb{R}, d)$ est un espace métrique complet. $\mathbb{R}$ est aussi un espace de Banach et un espace de Hilbert avec le produit scalaire usuel :

$$< x, y >= xy.$$

3. Séparabilité : L'ensemble $\mathbb{R}$ est un ensemble non dénombrable, contenent une partie $\mathbb{Q}$, comme partie dénombrable qui est dense dans $\mathbb{R}$. Cela signifie que tout élément réel est limite d'une suite de rationnels.
4. Propriété de la borne supérieure : Toute partie A non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure notée $\sup A$ (resp. borne inférieure notée $\inf A$). Les réels $\sup A$ et $\inf A$ sont caractérisés par :

   Pour la borne supérieure $\sup A$**,** on a :

$$\begin{array}{rl} \forall x \in A & ; \quad x \leq \sup A, \\ \forall \varepsilon > 0 & ; \quad \exists x \in A, \ \sup A - \varepsilon < x. \end{array}$$

   Pour la borne inférieure $\inf A$**,** on a :

$$\begin{array}{rl} \forall x \in A & ; \quad \inf A \leq x, \\ \forall \varepsilon > 0 & ; \quad \exists x \in A, \ x < \inf A + \varepsilon. \end{array}$$

Par contre, il est facile de constater que le corps des réels n'est pas algébriquement clos, cela signefie qu'il existe des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X], \ n > 1$ qui n'admettent pas de racines réelles. Un exemple classique de polynômes irréductibles, est donné par :

$$P(x) = x^2 + 1.$$

La suite du présent chapitre est consacré à la détermination d'une extension du corps $\mathbb{R}$ en un corps commutatif algébriquement clos.

1.2 Construction et structure algébrique de $\mathbb{C}$

On munit le produit cartésien $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ des deux lois internes :

$$\begin{aligned}(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2) &= (a_1+a_2,b_1+b_2),\ pour\ tout\ a_i,\ b_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ 2.\\ (a_1,b_1)\otimes(a_2,b_2) &= (a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1),\ pour\ tout\ a_i,\ b_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ 2.\end{aligned}$$

On montre sans peine le :

Théorème 1.1. $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ *est un corps commutatif et unitaire, appelé corps des nombres complexes.*

Par suite on utilise la notation suivante :

$$(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)=(\mathbb{C},+,\times),$$

et on utilise indifféremment les symboles $\oplus$ et $+$ (resp. $\otimes$ et $\times$).
L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto (x,0),\end{aligned}$$

réalise un isomorphisme de corps entre le corps des réels $\mathbb{R}$ et son image, d'où l'identification

$$\mathbb{R} \simeq \{(x,0)\ :\ x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}.$$

On note

$$(0,1)=i\in\mathbb{C},$$

et un calcul direct nous donne

$$i^2=(0,1)\otimes(0,1)=(-1,0)=-(1,0)=-1,$$

et de même, on a $(-i)^2=-1$ et donc le polynôme $P(x)=x^2+1$ possède deux racines dans le corps $\mathbb{C}$.
Soit $z=(x,y)$ est un nombre complexe, on a

$$\begin{aligned}z &= (x,0)+(0,y)\\ &= (x,0)\times(1,0)+(y,0)\times(0,1)\\ &= x\times1+y\times i\\ &= x+iy,\end{aligned}$$

ce qu'on résume en disant :

Définition 1.1. 1. Tout nombre complexe z s'écrit d'une façon unique sous la **forme canonique** $z = x + iy$. Les réels x et y sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. On note

$$x = Re(z) \ \ et \ \ y = Im(z)$$

2. On note

$$Re(z) - iIm(z) = \overline{z},$$

appelé le **conjugué** du nombre complexe z.

Définition 1.2. (Module et argument).

1. Le produit $z.\overline{z}$ est égal au réel $x^2 + y^2 \geq 0$. On pose

$$|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

appelé le **module** du nombre complexe z.

2. Si $z \neq 0$, le nombre complexe

$$\frac{z}{|z|}$$

est un nombre complexe de module égale à 1. On a donc la formule d'Euler

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

où, le réel θ est appelé **l'argument** de z.

Ainsi, on a construit une extension du corps des réels en un corps commutatif unitaire, on montre dans [6] que $\mathbb{C}$ est l'extension unique maximale de $\mathbb{R}$. Plus loin, dans le cinquième chapitre on utilise la théorie de Cauchy pour montrer que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (théorème de D'Alembert).

1.3 Structures vectorielles de $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{C}$ possède deux structures d'espace vectoriel :

– D'une part, le corps $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur lui même de dimension 1. On exprime cela en écrivant

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z \ = \ z.1,$$

avec une base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ composée de l'unique vecteur 1.

– D'autre part, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension 2, avec une base canonique

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \{1, i\},$$

Par conséquent, il existe deux notions de linéarité pour une application $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

Définition 1.3. Une application $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite :

1. $\mathbb{R}$–linéaire si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C} \ &: \ L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2), \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \ &: \ L(\lambda.z) = \lambda.L(z). \end{aligned}$$

2. $\mathbb{C}$–linéaire si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C} \ &: \ L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2), \\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C} \ &: \ L(\lambda.z) = \lambda.L(z). \end{aligned}$$

Il est immédiatement remarqué que La $\mathbb{C}$–linéarité implique la $\mathbb{R}$–linéarité.

Exemple 1.1. – L'application $z \mapsto z$ est $\mathbb{R}$–linéaire et $\mathbb{C}$–linéaire.
– L'application $z \mapsto \bar{z}$ est $\mathbb{R}$–linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$–linéaire.

La proposition suivante caractérise toutes les applications linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.1. Une application $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est :

1. $\mathbb{R}$–linéaire si et seulement si

$$\exists a,\ b \in \mathbb{C},\ \forall\ z = x + iy \in \mathbb{C},\ L(z) = ax + by,$$

2. $\mathbb{C}$−linéaire si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{C},\ \forall\ z \in \mathbb{C},\ L(z) = \lambda.z,$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la définition :

1. Pour la $\mathbb{R}$−linéarité, on a

$$\begin{aligned} L(z) &= L(x+iy) \\ &= L(x)+L(iy) \\ &= xL(1)+yL(i) \\ &= xa+yb, \end{aligned}$$

   avec $a = L(1)$ et $b = L(i)$.

2. Pour la $\mathbb{C}$−linéarité, on a

$$\begin{aligned} L(z) &= L(z.1) \\ &= L(1).z \\ &= \lambda z, \end{aligned}$$

   avec $\lambda = L(1)$. □

Par conséquent, toute application $\mathbb{C}$−linéaire est $\mathbb{R}$−linéaire, et inversement on a le

Corollaire 1.1. *Une application* $\mathbb{R}$−*linéaire* $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$L(x+iy) = ax+by$$

est $\mathbb{C}$−*linéaire si et seulement si*

$$b = ia.$$

Plus tard dans le chapitre suivant, on applique ce corollaire pour caractériser les fonctions $\mathbb{C}$−différentiables parmi ceux qui sont $\mathbb{R}$−différentiables.

1.4 Topologie de $\mathbb{C}$

Avec l'identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, le module d'un nombre complexe correspond à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Elle fait de $\mathbb{C}$ un espace de Banach. La distance entre deux nombres complexes est ainsi donnée par

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Les concepts de base de la topologie telles que la convergence des suites, limite des fonctions, convergence uniforme, ensembles ouverts et fermés, compacité, connexité......., sont les mêmes. Néanmoins, il est indispensable de rappeler quelques notions nécessaires spécifiques pour la topologie usuelle du corps complexe $\mathbb{C}$.

1.4.1 Fonction d'une variable complexe

Définition 1.4. On dit q'une fonction $w = f(z)$ est définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$, si à chaque point $z \in D$, on associe une (la fonction est alors uniforme) ou plusieurs (la fonction est dite multiforme) valeurs $w \in \mathbb{C}$.

Soient Ω et $\overline{\Omega}$ deux ensembles de $\mathbb{C}$, soit $f : \Omega \to \overline{\Omega}$ une fonction complexe. Nous pouvons identifier $z = x + iy \in \Omega$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $f(z) \in \overline{\Omega}$, avec $(P(x, y), Q(x, y)) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi on a défini deux fonctions réelles P et Q des deux variables x et y, avec

$$P = Re(f) \; et \; Q = Im(f).$$

Il est naturel de remarquer immédiatement que la régularité (continuité, différentiabilité...) de la fonction complexe f dépend de celle des deux fonctions P et Q. Plus tard, dans le chapitre suivant on montre que la dérivabilité au sens complexe de f dépend d'une dualité entre les dérivées partielles des deux fonctions P et Q (conditions de Cauchy-Riemann).

Exemple 1.2. Soit $w = f(z) = z^3 - i\overline{z}$, on pose $z = x + iy$ et $w = P(x, y) + iQ(x, y)$. On obtient

$$P + iQ = (x + iy)^3 - i(x - iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x)$$

donc

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x^3 - 3xy^2 - y \\ Q(x,y) &= 3x^2y - y^3 - x \end{aligned}$$

1.4.2 Limite et continuité des fonctions complexes

La notion de la limite dans un espace métrique est appliquée ici pour écrire les critères de la limite et la continuité conformément à la topologie usuelle de l'espace $\mathbb{C}$.

Définition 1.5. (Limite). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage de $z_0 \in \Omega$ sauf, peut être en z_0. On défini la limite de f quand z tend vers z_0, et on écrit : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall z \in \Omega \ : \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Exemple 1.3. On montre que

$$\lim_{z \to i} (iz) = -1.$$

On a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z) - w_0| = |iz + 1| = |i||z - i| = |z - i|,$$

Donc, pour avoir $0 < |z - i| < \delta \Rightarrow |f(z) + 1| < \varepsilon$, il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

Définition 1.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. Les énoncés suivants sont alors équivalents :

1. Pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de Ω, on a

$$[\lim_{n \to +\infty} z_n = z_0] \Rightarrow [\lim_{n \to +\infty} f(z_n) = f(z_0)]$$

2. A chaque $\varepsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tels que

$$[z \in \Omega \ et \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon]$$

Lorsqu'ils sont satisfaits, la fonctions f est dite continue en z_0. Si elle est continue en chaque points $z_0 \in \Omega$, on dit alors que f est continue sur le domaine Ω.

Remarques 1.1. 1. Une fonction complexe est continue si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.

2. Ainsi la somme, le produit, le quotient et la composition de deux fonctions continues (lorsqu'elles sont définies) sont des fonctions continues.
3. Toute limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue.
4. Le nombre δ dans la définition précédente dépend à la fois du point z_0 et du paramètre ε. Dans le cas où le nombre réel δ peut être choisi indépendamment de la variable $z_0 \in \Omega$, on dit que la fonction f est uniformément continue sur le domaine Ω.

1.5 Rappels sur les suites et les séries de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.7. – La suite de fonctions (f_n) converge simplement si pour tout $z \in \Omega$, la suite $(f_n(z))$ converge dans $\mathbb{C}$.

– La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur Ω vers une fonction f si

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \right) = 0$$

La proposition suivante découle immédiatement de cette définition.

Proposition 1.2. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur Ω si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall (m,\ n) \in \mathbb{N}_*^2 : m \geq N,\ n \geq N,\ z \in \Omega \Rightarrow |f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$$

Passant, maitenant, au cas des séries de fonctions à valeurs complexes. Etant donnée une suite de fonctions (f_n) définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, la série de terme général f_n notée $\sum f_n$ est la suite de fonctions formée par les sommes partielles : $S_n = \sum_{k=0}^{n}(f_k)$.

Définition 1.8.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) si la suite de fonctions formée par les sommes partielles
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(f_k)$$
converge simplement (resp. uniformément),
- Si $(S_n(z))$ converge, on appelle sa limite la somme de la série $\sum f_n(z)$ et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty}(f_n)$ (ou simplement $\sum f_n$),
- La série $\sum f_n$ est dite normalement convergente sur Ω, si $\sum_n \|f_n(z)\| < +\infty$, et on a alors :

Proposition 1.3. Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente, alors elle est uniformément convergente.

Chapitre 2

Fonctions holomorphes

Dans tout ce chapitre, et sauf si le contraire est indiqué, les domaines de définition des fonctions à variables complexes sont des ouverts connexes. Le but de ce chapitre et de définir la notion de dérivabilité au sens complexe, et de caractériser les fonctions différentiables relativement à la structure du corps complexe parmi les fonctions $\mathbb{R}$–différentiables.

2.1 Dérivation complexe (Holomorphie)

Définition 2.1. Soient $U \subset \mathbb{C}$ un domaine et $a \in U$. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable (au sens complexe) au point a, si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.1}$$

existe. Dans ce cas on appelle cette limite notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dz}(a)$, **la dérivée de f au point a.**
Si la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable en tout point de U, on dit que f **est holomorphe dans U.**

Exemples 2.1. 1. La fonction constante $f : z \mapsto c$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et on a

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0 \ \forall h \neq 0, \textit{ pour tout } a \in \mathbb{C},$$

donc $f'(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. La fonction $f: z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad = \quad 1 \;\; \forall h \neq 0, \; pour \; tout \; a \in \mathbb{C},$$

donc $f'(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.1. Une fonction dérivable en un point $a \in U$ est nécessairement continue en a, en effet,
si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l \in \mathbb{C},$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \eta > 0 \, / \, |h| < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - l \right| < \varepsilon,$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \eta > 0 \, / \, |h| < \eta \Rightarrow |f(a+h)-f(a)| < |h|(|l| + \varepsilon),$$

et pour $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{|l| + \varepsilon}$, On peut affirmer que

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \alpha > 0 \, / \, |h| < \alpha \Rightarrow |f(a+h)-f(a)| < \varepsilon,$$

et cela signifie que $\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) = 0$, et la fonction f et continue au point a. Par conséquent, toute fonction holomorphe sur un domaine U est continue sur U.

On note $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur un domaine X. Par suite, on munit l'ensemble $\mathcal{H}(X)$ des lois naturelles : Addition, multiplication et multiplication par un scalaire. La proposition suivante établit la structure algébrique de $(\mathcal{H}(X))$.

Proposition 2.1. L'ensemble $(\mathcal{H}(X), +, \bullet, \cdot)$ des fonctions holomorphes sur un domaine connexe X est une $\mathbb{C}$–algèbre commutative et unitaire. De plus, on a les propriétés suivantes :

1. Pour f, $g \in \mathcal{H}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$

$$(\lambda \bullet f)'(z) = \lambda \bullet f'(z),$$

pour tout z dans X.

2. Pour $f,\ g \in \mathcal{H}(X)$,

$$(f.g)'(z) = f'(z).g(z) + f(z).g'(z),$$

pour tout z dans X.

3. Si $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in X$, alors $\frac{f}{g}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur X et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z).g(z) - g'(z).f(z)}{g^2(z)}$$

pour tout $z \in X$.

4. Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \Omega\prime$, $g : \Omega\prime \to \mathbb{C}$. On suppose que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$, et que g est $\mathbb{C}$-dérivable en $f(z_0)$. Alors gof est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, et on a

$$(gof)'(z_0) = g'(f(z_0)).f'(z_0)$$

Preuve. La preuve est analogue au cas réel. En particulier pour le cas du produit (formule de Leibniz), on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{f.g(z_0+h) - f.g(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0+h).g(z_0+h) - f(z_0).g(z_0)}{h} \\
&= \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.g(z_0) + f(z_0+h).\frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h},
\end{aligned}$$

faisant tendre h vers 0, en tenant compte de la continuité de f, le résultat s'obtient immédiatement.
Pour la composition gof des deux fonctions dérivables g et f, on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{gof(z_0+h) - gof(z_0)}{h} &= \frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{h} \\
&= \left(\frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{f(z_0+h) - f(z_0)}\right) \times \left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\right),
\end{aligned}$$

et la limite du terme gauche de la dernière identité quand h tend vers 0 est $g'(f(z_0)).f'(z_0)$. □

2.2 ℂ-différentiabilité, ℝ-différentiabilité

Définition 2.2. Soient $U \subset \mathbb{C}$ un domaine et $a \in U$. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$–différentiable au point a, s'il existe une application linéaire ($\mathbb{C}$-linéaire) L, tel que

$$f(a+h) - f(a) \quad = \quad L(h) + |h|.\xi(h), \quad \forall h \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

où, $\lim\limits_{|h| \to 0} \xi(h) = 0$. par suite l'application L sera notée $Df(a)$ ou $df(a)$.

D'après la proposition (1.1), l'équation (2.2) peut être reformulée de la façon suivante

$$f(a+h) - f(a) \quad = \quad \lambda.h + |h|.\xi(h) \ \ \forall h \in \mathbb{C},$$

où, λ est la constante complexe vérifiant $Df(a)(h) = \lambda.h$, est elle sera notée aussi $df(a)$. Cela justifie par suite l'équivalence entre la formule (2.2) et

$$f(a+h) - f(a) = df(a).h + o(|h|). \tag{2.3}$$

Il est immédiatement remarqué que (2.3) implique

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = df(a) \in \mathbb{C},$$

donc f est dérivable au point a. Et inversement, l'existence d'une limite L du quotient (2.1) implique que l'application

$$h \quad \mapsto \quad L.h$$

est l'unique application $\mathbb{C}$–linéaire vérifiant (2.2). Par conséquent, on a

Proposition 2.2. Une application f définie sur un ouvert connexe U est holomorphe si et seulement si elle est $\mathbb{C}$–différentiable.

Une fonction complexe, peut être vue comme une fonction de deux variables réelles. Le problème de la dérivation peut être abordé de deux manières différentes :

1. Via la fonction d'accroissement.

2. Relativement au dérivées partielles par rapport au variables réelles x et y.

La question qui se pose est la suivante : Comment exprimer la dérivabilité au sens complexe d'une fonction $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, en des conditions de régularité sur les fonctions réelles P et Q ? Pour se faire, on doit rappeler quelques notions de calcul différentiel sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.3. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ munie de la norme euclidienne, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$ et $(x_0, y_0) \in \Omega$.

1. On dit que f admet en (x_0, y_0) une dérivée partielle suivant la variable x (resp. suivant la variable y) si l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ (resp. $y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable au point x_0 (resp. au point y_0). Et on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

2. La fonction f est dite de classe C^1 sur Ω si elle admet en tout point de Ω des dérivées partielles suivant x et y et si ces dérivées partielles sont continues sur Ω.

3. On dit que f est $\mathbb{R}$–différentiable en (x_0, y_0) s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \quad = \quad f(x_0,y_0) + a.h + b.k + o(\|(h,k)\|). \tag{2.4}$$

Dans ce cas, l'application :

$$(h,k) \quad \longmapsto \quad a.h + b.k \tag{2.5}$$

est une application $\mathbb{R}$–linéaire appelée la difffférentielle de f en (x_0, y_0) et notée $df(x_0, y_0)$, avec

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \;\; et \;\; b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

En tenant compte de de la définition précédente et du corollaire (1.1), on démontre le théorème suivant

Théorème 2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur U à valeurs complexes. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *f est holomorphe dans U,*
2. *f est $\mathbb{C}$−différentiable en tout point de U,*
3. *f est $\mathbb{R}$−différentiable en tout point de U, avec*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z) \ \forall z \in U. \tag{2.6}$$

Une application immédiate de ce théorème mène au corollaire suivant, qui traduit la condition d'holomorphie (2.6) en terme des parties réelles et imaginaires de la fonction complexe en question.

Corollaire 2.1. *(Conditions de Cauchy-Riemann). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ une fonction définie sur U. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est holomorphe dans U,*
2. *Les fonctions à deux variables P et Q sont de classe C^1, avec*

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pour tout (x,y) dans U.

Preuve. 1. Si f est holomorphe dans U, f est $\mathbb{R}$−différentiable en tout point $z = x+iy$ dans U, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z),$$

i.e.

$$\frac{\partial(P+iQ)}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial(P+iQ)}{\partial x}(x,y),$$

et l'identification des parties réelles et imaginaires, donne (2.7).

2. Inversement, si P et Q sont de classe C^1, et la condition de Cauchy-Riemann (2.7) est vérifiée, la différentielle de f en z définie par

$$\begin{array}{rcl} df(z):\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ h & \mapsto & df(z).(h_1+ih_2)=\dfrac{\partial P}{\partial x}.h_1+\dfrac{\partial P}{\partial y}.h_2+i(\dfrac{\partial Q}{\partial x}.h_1+\dfrac{\partial Q}{\partial y}.h_2) \end{array}$$

est une application $\mathbb{C}-$linéaire identique à la $\mathbb{C}-$différentielle de f. □

Dans certains cas, la fonction dont on cherche à montrer l'holomorphie est écrite relativement aux coordonnées polaires, le lemme suivant exprime les conditions d'holomorphie dans ce cas.

Corollaire 2.2. *(Conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires). Soit U un ouvert inclus dans $\mathbb{C}^*$, et considérons la représentation polaire de U de la forme :*

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array}$$

alors la fonction $\mathbb{R}-$différentiable $F:\ U\to\mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\frac{\partial F}{\partial r} \tag{2.8}$$

Preuve. On note $G(r,\theta)=F(r\cos\theta, r\sin\theta)$. G est donc différentiable et on a

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial y}$$

Puisque $r\neq 0$ dans U, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

La condition de Cauchy (2.6) est donc équivalente à

$$\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}=i\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)$$

soit :

$$(\sin\theta-i\cos\theta)\frac{\partial F}{\partial r}=-\frac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}$$

Cela signifie

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\quad=\quad i\frac{\partial F}{\partial r}$$

Par conséquent, si

$$F=P(r,\theta)+iQ(r,\theta),$$

alors la version polaire des conditions de Cauchy-Riemann est

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r}&=\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\theta}\\ \frac{\partial Q}{\partial r}&=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\end{aligned}\tag{2.9}$$

□

Remarque 2.2. Dans ce cas des coordonnées polaires, l'expression de la dérivée $F'(z)$ est

$$F'(z)=\frac{1}{iz}\frac{\partial F}{\partial\theta}$$

Exemple 2.2. Sur le plan fendu $U=\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ on choisit la détermination de l'argument

$$-\pi<Arg(z)<\pi$$

et pour $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ dans U, on pose

$$\begin{aligned}L(z)&=\ln|z|+iArg(z)\\ &=\ln r+i\theta\end{aligned}$$

On montre que L est différentiable et vérifie la condition (2.8)

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial\theta}&=i\frac{\partial L}{\partial r}\\ &=\frac{i}{r}\end{aligned}$$

L est donc holomorphe dans U. La dérivée de L sur U est

$$\begin{aligned} L'(z) &= \frac{1}{iz}\frac{\partial L}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

La fonction L est appelée **la détermination principale du logarithme.**

2.3 Holomorphie et harmonicité

Définition 2.4. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite harmoniques si elle est de classe C^2 sur U et si

$$\triangle f = 0$$

où, $\triangle$ est l'opérateur de Laplace défini en coordonées cartésiens de $\mathbb{R}^n$ par

$$\triangle f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

En particulier, sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ une classe importante des fonctions harmoniques est celles des fonctions qui sont des partie réelles (ou imaginaire) des fonctions holomorphes. La proposition suivante établit ce résultat.

Proposition 2.3. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U, alors la partie réelle et la partie imaginaire de f sont des fonctions harmoniques.

Preuve. On suppose

$$f = P + iQ$$

les fonctions à deux variables P et Q sont de classe C^1 sur U, et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann (2.7). Un calcul direct des dérivées partielles $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$ nous donne

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

donc P et Q sont harmoniques. □

Chapitre 3

Séries entières et fonctions analytiques

3.1 Séries entières

Définitions 3.1.
- Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où, les coefficients a_n sont des nombres complexes, ainsi que la variable $z = x + iy$ est complexe.
- On appelle R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, défini par

  $$R = \sup\left\{r \geq 0 \ : \ \sum |a_n| r^n < \infty\right\}.$$

  Ce rayon de convergence existe toujours, il peut valoir 0, $+\infty$ ou un nombre réel fini.

Le rayon de convergence d'une série entière peut aussi être défini de la façon suivante :

Proposition 3.1. (Règle d'Abel)

$$R = \sup\{r \geq 0 \ : \ \sup |a_n| r^n < \infty\}.$$

Preuve. Soit R Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et soit $R_0 = \sup\{r \geq 0 \ : \ \sup |a_n| r^n < \infty\}$. Supposons $r_0 < R_0$ alors il existe M tel que

$|a_n|r_0^n \leq M$ donc si $r < r_0$, on a

$$|a_n|r^n = |a_n|r_0^n(\frac{r}{r_0})^n \leq M(\frac{r}{r_0})^n$$

et donc $\sum |a_n|r^n < +\infty$, puisque son terme général est majoré par celui d'une série géométrique convergente, on a donc $R \geq r_0$ et donc en passant à la limite quand r_0 tend vers R_0, on obtien $R \geq R_0$.
Si $r < R$, par définition $\sum |a_n|r^n < +\infty$, et donc en particulier la suite $(|a_n|r^n)_n$ est bornée, si bien que $R \leq R_0$. □

Une application directe de la définition et de la proposition précédente nous amènent à établir le théorème suivant qui donne une caractérisation supplémentaire du nombre $R \in \overline{\mathbb{R}}$:

Théorème 3.1. *Soit* $\sum_n a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *; alors*

1. *Si* $R = 0$*, la série* $\sum_n a_n z^n$ *n'est convergente que pour* $z = 0$.
2. *Si* $R = +\infty$*, la série converge normalement sur tout disque fremé de* $\mathbb{C}$.
3. *Si* $0 < R < +\infty$*, alors pour tout* $r < R$*, la série* $\sum_n a_n z^n$ *converge normalement sur le disque fremé* $\overline{D(0,r)}$*, et diverge en tout point* z *tel que* $|z| > R$.

Toutefois il est important de signaler que dans le cas $0 < R < \infty$, la situation en terme de convergence sur le cercle $C(0,R)$ diffère d'une série à autre. L'xemple suivant illustre cette remarque.

Exemple 3.1. La série entière $\sum z^n$, déterminée par les coéfficients $a_n = 1$ *pour tout* n, possède le rayon de convergence $R = 1$. En effet,

- $\sum z^n$ diverge pour tout z tel que $|z| > 1$,
- $\sum z^n$ converge normalement en tout point du disque unité $D(0,1)$,
- Sur le cercle unité S^1, la série est divergente en $z = 1$, semi-convergente sur le reste du cercle.

La détermination pratique du rayon de convergence est garanti par la proposition suivante :

Proposition 3.2. (Formule de Hadamard). Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

avec la convention $R = 0$ si $l = \infty$ et $R = +\infty$ si $l = 0$.

Preuve. Si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in N, \ \geq N, \ \sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon.$$

Si $(l + \varepsilon)r < 1$, alors

$$u_n = |a_n|r^n = (\sqrt[n]{|a_n|}r)^n \leq ((l + \varepsilon)r)^n \ \to 0, \ quand \ n \to +\infty.$$

On en déduit que $\frac{1}{l} \leq R$.
Soit $r > \frac{1}{l}$, il existe ε tel que $r(l - \varepsilon) > 1$.
Comme $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = l$, il existe une sous-suite (n_k) telle que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq l - \varepsilon$.
Par conséquent, la suite extraite $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}r)^{n_k} \to +\infty$, et donc la suite $(a_n r^n)_n$ n'est pas bornée. Puisque r est arbitrairement choisi $> \frac{1}{l}$, on a nécessairement $R \leq \frac{1}{l}$. D'où le résultat. □

3.2 Fonctions analytiques

Définition 3.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit que f est analytique en un point $z_0 \in \Omega$ si elle est développable en série entière au voisinage de z_0. Cela signifie qu'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n) \subset \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \ \ dans \ D(z_0, r)$$

Et on dit que f est analytique sur Ω si elle est analytique en tout point de Ω.

Exemple 3.2. Un polynôme de degré n est une fonction analytique en tout point de $\mathbb{C}$. En effet, on a d'aprés la formule de Taylor

$$P(z) = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

Proposition 3.3. (Principe des zéros isolés pour les séries entières). Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Supposons qu'il existe au moins un des coefficent a_n non nul, alors il existe $r > 0$ tel que

$$f(z) \neq 0 \;\; pour \;\; z \in D(0,r) - \{0\}$$

.

Preuve. Soit $n_0 = \inf\{n \geq 0 \;/\; a_n \neq 0\}$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{n_0} z^{n_0} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0+n}}{a_{n_0}} z^n\right) \\ &= a_{n_0} z^{n_0} g(z) \end{aligned}$$

Comme g est la somme d'une série entière, elle est continue sur son disque de convergence, et $\lim_{z \to 0} g(z) = 0$. Donc il existe un voisinage de 0 sur le quel $g(z) \neq 0$. En particulier,

$$\exists r > 0, \;\; tel\ que\ f(z) \neq 0 \;\; sur\ D(0,r) - \{0\}$$ □

Proposition 3.4. (Unicité du développement). Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique, zlors f admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de Ω.

Preuve. Soit $z_0 \in \Omega$, supposons que dans un voisinage de z_0, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0, r)$. Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n = 0$$

Donc d'après le principe des zéros isolés (Proposition (3.3))

$$a_n - b_n = 0,\ \forall n$$

D'où, $a_n = b_n,\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. $\square$

A partir du chapitre précédent sur la dérivation complexe et des propriétés des séries entières, on démontre sans difficulté les résultats suivants :

Proposition 3.5.
1. La somme d'une série entière est une fonction holomorphe dans son disque de convergence, la dérivation se fait terme à terme et si $f(z) = \sum_{0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, on a

$$f'(z) = \sum_{0}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

et la série dérivée admet le même domaine de convergence.
2. Une fonction analytique dans un domaine Ω est holomorphe dans Ω.
3. Le développement en série entière d'une fonction analytique coïncide avec le développement de Taylor. Dans un voisinage de z_0 on a

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

3.3 Fonctions élémentaires de $\mathbb{C}$

A partir d'un développement en série entière, on définit dans cette section quelques fonctions élémentaires holomorphes. Dans la plupart des cas, ces fonctions sont des prolongements des fonctions usuelles définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$.

3.3.1 Fonction exponentielle

Définition 3.2. On appelle fonction exponentielle complexe, la fonction définie par la série entière suivante :

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Il est claire de la définition, que cette fonction est entière, car le rayon de convergence de la série exponentielle est $R = +\infty$.

Quelques propriétés de la fonction exp sont établies dans la proposition suivante :

Proposition 3.6. 1. Pour tout z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
e^{z_1}.e^{z_2} &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} \\
&= e^{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

2. La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable, et sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\exp(z)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n.z^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= e^z
\end{aligned}$$

3. On a

$$|\exp(z)| = \exp(Re(z))$$

et donc

$$e^z \neq 0$$

pour tout z dans $\mathbb{C}$.

4. En particulier,

$$e^{iy} = 1$$

pour tout y dans $\mathbb{R}$, et on constate que la fonction exp est une fonction $2\pi i$–périodique.

3.3.2 Fonctions circulaires et hyperboliques

On rappelle la définition des fonctions circulaires réelles obtenues en utilisant la formule classique d'Euler :

Définition 3.3. On appelle cosinus et sinus les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$\cos t = Re(e^{it}),\ \sin t = Im(e^{it})\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Ces fonctions possèdent les propriétés suivantes :

Proposition 3.7. Pour tout réel t, on a :

1. $$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},\ \ \sin t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
2. $\sin^2 t + cos^2 t = 1$ pour tout t dans $\mathbb{R}$
3. Les deux fonctions cos et sin sont 2π−périodique.
4. Les deux fonctions cos et sin sont C^{∞} avec
$$\cos' t = -\sin t \ \ et \ \ \sin' t = \cos t$$
5. $$\begin{aligned} \cos t = 0 \ &\Leftrightarrow \ t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \sin t = 0 \ &\Leftrightarrow \ k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dans le cas complexe, ces fonctions peuvent être prolongées ainsi que les fonctions hyperboliques sinh et cosh, de la façon suivante :

Définition 3.4. Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on pose

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Des propriétés élémentaires de ces fonctions sont présentées dans la proposition suivante :

Proposition 3.8. 1. Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on a

$$\cosh(iz) = \cos z, \ \sinh(iz) = i \sin z.$$

2. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ pour tout z.
3. Les deux fonctions complexes cos et sin sont $2\pi-$périodiques.
4. Les deux fonctions complexes cosh et sinh sont $2\pi i-$périodiques.

3.3.3 Logarithme complexe

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$e^z = b \tag{3.1}$$

Si $b = 0$, nous savons que cette équation n'admet pas de solution. Si $b \neq 0$, le nombre complexe b s'écrit :

$$b = r(\cos t + i \sin t)$$

et pour $z = x + iy$, l'équation (3.1) se ramène au système :

$$\begin{array}{rcl} e^x & = & r \\ y & \equiv & t \ mod \ 2\pi \end{array}$$

Ce système admet une infinité de solutions :

$$\begin{array}{rcl} x & = & \ln r \\ y & = & t + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{array}$$

et le nombre complexe z s'écrit :

$$z = \ln|b| + iArg(b)$$

Donc pour définir une fonction inverse de la fonction exponentielle, il faut choisir une détermination de l'argument. Parmi les déterminations, on trouve :

Définition 3.5. Sur le plan fendu

$$D = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$$

on définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} Arg : D & \to &]-\pi, \pi[\\ z & \mapsto & Arg(z) = t \ / \ e^{it} = \dfrac{z}{|z|} \end{array}$$

appelée **détermination principale de l'argument**.

Remarque 3.1.

1. Le domaine de définition de l'argument est réduit à $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ pour garantir la continuité. Si la fonction était définie sur C^*, elle serait discontinue, par exemple on a :

$$\lim_{z \to -1,\ Im(z) > 0} Arg(z) = \pi \ \ et \ \ \lim_{z \to -1,\ Im(z) < 0} Arg(z) = -\pi$$

2. On a aussi un autre intérêt dans la choix du domaine. Au contraire de $\mathbb{C}^*$, le plan fendu D est simplement connexe, et le théorème de Cauchy s'applique donc pour une fonction holomorphe sur D.

Définition 3.6. Sur le plan fendu $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, on définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \log : D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \ln|z| + iArg(z), \ \ -\pi < Arg(z) < \pi, \end{array}$$

appelée : **la détermination principale du logarithme**

Cette fonction log est le prolongement naturelle du logarithme népérien et réalise une inversion de l'exponentielle complexe. Autres propriétés remarquables de cette fonction sont :

Proposition 3.9.

1. La fonction log est holomorphe dans D, et on a

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$

2. Pour tout z dans D, on a

$$\exp(\log z) = z$$

3. Si $-\pi < Im(z) < \pi$, alors $\exp(z) \in D$ et on a

$$\log(\exp z) = z$$

4. Si $z_1,\ z_2 \in D$, $\log z_1 \in D$ et $\log z_2 \in D$, alors

$$\log(z_1.z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

La détermination de la fonction puissance s'obtient aussi à partir de la détermination principale du logarithme, de la façon suivante :

Définition 3.7. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour z dans le plan fendu $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, on pose

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log(z)),$$

appelée **détermination principale de la fonction puissance** z^α.

Exemple 3.3. On définit $z^{1/2}$ la détermination principale de la fonction racine carrée dans D, par

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= z^{1/2} \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right) \\ &= \sqrt{|z|}\exp\left(i\frac{Arg(z)}{2}\right) \end{aligned}$$

Chapitre 4

Formule intégrale de Cauchy et ses conséquences

4.1 Chemins

Définition 4.1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, on appelle chemin (tracé dans U,) toute application continue et de classe C^1 par morceaux

$$\begin{array}{rcl}\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \gamma(t) \in U,\end{array}$$

cela signifie que la dérivée $\gamma'(t)$ existe sauf peut être en un nombre fini de points de l'intervalle $[t_0, t_1]$.

- $\gamma(t_0)$ est appelé l'origine du chemin et $\gamma(t_1)$ son extrémité. Si $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, le chemin est dit fermé.
- L'image de γ dans $\mathbb{C}$ notée γ^* est appelée support de γ. On confond souvent un chemin avec son support.
- Le chemin est dit simple si $\gamma :]t_0, t_1[\to \mathbb{C}$ est une application injective.

Exemple 4.1. 1. Le chemin constant est un chemin dont le support est réduit à un point $a \in \mathbb{C}$, i.e.

$$\gamma(t) = a \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

2. Le chemin opposé à $([t_0, t_1], \gamma)$ est le chemin $([t_0, t_1], \delta)$ défini par

$$\delta(t) = \gamma(t_0 + t_1 - t),$$

c'est le chemin de même support, parcouru dans le sens inverse.

3. Soient $([a, b], \gamma)$ et $([c, d], \delta)$ deux chemins tels que $\gamma(b) = \delta(c)$. Le chemin composé de γ et δ est le chemin noté $\gamma \cup \delta$ défini par

$$\begin{array}{rcl} \gamma \cup \delta : [a, b + d - c] & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma(t) & si\ t \in [a, b] \\ \delta(t) & si\ t \in [b, b + d - c] \end{cases} \end{array}$$

4. Pour deux points differets du plan complexe z_1 et z_2, le segment $[z_1, z_2]$ est le chemin de classe C^1 paramétré de la façon suivante

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (1 - t).z_1 + t.z_2 \end{array}$$

5. Le cercle de centre z_0 de rayon r orienté dans le sens direct, est le chemin qui admet la paramétrisation

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = z_0 + r.e^{it} \end{array}$$

4.2 Intégration le long des chemins

Définition 4.2. Soient U un douvert connexe de $\mathbb{C}$, $\gamma : [0, T] \longrightarrow U$ un chemin de classe C^1 tracé dans U et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur U. On définit **l'intégrale de f le long γ** par :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt,$$

notée $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.

Remarques 4.1. – L'intégrale définie par la formule précédente est une intégrale simple de Cauchy-Riemann à valeurs complexes, donc les

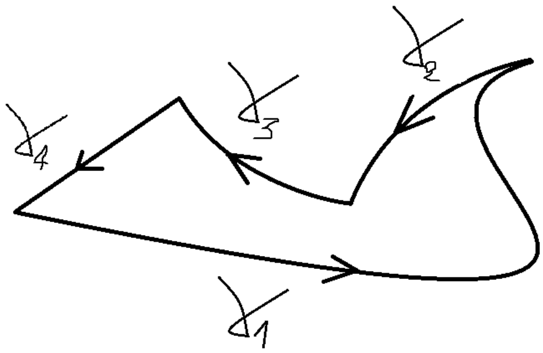

FIGURE 4.1 – Chemin fermé de classe C^1 par morceaux.

conditions d'existence de $\int_\gamma f(z)dz$ sont identiques aux conditions d'existences d'une intégrale de type $\int_a^b f(t)dt$ pour une fonction $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, en particulier la continuité de la fonction f est une condition suffisantes non-nécessaire.

– Pour la classe du chemin, il suffit que γ soit de classe C^1 par morceaux, i.e de classe C^1 sur $[0,T]$ sauf peut-être en un nombre fini de points (voir la figure 4.1).
– Dans le cas où, le chemin $\gamma : [0,T] \longrightarrow U$ est de classe C^1 par morceaux, avec n points $0 < t_1 < t_2 <,..,< t_n < T$ de discontinuité de la dérivée de γ, on considère γ comme étant la réunion de $n+1$ chemins de classe C^1, $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow U,\ 0 < i < n,$ avec $t_0 = 0,\ t_{n+1} = T$ et :

$$\begin{aligned} \gamma_i(t) &= \gamma(t),\ \forall t \in [0,T], \\ \gamma_i(t_{i+1}) &= \gamma_{i+1}(t_{i+1}),\ \forall i \in 0,..,n+1, \end{aligned}$$

et dans ce cas on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n+1} \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Le lemme suivant est fondamental en terme de majoration d'une intégrale complexe.

Lemme 4.1. *Si f est une fonction continue sur un domaine connexe U de $\mathbb{C}$ est γ un chemin tracé dans U, alors*

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \left(\sup_{\gamma^*}|f(z)|\right).L(\gamma),$$

où, $L(\gamma)$ est la longueur du chemin γ.

Preuve. Il suffit d'appliquer la définition et les propriétés de l'intégrale de Riemann, En effet

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| &= \left|\int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \left|f(\gamma(t))\right|.\left|\gamma'(t)\right|dt \\
&\leq \left(\sup_{\gamma^*}|f(z)|\right).\int_{t_0}^{t_1} \left|\gamma'(t)\right|dt \\
&\leq \left(\sup_{\gamma^*}|f(z)|\right).L(\gamma)
\end{aligned}$$

Exemple 4.2. Soit γ le cercle unité du plan complexe orienté une seule fois dans le sens direct, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt \\
&= \int_0^{2\pi} idt \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

Ce dernier exemple est un cas particulier de l'exemple fondamental qui consiste à calculer l'intégrale du quotient $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ sur un chemin fermé quelconque γ qui ne passe pas par le point a, i.e. $\gamma(t) \neq a$, pour tout t. Cette intégrale sert à définir la notion de l'indice d'un chemin fermé par rapport à un point du plan complexe.

4.3 Notion d'indice

Définition 4.3. Soient γ un chemin fermé tracé dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ un **point n'appartenant pas au support** de γ. **L'indice de γ par rapport au point** a est le nombre

$$ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a}$$

Le nombre ainsi défini a une signification topologique, et on comprend plus tard que ce nombre est exactement le **nombre de tours** effectués de γ autour du point a.

Exemple 4.3. On suppose γ le chemin déterminé par la paramétrisation

$$\begin{array}{rcl} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a+re^{imt} \end{array}$$

où, $m \in \mathbb{Z}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.
Le support de γ est le cercle de centre a, de rayon r. Calculons l'indice de γ par rapport à son centre a. En effet,

$$\begin{aligned} Ind(\gamma, a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{imre^{imt}}{re^{imt}}dt \\ &= m \end{aligned}$$

On remarque que l'entier m est bien le nombre de tours effectues par le chemin autour du point a. La proposition suivante regroupe les propriétés de l'indice.

Proposition 4.1. Soit γ un chemin fermé tracé dans un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point quelconque du plan complexe, alors

1. $Ind(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$.
2. $Ind(\gamma, a)$ est constant sur chaque composante connexe de l'ouvert $\mathbb{C} - \gamma^*$

3. $\lim\limits_{|a|\to\infty} Ind(\gamma, a) = 0$, et donc $Ind(\gamma, a)$ est nul en tout point de la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} - \gamma^*$.

Preuve. 1. Soit $0 \le t_0 < t_1$, on suppose que γ admet la paramétrisation

$$\begin{array}{rcl} [t_0, t_1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \gamma(t), \end{array}$$

avec $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$. Soit a un point quelconque de $\mathbb{C}$, on définit sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ la fonction φ à valeurs complexes, par

$$\varphi(s) = \exp\left(\int_{t_0}^{s} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt\right).$$

Puisque le chemin γ est de classe C^1, la fonction φ est dérivable, et on a

$$\varphi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a}.\varphi(s)$$

donc

$$\varphi'(s).[\gamma(s) - a] - \varphi(s).\gamma'(s) = 0.$$

Ainsi la dérivée de la fonction

$$\begin{array}{rcl} \phi : [t_0, t_1] & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \dfrac{\varphi(s)}{\gamma(s) - a} \end{array}$$

est aussi nulle. Donc ϕ est constante sur $[t_0, t_1]$, par conséquent,

$$\frac{\varphi(t_0)}{\gamma(t_0) - a} = \frac{\varphi(t_1)}{\gamma(t_1) - a}$$

et $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = 1$. Par définition de la fonction φ, on a

$$\begin{array}{rcl} \varphi(t_1) & = & \exp\left(\displaystyle\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - a}\right) \\ & = & 1, \end{array}$$

et d'après les propriétés de la fonction exp, on trouve

$$\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - a} = 2\pi i k \ \ / \ \ k \in \mathbb{Z}$$

ainsi,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - a} = Ind(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$$

2. On considère l'indice $Ind(\gamma, a)$ comme étant une fonction complexe de la variable a, définie sur l'ouvert $\mathbb{C} - \gamma^*$:

$$Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}dt = \psi(a)$$

Montrons que ψ est dérivable en tout point a du domaine de définition et à dérivée nulle. En effet,

$$\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a} \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)(\gamma(t) - a)}dt$$

et en faisant tendre z vers a, on a

$$\lim_{z\to a}\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{(\xi - a)^2}$$

Puisque la fonction complexe $\frac{1}{(\xi - a)^2}$ admet une primitive $(\frac{-1}{\xi - a})$ dans le domaine de définition $\mathbb{C} - \gamma^*$, alors son intégrale le long de tout chemin fermé est nulle. Ainsi,

$$\psi'(a) = 0 \ \ \forall a \in \mathbb{C} - \gamma^*$$

Par conséquent, $\psi(a) = Ind(\gamma, a)$ est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert $\mathbb{C} - \gamma^*$.

3. On note $Ext(\gamma)$ l'extérieur de γ^*, c'est la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} - \gamma^*$. Montrons que l'indice de γ est nulle sur cette partie. Puisque Ind est constant sur $Ext(\gamma)$, il suffit de montrer que

$$\lim_{|a|\to\infty} Ind(\gamma, a) = 0$$

L'ouvert $Ext(\gamma)$ est non bornée, donc

$$\forall r > 0, \ \ \exists \ \ a \in Ext(\gamma) \ \ / \ \ |\xi - a| > r \ \ pour \ tout \ \xi \in \gamma^*$$

donc

$$\begin{aligned} |Ind(\gamma,a)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi-a}\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi r}.L(\gamma) \end{aligned}$$

faisant tendre r vers $+\infty$, en trouve

$$\lim_{|a|\to\infty} Ind(\gamma,a)=0. \qquad \square$$

Remarque 4.1. Pour un cercle orienté une seule fois dans le sens direct, l'indice vaut donc +1 pour tout point intérieur, et 0 pour tout point à l'extérieur.

4.4 Théorèmes de Cauchy

L'objectif principal de cette section est de montrer l'équivalence entre l'analycité et l'holomorphie pour une fonction complexe définie sur un ouvert simplement connexe. Cet objectif ne peut être atteint qu'à partir du théorème fondamental de Cauchy. De nombreuses propriétés des fonctions holomorphes se regroupent sous le titre de la **théorie de Cauchy**, et peuvent être démontrées en utilisant la formule intégrale de Cauchy, on cite : le principe des zéros isolés, le théorème du prolongement analytique, la formule de la moyenne, le théorème de Liouville,... etc.
La notion topologique de connexité simple possède plusieurs définitions, on présente ici sans démonstration, la définition la plus simple de cette notion sous forme de trois assertions équivalentes.

Proposition 4.2. (Définition). Soit X un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'intérieur de tout chemin fermé tracé dans X est entièrement inclus dans X.
2. Tout chemin fermé tracé dans X est homotope à un point.
3. Le complémentaire de X dans $\mathbb{C}$ ne possède pas de composante connexe non bornée.

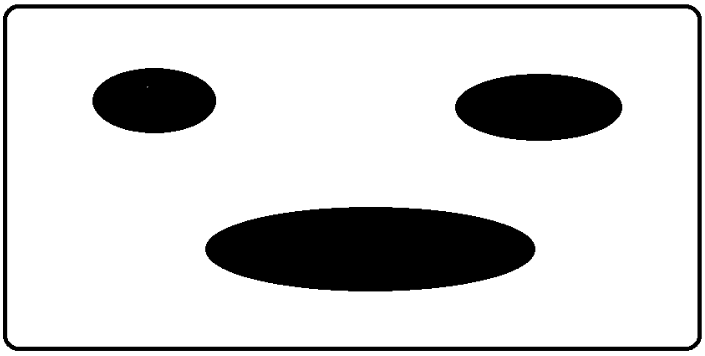

FIGURE 4.2 – Ouvert multiplement connexe

Un ouvert connexe vérifiant l'une des propriétés précédentes est appelé **simplement connexe**, dans le cas contraire, on dit que X est **multiplement connexe**.

Exemple 4.4.

1. Les ouverts $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ sont simplement connexes.
2. Un disque ouvert est simplement connexe.
3. Un disque ouvert privé d'un point est multiplement connexe, la couronne

$$\{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2\}$$

est multiplement connexe.

Le théorème fondamental suivant, est à la base de ce qu'on appelle en analyse complexe : **La théorie de Cauchy**.

Théorème 4.1. *(Cauchy). Soient X un ouvert simplement connexe et f une fonction holomorphe dans X. Si γ est un chemin fermé inclus dans X, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Preuve. La démonstration repose sur la formule classique de Green-Riemann. Sans perte de généralité, on suppose que le chemin γ est défini par

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & X \\ t & \mapsto & \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) \end{array}$$

On pose aussi

$$f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

Ainsi, puisque $f \in \mathcal{H}(X)$, les fonctions P et Q sont deux fonctions réelles de classe C^1 définies sur l'ouvert $X \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Calculons $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$,

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 (P(\gamma(t)) + iQ(\gamma(t))).(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))dt \\ &= \int_0^1 (P(\gamma(t)).\gamma_1'(t) - Q(\gamma(t)).\gamma_2'(t))dt + i\int_0^1 (P(\gamma(t))\gamma_2'(t) + Q(\gamma(t)).\gamma_1'(t))dt \\ &= \int_\gamma P(x,y)dx - Q(x,y)dy + i\int_\gamma P(x,y)dy + Q(x,y)dx \end{aligned}$$

Notons K le compact composé du support γ et de son intérieur $Int(\gamma)$,

$$K = \gamma^* \cup Int(\gamma).$$

K est un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est γ^*. De l'hypothèse de connexité simple de X, on constate que la fonction f, et par suite les fonctions P et Q sont bien définies et sont de classe C^1 sur K. La formule de Green-Riemann s'applique donc sur K et son bord ∂K, par conséquent,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int\int_K \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy + i\int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy$$

La fonction f étant holomorphe, donc elle vérifie les conditions de cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.
Par conséquent,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \qquad \square$$

Remarque 4.2. L'hypothèse de connexité simple sur le domaine X, est nécessaire pour éviter le phénomène suivant :
Dans $X = \mathbb{C} - \{0\}$ on définie $f(z) = \dfrac{1}{z}$. La fonction f étant holomorphe dans X et son intégrale sur le cercle unité C^+vaut :

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \frac{dz}{z} &= \int_0^2 e^{-it} i e^{it} dt \\ &= 2\pi i \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Ce résultat se contredit avec le théorème de Cauchy à cause de la connexité multiple du domaine X.

Lemme 4.2. *Soient X un ouvert simplement connexe et f une fonction holomorphe dans X. Si z_0 est un point de X et C_r est le cercle de centre* 0 *de rayon r inclus dans X et orienté dans le sens direct, alors*

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Preuve. On veut montrer que

$$\lim_{r\to 0} \left(\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right) = 0$$

On remarque d'après le contre exemple précédent que

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi$$

d'où,

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz$$

Puisque f est holomorphe, la fonction

$$z \mapsto g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

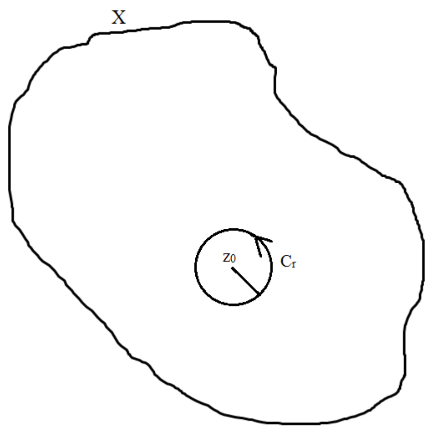

FIGURE 4.3 – Domaine de Définition de g

est continue sur le disque fermé $\{z \ / \ |z-z_0| \leq r\}$, donc $|g|$ est bornée par un réel positif M. D'où,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} g(z)dz \right| &\leq M \int_0^{2\pi} r dt \\ &= 2\pi M r \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \qquad \square$$

Remarques 4.2.

1. Même si La fonction g définie dans la démonstration du lemme précédent s'écrit $g(z) = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, on montre que g est holomorphe dans un voisinage de z_0, on verra au chapitre suivant qu'il s'agit d'une fausse singularité.
2. Le résultat du lemme précédent signifie en particulier que la limite de l'intégrale du quotient $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ sur le cercle C_r ne dépent pas de r et non plus du chemin d'intégration, donc c'est une constante qui ne dépend que la valeur $f(z_0)$. C'est exactement l'énoncé du théorème suivant.

Théorème 4.2. *(Formule intégrale de Cauchy). Soient X un ouvert simplement connexe, $f \in \mathcal{H}(X)$ et γ un chemin fermé simple inclus dans X. Si z_0 est un point de X, alors*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \tag{4.1}$$

Preuve. Soient z_0 un point intérieur à γ et C_r un cercle de centre z_0 de rayon r assez petit pour que C_r soit aussi inclus à l'intérieur de γ. On choisit deux points a et a' assez voisins dans le support γ^*. De même on choisit deux points b et b' dans le cercle C_r tels que les deux segments $[a,b]$ et $[a',b']$ soient parallèles.
On considère la courbe $\gamma' = (a'ca) \cup [a,b] \cup (bdb') \cup [b',a']$ présentée par la figure (4.4). La courbe γ' présente un chemin fermé dont le point z_0 est à l'extérieur. Compte tenu de l'holomorphie de $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ à l'intérieur de γ' et du théorème (4.1), on a

$$\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0,$$

donc

$$\int_{(a'ca)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz + \int_{[a,b]} \frac{f(z)}{z-z_0}dz + \int_{(bdb')} \frac{f(z)}{z-z_0}dz + \int_{[b',a']} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0 \tag{4.2}$$

Faisant tendre a' vers a sur γ et b' vers b sur C_r. Par continuité du quotient $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ à l'extérieur du disque ouvert $D(z_0,r)$, on trouve :

$$\lim_{a'\to a,\ b'\to b} \left(\int_{[a,b]} \frac{f(z)}{z-z_0}dz + \int_{[b',a']} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \right) = 0$$

et

$$\lim_{a'\to a,\ b'\to b} \left(\int_{(a'ca)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \right) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

et

$$\lim_{a'\to a,\ b'\to b} \left(\int_{(bdb')} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \right) = -\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

par conséquent, d'après la formule (4.2) et le lemme (4.2) on trouve

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

□

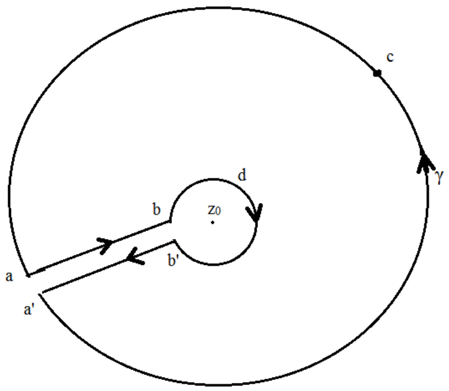

FIGURE 4.4 – Chemin d'intégration pour la formule intégrale de Cauchy

Corollaire 4.1. *Soient X un ouvert simplement connexe, $f \in \mathcal{H}(X)$ et γ un chemin fermé simple inclus dans X. Si z_0 est un point de X, alors*

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad = \quad f^{(n)}(z_0) \;\; n \geq 1,$$

où, $f^{(n)}(z_0)$ désigne la dérivée n−ième de f au point z_0.

Preuve. Il s'agit de justifier la dérivation sous le signe intégrale a partir da la formule (4.1). On suppose que le chemin γ est paramétré sur $[0,1]$, on a donc

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\gamma(t)).\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_O}dt,$$

et on pose

$$\varphi(t,z_0) = \frac{f(\gamma(t)).\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_O}$$ □

La fonction $\varphi : [0,1]\times X \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et différentiable par rapport à z_0. La démonstration classique dans le cas d'une fonction définie de $I\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'adapte en remplaçant valeurs absolues par modules. □

Corollaire 4.2. *(Formule de la moyenne). Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe X et $a \in X$, alors*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$$

pour tout r tel que $\overline{D(a,r)} \subset X$.

Preuve. Soit C un cercle de centre a de rayon r orienté dans le sens direct. Pour que $\overline{D(a,r)}$ soit dans X il suffit que

$$r < d(a, Fr(X))$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} ire^{it}\frac{f(a+re^{it})}{re^{it}}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt \end{aligned}$$

4.5 Propriétés des fonctions holomorphes

On présente dans cette section quelques résultats sur les fonctions holomorphes qui sont des conséquences de la formule intégrale de Cauchy, on particulier on démontre l'équivalence entre l'holomorphie et l'analycité des fonctions complexes.

On rappelle que la somme d'une série entière est une fonction dérivable en tout point de son disque de convergence, donc c'est une fonction holomorphe dans son disque de convergence. Une fonction analytique sur un domaine X de $\mathbb{C}$ est une fonction développable au voisinage de tout point $z_0 \in X$ en une série entière en $z - z_0$, donc elle est dérivable partout dans X. Si on note $\mathcal{A}(X)$ l'espace des fonctions analytiques sur X, on a donc

$$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{H}(X).$$

Pour l'inclusion inverse, la formule intégrale de Cauchy nous offre le moyen de montrer qu'une fonction holomorphe est nécessairement analytique. Commençons par montrer le lemme technique suivant :

Lemme 4.3. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière convergente dans* $D(0,R)$*, alors*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

est analytique en tout point du disque de convergence $D(0,R)$*.*

Preuve. On fixe $z_0 \in D(0,R)$. Pour $z \in D(0,R)$ écrivons $z = z_0 + u$, donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_0^\infty a_n z^n \\ &= \sum_0^\infty a_n (z_0+u)^n \\ &= \sum_0^\infty a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k . z_0^k . u^{n-k} \end{aligned}$$

La série $\sum_0^\infty a_n (z_0+u)^n$ converge absolument et uniformément pour

$$|u| \le R' - |z_0| < R - |z_0| \qquad \square$$

La convergence absolue entraine la possibilité d'effectuer n'importe quel groupement de termes dans le disque de centre z_0 de rayon $R-|z_0|$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^\infty u^n \left(\sum_{p=n}^\infty C_p^n . a_p . z_0^{p-n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^\infty b_n . (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

donc f est analytique dans $D(0,R)$. $\square$

Le théorème suivant montre l'inclusion $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{A}(X)$.

Théorème 4.3. *Soient* X *un ouvert simplement connexe de* $\mathbb{C}$ *et* f *une fonction holomorphe sur* X*, alors* f *est analytique sur* X*.*

Preuve. Quitte à effectuer une translation et une homothétie, on peut supposer que le disque unité fermé $D = \overline{D(0,1)}$ est inclus dans X. En appliquant le lemme précédent il nous suffit de montrer que f est la somme d'une série entière dans le disque D. Soit $z \in D$, la formule intégrale de Cauchy nous donne

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{i f(e^{it})e^{it}}{e^{it}-z}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1-ze^{-it}}dt \end{aligned}$$

Puisque $|z| < 1$, on peut développer $\dfrac{1}{1-ze^{-it}}$ en série entière, et on trouve

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int}\right)dt$$

La série $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, on peut donc permuter entre l'intégrale et la sommation. Par conséquent,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt\right)z^n$$

Corollaire 4.3. *Sur un ouvert simplement connexe X dans $\mathbb{C}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une fonction dérivable (au sens complexe).*
2. *f admet une primitive dans X.*
3. *f est développable en série entière partout dans X (f est analytique).*

Par conséquent, on a

$$\mathcal{H}(X) = \mathcal{A}(X)$$

et on utilisera dorénavant indifféremment les deux termes ***holomorphe*** *et* ***analytique****.*

Remarque 4.3. La situation est totalement différente pour les fonctions réelles. On rappelle qu'il existe des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (et même de classe

C^∞) qui ne sont pas analytiques. Un exemple classique est celui de la fonction φ défini par

$$\varphi(x) \quad = \quad \exp(-\frac{1}{x^2}), \quad x \neq 0$$

et $\varphi(0) = 0$.
Au voisinage de 0, cette fonction n'admet aucun développement en série entière.

A partir de l'identification entre l'analycité et l'holomorphie des fonctions complexes, de nombreuses propriétés peuvent être établies. Nous présentons ci-dessous les plus importants de ces propriétés.

Théorème 4.4. *(Principe des zéros isolés). Soient X un ouvert simplement connexe et $f \in \mathcal{H}(X)$. Si f n'est pas identiquement nulle, alors les zéros de f sur X sont isolés.*

Preuve. Soit z_0 un zéro de f dans X. f est analytique dans X, alors elle est développable en série entière au voisinage de z_0 :

$$\exists\ r > 0 \ \ tel\ que\ \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \ pour\ tout\ z \in D(z_0, r)$$

On a $f(z_0) = 0$, donc $a_0 = 0$ et deux cas sont possibles :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et donc f est identiquement nulle sur le disque $D(z_0, r)$.
2. Sinon, on suppose k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, alors

$$f(z) = a_k (z - z_0)^k \left(1 + \sum_{n>k} \frac{a_n}{a_k} (z - z_0)^{n-k} \right)$$

Puisque la série $\sum_{n>k} \frac{a_n}{a_k} (z - z_0)^{n-k}$ est uniformément convergente, on a

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n>k} \frac{a_n}{a_k} (z - z_0)^{n-k} = 0$$

donc pour $|z - z_0|$ assez petit, on a

$$1 + \sum_{n>k} \frac{a_n}{a_k} (z - z_0)^{n-k} \neq 0$$

z_0 est donc l'unique zéro de f dans le disque $D(z_0, r)$. C'est un zéro isolé. □

Remarque 4.4. Par contre sur $\mathbb{R}$, on peut définir une fonction indéfiniment dérivable qui possède une infinité de zéros non isolés. Un exemple classique est donné par

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{-1}{|x^2-1|}\right)$$

pour $|x| < 1$, et $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \geq 0$.

Théorème 4.5. *(Principe du prolongement analytique). Soient f et g deux fonctions holomorphes sur l'ouvert simplement connexe X qui sont égales sur une partie Y de X qui admet un point d'accumulation, alors*

$$f\,|_X = g\,|_X$$

Preuve. Appliquons le principe des zéros isolés à la fonction holomorphe $f-g$. On a

$$(f-g)\,|_Y = 0 \qquad \square$$

La partie Y de X admet au mois un point d'accumulation, donc $f-g$ est identiquement nulle, d'où $f \equiv g$. $\square$

Théorème 4.6. *(Principe du module maximum). Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert X, ne peut pas atteindre son maximum en module en un point de X.*

Preuve. Sans perte de généralités, on suppose que $D = D(0,R)$, $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(D)$ avec $f(0) = 1$. Par la formule de la moyenne, on a

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt \quad \forall r < R$$

Si on suppose que le module est atteint dans le centre du disque 0, alors

$$|f(re^{it})| \leq 1$$

donc

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

donc

$$|f(re^{it})| = 1 \quad \forall t, \ \forall r \qquad \square$$

et par conséquent, f est constante dans un voisinage de 0. $\square$

Théorème 4.7. *(Théorème de Liouville). Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Si f est bornée, alors f est constante.*

Preuve. Supposons $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $a \neq b$ deux points du plan complexe $\mathbb{C}$. Soit C un cercle de centre a de rayon r suffisamment grand tel que $|a-b| < \frac{r}{2}$, alors

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-b}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz \\ &= \frac{b-a}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}dz \end{aligned}$$

La fonction f étant bornée, donc $\exists M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ en tout point de $\mathbb{C}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \frac{|b-a|}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}dz\right| \\ &\leq \frac{2M|b-a|}{r} \end{aligned}$$

faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve $|f(b) - f(a)| = 0$. $\square$

Remarque 4.5. Une des applications de ce théorème de Liouville est la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. On montre que le corps des complexes $\mathbb{C}$ est algébriquement clos :
Si on suppose qu'un polynôme à coéfficients complexes de degré n,

$$P_n(z) \in \mathbb{C}[X]$$

ne possède pas de racines dans $\mathbb{C}$, alors la fonction complexe $\frac{1}{P_n}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, et puisque

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{P_n(z)} = 0$$

la fonction $\frac{1}{P_n}$ est bornée dans $\mathbb{C}$, donc constante d'après le théorème de Liouville, c'est une contradiction. Par conséquent, $P_n(z)$ admet au moins une racine.

Finalement, on montre par récurrence qu'un polynôme de degré n, possède exactement n racines complexes.

Chapitre 5

Points singuliers isolés et théorème des résidus

La question principale évoquée dans ce chapitre est l'étude locale et globale d'une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe privé d'un nombre fini de points singuliers. L'objectif est la généralisation du théorème de Cauchy. Sans perte de généralités, on suppose que le domaine d'étude est un disque ouvert privé de son centre.

5.1 Développement de Laurent et points singuliers

Définition 5.1. (Développement de Laurent)
Soient D un disque ouvert de centre a et f une fonction holomorphe dans D sauf peut être en a. Le **développement de de Laurent** de f au voisinage de a est l'écriture formelle

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

Dans ce développement, on appelle :

1. **Partie principale**, le terme $\sum_{n<0} a_n(z-a)^n$
2. **Partie régulière**, le terme $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$

Par suite, les points singuliers sont définis et classifiés a partir du développement de Laurent, de la façon suivante :

Définition 5.2. (Points singuliers isolés)
Soient D un disque ouvert de centre a, $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$ et
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ le développement de laurent de f au voisinage de a.
On dit que :

1. f présente une **fausse singularité** en a, si

$$a_n = 0, \quad \forall n < 0$$

   dans (5.1). Cela signifie que a est un point d'holomorphie (caché) de f. Le développement de Laurent dans ce cas est identique au développement en série entière.

2. a est un **point singulier isolé** de f, si

$$\exists n < 0, \quad a_n \neq 0$$

   dans (5.1). Cela signifie que f est n'est pas prolongeable en une fonction holomorphe dans D.

Dans le cas des points singuliers isolés, on constate deux cas de singularités :

Pôle. Il existe $m > 0$, tel que

$$a_n = 0 \ \ \forall n < -m,$$

dans ce cas on dit que a est **pôle de multiplicité** m.

Point singulier essentiel. Il existe une infinité de coefficients $a_n \neq 0$, avec $n < 0$. En d'autre terme :

$$\forall n < 0, \ \ \exists n' < n \ \ tel\ que\ a_{n'} \neq 0,$$

dans ce cas on dit que a est **point singulier essentiel** de f.

5.2 Résidu

Définition 5.3. Soit $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$. On appelle **résidu** de f au point a, noté $Res(f,a)$, le coéfficient du terme $\dfrac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f au voisinage de a.

Remarque 5.1. Dans le cas d'une fausse singularité z_0 pour f (ou point d'holomorphie), on a immédiatement $Res(f,a) = 0$.

Exemple 5.1. Si $f(z) = \dfrac{\sin(z^2)}{z^2}$, le développement de laurent de f au voisinage de 0 est

$$\begin{aligned} \frac{\sin(z^2)}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}\right) \\ &= 1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{4n}}{(2n+1)!} + \ldots \end{aligned}$$

Par conséquent, $Res(f,0) = 0$.

Dans le cas particuliers d'un point singulier présentant un pôle, il existe une formule explicite pour le calcul du résidu, tel qu'il est indiqué dans la proposition suivante :

Proposition 5.1. Soit $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$, où a présente un pôle de multiplicité m de f, on a

$$Res(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z)\right] \tag{5.2}$$

Preuve. Soit le développement de Laurent de f au voisinage de a :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots,$$

donc la fonction $h(z) = (z-a)^m f(z)$ est une fonction holomorphe dans D, dont le développement en série entière au voisinage de a est

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \ldots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \ldots + a_n(z-a)^{n+m} + \ldots,$$

donc pour avoir le terme a_{-1} qui est le résidu en a, il suffit de dériver à l'ordre $(m-1)$, puis faire la limite quand z tend vers a. En effet,

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[h(z)] = (m-1)!a_{-1} + m!a_0(z-a) + \ldots + (n+m).(n+m-1)\ldots(n+2).a_n(z-a)^{n+1}\ldots$$

Par conséquent,

$$Res(f,a) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[h(a)] \qquad \square$$

Remarque 5.2. On a $\lim_{z\to a} h^{(p)}(z) = h^{(p)}(a)$, car la fonction h ainsi que ses dérivées h', $h^{(2)}$,...$h^{(p)}$ sont des fonctions continues, cela justifie bien l'utilisation de la limite dans la formule (5.2).

Dans le cas particulier des pôles simples (multiplicité 1), la formule du résidu (5.2) prend une forme plus simple, tel qu'il est indiqué dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.1. *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fonction holomorphe sur un disque pointé $D \setminus \{a\}$, où a est pôle simple. Alors*

$$Res(f,a) = \frac{P(a)}{Q'(a)} \tag{5.3}$$

où, $Q'(a)$ est la dérivée du dénominateur Q au point a.

Preuve. Puisque f présente une singularité simple en a, la fonction

$$(z-a)f(z) = (z-a)\frac{P(z)}{Q(z)}$$

est holomorphe en a. Cette dernière fonction admet donc un développement en série entière au voisinage de a, de la façon suivante :

$$(z-a)f(z) \;=\; a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \ldots + a_n(z-a)^{n+1} + \ldots$$

avec $(z-a)f(z)\,|_{z=a} = a_{-1} \neq 0$, on constate en particulier que $P(a) \neq 0$ et $Q(a) = 0$. Une remarque aussi importante que la dernière, est que la fonction $Q(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de a, avec

$$Q(a) = 0 \;\; et \;\; Q'(a) \neq 0. \qquad \square$$

L'application directe de la formule (5.2) donne

$$\begin{aligned}
Res(f,a) &= \lim_{z\longrightarrow a}(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)} \\
&= \lim_{z\longrightarrow a}\left[\frac{P(z)}{\frac{Q(z)}{z-a}}\right] \\
&= \lim_{z\longrightarrow a}\left[\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}\right] \\
&= \frac{\lim_{z\longrightarrow a}P(z)}{\lim_{z\longrightarrow a}\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} \\
&= \frac{P(a)}{Q'(a)}
\end{aligned}$$

Exemples 5.2. (Calcul des résidus).

1. Pour $f(z) = \exp(\frac{1}{iz}) + \exp(iz)$, le point $z = 0$ est un point singulier essentiel, donc la formule (5.2) n'est pas valide. Donc il est indispensable de procéder à un développement de Laurent, en effet

$$f(z) = \ldots + \frac{1}{i^n z^n} + \ldots + \frac{1}{iz} + 2 + iz + \ldots + i^n z^n + \ldots$$

   Par conséquent,

$$Res(f,0) = \frac{1}{i} = -i$$

2. Pour la fonction $f(z) = \dfrac{z-i}{(z^2+1)}$, le résidu au point i est nul car $z = i$ est une fausse singularité (point d'holomorphie). Par contre $z = -i$ est un pôle simple et la formule (5.3) s'applique,

$$\begin{aligned}
Res(f,-i) &= \frac{(z-i)\,|_{z=-i}}{(z^2+1)'\,|_{z=-i}} \\
&= \frac{-2i}{-2i} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z-\pi)^2(z-1)^3}$ admet deux points singuliers isolés : $z = \pi$ comme pôle multiple, $z = 1$ comme pôle triple. Dans les deux

cas la formule (5.2) est plus pratique. En effet,

$$\begin{aligned} Res(f,\pi) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-1)^3}\right)|_{z=\pi} \\ &= \frac{-3}{(z-1)^4}|_{z=\pi} \\ &= \frac{-3}{(\pi-1)^4}, \end{aligned}$$

pour $z=1$, la même formule donne

$$Res(f,1) = \frac{6}{(1-\pi)^4}$$

Le théorème suivant généralise le théorème de Cauchy ainsi que la formule intégrale de Cauchy.

Théorème 5.1. *(Formule des résidus). Soient D un disque ouvert et $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\})$ où, $a_1, a_2, ..., a_k$ sont des points singuliers isolés dans D. Si γ est un chemain fermé tracé dans $D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Ind(\gamma, a_j).Res(f, a_j) \tag{5.4}$$

Preuve. On note

$P_1(z)$: la partie principale de f au voisinage du point a_1,
$P_2(z)$: la partie principale de f au voisinage du point a_2,
...
...
$P_k(z)$: la partie principale de f au voisinage du point a_k.
Par suite, notons

$$g(z) = f(z) - P_1(z) - P_2(z) - ... - P_k(z).$$

D'après la définition du développement de Laurent (5.1), la fonction g est holomorphe dans $D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. En effet, g est dérivable même au points $a_1, a_2, ..., a_k$. Pour montrer l'olomorphie de g au voisinage de chaque point a_j, $1 \le j \le k$, on montre cette propriété point par point. Pour le point a_1, on écrit

$$g(z) = (f(z) - P_1(z)) - P_2(z) - ... - P_k(z).$$

Les fonctions $P_2(z),\ P_3(z),...,P_k(z)$ sont dérivables au point a_1 ainsi que la fonction $f(z)-P_1(z)$, donc g est holomorphe au voisinage de a_1.
Le même raisonnement mène à montrer l'holomorphie de g au voisinage des points $a_2,...,a_k$. Il en résulte que $g \in \mathcal{H}(D)$.
Soit γ est un chemin fermé tracé dans D, ne passant pas par les points $a_1, a_2,..., a_k$. D'après le théorème de Cauchy

$$\int_\gamma g(z)dz = 0,$$

d'où,

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_\gamma P_j(z)dz \tag{5.5}$$

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma P_j(z)dz$. On rappelle que la partie principale $P_j(z)$ issue du développement de Laurent de f au voisinage du point a_j $(1 \le j \le k)$, est définie par

$$P_j(z) = \sum_{n<0} a_n(z-a_j)^n$$

Puisque le chemin γ ne passe par aucun point a_j, les intégrales $\displaystyle\int_\gamma P_j(z)dz$ et $\displaystyle\int_\gamma (z-a_j)^n dz$ existent, et on a

$$\begin{aligned}\int_\gamma P_j(z)dz &= \int_\gamma \left(\sum_{n<0} a_n(z-a_j)^n\right)dz \\ &= \sum_{n<0} a_n \left(\int_\gamma (z-a_j)^n dz\right).\end{aligned}$$

Pour $n < 0$ et $n \neq -1$, la fonction $z \mapsto (z-a_j)$ admet une primitive dans le domaine $D \setminus \{a_j\}$ égale à $\dfrac{(z-a_j)^{n+1}}{n+1}$, donc

$$\int_\gamma (z-a_j)^n dz = 0 \quad \forall n < -1.$$

Pour $n = -1$, on a

$$\int_\gamma (z-a_j)^{-1} dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-a_j} = 2\pi i.Ind(\gamma, a_j),$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\gamma P_j(z)dz &= a_{-1}.(2\pi i).Ind(\gamma, a_j)\\ &= 2\pi i.Ind.(\gamma, a_j).Res(f, a_j).\end{aligned}$$

Par conséquent, et d'après la formule (5.5), on trouve

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Ind(\gamma, a_j).Res(f, a_j) \qquad \square$$

Remarque 5.3. Dans la plupart des exemples, le chemin d'intégration est un chemin simple orienté dans le sens direct, donc son indice vaut +1 pour les points singuliers intérieurs et 0 pour les points inclus à l'extérieur de ce chemin. Compte tenu de cet argument, la formule des résidus (5.4) prend la forme suivante

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f, a_j)$$

où, a_j étant les points singuliers de f intérieurs au chemin fermé γ.

Chapitre 6

Applications au calcul d'intégrales

Le théorème des résidus a de nombreuses applications. Le calcul d'intégrales est l'une de ces applications. C'est d'ailleurs un outil simple et puissant qui procure des résultats spectaculaires dans certains cas. On cite ici des formules intégrales et des formules de transformations concernant les fonctions spéciales qui ne peuvent être prouvé qu'a partir de ce théorème des résidus. A titre d'exemple, si Γ est la fonction Gamma d'Euler définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \neq 0, -1, -2, ..., -n ... \forall n \in \mathbb{N},$$

alors on montre en utilisant cette formule que

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

et on constate a partir de cette dernière formule que Γ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^-$ qui admet les points de $\mathbb{Z}^-$ comme des pôles simples.

6.1 Intégrale du premier type

Forme générale.

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta \tag{6.1}$$

où, $R(X,Y)$ est une fraction rationnelle en X et Y, dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle unité du plan complexe, i.e.

$$R(X,Y) \;=\; \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}, \quad tel\ que\ Q(X,Y) \neq 0 \ \ si\ X^2+Y^2=1, \tag{6.2}$$

Remarque 6.1.

1. L'hypothèse (6.2) est suffisante pour garantir la continuité du quotient $\frac{P}{Q}$ sur l'intervalle $[0,2\pi]$, et donc I est une intégrale simple de Cauchy-Riemann (de type $\int_a^b f(x)dx$, f continue sur $[a,b] \in \mathbb{R}$).
2. ici, on suppose que la fraction R est irréductible, cela signifie que le polynôme P n'est pas divisible par Q, sinon on doit procéder à la simplification de la fraction avant d'aller au calcul d'intégrale. Un exemple de cette situation est l'intégrale

$$I \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{4-\cos^4\theta}{2+\cos^2\theta} d\theta,$$

on constate que la fraction se simplifie en $2+\cos^2\theta$, donc l'intégrale se calcule d'une façon simple par linéarisation de $\cos^2\theta$, et on a pas besoin de la méthode des résidus présentée ici.

Méthode. Pour $\theta \in [0,2\pi]$, l'application $\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ réalise une paramétristaion du chemin fermé simple γ orienté dans le sens positif [1] dont le support et le cercle unité ($\gamma^* = S^1$).
Pour $z \in \gamma^*$ on pose $z = e^{i\theta}$, et donc

$$\cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} \ \ et\ \ d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

L'intégrale I s'écrit donc

$$I \;=\; \int_\gamma R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$

1. Une hypothèse qui implique que l'indice de γ par rapport à un point est égal à +1 si le point est à l'intérieur de γ et 0 si le point est à l'extérieur.

Par conséquent, en appliquant le théorème des résidus on trouve

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res\left(\frac{1}{iz}R(z), z_j\right) \tag{6.3}$$

où, la somme étant étendue aux pôles z_j de la fonction $\dfrac{1}{iz}R(z) = \dfrac{P(z)}{izQ(z)}$ situés à l'intérieur du cercle unité.
Voici quelques exemples de calcul des intégrales du premier type.

Exemple 6.1. Soit à calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}.$$

L'intégrale est bien définie car $2+\cos t > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est une intégrale de type (6.1).On a donc

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \left(\frac{1}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\right)\frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4z+1} \\ &= (2\pi i)(\frac{2}{i})Res\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, z_2\right) \\ &= 4\pi Res\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, z_2\right), \end{aligned}$$

où, $z_2 = -2+\sqrt{3}$ est le pôle de la fraction $\dfrac{1}{z^2+4z+1}$, z_2 qui est à l'intérieur [2] du chemin fermé γ.
Par suite, il ne reste que le calcul du risidu. Et comme il s'agit d'un pôle simple, il suffit d'appliquer la formule

$$Res\left(\frac{P}{Q}, z_0\right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)},$$

2. L'autre pôle $z_1 = -2-\sqrt{3}$ est à l'extérieur du cercle unité, car $|z_1| > 1$.

où, Q' est la dérivée du dénominateur de la fraction $\dfrac{P}{Q}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, z_2\right) &= Res\left(\frac{\frac{1}{z-z_1}}{z-z_2}, z_2\right) \\ &= \frac{\frac{1}{z_2-z_1}}{1} \\ &= 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

et l'intégrale devient

$$I = 8\pi\sqrt{3}.$$

Exemple 6.2. On pose

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t+\cos^2 t}, \quad a \in]0,1[,$$

6.2 Intégrale du second type

Forme générale.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx \tag{6.4}$$

où, $R(x)$ est une fraction rationnelle qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. elle n'admet pas de pôle réel.
2. $\lim\limits_{|z|\to\infty} zR(z) = 0.$

La première condition signifie l'existence de $R(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. La seconde assure la convergence absolue de l'intégrale (6.4).
En effet, si $\lim\limits_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$, alors la fraction R peut s'écrire

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

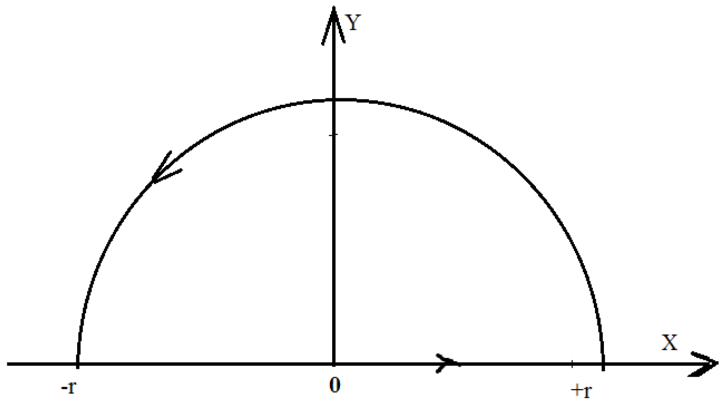

FIGURE 6.1 – Chemin γ_r.

où, $P_n(z)$ et $Q_m(z)$ sont deux polynômes de degrés n et m respectivement, avec $m \geq n+2$. Cette condition assure la convergence absolue dans les deux bornes $+\infty$ et $-\infty$ par comparaison à la fraction $\frac{1}{x^2}$.

Méthode. Etant donné un nombre réel positif r. On introduit le chemin fermé γ_r composé du segment $[-r, r]$ et du demi cercle C_r de centre 0 et de rayon r, orienté dans le sens direct :

On supposera r assez grand pour que les pôles de $R(z)$ situés au-dessus de l'axe des réels (demi plan supérieur) soient à l'intérieur de γ_r. Posons :

$$I(r) = \int_{\gamma_r} R(z)dz$$

Par la formule des résidus, on a

$$I(r) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(R, z_j)$$

où, $z_1, ..., z_k$ sont tous les pôles de la fraction $R(z)$ inclus au demi plan supérieur. D'après la composition du chemin γ_r, on trouve

$$I(r) = \int_{-r}^{+r} R(x)dx + \int_{C_r} R(z)dz,$$

faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve

$$I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} R(x)dx,$$

et on montre par le lemme ci-dessous que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} R(z)dz = 0,$$

par conséquent,

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(R, z_j) \tag{6.5}$$

Lemme 6.1. *(Lemme de Jordan). Soit f une fonction complexe continue sur le demi plan fermé $D = \{z \ / \ Im(z) \geq 0\}$. On suppose que $zf(z)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini. Si C_r est le demi cercle de centre 0 de rayon r tracé dans D, alors*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)dz = 0$$

Preuve. La limite $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, implique

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists R > 0 \ \ tel\ que\ pour\ tout\ r \geq R \ : \ z \in D \cap C_r \Longrightarrow |zf(z)| \leq \varepsilon$$

Donc :

$$\left| \int_{C_r} f(z)dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{r} L(C_r) \leq 2\pi\varepsilon$$

Par conséquent,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)dz = 0$$

□

Exemple 6.3. Soit à calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

L'intégrale I est une intégrale absolument convergente du second type. La fraction $F(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ possède quatre pôles simples $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Donc

$$I = 2\pi i\left(Res(F, e^{i\frac{\pi}{4}}) + Res(F, e^{i\frac{3\pi}{4}})\right)$$

La méthode du calcul des résidus en cas des pôles simples nous donne

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{4(e^{i\frac{\pi}{4}})^3} + \frac{1}{4(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3}\right)$$

d'où,

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

6.3 Intégrale du troisième type

Forme générale.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} R(x) dx \tag{6.6}$$

où, $R(x)$ est une fraction rationnelle qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. elle n'admet pas de pôle réel.
2. $\lim\limits_{|z|\to\infty} R(z) = 0$.

La première condition signifie l'existence de $R(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. La seconde assure la convergence de l'intégrale (6.6).
En effet, si $\lim\limits_{|z|\to\infty} R(z) = 0$, alors la fraction R peut s'écrire

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

où, $P_n(z)$ et $Q_m(z)$ sont deux polynômes de degrés n et m respectivement, avec $m \geq n+1$. Cette condition assure la convergence dans les deux bornes $+\infty$ et $-\infty$ par comparaison avec les deux intégrales semi-convergentes $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$.

Méthode. Etant donné un nombre réel positif r. On introduit le chemin fermé γ_r de la section précédente (Figure (6.1)).
On supposera r assez grand pour que les pôles de $R(z)$ situés au-dessus de l'axe des réels (demi plan supérieur) soient à l'intérieur de γ_r. Posons :

$$I(r) = \int_{\gamma_r} e^{iz} R(z) dz$$

Par la formule des résidus, on a

$$I(r) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(e^{iz} R(z), z_j)$$

où, $z_1, ..., z_k$ sont tous les pôles de la fonction $e^{iz}R(z)$ inclus au demi plan supérieur. D'après la composition du chemin γ_r, on trouve

$$I(r) = \int_{-r}^{+r} e^{ix} R(x) dx + \int_{C_r} e^{iz} R(z) dz,$$

faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve

$$I = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{+r} e^{ix} R(x) dx,$$

et on montre par le lemme ci-dessous que

$$\lim_{r \to \infty} \int_{C_r} e^{iz} R(z) dz = 0,$$

par conséquent,

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(e^{iz} R(z), z_j) \tag{6.7}$$

Lemme 6.2. *(Deuxième lemme de Jordan). Soit f une fonction complexe continue sur le demi plan fermé $D = \{z \,/\, Im(z) \geq 0\}$. On suppose que $f(z)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini. Si C_r est le demi cercle de centre 0 de rayon r tracé dans D, alors*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{iz} f(z)dz = 0$$

Preuve. La limite $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, implique

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists R > 0\ \ tel\ que\ pour\ tout\ r \geq R\ :\ z \in D \cap C_r \Longrightarrow |f(z)| \leq \varepsilon \qquad (6.8)$$

Le demi cercle C_r admet le paramétrage :

$$\begin{array}{rcl} [0,\pi] & \rightarrow & D \\ t & \mapsto & C_r(t) = re^{it}, \end{array}$$

donc

$$\int_{C_r} e^{iz} f(z)dz = \int_0^{\pi} ire^{it} e^{(ir\cos t - r\sin t)} f(re^{it})dt,$$

et compte tenu de l'inégalité (6.8), on a

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_r} e^{iz} f(z)dz\right| &\leq \varepsilon \int_0^{\pi} re^{-r\sin t} dt \\ &\leq 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} re^{-r\sin t} dt \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0,\pi/2]$, on a l'inégalité

$$\frac{2}{\pi} t \leq \sin t,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} re^{-r\sin t} dt &\leq \int_0^{\pi/2} re^{-r\frac{2}{pi}t} dt \\ &\leq \frac{\pi}{2}(1 - e^{-r}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{iz} f(z)dz = 0 \qquad \square$$

Corollaire 6.1. *Si $R(z)$ est une fraction rationnelle vérifiant les hypothèses de la convergence de l'intégrale (6.6), alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x.R(x)dx = Re\left(2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(e^{iz}R(z), z_j)\right),$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x.R(x)dx = Im\left(2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(e^{iz}R(z), z_j)\right).$$

Remarque 6.2. L'intégrale (6.6) est un cas particulier de l'intégrale à un paramètre

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x}.R(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

La méthode de calcul et le résultat sont similaires pour la cas ($\lambda > 0$). Pour le cas inverse ($\lambda < 0$), le chemin d'intégration est modifié dans le but d'obtenir le résultat du second lemme de Jordan. Ainsi on utilise un demi cercle dans le demi plan inférieur, de centre 0 de rayon r orienté dans le sens inverse, on établit donc le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x}.R(x)dx = -2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(e^{i\lambda z}.R(z), z_j), \quad (\lambda < 0)$$

où, $z_1, ..., z_k$ sont tous les pôles de la fonction $e^{i\lambda z}.R(z)$ inclus au demi plan inférieur $D = \{z \,/\, Im(z) < 0\}$.

Exemple 6.4. Soit à calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^4} dx$$

L'intégrale I est une intégrale absolument convergente du troisième type. La fonction $F(z) = \dfrac{e^{2iz}}{1+z^4}$ possède quatre pôles simples $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Donc

$$I = Re\left[2\pi i \left(Res(F, e^{i\frac{\pi}{4}}) + Res(F, e^{i\frac{3\pi}{4}})\right)\right]$$

La méthode du calcul des résidus en cas des pôles simples nous donne

$$I = Re\left[2\pi i\left(\frac{e^{2iz_1}}{4(e^{i\frac{\pi}{4}})^3} + \frac{e^{2iz_2}}{4(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3}\right)\right]$$

d'où,

$$I = \frac{\pi}{2}(\cos\sqrt{2} + \sin\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$$

6.4 Intégrale du quatrième type

Forme générale.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^a} dx \tag{6.9}$$

où, le réel a vérifie $0 < a < 1$ et R est une fraction rationnelle qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. elle n'admet pas de pôle réel positif ou nul.
2. $\lim\limits_{|z|\to\infty} R(z) = 0.$

L'intégrale est absolument convergente en 0 par une simple comparaison avec $\frac{1}{x^a}$. Pour la borne $+\infty$, la deuxième condition montre que $\frac{R(x)}{x^a}$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $\frac{1}{x^{a+n}}$, $n \geq 1$. Par conséquent, I est absolument convergente.

Méthode. On considère le domaine simplement connexe

$$D = \mathbb{C} - \mathbb{R}^+.$$

Sur le domaine D, on choisit une détermintion de la fonction z^a de la façon suivante :

$$z^a = \exp(a \log z)$$

avec

$$\log z = \ln|z| + iArg(z), \quad et \quad 0 < Arg(z) < 2\pi.$$

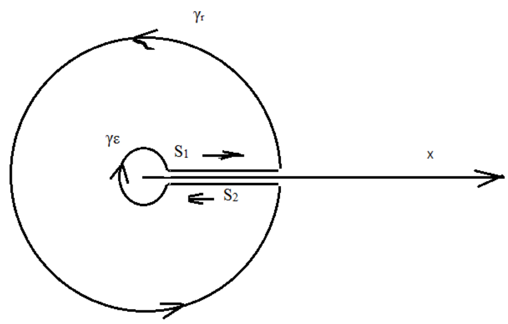

FIGURE 6.2 – Chemin $\delta(r,\varepsilon)$

Pour les deux réels $0 < \varepsilon < r$, on introduit le chemin $\delta(r,\varepsilon)$ inclus dans D et composé de :

1. γ_r, la portion du cercle de centre 0 de rayon r, définie par la paramétrisation

$$\begin{array}{rcl} [\theta_0, 2\pi - \theta_0] & \rightarrow & D \\ t & \mapsto & \gamma_r(t) = re^{it}, \end{array}$$

   où, θ_0 est un angle positif assez voisin de 0.

2. γ_ε, la portion du cercle de centre 0 de rayon ε, définie par la paramétrisation

$$\begin{array}{rcl} [\theta_0, 2\pi - \theta_0] & \rightarrow & D \\ t & \mapsto & \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i(2\pi - t)}. \end{array}$$

3. Le segment de droite S_1 joignant le point $\varepsilon e^{i\theta_0}$ au point $re^{i\theta_0}$.
4. Le segment S_2 allant du point $re^{i(2\pi-\theta_0)}$ vers le point $\varepsilon e^{i(2\pi-\theta_0)}$.

Pour θ_0 très proche de zéro, les deux segments de $\delta(r,\varepsilon)$ sont parallèles et opposés, et le chemin ressemble au contour présenté par la figure (6.2) ci-dessus.

Remarque 6.3. En faisant tendre θ_0 vers 0, la fonction z^a admet les limites

$$\begin{aligned}\lim_{z\in S_1} z^a &= Re(z)^a\\ \lim_{z\in S_2} z^a &= e^{2\pi ia}Re(z)^a\end{aligned}$$

A partir de ce qui précède, on peut énoncer la proposition suivante qui établi la valeur de l'intégrale (6.9).

Proposition 6.1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^a}dx = \pi\frac{e^{i\pi a}}{\sin \pi a}\sum_{j=1}^{k} Res(F,z_j), \tag{6.10}$$

où, $z_1,...,z_k$ sont les pôles de la fonction $F(z) = \dfrac{R(z)}{z^a}$.

Preuve. Le domaine D étant simplement connexe, la fonction $F(z) = \dfrac{R(z)}{z^a}$ est méromorphe dans D et le chemin $\delta(r,\varepsilon)$ est fermé dans D. D'après le théorème des résidus

$$\int_{\delta(r,\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^a}dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} Res(F,z_j),$$

et d'après la composition de $\delta(r,\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\delta(r,\varepsilon)} F(z)dz &= \int_{\gamma_r} F(z)dz + \int_{S_2} F(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)dz + \int_{S_2} F(z)dz\\ &= \int_{\gamma_r} F(z)dz + \int_{\varepsilon}^{r} F(x)dx + \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)dz - \int_{\varepsilon}^{r} \frac{R(x)}{x^a e^{2i\pi a}}dx\\ &= \int_{\gamma_r} F(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)dz + (1-e^{-2i\pi a})\int_{\varepsilon}^{r} \frac{R(x)}{x^a}dx\end{aligned}$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ et ε vers 0, et par application des lemmes (6.1) et (6.2), on trouve

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} F(z)dz = 0 \;\; et \;\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_r} F(z)dz = 0, \qquad \square$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{R(x)}{x^a}dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{-2i\pi a}}\int_{\delta(r,\varepsilon)}F(z)dz\\ &= \frac{\pi e^{i\pi a}}{\sin(\pi a)}\sum_{j=1}^{k}Res\left(\frac{R(z)}{z^a},z_j\right)\end{aligned}$$

où,$z_1,\dots,z_k$ sont tous les pôles de la fonction $\dfrac{R(z)}{z^a}$ dans le domaine $D=\mathbb{C}-\mathbb{R}^+$. □

Exemple 6.5. On pose

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{1+x}{(1+x^2)\sqrt{x}}dx.$$

J est une intégrale absolument convergente du quatrième type avec $a=\dfrac{1}{2}$. La fonction $F(z)=\dfrac{1+z}{(1+z^2)\sqrt{z}}$ est une fonction méromorphe sur le domaine $D=\mathbb{C}-\mathbb{R}^+$ avec deux pôles simples

$$z_1=-i \quad et \quad z_2=i.$$

Il en résulte immédiatement que

$$\begin{aligned}J &= \frac{\pi e^{\frac{i\pi}{2}}}{\sin(\frac{\pi}{2})}[Res(F,-i)+Res(F,i)]\\ &= i\pi[Res(F,-i)+Res(F,i)].\end{aligned}$$

Le calcul des résidus par la formule (5.3) nous donne

$$\begin{aligned}Res\left(\frac{1+z}{(1+z^2)\sqrt{z}},-i\right) &= Res\left(\frac{\frac{1+z}{\sqrt{z}}}{1+z^2},-i\right)\\ &= \frac{\frac{1-i}{\sqrt{-i}}}{-2i}\\ &= \frac{1+i}{2e^{\frac{3i\pi}{4}}},\end{aligned}$$

et de la même manière

$$Res\left(\frac{1+z}{(1+z^2)\sqrt{z}}, i\right) = \frac{1-i}{2e^{\frac{i\pi}{4}}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} J &= i\pi\left(\frac{1+i}{2e^{\frac{3i\pi}{4}}} + \frac{1-i}{2e^{\frac{i\pi}{4}}}\right) \\ &= \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Table des matières

Bibliographie

[1] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, (1972).

[2] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*. Edition refondue et corrigée, Hermann, Paris, (1977).

[3] P. Dolbeault, *Analyse complexe*, Masson, Paris, (1990).

[4] J. Genet, G. Pubion, *Analyse moderne, Tome 2*, Vuibert, Paris, (1973).

[5] R. Gélinas, M. Lambert, *Eléments d'analyse complexe*, Presses de l'Université du Québec, Québec, (1994).

[6] A. Jeanneret, D. Lines, *Invitation à l'algèbre*, Cépaduès, Toulouse, France, (2008).

[7] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris, (1998).

[8] P. TAUVEL, *Analyse complexe, Exercices corrigés*, Dunod, Paris, (1999).

[9] P. TAUVEL, *Analyse complexe pour la licence 3*, Dunod, Paris, (2006).