République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Daoudi Nour El Houda [1]

Sous la direction de

M. Ouakkas Seddik

Thème :

Quelques aspects sur les structures presque de contact

Soutenue le 16/06/2022 devant le jury composé de

M. A. Halimi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
M. S. Ouakkas	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
M. B. Saadli	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examinateur
M. K. Djerfi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Invité

Année univ.: 2021/2022

1. e-mail : daoudinour53@gmail.com

Remerciements.

Je voudrais commencer par exprimer toute ma gratitude envers mon encadreur S. Ouakkas, après m'avoir proposé ce sujet et accepté de diriger ce mémoire, il a toujours été présent pour guider mon cheminement, je lui en suis infiniment reconnaissante. Je tiens ensuite à remercier monsieur A. Halimi qui a accepté de présider le jury et Monsieur B. Saadli d'avoir accepté de rapporter ce memoire. Enfin, je remercie particulièrement monsieur K. Djerfi d'avoir accepté notre invitation et nous honorer par sa présence.

Dédicaces.

Je dédie ce mémoire à mes professeurs qui m'ont assisté durant mes années d'études à l'université, je leurs suis très reconnaissante, pour tous les efforts qui ont donnés, pour ma réussite, et aussi je n'oublie pas les autres professeurs de l'université, sans eux la réussite et vraiment difficile, ils sacrifient leurs temps aux étudiants et étudiantes pour garantir leurs réussites, je les remercier. Je dédie aussi ce mémoire a mes parents qui m'ont été d'un grand secours pour mes études. Cette Université de Saida, Dr Moulay Tahar, m'a donnée envie d'étudier encore plus..

Table des matières

Introduction générale.

Ce mémoire rentre dans le cadre de l'étude de certaines propriétés des variétés métrique presque de contact. Dans la première partie du premier chapitre, on rappelle quelques notions fondamentales de la géométrie riemannienne,et on introduit la notion des structures presque de contact dont on cite quelques propriétés. La déformation $\mathcal{D}$-conforme associée aux structures presque de contact est introduite dans le deuxième chapitre où nous avons réussi a donner l'effet d'une telle déformation sur les connexions et les tenseurs de courbure, ce qui nous a permis de donner un exemple d'application. A la fin de ce mémoire et dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude des fonctions harmoniques et biharmoniques sur les variétés métrique presque de contact. Nous avons démontrer des résultats qui caractérisent l'harmonicité et la biharmonicité sur les variétés de Kenmotsue et on a construit beaucoup d'exemples. On termine ce dernier chapitre par l'étude de l'effet de la déformation $\mathcal{D}$-conforme sur l'harmonicité et la biharmonicité où on montre dans un cas particulier qu'on a l'invariance par ce type de déformation.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Généralités sur les variétés riemanniennes.

Dans ce premier chapitre on rappelle dans un premier lieu quelques notions fondamentales de géométrie riemannienne, ensuite on passe à la notion d'applications harmoniques et biharmoniques. A la fin de chapitre, on introduit les variétés statistiques où on a réussi à démontrer beaucoup de résultats concernant ces structures.

Définition 1.1.1 *Soit M une variété différentiable, l'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\Gamma(TM)$ et l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M est noté $C^\infty(M)$. Une métrique sur M est une forme*

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$-bilinéaire, symétrique et définie positive. Le couple (M, g) est appelé variété riemannienne. Dans un système de coordonées locales $(x_i)_{i=1}^m$ sur (M^m, g), on a

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \qquad g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Définition 1.1.2 *Soit M une variété différentiable, une connexion linéaire sur M est une application*

$$\begin{array}{llll} \nabla & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
2. $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f) Y$.
3. $\nabla_{X+fY} Z = \nabla_X Y + f\nabla_Y Z$.

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et pour toute fonction $f \in C^{\infty}(M)$. Pour une telle connexion ∇, on définit un champ de tenseurs T de type $(1,2)$ dit le tenseur de torsion associé à ∇ par

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. La connexion linéaire ∇ est dite sans torsion si le champ de tenseurs T est identiquement nul, c'est à dire : pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Notons que T est un champ de tenseurs antisymétrique.

Si on considère (M,g) une variété riemannienne, on a le résultat suivant

Théorème 1.1.1 *Soit (M,g) une variété riemannienne. L'application*

$$\begin{array}{cccc} \nabla & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

définie par l'équation suivante

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Z)) \\ & + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \end{aligned} \tag{1.1}$$

est une connexion linéaire sur M, dite connexion de Lévi-Civita. L'équation (1.1) est appelée la formule de Koszul.

Pour cette connexion, on a le résultat suivant, dit théorème fondamental de la géométrie riemannienne.

Théorème 1.1.2 *Soit (M,g) une variété riemannienne. La connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire ∇ sur M sans torsion et compatible avec la métrique g. La compatibilité avec la métrique g est traduite par la formule suivante :*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. La connexion de Levi-Civita sur (M,g) est complètement déterminée par la formule de Koszul.

Remarque 1.1.1 *Soit M une variété différentiable, une connexion linéaire ∇ sur M est complètement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k donnés par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

De plus, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, alors

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dans le cas d'une variété riemannienne munie de la connexion de Lévi-Civita, on a la remarque suivante :

Remarque 1.1.2 *Soit (M^m, g) une variété riemannienne de dimension m et soit ∇ la connexion de Lévi-Civita. Localement, les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par la formule suivante :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

Définition 1.1.3 *Soit M une variété différentiable munie d'une connexion linéaire ∇. Le tenseur de courbure R associé à la connexion ∇ est défini par*

$$\begin{array}{llll} R & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X, Y, Z) & \longmapsto & R(X, Y)Z, \end{array}$$

où

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Remarque 1.1.3 *Sur une variété riemannienne (M^m, g) de dimension m, le tenseur de courbure de la connexion de Lévi-Civita est appelé tenseur de courbure riemannienne. Localement, on a*

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^{m} R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l},$$

où

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma_{jk}^l\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\Gamma_{ik}^l\right) + \sum_{p=1}^{m}\left(\Gamma_{ip}^l \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^l \Gamma_{ik}^p\right).$$

Comme propriétés, on a

1. *R est un champ de tenseurs de type $(1, 3)$.*
2. *$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)W, Z)$.*
3. *$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Z, W)X, Y)$.*
4. *R vérifie l'identité algébrique de Bianchi*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

5. *R vérifie l'identité différentielle de Bianchi*

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0,$$

pour tous $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.1.4 *Soit (M^m, g) de dimension m, la courbure de Ricci est un champ de tenseur de type $(0,2)$ défini pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ par*

$$Ric(X,Y) = Tr_g R(\cdot, X) Y = \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, X) Y, e_i),$$

où $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur M. Notons que La courbure de Ricci est forme bilinéaire symétrique. De même, le tenseur de Ricci est un champ de tenseurs de type $(1,1)$ défini pour tous $X \in \Gamma(TM)$ par

$$Ricci(X) = Tr_g R(X, \cdot) \cdot = \sum_{i=1}^{m} R(X, e_i) e_i.$$

Sur la variété riemannienne (M^m, g), la courbure de Ricci et le tenseur de Ricci sont liés par la relation suivante :

$$Ric(X,Y) = g(Ricci(X), Y).$$

La courbure scalaire sur (M^m, g), notée S_g, est définie de la manière suivante :

$$S_g = Tr_g Ric = Ric(e_i, e_i).$$

Nous sommons sur les indices répétées.

1.2 Opérateurs sur une variété riemannienne.

Dans cette section, on présente quelques opérateurs sur les variétés riemanniennes, voir [1].

1.2.1 L'opérateur gradient.

Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur gradient par

$$\begin{aligned} grad : C^\infty(M) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ f &\longmapsto grad\, f = \sharp df \end{aligned}$$

où df est la différentielle de la fonction f. Dans un système de coordonnées locales $(x_i)_{i=1}^m$ sur (M^m, g), on a

$$(grad\, f)\,|_U = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Une autre définition cet opérateur est donnée par : pour tout champ de vecteur $X \in \Gamma(TM)$ et tout fonction $f \in C^\infty(M)$, on a

$$df(X) = X(f) = g(grad\, f, X).$$

L'opérateur gradient satisfait les propriétés suivantes : pour tout $f, h \in C^\infty(M^m, g)$ on a

1. $grad\,(f+h) = grad\, f + grad\, h$
2. $grad\,(fg) = hgrad\, f + fgrad\, h$
3. $(grad\, f)(h) = (grad\, h)(f)$

1.2.2 L'opérateur divergence.

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne (M^m, g), l'application ∇X définie par

$$\begin{aligned} \nabla X : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z X \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire, ∇X est un tenseur de type $(1,1)$. La divergence d'un champ de vecteurs X sur M est la fonction définie par

$$div\, X = Tr_g(\nabla X).$$

En coordonnées locales, on a l'expression suivante

$$\begin{aligned} div\, X &= dx^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X \right) \\ &= g^{ij} g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= g^{ij} g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= g^{ij} X^k g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + g^{ij} \frac{\partial X^k}{\partial x_i} g \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial X^k}{\partial x_k} + X^k \Gamma^i_{ik}. \end{aligned}$$

Où (g^{ij}) est la matrice inverse de la matrice (g_{ij}). De même, on définit la divergence d'une 1-forme $\omega \in \Gamma(T^*M)$ par :

$$div\, \theta = Tr_g(\nabla \theta).$$

Autrement dit

$$div\, \theta = Tr_g \nabla \theta = (\nabla_{e_i} \theta)\, e_i = e_i\, (\theta\, (e_i)) - \theta\, (\nabla_{e_i} e_i)\,,$$

où $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur M. En coordonnées locales, on a l'écriture suivante :

$$div\, \theta = g^{ij} \left(\frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} - \Gamma^k_{ij} \theta_k \right).$$

Comme propriétés de l'opérateur divergence, on a pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$:

$$div\, (X+Y) = div\, X + div\, Y$$

et

$$div\,(fX) = f\,div\,X + X(f).$$

L'opérateur divergence possède une autre écriture en coordonnées locales :

$$div\,X = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}X^i\right)$$

et

$$div\,\theta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\theta_j\right)$$

où

$$|g| = \det(g_{ij})$$

1.2.3 L'opérateur Laplacien.

Sur une variété riemannienne (M^m, g), l'opérateur Laplacien, noté Δ, est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \Delta(f) = div\,(grad\,f) \end{aligned}$$

Cet opérateur est dit aussi l'opérateur de Laplace-Beltrami. Pour toutes $f, h \in C^\infty(M)$, on a

$$\Delta(f\ +\ h) = \Delta(f) + \Delta(h)$$

et

$$\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(grad\,f, grad\,h).$$

En coordonnées locales, l'opérateur Laplacien possède deux écritures données par les formules suivantes :

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

et

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Une fonction $f \in C^\infty(M)$ est dite harmonique si $\Delta f = 0$.

1.3 Notions sur les variétés presque de contact.

Définition 1.3.1 *Soit M une variété différentiable de dimension impaire $(2m+1)$. On appelle structure presque de contact sur M la donnée d'un triplet (η, ξ, φ) tel que :*

- *φ un champ de tenseur de type $(1,1)$*
- *ξ un champ de vecteurs*

– *η une 1-forme sur M.*
vérifiant les conditions suivantes

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$. Une variété M de dimension $(2m+1)$ munie d'une structure presque de contact (φ, ξ, η) est une variété presque de contact.

Théorème 1.3.1 *Soit (φ, ξ, η) une structure presque de contact, alors :*

$$\begin{aligned} \varphi\xi &= 0 \\ \eta \circ \varphi &= 0 \\ rang\varphi &= 2n \end{aligned}$$

Preuve du théorème .

1. Soit (φ, ξ, η) une structure presque de contact sur M alors

   $$\eta(\xi) = 1 \qquad et \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

   En remplaçant X par ξ dans la définition on trouve :

   $$\begin{aligned} \varphi(\varphi\xi) &= \varphi^2\xi \\ &= -\xi + \eta(\xi)\xi = 0 \\ &= -\xi + \xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Ce qui donne : $\varphi\xi = 0$, de plus $\varphi\xi$ est un vecteur propre de φ correspondant à la valeur propre 0.
   Pour le sens inverse on raisonne par l'absurde. Supposons que $\varphi\xi \neq 0$, en remplaçant X par $\varphi\xi$ on trouve :

   $$\varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

   on a

   $$\varphi^2(\varphi\xi) = 0$$

   ce qui implique

   $$-\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi = 0$$

   alors

   $$\eta(\varphi\xi)\xi = \varphi\xi$$

donc

$$\eta(\varphi\xi)\xi \neq 0$$

alors que :

$$\eta(\varphi\xi)\varphi\xi = \varphi^2\xi = 0$$

Ce qui contredit avec le fait que $\eta(\varphi\xi) \neq 0$ et $\varphi\xi \neq 0$.
On déduit finalement que

$$\varphi\xi = 0$$

2.

$$\begin{aligned}\eta(\varphi X)\xi &= \varphi^3 X + \varphi X\\ &= \varphi(\varphi^2 X) + \varphi X\\ &= \varphi(-X + \eta(X)\xi) + \varphi X\\ &= \eta(X)\varphi\xi.\end{aligned}$$

Puisque $\varphi\xi = 0$ alors, $\eta(\varphi X)\xi = 0$
c'est à dire

$$\eta(\varphi X) = 0 \Rightarrow \eta \circ \varphi = 0$$

3. Puisque $\varphi\xi = 0$, $\xi \neq 0$ et φ non injective alors,

$$rang(\varphi) < 2n + 1.$$

Soit $\overline{\xi}$ un champ de vecteurs tel que $\varphi\overline{\xi} = 0$.
En remplaçant X par ξ dans la définition on trouve :

$$0 = \varphi^2\overline{\xi} = -\overline{\xi} + \eta(\overline{\xi})\xi \Rightarrow \overline{\xi} = \eta(\overline{\xi})\xi,$$

d'où $\overline{\xi}$ est proportionnel à ξ.
Donc $dim\ ker\varphi = 1$, de plus $rang\varphi = (2n+1) - 1$,
alors

$$rang\varphi = 2n$$

Théorème 1.3.2 *Toute variété presque de contact (M, φ, ξ, η) admet une métrique riemannienne g telle que :*

$$g(X, \xi) = \eta(X).$$

En effet, si on remplace Y par ξ dans l'expréssion

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

et en utilisant le fait que $\varphi\xi = 0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi \xi) &= g(X, \xi) - \eta(X)\eta(\xi) \\
0 &= g(X, \xi) - \eta(X) \\
g(X, \xi) &= \eta(X).
\end{aligned}
$$

Définition 1.3.2 *Pour chaque structure métrique presque de contact* (φ, ξ, η, g) *sur* M *on définit la 2-forme fondamentale* Φ *par :*

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

La 2-forme fondamentale Φ *possède les propriétés suivantes :*

1. $\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X)$, *c.a.d,* Φ *est anti-symétrique.*
2. $\Phi(\varphi X, \varphi Y) = \Phi(X, Y)$, *c.a.d,* Φ *est invariante à* φ.

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

1.4 Variétés de Kenmotsu.

Définition 1.4.1 *Une variété riemannienne presque de contact* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est dite variété de Kenmotsu si*

$$d\eta = 0 \qquad \text{et} \qquad d\Phi = 2\Phi \wedge \eta.$$

Théorème 1.4.1 *([3]) Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété riemannienne presque de contact et soit* ∇ *la connexion de Levi-Civita sur* M*. alors* M *est une variété de Kenmotsu si et seulement si pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X.$$

De cette condition on peut déduire que :

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi.$$

Proposition 1.4.1 *([3]) Soit* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu alors pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *nous avons*

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X \eta)Y &= g(\varphi X, \varphi Y), \\
R(X, Y)\xi &= \eta(X)Y - \eta(Y)X, \\
R(\xi, X)Y &= \eta(Y)X - g(X, Y)\xi, \\
R(\xi, X)\xi &= X - \eta(X)\xi
\end{aligned}
$$

et

$$S(X, \xi) = -2n\eta(X)$$

où R *désigne le tenseur de courbure riemannienne et* S *désigne le tenseur de courbure de Ricci.*

Chapitre 2

Déformation $\mathcal{D}$-conforme sur les variétés métriques presque de contact.

Dans ce chapitre, on introduit la notion de la déformation $\mathcal{D}$-conforme sur une variété métrique presque de contact. Nous avons réussi à donner l'effet de ce type de déformation sur la connexion de Lévi-Civita définie sur une variété riemannienne, sur le tenseur de courbure et sur la courbure scalaire. On termine ce chapitre par beaucoup d'exemples qui montrent l'intérêt de cette déformation.

2.1 Déformation $\mathcal{D}$-conforme.

Définition 2.1.1 *Soit (φ, ξ, η, g) est une structure métrique de contact et a, b des constantes strictement positives , posons la déformation suivante :*

$$\overline{\varphi} = \varphi, \quad \overline{\eta} = a\eta, \quad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \quad \overline{g} = bg + (a^2 - b)\eta \otimes \eta,$$

alors $\left(\overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est aussi une structure métrique de contact. Dans ce cas $\overline{g}$ appelé métrique $\mathcal{D}$-conforme .

Remarque 2.1.1 *Soit (M, φ, ξ, η) une variété riemannienne presque de contact. Grâce aux formules suivantes :*

$$\begin{aligned}\overline{\eta}\left(\overline{\xi}\right) &= a\eta\left(\frac{1}{a}\xi\right) \\ &= \eta\left(\xi\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}^2 X &= \varphi^2 X \\ &= -X + \eta(X)\xi \\ &= -X + \frac{1}{a}\overline{\eta}(X)a\overline{\xi} \\ &= -X + \overline{\eta}(X)\overline{\xi},\end{aligned}$$

on déduit aussi que $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *est une variété riemannienne presque de contact.*

Proposition 2.1.1 *Soit* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété riemannienne presque de contact et soit* $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *sa déformation* $\mathcal{D}$*-conforme alors, on a :*

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) &= bg\left(\nabla_X Y, Z\right) + (a^2 - b)\eta(Z)\eta\left(\nabla_X Y\right) \\ &+ \frac{1}{2}(a^2 - b)\eta(X)g\left(\nabla_Y \xi, Z\right) - \frac{1}{2}(a^2 - b)\eta(X)g\left(\nabla_Z \xi, Y\right) \\ &+ \frac{1}{2}(a^2 - b)\eta(Y)g\left(\nabla_X \xi, Z\right) - \frac{1}{2}(a^2 - b)\eta(Y)g\left(\nabla_Z \xi, X\right) \\ &+ \frac{1}{2}(a^2 - b)\eta(Z)g\left(\nabla_x \xi, Y\right) + \frac{1}{2}(a^2 - b)\eta(Z)g\left(\nabla_Y \xi, X\right).\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant la formule de Koszul , pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned}2\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) &= X(\overline{g}(Y, Z)) + Y(\overline{g}(X, Z)) - Z(\overline{g}(X, Y)) \\ &+ \overline{g}([X, Y], Z) + \overline{g}([Z, X], Y) - \overline{g}(X, [Y, Z]).\end{aligned}$$

Comme $\overline{g} = bg + (a^2 - b)\ \eta \otimes \eta$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}2\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) &= X(bg(Y, Z) + (a^2 - b)\eta(Y)\eta(Z)) \\ &+ Y(bg(X, Z) + (a^2 - b)\eta(X)\eta(Z)) \\ &- Z(bg(X, Y) + (a^2 - b)\eta(X)\eta(Y)) \\ &+ (a^2 - b)\eta([X, Y])\eta(Z) + bg([Z, X], Y) \\ &+ (a^2 - b)\eta([Z, X])\eta(Y) - bg(X, [Y, Z]) \\ &- (a^2 - b)\eta(X)\eta([Y, Z]) + bg([X, Y], Z).\end{aligned}$$

On va simplifier les trois termes suivants

$$X(bg(Y, Z) + (a^2 - b)\eta(Y)\eta(Z)),$$

$$Y(bg(X, Z) + (a^2 - b)\eta(X)\eta(Z))$$

et

$$Z(bg(X, Y) + (a^2 - b)\eta(X)\eta(Y)).$$

On trouve ;

$$\begin{aligned}X(bg(Y,Z)+(a^2-b)\eta(Y)\eta(Z)) &= X(bg(Y,Z))+X((a^2-b)\eta(Y)\eta(Z))\\&= bg\left(\nabla_X Y,Z\right)+bg\left(Y,\nabla_X Z\right)\\&+(a^2-b)\eta(Z)\{g\left(\nabla_X\xi,Y\right)+\eta\left(\nabla_X Y\right)\}\\&+(a^2-b)\eta(Y)\{g\left(\nabla_X\xi,Z\right)+\eta\left(\nabla_X Z\right)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y(bg(X,Z)+(a^2-b)\eta(X)\eta(Z)) &= bg\left(\nabla_Y X,Z\right)+bg\left(X,\nabla_Y Z\right)\\&+(a^2-b)\eta(Z)\{g\left(\nabla_Y\xi,X\right)+\eta(\nabla_Y X)\}\\&+(a^2-b)\eta(X)\{g\left(\nabla_Y\xi,Z\right)+\eta(\nabla_Y Z)\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Z(bg(X,Y)+(a^2-b)\eta(X)\eta(Y)) &= bg\left(\nabla_Z X,Y\right)+bg\left(X,\nabla_Z Y\right)\\&+(a^2-b)\eta(Y)\{g\left(\nabla_Z\xi,X\right)+\eta(\nabla_Z X)\}\\&+(a^2-b)\eta(X)\{g\left(\nabla_Z\xi,Y\right)+\eta(\nabla_Z Y)\}\end{aligned}$$

Finalement il est clair que :

$$(a^2-b)\eta([X,Y])\eta(Z)=(a^2-b)\eta(Z)\eta(\nabla_X Y)-(a^2-b)\eta(Z)\eta(\nabla_Y X), \tag{2.1}$$

$$(a^2-b)\eta([Z,X])\eta(Y)=(a^2-b)\eta(Y)\eta(\nabla_Z X)-(a^2-b)\eta(Y)\eta(\nabla_X Z) \tag{2.2}$$

$$(a^2-b)\eta(X)\eta([Y,Z])=(a^2-b)\eta(X)\eta(\nabla_Y Z)-(a^2-b)\eta(X)\eta(\nabla_Z Y) \tag{2.3}$$

En remplaçant les équations (2.1), (2.2) et (2.3) dans $\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y,Z\right)$ on obtient

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y,Z) &= bg\left(\nabla_X Y,Z\right)+(a^2-b)\eta(Z)\eta(\nabla_X Y)\\&+\frac{1}{2}(a^2-b)\eta(X)g\left(\nabla_Y\xi,Z\right)-\frac{1}{2}(a^2-b)\eta(X)g\left(\nabla_Z\xi,Y\right)\\&+\frac{1}{2}(a^2-b)\eta(Y)g\left(\nabla_X\xi,Z\right)-\frac{1}{2}(a^2-b)\eta(Y)g\left(\nabla_Z\xi,X\right)\\&+\frac{1}{2}(a^2-b)\eta(Z)g\left(\nabla_X\xi,Y\right)+\frac{1}{2}(a^2-b)\eta(Z)g\left(\nabla_Y\xi,X\right)\end{aligned}$$

Théorème 2.1.1 *Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété riemannienne presque de contact et soit $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ sa déformation $\mathcal{D}$-conforme.Pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$, la relation entre $\overline{\nabla}_X Y$ et $\nabla_X Y$ est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y+\frac{a^2+b}{2b}\eta(Y)\nabla_X\xi+\frac{a^2+b}{2b}\eta(X)\nabla_Y\xi\\&-\frac{a^2+b}{2b}\eta(X)Tr_g g(\nabla_\bullet\xi,Y)\bullet+\frac{a^2+b}{2a^2b}\eta(X)g(\nabla_\xi\xi,Y)\xi\\&-\frac{a^2+b}{2b}\eta(Y)Tr_g g(\nabla_\bullet\xi,X)\bullet+\frac{a^2+b}{2a^2b}\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi,X)\xi\\&+\frac{a^2+b}{2a^2}g(\nabla_X\xi,Y)\xi+\frac{a^2+b}{2a^2}g(\nabla_Y\xi,X)\xi\end{aligned}$$

où

$$Tr_g g(X,\nabla_\bullet\xi)\bullet=g(X,\nabla_{e_i}\xi)e_i+g(X,\nabla_{\varphi e_i}\xi)\varphi e_i+g(X,\nabla_\xi\xi)\xi.$$

Preuve. On considère une base orthonormée $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}$ sur la variété Riemannienne presque de contact $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, une base orthonormée sur $(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ est donnée par

$$\overline{e_i} = \frac{1}{\sqrt{b}} e_i, \quad \overline{\varphi e_i} = \frac{1}{\sqrt{b}} \varphi e_i, \quad \overline{\xi} = \frac{1}{a} \xi.$$

Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a

$$\overline{\nabla}_X Y = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \overline{e}_i)\overline{e}_i + \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\varphi e_i})\overline{\varphi e_i} + \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\xi})\overline{\xi}.$$

Grâce à la proposition 2.1.1 , nous obtenons ;

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \overline{e_i})\overline{e_i} &= g(\nabla_X Y, e_i)e_i - \frac{a}{b}\eta(X)\eta(Y)e_i(a)e_i \\
&+ \frac{1}{2b}\eta(X)\eta(Y)e_i(b)e_i - \frac{1}{2b}g(X,Y)e_i(b)e_i \\
&+ \frac{a^2-b}{2b}\eta(Y)g(\nabla_X\xi, e_i)e_i + \frac{a^2-b}{2b}\eta(X)g(\nabla_Y\xi, e_i)e_i \\
&- \frac{a^2-b}{2b}\eta(X)g(\nabla_{e_i}\xi, Y)e_i - \frac{a^2-b}{2b}\eta(Y)g(\nabla_{e_i}\xi, X)e_i
\end{aligned}$$

On refait le même calcul pour $\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\varphi e_i})\overline{\varphi e_i}$ et $\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\xi})\overline{\xi}$

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\varphi e_i})\overline{\varphi e_i} &= g(\nabla_X Y, \varphi e_i)\varphi e_i - \frac{a}{b}\eta(X)\eta(Y)\varphi e_i(a)\varphi e_i \\
&+ \frac{1}{2b}\eta(X)\eta(Y)\varphi e_i(b)\varphi e_i - \frac{1}{2b}g(X,Y)\varphi e_i(b)\varphi e_i \\
&+ \frac{a^2-b}{2b}\eta(Y)g(\nabla_X\xi, \varphi e_i)\varphi e_i + \frac{a^2-b}{2b}\eta(X)g(\nabla_Y\xi, \varphi e_i)\varphi e_i \\
&- \frac{a^2-b}{2b}\eta(X)g(\nabla_{\varphi e_i}\xi, Y)\varphi e_i - \frac{a^2-b}{2b}\eta(Y)g(\nabla_{\varphi e_i}\xi, X)\varphi e_i
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\xi})\overline{\xi} &= g(\nabla_X Y, \xi)\xi - \frac{a}{b}\eta(X)\eta(Y)\xi(a)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{2a^2}\eta(X)g(\nabla_\xi\xi, Y)\xi - \frac{a^2-b}{2a^2}\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi, X)\xi \\
&+ \frac{a^2-b}{2a^2}g(\nabla_X\xi, Y)\xi + \frac{a^2-b}{2a^2}g(\nabla_Y\xi, X)\xi \\
&- \frac{1}{a}\eta(X)\eta(Y)\xi(a)\xi + \frac{1}{2a^2}\{\eta(X)\eta(Y) - g(X,Y)\}\xi(b)\xi
\end{aligned}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \frac{a^2-b}{ab}\eta(X)\eta(Y)\xi(a)\xi - \frac{a^2-b}{2a^2b}\eta(X)\eta(Y)\xi(b)\xi \\ &+ \frac{a^2-b}{2a^2b}g(X,Y)\xi(b)\xi + \frac{a^2-b}{2b}\eta(Y)\nabla_X\xi + \frac{a^2-b}{2b}\eta(X)\nabla_Y\xi \\ &- \frac{a^2-b}{2b}\eta(X)Tr_g g(\nabla_\bullet\xi, Y)\bullet - \frac{a^2-b}{2b}\eta(Y)Tr_g g(\nabla_\bullet\xi, X)\bullet \\ &+ \frac{a^2-b}{2a^2b}\eta(X)g(\nabla_\xi\xi, Y)\xi + \frac{a^2-b}{2a^2b}\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi, X)\xi \\ &+ \frac{a^2-b}{2a^2}g(\nabla_X\xi, Y)\xi + \frac{a^2-b}{2a^2}g(\nabla_Y\xi, X)\xi.\end{aligned}$$

En particulier, si la variété (M,φ,ξ,η,g) est de Kenmotsu, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.1.1 *Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété de Kenmotsu et soit $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ sa déformation $\mathcal{D}$-conforme, alors*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{a^2-b}{a^2}\left\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right\}\xi.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \frac{a^2+b}{2b}\eta(Y)\nabla_X\xi + \frac{a^2+b}{2b}\eta(X)\nabla_Y\xi \\ &- \frac{a^2+b}{2b}\eta(X)Tr_g g(\nabla_\bullet\xi, Y)\bullet + \frac{a^2+b}{2a^2b}\eta(X)g(\nabla_\xi\xi, Y)\xi \\ &- \frac{a^2+b}{2b}\eta(Y)Tr_g g(\nabla_\bullet\xi, X)\bullet + \frac{a^2+b}{2a^2b}\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi, X)\xi \\ &+ \frac{a^2+b}{2a^2}g(\nabla_X\xi, Y)\xi + \frac{a^2+b}{2a^2}g(\nabla_Y\xi, X)\xi,\end{aligned}$$

en remplaçant $\nabla_X\xi$ par $X - \eta(X)\xi$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \frac{a^2+b}{2b}\eta(Y)X - \eta(X)\xi + \frac{a^2+b}{2b}\eta(X)X - \eta(Y)\xi \\ &- \frac{a^2+b}{2b}\eta(X)Tr_g g(\nabla_\bullet\xi, Y)\bullet + \frac{a^2+b}{2a^2b}\eta(X)g(\nabla_\xi\xi, Y)\xi \\ &- \frac{a^2+b}{2b}\eta(Y)Tr_g g(\nabla_\bullet\xi, X)\bullet + \frac{a^2+b}{2a^2b}\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi, X)\xi \\ &+ \frac{a^2+b}{2a^2}g(X-\eta(X)\xi, Y)\xi + \frac{a^2+b}{2a^2}g(Y-\eta(Y)\xi, X)\xi.\end{aligned}$$

En calculant $Tr_g g\left(\nabla_\bullet\xi, X\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}Tr_g g\left(X, \nabla_\bullet\xi\right)\bullet &= g\left(X, \nabla_{e_i}\xi\right)e_i + g\left(X, \nabla_{\varphi e_i}\xi\right)\varphi e_i + g\left(X, \nabla_\xi\xi\right)\xi \\ &= g(X,e_i)e_i + g(X,\varphi_{e_i})\varphi e_i + g(X,\xi)\xi \\ &= g(X,e_i)e_i + g(X,\varphi_{e_i})\varphi e_i + g(X,\xi)\xi - g(X,\xi)\xi\end{aligned}$$

On sait que $g(X,\xi)=\eta(X)$ et $X=g(X,e_i)e_i+g(X,\varphi_{e_i})\varphi e_i+g(X,\xi)\xi$ donc

$$Tr_g g\left(X,\nabla_\bullet\xi\right)\bullet = X-\eta(X)\xi.$$

Si on remplace le résultat trouve pour le terme $Tr_g g\left(X,\nabla_\bullet\xi\right)\bullet$, on déduit que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_XY &= \nabla_XY+\frac{a^2+b}{2b}\eta(Y)(X-\eta(X)\xi)+\frac{a^2+b}{2b}\eta(X)(Y-\eta(Y)\xi)\\ &- \frac{a^2+b}{2b}\eta(X)(Y-\eta(Y)\xi)+\frac{a^2+b}{2a^2b}\eta(X)g(\nabla_\xi\xi,Y)\xi\\ &- \frac{a^2+b}{2b}\eta(Y)(X-\eta(X)\xi)+\frac{a^2+b}{2a^2b}\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi,X)\xi\\ &+ \frac{a^2+b}{2a^2}g(X-\eta(X)\xi,Y)\xi+\frac{a^2+b}{2a^2}g(Y-\eta(Y)\xi,X)\xi.\end{aligned}$$

Or $\nabla_\xi\xi=0$, il suit que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_XY &= \nabla_XY+\frac{a^2+b}{2a^2}\left\{g(X-\eta(X)\xi,Y)+g(Y-\eta(Y)\xi,X)\right\}\xi\\ &= \nabla_XY+\frac{a^2+b}{2a^2}\left\{g(X,Y)-\eta(X)g(\xi,Y)+g(Y,X)+-\eta(Y)g(\xi,X)\right\}\xi.\end{aligned}$$

Comme $g(\xi,X)=\eta(X)$, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_XY &= \nabla_XY+\frac{a^2+b}{2a^2}\left\{2g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)-\eta(Y)\eta(X)\right\}\xi\\ &= \nabla_XY+\frac{a^2+b}{2a^2}\left\{2g(X,Y)-2\eta(X)\eta(Y)\right\}\xi\\ &= \nabla_XY+\frac{a^2+b}{a^2}\left\{g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\right\}\xi.\end{aligned}$$

Grâce à ce corollaire, on va démontrer la relation entre les tenseurs de courbure associés aux variétés (M,φ,ξ,η,g) et $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$.

Théorème 2.1.2 *Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété de Kenmotsu et soit $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ sa déformation $\mathcal{D}$-conforme, alors la relation entre les tenseurs de courbure est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z+\frac{a^2-b}{a^2}\left\{g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z)\right\}X\\ &- \frac{a^2-b}{a^2}\left\{g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z)\right\}Y.\end{aligned}$$

où R et $\overline{R}$ sont respectivement les tenseurs de courbure associés aux variétés (M,φ,ξ,η,g) et $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$.

Preuve. Par définition, on a

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \tag{2.4}$$

Commençons par le calcul de $\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z$. D'après le corollaire 2.1.1, on a

$$\overline{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Y)\eta(Z)\xi,$$

d'où

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z + \frac{a^2-b}{a^2}\overline{\nabla}_X g(Y,Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\overline{\nabla}_X\eta(Y)\eta(Z)\xi$$

Calculons $\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z$, $\overline{\nabla}_X g(Y,Z)\xi$ et $\overline{\nabla}_X\eta(Y)\eta(Z)\xi$, grâce toujours au corollaire 2.1.1, on obtient

$$\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z = \nabla_X\nabla_Y Z + \frac{a^2-b}{a^2}g(X,\nabla_Y Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(X)\eta(\nabla_Y Z)\xi,$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X g(Y,Z)\xi &= g(Y,Z)\overline{\nabla}_X\xi + X(g(Y,Z))\xi \\
&= g(Y,Z)\nabla_X\xi + g(\nabla_X Y,Z)\xi + g(Y,\nabla_X Z)\xi \\
&= g(Y,Z)X - g(Y,Z)\eta(X)\xi + g(\nabla_X Y,Z)\xi + g(Y,\nabla_X Z)\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\eta(Y)\eta(Z)\xi &= \eta(Y)\eta(Z)\nabla_X\xi + X(\eta(Y))\eta(Z)\xi + \eta(Y)X(\eta(Z))\xi \\
&= \eta(Y)\eta(Z)\nabla_X\xi + \eta(Z)X(g(Y,\xi))\xi + \eta(Y)X(g(Z,\xi))\xi \\
&= \eta(Y)\eta(Z)\nabla_X\xi + \eta(Z)g(\nabla_X Y,\xi)\xi + \eta(Z)g(Y,\nabla_X\xi)\xi \\
&\quad + \eta(Y)g(\nabla_X Z,\xi) + \eta(Y)g(Z,\nabla_X\xi)\xi \\
&= \eta(Y)\eta(Z)(X-\eta(X)\xi) + \eta(Z)g(\nabla_X Y,\xi)\xi \\
&\quad + \eta(Z)g(Y,X-\eta(X)\xi)\xi + \eta(Y)g(\nabla_X Z,\xi)\xi \\
&\quad + \eta(Y)g(Z,X-\eta(X)\xi)\xi \\
&= \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi + \eta(Z)\eta(\nabla_X Y)\xi \\
&\quad + \eta(Z)g(X,Y)\xi - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi + \eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\xi \\
&\quad + \eta(Y)g(X,Z)\xi - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi \\
&= \eta(Y)\eta(Z)X - 3\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi + \eta(Y)g(X,Z)\xi \\
&\quad + \eta(Z)g(X,Y)\xi + \eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\xi + \eta(Z)\eta(\nabla_X Y)\xi.
\end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à l'expression suivante

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \nabla_X\nabla_Y Z &+ \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,Z)X - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Y)\eta(Z)X \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,Z)\eta(X)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Z)\eta(Y)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Y)\eta(Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}g(X,\nabla_Y Z)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}\eta(X)\eta(\nabla_Y Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}g(\nabla_X Y,Z)\xi \\
&+ \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,\nabla_X Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Z)\eta(\nabla_X Y) + \frac{3(a^2-b)}{a^2}\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

La même méthode de calcul nous donne

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z &+ \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Z)Y - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(X)\eta(Z)Y \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Z)\eta(Y)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,Z)\eta(X)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Y)\eta(Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,\nabla_X Z)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}g(\nabla_Y X,Z)\xi \\
&+ \frac{a^2-b}{a^2}g(X,\nabla_Y Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(X)\eta(\nabla_Y Z)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Z)\eta(\nabla_Y X) + \frac{3(a^2-b)}{a^2}\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z &+ \frac{a^2-b}{a^2}g(\nabla_X Y,Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}g(\nabla_Y X,Z)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}\eta(\nabla_X Y)\eta(Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}\eta(\nabla_Y X)\eta(Z)\xi.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

En remplaçant (2.5) , (2.6) et (2.7) dans (2.4) , on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,Z)X - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Y)\eta(Z)X + \frac{3(a^2-b)}{a^2}\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,Z)\eta(X)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Z)\eta(Y)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Y)\eta(Z)\xi \\
&+ \frac{a^2-b}{a^2}g(X,\nabla_Y Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(X)\eta(\nabla_Y Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}g(\nabla_X Y,Z)\xi \\
&+ \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,\nabla_X Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Z)\eta(\nabla_X Y)\xi \\
&- \nabla_Y\nabla_X Z - \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Z)Y + \frac{a^2-b}{a^2}\eta(X)\eta(Z)Y - \frac{3(a^2-b)}{a^2}\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi \\
&+ \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Z)\eta(Y)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,Z)\eta(X)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Y)\eta(Z)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,\nabla_X Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}g(\nabla_Y X,Z)\xi \\
&- \frac{a^2-b}{a^2}g(X,\nabla_Y Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}\eta(X)\eta(\nabla_Y Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Z)\eta(\nabla_Y X) \\
&- \nabla_{[X,Y]}Z - \frac{a^2-b}{a^2}g(\nabla_X Y,Z)\xi + \frac{a^2-b}{a^2}g(\nabla_Y X,Z)\xi \\
&+ \frac{a^2-b}{a^2}\eta(\nabla_X Y)\eta(Z)\xi - \frac{a^2-b}{a^2}\eta(\nabla_Y X)\eta(Z)\xi
\end{aligned}$$

Après simplification, on trouve

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \frac{a^2-b}{a^2}g(Y,Z)X \\
- \frac{a^2-b}{a^2}\eta(Y)\eta(Z)X - \frac{a^2-b}{a^2}g(X,Z)Y + \frac{a^2-b}{a^2}\eta(X)\eta(Z)Y.
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

on conclut que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{a^2-b}{a^2}\left\{g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right\}X \\
- \frac{a^2-b}{a^2}\left\{g(X,Z) - \eta(X)\eta(Z)\right\}Y.
\end{aligned}$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est donnée par les résultats suivants.

Corollaire 2.1.2 *Soit* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu et soit* $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *sa déformation* $\mathcal{D}$*-conforme, alors on a la formule suivante :*

$$Tr_g\overline{R}(X,\cdot)\cdot = Ricci\,(X) + \frac{(2m-1)\,(a^2-b)}{a^2}X + \frac{a^2-b}{a^2}\eta\,(X)\,\xi.$$

Preuve. Par définition, on a

$$Tr_g\overline{R}(X,\cdot)\cdot = \overline{R}(X,e_i)e_i + \overline{R}(X,\varphi e_i)\varphi e_i + \overline{R}(X,\xi)\xi.$$

En utilisant le résultat démontré dans le théorème 2.1.1, on obtient

$$\overline{R}\,(X,e_i)\,e_i = R\,(X,e_i)\,e_i + \frac{m\,(a^2-b)}{a^2}X - \frac{a^2-b}{a^2}g\,(X,e_i)\,e_i,$$

$$\overline{R}\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i = R\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i + \frac{m\,(a^2-b)}{a^2}X - \frac{a^2-b}{a^2}g\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i$$

et

$$\overline{R}\,(X,\xi)\,\xi = R\,(X,\xi)\,\xi.$$

Il suit que

$$Tr_g\overline{R}(X,\cdot)\cdot = Ricci\,(X) + \frac{2m\,(a^2-b)}{a^2}X - \frac{a^2-b}{a^2}\left(g\,(X,e_i)\,e_i + g\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i\right)$$

où

$$Ricci\,(X) = R\,(X,e_i)\,e_i + R\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i + R\,(X,\xi)\,\xi.$$

Enfin, il est très simple de voir que

$$X = g\,(X,e_i)\,e_i + g\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i + g\,(X,\xi)\,\xi,$$

donc

$$g\,(X,e_i)\,e_i + g\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i = X - g\,(X,\xi)\,\xi = X - \eta\,(X)\,\xi.$$

Ce qui donne la relation suivante :

$$Tr_g\overline{R}(X,\cdot)\cdot = Ricci\,(X) + \frac{(2m-1)\,(a^2-b)}{a^2}X + \frac{a^2-b}{a^2}\eta\,(X)\,\xi.$$

Corollaire 2.1.3 *Soit* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu et soit* $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *sa déformation* $\mathcal{D}$*-conforme. La relation entre les courbures de Ricci associées à ces deux structures est donnée par :*

$$\overline{Ricci}\,(X) = \frac{1}{b}Ricci\,(X) + \frac{2m\,(a^2-b)}{a^2 b}X.$$

Preuve. En utilisant les relations

$$\overline{e_i} = \frac{1}{\sqrt{b}} e_i, \quad \overline{\varphi e_i} = \frac{1}{\sqrt{b}} \varphi e_i, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{a} \xi,$$

on obtient

$$\overline{Ricci}\,(X) = \frac{1}{b} \overline{R}\,(X, e_i)\, e_i + \frac{1}{b} \overline{R}\,(X, \varphi e_i)\, \varphi e_i + \frac{1}{a^2} \overline{R}\,(X, \xi)\, \xi.$$

d'où

$$\overline{Ricci}\,(X) = \frac{1}{b} Tr_g \overline{R}(X, \cdot) \cdot - \frac{a^2 - b}{a^2 b} R\,(X, \xi)\, \xi.$$

Le terme $\frac{1}{b} Tr_g \overline{R}(X, \cdot) \cdot$ est déjà calculé dans le corollaire 2.1.2. Il nous rester à calculer le terme $R\,(X, \xi)\, \xi$, on a

$$R\,(X, \xi)\, \xi = \nabla_X \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi \nabla_X \xi - \nabla_{[X, \xi]} \xi.$$

Or $\nabla_X \nabla_\xi \xi = 0$, car $\nabla_\xi \xi = 0$,

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \nabla_X \xi &= \nabla_\xi \left(X - \eta\,(X)\, \xi \right) \\ &= \nabla_\xi X - \nabla_\xi g\,(X, \xi)\, \xi \\ &= \nabla_\xi X - g\,(\nabla_\xi X, \xi)\, \xi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_{[X, \xi]} \xi &= [X, \xi] - g\,([X, \xi]\,, \xi)\, \xi \\ &= \nabla_X \xi - \nabla_\xi X - g\,(\nabla_X \xi, \xi)\, \xi + g\,(\nabla_\xi X, \xi)\, \xi \\ &= X - \eta\,(X)\, \xi - \nabla_\xi X + g\,(\nabla_\xi X, \xi .)\, \xi \end{aligned}$$

Donc

$$R\,(X, \xi)\, \xi = -X + \eta\,(X)\, \xi.$$

Enfin, on déduit que

$$\overline{Ricci}\,(X) = \frac{1}{b} Ricci\,(X) + \frac{2m\,(a^2 - b)}{a^2 b} X.$$

Corollaire 2.1.4 *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et soit $\left(M, \overline{\varphi}, \bar{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ sa déformation $\mathcal{D}$-conforme. Les relations entre les tenseurs de Ricci et les courbures scalaires associées à ces deux structures sont données par les formules suivantes :*

$$\overline{Ric}\,(X, Y) = Ric\,(X, Y) + \frac{2m\,(a^2 - b)}{a^2} g\,(X\ , Y) - \frac{2m\,(a^2 - b)}{a^2} \eta\,(X)\, \eta\,(Y)$$

et

$$S_{\overline{g}} = \frac{1}{b} S_g + \frac{2m\,(2m + 1)\,(a^2 - b)}{a^2 b}.$$

Preuve. La démonstration des ces formules se basent sur le corollaire 2.1.3. On a

$$\overline{Ric}\,(X,Y) = \overline{g}\left(\overline{Ricci}\ \ ,Y\right).$$

Sachant que

$$\overline{Ricci}\ \ = \frac{1}{b}Ricci\,(X) + \frac{2m\,(a^2-b)}{a^2b}X$$

et

$$\overline{g} = bg + \left(a^2-b\right)\eta\otimes\eta$$

il vient que

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}\,(X,Y) &= \overline{g}\left(\frac{1}{b}Ricci\,(X) + \frac{2m\,(a^2-b)}{a^2b}X\ \ ,Y\right)\\
&= \frac{1}{b}\overline{g}\,(Ricci\,(X)\ \ ,Y) + \frac{2m\,(a^2-b)}{a^2b}\overline{g}\,(X\ \ ,Y)\\
&= Ric\,(X,Y) + \frac{(a^2-b)}{b}\eta\,(Ricci\,(X))\,\eta\,(Y)\\
&+ \frac{2m\,(a^2-b)}{a^2}g\,(X\ \ ,Y) + \frac{2m\,(a^2-b)^2}{a^2b}\eta\,(X\ \ )\,\eta\,(Y)\,.
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, nous allons simplifier le terme $\eta\,(Ricci\,(X))$, on a

$$\eta\,(Ricci\,(X)) = g\,(Ricci\,(X)\,,\xi)\,,$$

d'où

$$\eta\,(Ricci\,(X)) = g\,(R\,(X,e_i)\,e_i,\xi) + g\,(R\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i,\xi) + g\,(R\,(X,\xi)\,\xi,\xi)\,.$$

Un long calcul montre que

$$g\,(R\,(X,e_i)\,e_i,\xi) = g\,(R\,(X,\varphi e_i)\,\varphi e_i,\xi) = -m\eta\,(X)$$

et

$$g\,(R\,(X,\xi)\,\xi,\xi) = 0,$$

ce qui donne

$$\eta\,(Ricci\,(X)) = -2m\eta\,(X)\,.$$

On déduit que

$$\overline{Ric}\,(X,Y) = Ric\,(X,Y) + \frac{2m\,(a^2-b)}{a^2}g\,(X\ \ ,Y) - \frac{2m\,(a^2-b)}{a^2}\eta\,(X)\,\eta\,(Y)\,.$$

Pour la courbure scalaire associée à la métrique $\overline{g}$, on a

$$\begin{aligned}
S_{\overline{g}} &= Tr_{\overline{g}}\overline{Ric}\,(X,Y)\\
&= \overline{Ric}\,(\overline{e_i},\overline{e_i}) + \overline{Ric}\,(\overline{\varphi e_i},\overline{\varphi e_i}) + \overline{Ric}\left(\overline{\xi},\overline{\xi}\right).
\end{aligned}$$

Par des simples calculs, on obtient

$$\overline{Ric}\left(\overline{e_i},\overline{e_i}\right)=\frac{1}{b}Ric\left(e_i,e_i\right)+\frac{2m^2\left(a^2-b\right)}{a^2b},$$

$$\overline{Ric}\left(\overline{\varphi e_i},\overline{\varphi e_i}\right)=\frac{1}{b}Ric\left(\varphi e_i,\varphi e_i\right)+\frac{2m^2\left(a^2-b\right)}{a^2b}$$

et

$$\overline{Ric}\left(\overline{\xi},\overline{\xi}\right)=\frac{1}{a^2}Ric\left(\xi,\xi\right).$$

Il suit que

$$S_{\overline{g}}=\frac{1}{b}S_g-\frac{a^2-b}{a^2b}Ric\left(\xi,\xi\right)+\frac{4m^2\left(a^2-b\right)}{a^2b},$$

où

$$S_g=Ric\left(e_i,e_i\right)+Ric\left(\varphi e_i,\varphi e_i\right)+Ric\left(\xi,\xi\right).$$

Enfin, on a

$$Ric\left(\xi,\xi\right)=g\left(Ricci\left(\xi\right),\xi\right)=\eta\left(Ricci\left(\xi\right)\right)=-2m\eta\left(\xi\right)=-2m,$$

ce qui nous permet d'avoir le résultat suivant :

$$S_{\overline{g}}=\frac{1}{b}S_g+\frac{2m\left(2m+1\right)\left(a^2-b\right)}{a^2b}.$$

Exemple 2.1.1 *On considère la variété de trois dimension* $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(x,y,z)\neq(0,0,0)$, *où* (x,y,z) *sont les coordonnées standard dans* $\mathbb{R}^3$. *Les champs de vecteurs*

$$\left\{e_1=z\frac{\partial}{\partial x},e_2=z\frac{\partial}{\partial y},e_3=\xi=-z\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

sont linéairement indépendants en chaque point de M. *Soit* g *la métrique riemannienne définie par*

$$g(e_1,e_3)=g(e_2,e_3)=g(e_1,e_2)=0,\quad g(e_1,e_1)=g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1.$$

La connexion riemannienne ∇ *de la métrique* g *nous donnent les formules suivantes*

$$\begin{array}{lll}\nabla_{e_1}e_1=0, & \nabla_{e_1}e_2=0, & \nabla_{e_1}e_3=e_1,\\ \nabla_{e_2}e_1=0, & \nabla_{e_2}e_2=0, & \nabla_{e_2}e_3=e_2,\\ \nabla_{e_3}e_1=0, & \nabla_{e_3}e_2=0, & \nabla_{e_3}e_3=0.\end{array}$$

et

$$[e_1,e_2]=0,\quad [e_1,e_3]=e_1,\quad [e_2,e_3]=e_2.$$

A l'aide des résultats ci-dessus, nous pouvons vérifier ce qui suit

$$\begin{array}{lll} R(e_1,e_2)e_2 = 0, & R(e_1,e_3)e_3 = -e_1, & R(e_2,e_1)e_1 = 0, \\ R(e_2,e_3)e_3 = -e_2, & R(e_3,e_1)e_1 = 0, & R(e_3,e_2)e_2 = 0, \\ R(e_1,e_2)e_3 = 0, & R(e_2,e_3)e_1 = 0, & R(e_3,e_1)e_2 = 0. \end{array}$$

Maintenant à partir de la définition du tenseur de Ricci dans la variété de dimension 3 , nous obtenons

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{3} g(R(e_i,X)Y,e_i). \tag{2.8}$$

De la composante du tenseur de courbure et (2.8) nous obtenons les résultats suivants

$$\begin{array}{lll} Ric(e_1,e_1) = 0, & Ric(e_2,e_2) = 0, & Ric(e_3,e_3) = -2, \\ Ric(e_1,e_2) = 0, & Ric(e_1,e_3) = 0, & Ric(e_2,e_3) = 0. \end{array}$$

Donc

$$S_g = -2.$$

Dans ce cas, on déduit que $S_{\overline{g}} = 0$ *si et seulement si*

$$2a^2 - 3b = 0.$$

Chapitre 3

Fonctions harmoniques et biharmonique sur les variétés métriques presque de contact.

Dans ce chapitre, on étudie l'harmonicité et la biharmonicité d'une fonction sur une variété métrique presque de contact, les résultats obtenus ont permis de construire quelques exemples. Nous montrons à la fin de ce chapitre que l'harmonicité et la biharmonicité sont invariantes par déformation $\mathcal{D}$-conforme de la métrique initiale. Commençons par la caractérisation des fonctions harmoniques sur une variété de Kenmotsu. Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et soit $f \in C^{\infty}(M)$. On dit que f dépend seulement de la direction de ξ si $e_i(f) = (\varphi e_i)(f) = 0$, ce qui donne dans ce cas $gard\, f = \xi(f)\,\xi$.

3.1 Enoncé des résultats.

Proposition 3.1.1 *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu, pour toute $f \in C^{\infty}(M)$ qui dépend seulement de la direction de ξ on a*

$$\Delta f = \xi^{(2)}(f) + 2m\,\xi(f)$$

Preuve. Soit $f \in C^{\infty}(M)$, par définition de laplacien on a

$$\begin{aligned}\Delta f = {} & e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) + (\varphi e_i)((\varphi e_i)(f)) \\ & - (\nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i)(f) + \xi(\xi(f)) - (\nabla_\xi \xi)(f)\end{aligned}$$

Comme f dépend seulement de la direction de ξ et en utilisant le fait que $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu , on obtient

$$e_i(f) = (\varphi e_i)(f) = 0$$

et

$$\nabla_\xi \xi = 0$$

ce qui nous donne

$$\Delta f = \xi(\xi(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) - (\nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i)(f)$$

Calculons le terme $(\nabla_{e_i} e_i)(f)$, on a

$$(\nabla_{e_i} e_i)(f) = g(\nabla_{e_i} e_i, grad\, f),$$

comme f dépend seulement de la direction de ξ donc

$$grad\, f = e_i(f)e_i + \varphi e_i(f)\varphi e_i + \xi(f)\xi = \xi(f)\xi.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i} e_i)(f) &= g(\nabla_{e_i} e_i, \xi(f)\xi) \\ &= \xi(f) g(\nabla_{e_i} e_i, \xi) \\ &= \xi(f) \{e_i g(e_i, \xi) - g(e_i, \nabla_{e_i} \xi)\} \\ &= -\xi(f) g(e_i, e_i)\end{aligned}$$

car $\nabla_{e_i} \xi = e_i$. On en déduit que

$$(\nabla_{e_i} e_i)(f) = -m\xi(f)$$

La même méthode de calcul nous donne

$$(\nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i)(f) = -m\xi(f)$$

En posant

$$\xi^{(2)}(f) = \xi(\xi(f)),$$

on conclut que

$$\Delta f = \xi^{(2)}(f) + 2m\xi(f) \tag{3.1}$$

de l'équation (3.1), il suit que f est harmonique si et seulement si

$$\xi^{(2)}(f) + 2m\xi(f) = 0 \tag{3.2}$$

Pour calculer le bilaplacien de f, on a besoin du résultat suivant :

Proposition 3.1.2 *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu, si la fonction f dépend seulement de la direction de ξ, alors $\xi(f)$ l'est aussi.*

Preuve. Nous allons montrer que

$$e_i(\xi(f)) = (\varphi e_i)(\xi(f)) = 0.$$

On a

$$e_i(\xi(f)) = e_i(g(\xi, gradf)) = g(\nabla_{e_i} \xi, gradf) + g(\xi, \nabla_{e_i} gradf).$$

En utlisant le fait que

$$\nabla_{e_i} \xi = e_i,$$

$$g\left(\xi, \nabla_{e_i} gradf\right) = g\left(e_i, \nabla_\xi gradf\right)$$

et

$$gradf = \xi\left(f\right)\xi,$$

on obtient

$$e_i\left(\xi\left(f\right)\right) = g\left(e_i, gradf\right) + g\left(e_i, \nabla_\xi \xi\left(f\right)\xi\right).$$

Or

$$g\left(e_i, gradf\right) = e_i\left(f\right) = 0$$

et

$$g\left(e_i, \nabla_\xi \xi\left(f\right)\xi\right) = \xi\left(f\right) g\left(e_i, \nabla_\xi \xi\right) + \xi\left(\xi\left(f\right)\right) g\left(e_i, \xi\right) = 0,$$

car

$$\nabla_\xi \xi = 0, \quad g\left(e_i, \xi\right) = 0.$$

Ce qui nous donne

$$e_i\left(\xi\left(f\right)\right) = 0.$$

La même méthode nous permet de prouver aussi que

$$\left(\varphi e_i\right)\left(\xi\left(f\right)\right) = 0.$$

Par suite, la fonction $\xi\left(f\right)$ dépend seulement de la direction de ξ. D'une manière générale, on a la propriété suivante :

Remarque 3.1.1 *On peut remarquer que si f dépend seulement de la direction de ξ, alors $\xi^{(k)}\left(f\right)$ dépend seulement de la direction de ξ, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Théorème 3.1.1 *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ qui dépend seulement de la direction de ξ, on a*

$$\Delta^2 f = \xi^{(4)}\left(f\right) + 4m\xi^{(3)}\left(f\right) + 4m^2\xi^{(2)}\left(f\right).$$

Preuve. Soit $f \in C^\infty(M)$, par le résultat précédent on a

$$\begin{aligned}\Delta^2 f &= \Delta(\Delta f) \\ &= \Delta(\xi^{(2)}(f) + 2m\xi(f)) \\ &= \Delta(\xi^{(2)}(f)) + 2m\Delta(\xi(f)),\end{aligned}$$

d'après la proposition 3.1.2 et en utilisant le fait que $\xi(f)$ et $\xi^{(2)}(f)$ dépendent seulement de la direction de ξ, on obtient

$$\Delta(\xi^2(f)) = \xi^{(4)}(f) + 2m\xi^{(3)}(f)$$

et

$$\Delta(\xi(f)) = \xi^{(3)}(f) + 2m\xi^{(2)}(f),$$

il suit que

$$\Delta^2 f = \xi^{(4)}(f) + 4m\xi^{(3)}(f) + 4m^2\xi^{(2)}(f) \tag{3.3}$$

de l'équation (3.3), on déduit que f est biharmonique si et seulement si

$$\xi^{(4)}(f) + 4m\xi^{(3)}(f) + 4m^2\xi^{(2)}(f) = 0. \tag{3.4}$$

3.2 Exemples.

Exemple 3.2.1 (3) *On considère la variété de Kenmotsu $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\}$. La métrique sur M est définie par*

$$g = \frac{1}{z^2}dx^2 + \frac{1}{z^2}dy^2 + \frac{1}{z^2}dz^2,$$

et la base orthonormée est donnée par $e_1 = z\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = z\frac{\partial}{\partial y}$ et $\xi = e_3 = -z\frac{\partial}{\partial z}$. Les champs de vecteurs e_1, e_2 et e_3 vérifient

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_1}e_1 = 0, & \nabla_{e_1}e_2 = 0, & \nabla_{e_1}e_3 = e_1, \\ \nabla_{e_2}e_1 = 0, & \nabla_{e_2}e_2 = 0, & \nabla_{e_2}e_3 = e_2, \\ \nabla_{e_3}e_1 = 0, & \nabla_{e_3}e_2 = 0, & \nabla_{e_3}e_3 = 0. \end{array}$$

Si on suppose que la fonction f dépend seulement de z, un simple calcul nous donne

$$\xi(f) = -zf'(z),$$

$$\xi^{(2)}(f) = z^2 f''(z) + zf'(z),$$

$$\xi^{(3)}(f) = -z^3 f^{(3)}(z) - 3z^2 f''(z) - zf'(z)$$

et

$$\xi^{(4)}(f) = z^4 f^{(4)}(z) + 6z^3 f^{(3)}(z) + 7z^2 f''(z) + zf'(z).$$

Grâce aux équations (3.2) et (3.4), on déduit que la fonction f est harmonique si et seulement si

$$zf''(z) - f'(z) = 0$$

et elle est biharmonique si et seulement si

$$z^3 f^{(4)}(z) + 2z^2 f^{(3)}(z) - zf''(z) + f'(z) = 0.$$

La résolution de ces deux équations nous donne les résultats suivants :

1. *f est harmonique si et seulement si*

$$f(z) = Az^2 + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. *f est biharmonique si et seulement si*

$$f(z) = Az^2 + B + \left(Cz^2 + D\right)\ln z, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Pour cet exemple, on peut remarquer que :

- *Si f dépend seulement de la variable x, il suit que dans ce cas f est harmonique si et seulement si*

$$f(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

et elle est biharmonique si et seulement si

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

- *Si f dépend seulement de la variable y, il suit que dans ce cas f est harmonique si et seulement si*

$$f(y) = Ay + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

et elle est biharmonique si et seulement si

$$f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.2 (5) *On considère la variété de Kenmotsu $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$, une base orthonormée est donnée par*

$$e_1 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \xi = \frac{\partial}{\partial z}.$$

La métriques sur M est définie par

$$g = e^{2z}dx^2 + e^{2z}dy^2 + dz^2,$$

Les champs de vecteurs e_1, e_2 et e_3 satisfont

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_1}e_1 = -\xi, & \nabla_{e_1}e_2 = 0, & \nabla_{e_1}e_3 = e_1, \\ \nabla_{e_2}e_1 = 0, & \nabla_{e_2}e_2 = -\xi, & \nabla_{e_2}e_3 = e_2, \\ \nabla_{e_3}e_1 = 0, & \nabla_{e_3}e_2 = 0, & \nabla_{e_3}e_3 = 0. \end{array}$$

Si on suppose que la fonction f dépend seulement de z, il très facile de voir que

$$\xi(f) = f'(z), \quad \xi^{(2)}(f) = f''(z)$$

et

$$\xi^{(3)}(f) = f^{(3)}(z), \quad \xi^{(4)}(f) = f^{(4)}(z).$$

Grâce aux équations (3.2) et (3.4), il suit que la fonction f est harmonique si et seulement si

$$f''(z) + 2f'(z) = 0$$

et elle est biharmonique si et seulement si

$$f^{(4)}(z) + 4f^{(3)}(z) + 4f''(z) = 0.$$

La résolution de ces deux équations nous donne les résultats suivants :

1. *f est harmonique si et seulement si*

$$f(z) = Ae^{-2z} + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. *f est biharmonique si et seulement si*

$$f(z) = (Az + B)e^{-2z} + Cz + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

La même méthode exposée dans l'exemple précédent nous permet de présenter les deux cas suivants :

- *Si f dépend seulement de la variable x, il suit que dans ce cas f est harmonique si et seulement si*
$$f(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$
et elle est biharmonique si et seulement si
$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$
- *Si f dépend seulement de la variable y, il suit que dans ce cas f est harmonique si et seulement si*
$$f(y) = Ay + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$
et elle est biharmonique si et seulement si
$$f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.3 (4) *Soit la variété de Kenmotsu $M = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5\}$, où (x, y, z, u, v) sont les coordonnées standard dans $\mathbb{R}^5$. Une base orthonormée est donnée par $e_1 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial y}$, $e_3 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial z}$, $e_4 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial u}$ et $e_5 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial v}$. Prenons $e_5 = \xi$, on a les résultats suivants :*

$$\begin{array}{lllll}
\nabla_{e_1}e_1 = -e_5, & \nabla_{e_1}e_2 = 0, & \nabla_{e_1}e_3 = 0, & \nabla_{e_1}e_4 = 0, & \nabla_{e_1}e_5 = e_1 \\
\nabla_{e_2}e_1 = 0, & \nabla_{e_2}e_2 = -e_5, & \nabla_{e_2}e_3 = 0, & \nabla_{e_2}e_4 = 0, & \nabla_{e_2}e_5 = e_2 \\
\nabla_{e_3}e_1 = 0, & \nabla_{e_3}e_2 = 0, & \nabla_{e_3}e_3 = -e_5, & \nabla_{e_3}e_4 = 0, & \nabla_{e_3}e_5 = e_3 \\
\nabla_{e_4}e_1 = 0, & \nabla_{e_4}e_2 = 0, & \nabla_{e_4}e_3 = 0, & \nabla_{e_4}e_4 = -e_5, & \nabla_{e_4}e_5 = e_4 \\
\nabla_{e_5}e_1 = 0, & \nabla_{e_5}e_2 = 0, & \nabla_{e_5}e_3 = 0, & \nabla_{e_5}e_4 = 0, & \nabla_{e_5}e_5 = 0.
\end{array}$$

Si on suppose que la fonction f dépend seulement de v, un long calcul nous donne

$$\xi(f) = e^{-v}f'(v), \quad \xi^{(2)}(f) = e^{-2v}f''(v) - e^{-2v}f'(v),$$
$$\xi^{(3)}(f) = e^{-3v}f^{(3)}(v) - 3e^{-3v}f''(v) + 2e^{-3v}f'(v)$$

et

$$\xi^{(4)}(f) = e^{-4v}f^{(4)}(v) - 6e^{-4v}f^{(3)}(v) + 11e^{-4v}f''(v) - 6e^{-4v}f'(v).$$

Grâce aux équations (3.2) et (3.4), on conclut que la fonction f est harmonique si et seulement si

$$f''(v) + (4e^v - 1)f'(v) = 0$$

et elle est biharmonique si et seulement si

$$f^{(4)}(v) + (8e^v - 6)f^{(3)}(v) + \left(16e^{2v} - 24e^v + 11\right)f''(v) - \left(16e^{2v} - 16e^v + 6\right)f'(v) = 0.$$

La résolution de la première équation nous ramène au résultat suivant : f est harmonique si et seulement si

$$f(v) = Ae^{-4e^v} + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour l'équation de la biharmonicité de f, on remarque que la fonction f donnée par

$$f(v) = Ae^v + B, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0.$$

est une solution particulière, de plus cette fonction est biharmonique non-harmonique. Si la fonction f dépend de l'une variable x, y, z ou u, On obtient les cas suivants :

- *Si f dépend seulement de la variable x, il suit que dans ce cas f est harmonique si et seulement si*

  $$f(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

  et elle est biharmonique si et seulement si

  $$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

- *Si f dépend seulement de la variable y, il suit que dans ce cas f est harmonique si et seulement si*

  $$f(y) = Ay + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

  et elle est biharmonique si et seulement si

  $$f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

- *Si f dépend seulement de la variable z, il suit que dans ce cas f est harmonique si et seulement si*

  $$f(z) = Az + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

  et elle est biharmonique si et seulement si

  $$f(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

- *Si f dépend seulement de la variable u, il suit que dans ce cas f est harmonique si et seulement si*

  $$f(u) = Ay + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

  et elle est biharmonique si et seulement si

  $$f(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Dans un dernier exemple, on considère une variété M qui n'est pas de Kenmotsu, on calcule le laplacien et le bilaplacien d'une fonction qui dépend seulement de la direction de ξ, ces calculs nous donnent les conditions d'harmonicité et de biharmonicité.

Exemple 3.2.4 (6) *On considère $m \in \mathbb{N}^*$ et la variété $M = \mathbb{R}^{2m+1}$. la métrique sur M est définie par*

$$g = e^{2(z+e^z)}dx_i^2 + e^{-2(z-e^z)}dy_i^2 + e^{2z}dz^2,$$

et la base orthonormée est donnée par

$$X_i = e^{-(z+e^z)}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y_i = e^{z-e^z}\frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad \xi = e^{-z}\frac{\partial}{\partial z}, i = 1, \dots, m.$$

Les champs de vecteurs X_i, Y_i et ξ satisfont

$$\begin{array}{lll} \nabla_{X_i}X_j = -\left(1+e^{-z}\right)\delta_{ij}\xi, & \nabla_{X_i}Y_j = 0, & \nabla_{X_i}\xi = \left(1+e^{-z}\right)X_i, \\ \nabla_{Y_i}Y_j = -\left(1-e^{-z}\right)\delta_{ij}\xi, & \nabla_{Y_i}X_j = 0, & \nabla_{Y_i}\xi = \left(1-e^{-z}\right)Y_i, \\ \nabla_{\xi}X_i = 0, & \nabla_{\xi}Y_i = 0, & \nabla_{\xi}\xi = 0. \end{array}$$

Si on suppose que la fonction f dépend seulement de z. Commençons par le calcul du Laplacien de f, par définition, on trouve

$$\Delta f = \xi^{(2)}(f) - \left(\nabla_{X_i}X_i\right)(f) - \left(\nabla_{Y_i}Y_i\right)(f), \quad i = 1, ..., m.$$

Un simple calcul donne

$$\xi(f) = e^{-z}f'(z), \quad \xi^{(2)}(f) = e^{-2z}f''(z) - e^{-2z}f'(z),$$

$$\left(\nabla_{X_i}X_i\right)(f) = -m\left(1+e^{-z}\right)e^{-z}f'(z)$$

et

$$\left(\nabla_{Y_i}Y_i\right)(f) = -m\left(1-e^{-z}\right)e^{-z}f'(z).$$

Il suit que

$$\Delta f = e^{-2z}f''(z) - e^{-2z}f'(z) + 2me^{-z}f'(z).$$

Donc f est harmonique si et seulement si

$$f''(z) + \left(2me^z - 1\right)f'(z) = 0.$$

D'où f est harmonique si et seulement si

$$f(z) = \frac{A}{m}e^{-2me^z} + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Passons maintenant au calcul du bilaplacien de f, on a

$$\begin{aligned} \Delta^2 f &= \Delta\left(e^{-2z}f''(z) - e^{-2z}f'(z) + 2me^{-z}f'(z)\right) \\ &= \xi^{(2)}\left(e^{-2z}f''(z) - e^{-2z}f'(z) + 2me^{-z}f'(z)\right) \\ &\quad - \left(\nabla_{X_i}X_i\right)\left(e^{-2z}f''(z) - e^{-2z}f'(z) + 2me^{-z}f'(z)\right) \\ &\quad - \left(\nabla_{Y_i}Y_i\right)\left(e^{-2z}f''(z) - e^{-2z}f'(z) + 2me^{-z}f'(z)\right). \end{aligned}$$

Un long calcul donne les formules suivantes

$$\begin{aligned} \xi\left(e^{-2z}f''(z) - e^{-2z}f'(z) + 2me^{-z}f'(z)\right) &= e^{-3z}f^{(3)}(z) - 3e^{-3z}f''(z) + 2me^{-2z}f''(z) \\ &\quad + 2e^{-3z}f'(z) - 2me^{-2z}f'(z), \end{aligned}$$

$$\xi^{(2)}\left(e^{-2z}f''(z)-e^{-2z}f'(z)+2me^{-z}f'(z)\right)=e^{-4z}f^{(4)}(z)-6e^{-4z}f^{(3)}(z)+11e^{-4z}f''(z)+2me^{-3z}f^{(3)}(z)$$
$$-6me^{-3z}f''(z)-6e^{-4z}f'(z)+4me^{-3z}f'(z),$$

$$\left(\nabla_{X_i}X_i\right)\left(e^{-2z}f''(z)-e^{-2z}f'(z)+2me^{-z}f'(z)\right)=-m\left(1+e^{-z}\right)e^{-3z}f^{(3)}(z)+3m\left(1+e^{-z}\right)e^{-3z}f''(z)$$
$$-2m^2\left(1+e^{-z}\right)e^{-2z}f''(z)-2m\left(1+e^{-z}\right)e^{-3z}f'(z)$$
$$+2m^2\left(1+e^{-z}\right)e^{-2z}f'(z)$$

et

$$\left(\nabla_{Y_i}Y_i\right)\left(e^{-2z}f''(z)-e^{-2z}f'(z)+2me^{-z}f'(z)\right)=-m\left(1-e^{-z}\right)e^{-3z}f^{(3)}(z)+3m\left(1-e^{-z}\right)e^{-3z}f''(z)$$
$$-2m^2\left(1-e^{-z}\right)e^{-2z}f''(z)-2m\left(1-e^{-z}\right)e^{-3z}f'(z)$$
$$+2m^2\left(1-e^{-z}\right)e^{-2z}f'(z)$$

Il suit que le bilaplacien de f prend la forme suivante

$$\begin{aligned}\Delta^2 f &= e^{-4z}f^{(4)}(z)-6e^{-4z}f^{(3)}(z)+4me^{-3z}f^{(3)}(z)+11e^{-4z}f''(z)\\ &-12me^{-3z}f''(z)+4m^2e^{-2z}f''(z)-6e^{-4z}f'(z)\\ &+8me^{-3z}f'(z)-4m^2e^{-2z}f'(z).\end{aligned}$$

D'où f est biharmonique si et seulement si elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}&f^{(4)}(z)-6f^{(3)}(z)+4me^{z}f^{(3)}(z)+11f''(z)\\ &-12me^{z}f''(z)+4m^2e^{2z}f''(z)-6f'(z)\\ &+8me^{z}f'(z)-4m^2e^{2z}f'(z)=0.\end{aligned}$$

On remarque que la fonction f donnée par

$$f(z)=Ae^{z}+B,\qquad A,B\in\mathbb{R},\qquad A\neq 0.$$

est une solution particulière, de plus cette fonction est biharmonique non-harmonique.

3.3 Effet de la déformation $\mathcal{D}$-conforme.

Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété de kenmotsu et soit $\left(\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-conforme avec

$$\overline{\varphi}=\varphi,\qquad \overline{\eta}=a\eta,\overline{\xi}=\frac{1}{a}\xi$$

et

$$\overline{g}=bg+\left(a^2-b\right)\eta\otimes\eta.$$

Soit $\{e_i,\varphi e_i,\xi\}$ une base orthonormée sur (M,φ,ξ,η,g), alors une base orthonormée sur $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ est donnée par

$$\overline{e_i}=\frac{1}{\sqrt{b}}e_i,\qquad \overline{\varphi e_i}=\frac{1}{\sqrt{b}}\varphi e_i,\qquad \overline{\xi}=\frac{1}{a}\xi.$$

En utilisant l'expression suivante

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{a^2 - b}{a^2}\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\}\xi,$$

on déduit que

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_i = \nabla_{e_i} e_i + \frac{m\left(a^2 - b\right)}{a^2}\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\varphi e_i} \varphi e_i = \nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i + \frac{m\left(a^2 - b\right)}{a^2}\xi$$

et

$$\overline{\nabla}_\xi \xi = 0.$$

Il suit que

$$\overline{\nabla}_{\overline{e_i}} \overline{e_i} = \frac{1}{b}\nabla_{e_i} e_i + \frac{m\left(a^2 - b\right)}{a^2 b}\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}} \overline{\varphi e_i} = \frac{1}{b}\nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i + \frac{m\left(a^2 - b\right)}{a^2 b}\xi$$

et

$$\overline{\nabla}_{\overline{\xi}} \overline{\xi} = 0.$$

Notons par $\overline{\Delta}$ le Laplacien sur $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$. Soit $f \in C^\infty(M)$, nous allons calculer le laplacien et bilaplacien de f relativement à la structure $\left(\overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} f = {} & \overline{e_i}\left(\overline{e_i}\left(f\right)\right) + \left(\overline{\varphi e_i}\right)\left(\left(\overline{\varphi e_i}\right)\left(f\right)\right) + \overline{\xi}\left(\overline{\xi}\left(f\right)\right) \\ & - \left(\overline{\nabla}_{\overline{e_i}} \overline{e_i}\right)\left(f\right) - \left(\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}} \overline{\varphi e_i}\right)\left(f\right) - \left(\overline{\nabla}_{\overline{\xi}} \overline{\xi}\right)\left(f\right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\overline{e_i} = \frac{1}{\sqrt{b}} e_i, \quad \overline{\varphi e_i} = \frac{1}{\sqrt{b}} \varphi e_i, \quad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \quad \overline{\nabla}_{\overline{\xi}} \overline{\xi} = 0,$$

$$\overline{\nabla}_{\overline{e_i}} \overline{e_i} = \frac{1}{b}\nabla_{e_i} e_i + \frac{m\left(a^2 - b\right)}{a^2 b}\xi$$

et

$$\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}} \overline{\varphi e_i} = \frac{1}{b}\nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i + \frac{m\left(a^2 - b\right)}{a^2 b}\xi,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} f = {} & \frac{1}{b} e_i\left(e_i\left(f\right)\right) + \frac{1}{b}\left(\varphi e_i\right)\left(\left(\varphi e_i\right)\left(f\right)\right) + \frac{1}{a^2}\xi\left(\xi\left(f\right)\right) \\ & - \frac{1}{b}\left(\nabla_{e_i} e_i\right)\left(f\right) - \frac{1}{b}\left(\nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i\right)\left(f\right) - \frac{2m\left(a^2 - b\right)}{a^2 b}\xi\left(f\right) \end{aligned}$$

Or le laplacien de la fonction f sur (M,φ,ξ,η,g) est donné par

$$\begin{aligned}\Delta f &= e_i\left(e_i\left(f\right)\right)+\left(\varphi e_i\right)\left(\left(\varphi e_i\right)\left(f\right)\right)+\xi\left(\xi\left(f\right)\right)\\ &\quad-\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\left(f\right)-\left(\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i\right)\left(f\right)-\left(\nabla_{\xi}\xi\right)\left(f\right)\end{aligned}$$

ce qui nous donne la relation suivante :

$$\overline{\Delta} f=\frac{1}{b}\Delta f-\frac{a^2-b}{a^2b}\xi^{(2)}\left(f\right)-\frac{2m\left(a^2-b\right)}{a^2b}\xi\left(f\right).$$

De plus, si la fonction f dépend seulement de la direction de ξ, cette dernière équation devient

$$\overline{\Delta} f=\frac{1}{a^2}\xi^{(2)}\left(f\right)+\frac{2m}{a^2}\xi\left(f\right)=\frac{1}{a^2}\Delta f.$$

On déduit alors dans le cas où f dépend seulement de la direction de ξ, l'harmonicité de f est invariante par une déformation $\mathcal{D}$-conforme. On termine cette partie par le calcul du bilaplacien de f en supposant qu'elle dépend seulement de la direction de ξ, on a

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}^2 f &= \overline{\Delta}\left(\overline{\Delta} f\right)\\ &=\frac{1}{a^2}\overline{\Delta}\left(\Delta f\right)\\ &=\frac{1}{a^2}\overline{\Delta}\xi^{(2)}\left(f\right)+\frac{2m}{a^2}\overline{\Delta}\left(\xi\left(f\right)\right).\end{aligned}$$

Un long calcul donne

$$\overline{\Delta}\xi^{(2)}\left(f\right)=\frac{1}{a^2}\xi^{(4)}\left(f\right)+\frac{2m}{a^2}\xi^{(3)}\left(f\right)$$

et

$$\overline{\Delta}\left(\xi\left(f\right)\right)=\frac{1}{a^2}\xi^{(3)}\left(f\right)+\frac{2m}{a^2}\xi^{(2)}\left(f\right),$$

Il suit que

$$\overline{\Delta}^2 f=\frac{1}{a^4}\xi^{(4)}\left(f\right)+\frac{4m}{a^4}\xi^{(3)}\left(f\right)+\frac{4m^2}{a^4}\xi^{(2)}\left(f\right).$$

Or on sait que

$$\Delta^2 f=\xi^{(4)}(f)+4m\,\xi^{(3)}(f)+4m^2\,\xi^{(2)}(f),$$

d'où

$$\overline{\Delta}^2 f=\frac{1}{a^4}\Delta^2 f.$$

On déduit alors que dans ce cas, la biharmonicité de f est aussi invariante par une déformation $\mathcal{D}$-conforme.

Bibliographie

[1] P. Baird, J. Eells, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds, Oxford Sciences Publications, 2003.

[2] H. Bouzir, *Cours de Module : Structures de contact,* manuscript (2019).

[3] A. De, On Kenmotsu manifold, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, **2(3)** (2010), 1–6.

[4] G. Ghosh, U. C. De, Kenmotsu manifolds with generalized Tanaka-Webster connection, *Publications de l'Institut Mathematique-Beograd*, **102** (2017), 221–230.

[5] D.L. Kiran Kumar, H.G. Nagaraja, K. Venu, D-homothetically deformed Kenmotsu metric as a Ricci soliton, *Annales Mathematicae Silesianae*, **33** (2019), 143–152.

[6] A.M. Pastore, V. Saltarelli, Generalized nullity distributions on almost Kenmotsu manifolds, *International Electronic Journal of Geometry*, **4(2)** (2011), 168–183.

[7] M.D. Siddiqi, η-Ricci solitons in 3-dimensional normal almost contact metric manifolds, *Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III : Mathematics, Informatics, Physics*, **11(2)** (2018), 215–234.