République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar.

Faculté des Sciences.

Département de Mathématiques.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : statistique des processus et applications (ASSPA)

par

Houbad **M**ohammed **A**min [1]

Sous la direction de

Dr. N. Ait Ouali

Couverture des options Européennes Par le calcul stochastique

Soutenue le 15/06/2022 devant le jury composé de

Mme.**W.B**enzatout	Université Dr. Moulay Tahar. Saïda	Présidente
Dr. **N**.Ait **O**uali	Université Dr. Moulay Tahar. Saïda	Encadreur
Dr.**F.B**enziadi	Université Dr. Moulay Tahar. Saïda	Examinatrice

Année univ.: 2021/2022

1. e-mail : houbad.amine1996@gmail.com

Dédicace

c'est avec une très grand émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail à :

mes chers parents

pour tous leur sacrifices , leur amour , leur tendresse , leur soutien et leurs prières tout au long des mes études

ma mère :

qui a oeuveré pour ma réussite , son amour , son soutien , tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils , pour toute son assistance et sa présence dans ma vie , reçois à travers ce travail aussi modeste soit il ,l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude .

mon père

qui peut etre fier et trouve ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie . Puisse Dieu faire en sort que ce travail porte son fruit , merci pour les valeurs nobles , l'éducation et le soutien permanent venu de toi

ma famille

tout ma famille (Houbad et Djalouli) pour leur appui , encouragement et leur soutien tout au long de mon parcours universitaire

Que ce travail soit l'accomplissement de vos voeux tant allégués , et le fruit de votre soutien infaillible

mes proches

mes proches , mes amis et tout ceux qui , de prés ou de loin , m'ont apporté leurs assistance pour accomplir ce travail

Merci d'etre toujour là pour moi .

Remerciements

Nous tenons à la fin de ce travail à remercier **ALLAH** maître des cieux et de terre, qui nous a permis de mener à bien ce travail de nous avoir donné la fois et de nous avoir permis d'en arriver là.

Je tiens à remercier mon encadreur **Dr Nadia Ait ouali** pour son aide et ses précieux conseils durant toute la période de la réalisation de ce travail. Je n'oublierai pas, bien évidemment, mes enseignants que je remercie chaleureusement pour tous ces agréables moments passés ensemble et pour l'intérêt qu'ils m'ont dressé tout au long de mon cursus universitaire ainsi que pour leur aide.

Je remercie aussi les autres membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de lire et juger ce travail.

Je suis profondément reconnaissante à **Dr Mlle Fatima Benziadi**, de m'avoir dirigée et conseillée durant mes années d'études.

Enfin, je remercie mon ami **Charaf eddine**, qui a toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leur encouragement a été d'une grande aide.

Merci à toute ma famille je suis honoré de vous voir fièr(e)s de moi.

Table des matières

Introduction générale

Dans le monde d'aujourd'hui, la finance joue une rôle des plus important. Elle est parfois l'origine des crises mondiales. Il apparaît alors important que la finance soit basée sur des modèles solides permettant d'évaluer les risques et les prix. De cette nécessité, le modèle de Black Scholes s'est imposé comme référence depuis 1973, dans le calcul d'option. Malgré ses défauts, ce modèle connaît ce succés car il possède de nombreux avantages : sa simplicité d'application et de formule et son importante utilisation par les opérateurs du marché.

En 1900, Louis Bachelier propose dans sa "théorie de spéculation" l'utilisation, sans le nommer, du mouvement Brownien pour décrire les cours boursiers. 70 ans aprés Black Scholes et Merton introduisent un nouveau modèle de pricing d'option qui vaudra à leur auteur le prix Nobel d'économie en 1997.

L'objectif de ce mémoire est justement de comment valoriser les options européennes et de trouver l'évaluation des produits dérivés. Pour cela, on va introduire le modèle de Black-Merton-Scholes, ainsi que toutes les notions mathématiques et stochastiques nécessaires, pour atteindre ce but.

On partage ce mémoire en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous introduisons les termes financiers et présentons brièvement quelques activités dans un marché boursier.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons quelques notions essentielles concernant les processus stochastiques, la théorie des martingales, le mouvement brownien et le calcul d'Itô par la construction de l'intégrale stochastique. Nous présenterons également les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle stochastique seront aussi présentées.

Le troixième chapitre : a consacré à l'évaluation et la couverture d'une option Européenne. Dans ce chapitre, on donne une brève description du modèle de Black-Merton-Scholes, en expliquant la formule d'évaluation et de couverture des options Européennes.

Finalement, une conclusion et bibliographie présente des compléments au mémoire.

Chapitre 1

Terminologie financière

1.1 Marché financier

1.1.1 Vocabulaire des marchés financiers

Dans la mesure ou certains agents économiques investissent plus qu'ils n'épargnent, et ont donc besoin de recourir à un financement externe, alors que d'autres épargnent plus qu'ils n'investissent, et ont donc une capacité de financement à mettre à la disposition de ceux qui ont besoin, il est nécessaire que s'organisent des transferts des uns vers les autres. Ces transferts s'opérant par l'intermédiaire du système financier en général qui comporte à la fois les institutions financières et le marché financier.

Définition 1.1. Un marché financier est un marché sur lequel des personnes, des sociétés privées, des institutions publiques, peuvent négocier, acheter, vendre des titres financiers ou instruments financiers qui sont des actions, obligations et des produits dérivées (option, contrat à terme), en plus des matières premières et des devises.

1.1.2 Titre financier

Définition 1.2. Un titre financier est un contrat ou les parties s'échangent des flux d'argent.

-La valeur d'un titre financier : d'un titre financier est un montant positif ou négatif, qui représente l'enrichissement ou l'appauvrissement des flux futurs.

-Le prix d'un titre :d'un titre financier est un montant convenu entre les parties en échange du titre. Le plus souvent c'est l'acheteur qui verse ce montant.

1.1.3 Les fonctions des marchés financiers

1-Le marché primaire :

Définition 1.3. Appelé aussi « marché du neuf », c'est le marché où sont émises les valeurs mobilières nouvelles par des sociétés commerciales privées, publiques ou semi-publique pour leur financement à long terme, par l'état lui-même (pour régularisé le déficit budgétaire), par les institutions financières pour leur financement ou encore par les holdings pour lancer leurs prises de participation.

2-Le marché secondaire :

Définition 1.4. Appelé aussi le marché de l'occasion. Une fois les titres émis sur le marché primaire, leurs négociations s'organisent sur le marché secondaire, c'est-à-dire un centre de transactions des valeurs déjà en circulation, entre des épargnants qui souhaitent les vendre et ceux qui souhaitent les acquérir.

1.1.4 Le marché boursier

Représente la famille traditionnelle des marchés financiers permettant l'émission et le transfert de titres traditionnels comme les actions et les obligations. Jusqu'en 1988 c'étaient les officiers ministériels (les agents de change) qui détiennent le monopole des transactions boursières, cependant le crack de 1987 est venu modifier cette organisation et les agents de change se sont transformés en sociétés de bourse.

1.1.5 Rôle des marchés financiers

Les principales caractéristiques d'un marché financier sont :

– La rencontre de deux contreparties (acheteur et vendeur).
– La cotation continue des produits financiers.
– L'élaboration de bonne conditions pour les transactions, en prenant en compte les objectifs opposés des acteurs du marché.

1.1.6 Principaux marchés

Il s'agit, par ordre de volumes négociés décroissants :

- **Marchés de taux d'intérêt**, c'est-à-dire les marchés de la dette, qu'il est d'usage de séparer en :

  Marché monétaire pour les dettes à court terme (moins d'un, deux ou même parfois trois ans à son émission).

  Marché obligataire pour les dettes originellement à moyen ou long terme .
- **Marché des changes**, ou **Forex**, où l'on échange des devises les unes contre les autres .
- **Marché d'actions**, c'est-à-dire des titres de propriété des entreprises .
- Et enfin, par tradition, à la frontière avec les marchés organisés de produits de base (en anglais : **commodities**), les marchés de deux métaux précieux, or et argent, bien que ceux-ci soient de moins en moins monétisés et que leurs marchés soient en fait minuscules en regard de la taille désormais atteinte par les autres marchés.

1.1.7 Produit primaire

Un produit primaire est un titre avec une rémunération indépendante de tout autre titre. Il existe deux types de produits primaires : les actions et les obligations.

Obligation (bond)

L'obligation est un titre financier correspondant à un emprunt pendant un temps fixé dont le risque de défaut **(default risk)** est supposé inexistant lorsque l'obligation est émise par l'état, celle-ci est échangée sur **les marchés obligataires.** Elle est vendue sur le marché primaire à un prix proche du **montant nominal (la somme empruntée)** puis elle est échangée sur le marché secondaire à un prix qui fluctue. Une obligation est déterminée par :

- Une durée
- Un taux d'intérêt.

Remarque 1.1. *Le taux d'intérêt d'une obligation est choisi en fonction du risque de faillite de l'institution. Ce risque est évalué grâce à des notations faites par des institutions indépendantes. Le prix d'une obligation dépend du montant nominal M, de la date* *d'échéance, et des coupons.*

Coupons : ce sont des montants versés par l'emprunteur aux dates fixées à l'avance et qui correspondent à des intérêts sur le nominal.
D'autre terme, le revenu perçu par le détenteur d'une obligation est dit **"intérêt"** et d'une action est **"dividende"**.

Obligation zéro-coupon (zero-coupon bond) : est une obligation qui ne verse pas des coupons donc à l'échéance, seul le nominal est remboursé.

Lorsqu'il y a suffisamment de zéro-coupons, il est possible de construire la courbe des taux de rentabilité annuelle en fonction des échéances, appelée courbe des **taux zéro-coupon** par terme **(zero-rate curve)**.

Lorsque cette courbe est croissante, cela signifie que le marché attend une rentabilité d'autant plus grand que l'échéance est lointaine, c'est à dire le risque de taux est important.

Au contraire, une courbe décroissante signifie que le marché anticipe une baisse des taux .

Une courbe plate n'existe jamais en pratique mais signifierait qu'un taux d'intérêt constant dans le temps.

On va considérer cette dernière comme hypothèse par la suite pour simplifier les modèles.

Action (share) :

Une action est un titre de propriété d'une entreprise qui n'est pas remboursable.

- Le prix d'une action est défini par sa cotation en bourse. Une action peut être vendue ou achetée à n'importe quel moment (pendant les heures d'ouverture de la bourse).
- Le détenteur d'une action devient un associé, proportionnellement au nombre de titres qu'il détient. De plus, l'actionnaire a des droits sur :
  - Le management
  - Les bénéfices
  - L'actif social
- Les émetteurs des actions sont des entreprises. L'émission d'actions permet de recouvrir son investissement initial et ses bénéfices.
- Une action est un produit très volatile, lié à la fois aux performances de l'entreprise

et à la situation du marché. Sa cotation est constamment réévaluée en fonction de l'offre et de la demande sur les marchés financiers.

1.1.8 Produit dérivé

Définition 1.5. Un produit dérivé(derivation) ou actif contingent est un titre dont la valeur dépend d'un autre titre, appelé l'actif sous-jacent. Il existe une multitude de produits dérivés. Les principaux exemples sont : **Les futures, les forwards et les options**.

Contrat a terme (forward) :

Est un contrat qui donne à l'invertisseur l'obligation d'acheter ou de vendre un titre à un prix défini à l'avance pendant une période fixée.

Future (futur)

Ce sont des contrats à terme négociables.

Il y a une petite différence entre les contrats à terme et les futures.

- Le forward est payé à maturité, alors que le futures est marqué au marché.
- Le contrat futur est échangé sur un marché organisé, le contrat à terme est de gré à gré.
- Les prix du futur et celui du foward sont différents lorsque les taux sont stochastiques.

Option

Un tel titre est appelé **option d'achat (call)** ou **option de vente (put)**.

Le sujet porte sur le prix d'une option. Nous nous concentrons maintenant sur ce produit. Ses principales caractéristiques sont :

- **Le strike**, noté K : prix d'exercice de l'option, qui est choisi et fixé à l'instant initial.
- **Le prix de l'option** : prime de risque plus marge de l'intermédiaire.
- **La date d'expiration**, notée T : fin de la période, elle est aussi fixée à l'instant initial
- **La fonction payoff** : fonction qui détermine la transaction finale.
- Des contraires annexes. Par exemple, si le sous-jacent passe un certain niveau, le contrat s'annule (option barrière).

Les options les plus simples, et généralement les plus liquides (les plus vendues), sont les **calls** et les **puts** de type européens ou américains. Ces options sont souvent appelées option vanilles. Les autres options, appelées options exotiques, sont généralement beaucoup plus difficiles à préciser. Les options peuvent être utilisées :

- Soit en couverture de risque de baisse ou hausse
- Soit pour spéculer à la baisse ou à la hausse du sous-jacent
- Soit pour spéculer sur la volatilité.

On distingue deux grands types

Option européenne : Contrat qui donne à son détenteur (celui qui achète le contrat) le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier (sous-jacent) à un prix fixé ou prix d'exercice (strike price) à une date fixée à l'avance (maturité).

Option américaine : Contrat qui donne à son détenteur le droit, non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier à un prix et jusqu'à une date fixé à l'avance.

Ce droit lui même s'achète ou se vend, cela sur un marché d'options (une bourse spécialisée, ou au gré à gré), contre un certain prix, appelé prime en français et premium en englais.

1.1.9 Problèmes d'option

Les produits dérivés ont des prix des risques connus gràce aux mathématiques, lorsque l'option est cotée sur un marché, la prime est donnée par le marché en l'absence de cotation, le problème de calcul de la prime se pose, et même pour une option cotée, il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles anomalies de marché. Examinons, pour fixer les idées, le cas d'un call européen, d'échéance T, sur une action dont le cours à la date t est donné par S_t. Soit K le prix d'exercice. Il est clair que si à l'échéance T, le prix K est supérieur à S_T, le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer. Par contre si $S_T > K$, l'exercice de l'option permet à son détenteur de réaliser un profit égal à $S_T - K$, en achetant l'action au prix K, et en la revendant sur le marché au cours S_T.

On voit qu'à l'échéance, la valeur du call est donnée par la quantité :

$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$$

Pour le vendeur de l'option, il s'agit, en cas d'exercice, d'être en mesure de fournir une action au prix K, et par conséquent de pouvoir produire à l'échéance une richesse égale à $(S_T - K)_+$.

Au moment de la vente de l'option, qu'on prendra pour origine des temps, le cours S_T est inconnu et deux questions se posent :

1. Combien faut il payer à l'acheteur de l'option, autrement dit comment évaluer à l'instant $t = 0$ une richesse $(S_T - K)_+$ disponible à la date T ? c'est le problème du pricing.
2. Comment le vendeur, qui touche la prime à l'instant 0, parviendra t-il à produire la richesse $(S_T - K)_+$ à la date T ? c'est le problème de la couverture.

1.1.10 Théorie de portefeuille

Un portefeuille : est un ensemble de titres (actions, obligations,) détenu par un investisseur.

Les principales problématiques de la gestion d'un portefeuille sont :

– Comment minimiser le risque et maximiser le rendement ?
– Comment calculer le rendement espéré associé à un risque ?
– Quelle est la performances d'un portefeuille ? Pour simplifier l'analyse, nous prenons un marché avec les hypothèses suivantes :
– Le marché est sans arbitrage.
– Les brokers ont un comportement rationnel.
– Il existe une unique loi de probabilité qui explique les comportements futurs des marchés financiers.

On peut considérer que les marchés en dehors de ces hypothèses sont des cas particuliers.

Hypothèse de non arbitrage

L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquéri une richesse certaine dans une date future. Cette hypothèse est appelée **absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A)**, et est justifiée par l'existence d'arbitrages, acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter. Ceux-ci créent alors une force qui tend à faire évoluer le prix de l'actif vers son prix de non-arbitrage.

Il n'existe pas beaucoup d'arbitrage sur les marchés développés. De plus, si un arbitrage apparaît, les traders prennent avantage de celui-ci et donc il disparaît.

Arbitrage et prix unique :

dans le modèle de Black-Scholes dont nous parlerons avec détails au chapitre 3, le prix et la stratégie de couverture sont unique. L'unicité est garantie par l'absence d'arbitrage sur les marchés. Illustrons ce résultat à travers le prix d'un call européen. Dans le modèle de Black-Scholes, une option est sans risque puisque la stratégie de couverture élimine complètement le risque de l'option.

la valorisation d'une option dépend ainsi principalement des éléments suivants :

- **du sous-jacent**, en particulier
- **de son prix.**
- **de la volatilité de ce prix.**
- **de la durée jusqu'à l'échéance**
- **des taux d'intérêt**.

Marché viable : le marché est viable s'il y a une absence d'opportunité d'arbitrage.

Hypothèse de complétude des marchés

Une autre hypothèse, beaucoup plus remise en question, est que tout flux à venir peut être répliqué exactement, et quel que soit l'état du monde, par un portefeuille d'autre actifs bien choisis. Les modèles ne comprenant pas les hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés sont dits modèles de marchés imparfaits.

Probabilité martingale

Une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite **probabilité martingale** ou **" probabilité risque-neutre "** telle que le processus de prix des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).

Valorisation (Evaluation)

La valorisation (pricing) d'un titre financier est l'évaluation de sa valeur, ne pas "mettre en exploitation" ou bien à "augmenter la valeur" comme l'indiquent les dictionnares, mais simplement à évaluer.

La notion d'arbitrage fournit un premier moyen de le faire.

Le problème d'évaluation des produits dérivés :

L'évaluation (on dit aussi " valorisation ") des produits dérivés se ramène souvent au calcul du prix aujourd'hui d'un actif dont on ne connait le prix qu'à une date future. Il se ramène donc au calcul d'une espérance conditionnelle.

Valorisation par absence d'opportunité d'arbitrage

valorisation des options la valorisation des options et moins aisée que celle des contrats à terme dont la valeur pouvait être déterminée à partir d'un raisonnement par arbitrage

Par **A.O.A** la valeur d'une option est toujours supérieure à celle du contrat à terme correspondant puisque c'est le cas à l'échéance.

1.1.11 Stratégie de couverture

– L'achat d'un call (long call) permet de se prémunir contre une hausse éventuelle du sous-adjacent.
– De même, le détenteur du sous-jacent pourra se prémunir contre une baisse de celui-ci en achetant un put (long put). Dans ce cas, cette position de l'agent est une stratégie de couverture du sous-jacent.
– L'achat d'un call ou la vente d'un put (short put) peuvent également être des stratégies de spéculation à la hausse du sous-jacent.
– De même, la vente un call (short call) ou l'achat d'un put sont des stratégies plus complexes, par exemple l'anticipation d'une variation du sous-jacent dans un sens indéterminé (à la hausse ou à la baisse) peut conduire à acheter simultanément un call et un put à la monnaie c'est à dire le prix d'exercice est égale au prix de marché actuel. Donc, la couverture (hodging) est une protection contre le risque généré par

une position

1.2 Les actifs financiers

Définition 1.6. Sur les marchés financiers les intervenants achètent et vendent des biens divers à un prix qui la plus part du temps semble varier de manière assez aléatoire de l'offre et la demande.
On a deux catégories des actifs financiers : actif risqué et actif non risqué.
Actif risqué :

Un actif risqué est un actif qui ne peut garantir, de manière certaine, les flux de rémunération et de remboursement d'un investisseur (particuliers ou institutionnels)
Un actif risqué est donc considéré comme ayant un risque de défaut. Une valeur mobilière de type action ou un produit dérivé (contrats ou options) correspond à un actif risqué.
L'actif risqué a néanmoins comme avantage de proposer des taux de rendement plus élevé.
Actif sans risque :

Actif qui ne comporte pas de risque de non-remboursement et dont la rentabilité est garantie. Les emprunts d'État font figure de référence en matière d'actifs sans risque.

Chapitre 2

Éléments d'analyse stochastique

Dans ce seconde chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales liées aux calcules stochastiques et nous commençons par les définir.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé.

2.1 Tribu

Définition 2.1. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ une famille de parties de Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, si l'on a les trois propriétés suivantes :

- $\phi \in \mathcal{F}$
- si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c \in \mathcal{F}$
- si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{F}$ alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les parties mesurables de Ω et on dit que $(\Omega,\ \mathcal{F})$ est un espace mesurable.

2.2 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant dans le temps.

Définition 2.2. Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires

$$X = \{X_t, 0 \leq t < +\infty\} = (X_t)_{t\geq 0}$$

sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(S, \mathcal{S})$, appelé espace d'états. Dans ce cas, $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

La fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est une trajectoire (ou réalisation) du processus X associée à $\omega \in \Omega$

Remarque 2.1. *: Un processus X est :*

- continu si presque toutes ses trajectoires sont continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^d$.

- continu à droite avec limite à gauche (cadlàg) si presque toutes ses trajectoires sont continues à droite avec limites à gauche en tout point.

Définition 2.3. (processus adapté)

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, X_t est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$.

Définition 2.4. (Processus stationnaire)

Un processus X est dit stationnaire si pour tout $h \geq 0$ le processus $(X_{t+h} - X_t)_{t\geq 0}$ est équivalent à X.

Définition 2.5. (Processus équivalente)

Soient X et Y deux processus. X est une modification de Y si, pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P} - p.s$:

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

On dit que X et Y sont indistinguables si, $\mathbb{P} - p.s$, les trajectoires de X et de Y sont les mêmes. c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \quad \forall t \geq 0) = 1$$

2.3 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé .

2.3.1 Définition espérance conditionnelle sur un évènement

Définition 2.6. Soit A et B deux évènements de $\mathcal{F}$ (i.e A, $B \in \mathcal{F}$). Alors la probabilité conditionnelle de A sachant que B est :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

pour tout B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$

Définition 2.7. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit X une variable aléatoire définie sur cet espace .

Considérons le cas de X à valeurs dans $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Soit B un événement de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ fixé et $\mathrm{Q}(A) = \mathbb{P}(A|B)$ On a alors l'espérance de X par rapport à Q :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathrm{Q}}(X) \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{Q}(X = x_j) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\mathbb{P}(X = x_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{P}(X = x_j \cap B) \end{aligned}$$

On sait que :

$$\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{F}$$

et

$$\mathbb{P}\left\{(X = x_j) \cap B\right\} = \int_{(X=x_j)\cap B} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B 1_{(X=x_j)}(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P} \tag{2.1}$$

tel que

$$1_{(X=x_j)}(\omega) = \begin{cases} 1 & si \quad \omega \in (X = x_j) \\ 0 & si \quad \omega \notin (X = x_j) \end{cases}$$

On sait que on peut écrire :

$$X(\omega) = \sum_{j=1} x_j 1_{X=x_j}(\omega) \tag{2.2}$$

D'après (2.1) et (2.2), on sait que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathrm{Q}}(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{P}(X = x_j \cap B) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{j=1}^{n} x_j \int_B 1_{(X=x_j)} d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B \sum_{j=1}^{n} x_j 1_{(X=x_j)} \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X \, d\mathbb{P} \end{aligned}$$

Implique que :

$$\mathbb{E}_Q(X)\mathbb{P}(B) = \int_B X \mathrm{d}\mathbb{P}$$

Ce qui implique :

$$\int_B \mathbb{E}_Q(X)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X \mathrm{d}\mathbb{P}$$

tel que B un évènement fixé

Donc, on note par :

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}(X|B)$$

2.3.2 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Proposition 2.2. *[12] soit*

1)• Soit a et b deux constantes et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ tel que :

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) \quad = \quad aE(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

2)• Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.

3)• Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \quad = \quad X$.

4)• Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) \quad = \quad Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ et $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] \quad = \quad \mathbb{E}(X)$.

5)• Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \quad = \quad \mathbb{E}(X)$.

6)• Si X une v.a telle que $X \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\forall\ p \geq 1$. Alors

$$\|E(X|\mathcal{G})\|_{\mathbb{L}^{\mathcal{P}}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \leq \|X\|_{\mathbb{L}^{\mathcal{P}}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}.$$

7)• Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) \quad = \quad \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) \quad = \quad \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

8)• Si ϕ est une application convexe et mesurable,Alors

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}] \geq \phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$$

2.4 Martingales

La notion de martingale est très importante en finance.

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$

Définition 2.8. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de cet espace. Une famille adaptée $(M_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires intégrables (c'est -à- dire vérifiant $\mathbb{E}(|M|) < +\infty$ pour tout t) est :

$i)$ une sur-martingale si, pour tout $s \leq t$, $\quad \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s$.

$ii)$une sous-martingale si, pour tout $s \leq t$, $\quad \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$.

$iii)$une martingale si, pour tout $s \leq t$, $\quad \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$.

Proposition 2.3. *[4] Soit X_t, une $\mathcal{A}$-martingale de carré intégrable, c'est à dire que $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ pour tout t. Alors, pour $s < t$, on a :*

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{A}_s) = \mathbb{E}(X_t^2 - X_s^2)|\mathcal{A}_s)$$

Preuve 2.4. *: Par un calcul direct, on a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{A}_s) &= \mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{A}_s) - 2\mathbb{E}(X_t X_s|\mathcal{A}_s) + \mathbb{E}(X_s^2|\mathcal{A}_s) \\ &= \mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{A}_s) - 2\mathbb{E}(X_t X_s|\mathcal{A}_s) + X_s^2 \\ &= \mathbb{E}(X_t^2 - X_s^2|\mathcal{A}_s) \end{aligned}$$

Exemple 2.1. Soit $U \in L^1 et M_t = \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_t], \forall t \in \mathbb{R}^+$, alors $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale.

Théorème 2.5. ***(Théorème d'arrêté)****[4] : Si $(M_t)_{t>0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$, K étant une constante réelle finie, alors M_{τ_1} est intégrable et :*

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1} \qquad \mathbb{P} - p.s..$$

Définition 2.9. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus stochastique réel adapté et continu à droite et si T est un temps d'arrêt, on note$(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}_+}$le processus stochastique réel défini par

$$X_t^T = X_{t\wedge T}$$

Le processus $(X_t^T)_{t\in\mathbb{R}_+}$ s'appelle le processus arrêté à T.

2.4.1 Martingale exponentielle

Proposition 2.6. *Soit $\theta \in \Lambda$ et Z_0 une constante . La solution de $dZ_t = \theta_t Z_t dW_t$ est*

$$Z_t = Z_0 \exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

Si de plus $E\left(\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right] < \infty\right)$ *, le processus* $(Z_t, t \leq T)$ *est une martingale d'espérance* Z_0 *.*

Preuve 2.7. *: Par définition,* Z *est une martingale locale, On vérifie que* $Z_t = Z_0 exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$ *est solution de l'equation proposée en utilisant la formule d'Ito. En notant* $U_t = \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds$ *, on a* $dU_t = \theta_t dW_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 dt$ *, d'ou* $dZ_t = (\exp U_t)(dU_t + \frac{1}{2}\theta_t^2 dt) = \theta_t Z_t dW_t$ *Le processus* Z *, noté* $\exp(\theta W)_t$ *est appelée **l'exponentielle de Doléans-Dade** de* θW *. C'est une martingale locale positive si* $Z_0 > 0$ *. Il est plus délicat de vérifier que c'est une martingale. La condition* $E\left(\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]\right) < \infty$ *est la condition de Novikov. Sous cette condition,* $E(Z_T) = Z_0$ *, et* $(Z_t, t \leq T)$ *est une martingale. Sinon, c'est une martingale locale positive, donc une surmartingale, et* $E(Z_t) \leq Z_0$ *. On ne connait pas de conditions "plus faciles" à vérifier que la condition de Novikov, sauf dans le cas suivant.*

2.5 Inégalité important

2.5.1 Inégalité de Doob

Définition 2.10. Soit (M_t) une martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ p.s. Alors :

a) $\mathbb{P}(\underset{0\leq s\leq t}{sup}|M_s| \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}[|M_t|]}{\lambda}, \quad \forall t > 0, \lambda > 0.$

b) $\mathbb{E}(\underset{0\leq s\leq t}{sup}|M_s|^2) \leq 4\mathbb{E}\left[|M_s|^2\right], \forall t > 0.$

2.6 Convergence des martingales en temps continu

Théorème 2.8. *Une martingale continue à droite* (M_t)*,telle que :*

$$\underset{t\geq 0}{sup}\ \mathbb{E}\left[M_t^2\right] < +\infty$$

converge p.s. et dans L^2 *lorsque* $t \to +\infty$ *.*

Preuve 2.9. *Puisque* M_t^2 *est une sous-martingale,* $\mathbb{E}\left[M_t^2\right]$ *est une fonction croissante. Par hypothèse, elle est bornée. Donc elle converge lorsque* $t \to +\infty$ *. On en déduit que,* *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, si s, $t \geq N$:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] &= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + \mathbb{E}\left[M_s^2\right] - 2\mathbb{E}\left[M_t M_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + \mathbb{E}\left[M_s^2\right] - 2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_t M_s|\mathcal{F}_s\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] + \mathbb{E}\left[M_s^2\right] - 2\mathbb{E}\left[M_s^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2\right] - \mathbb{E}\left[M_s^2\right] < \varepsilon,
\end{aligned}$$

Lorsque $s, t \to +\infty$. La suite M_t est donc de Cauchy dans L^2, elle converge vers une v.a. M_∞. En faisant tendre suivant les entiers on voit, par Fatou, que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_s)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\liminf_{t \to +\infty} (M_t - M_s)^2\right] \\
&\leq \liminf_{t \to +\infty} \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[(M_\infty - M_s)^2\right] < \varepsilon$$

Donc $M_s \to M_\infty$ dans L^2. Si on applique l'inégalité de Doob à la martingale : $N_t = M_{s+t} - M_s$, on obtient, pour $s > N$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T}(M_{t+s} - M_s)^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[(M_{T+s} - M_s)^2\right] \leq 4\varepsilon$$

Pour tout $T \geq 0$, donc :

$$\mathbb{E}\left[sup(M_{t+s} - M_s)^2\right] \leq 4\varepsilon$$

Il en résulte en écrivant que :

$$(M_{t+s} - M_\infty)^2 \leq 2\,(M_{t+s} - M_s)^2 + 2\,(M_s - M_\infty)^2$$

que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}(M_{t+s} - M_\infty)^2\right] \leq 16\varepsilon$$

Il existe donc une sous suite ni telle que, p.s., $\sup_{t\geq 0}(M_{t+n_i} - M_\infty) \to 0$, *ce qui entraîne que* $M_t \to M_\infty$, *p.s.*

2.7 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828. Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence à **Wiener** ou $(W_t, t \geq 0)$ en référence à **Brown**.

Définition 2.11. On dit qu'un processus $(\mathrm{W}_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles est mouvement Brownien issu de x si $\mathrm{W}_0 = x$ et les accroissements de $(\mathrm{W}_t)_{t\geq 0}$ sont gaussiens , centrés , stationnaires , et indépendants : c'est à dire que pour $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$:

- $\mathrm{W}_{t_1} - \mathrm{W}_{t_0}, \mathrm{W}_{t_2} - \mathrm{W}_{t_1}, \ldots, \mathrm{W}_{t_n} - \mathrm{W}_{t_{n-1}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t_i - t_{i-1}))$ avec $1 \leq i \leq n$
- $\mathbb{E}[(\mathrm{W}_{t_i} - \mathrm{W}_{t_{i-1}})(\mathrm{W}_{t_j} - \mathrm{W}_{t_{j-1}})] = 0, \quad \forall i \neq j \quad$ où $\quad 1 \leq i, j \leq n.$

Définition 2.12. (**Mouvement Brownien standard**)
On appelle mouvement Brownien standard un processus stochastique $(\mathrm{W}_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles tel que :

- $\mathrm{W}_0 = 0$ presque sûrement.
- si $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, les accroissements, $(\mathrm{W}_{t_i} - \mathrm{W}_{t_{i-1}}, 1 \leq i \leq n)$ sont indépendants.
- Pour tout $s, t \geq 0$, tel que $s \leq t$, $\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s$ suit une loi gaussienne centrée de variance $t - s$.
- $\mathbb{P}$-p.s $(t) \mapsto \mathrm{W}_t(\omega)$ est continue.

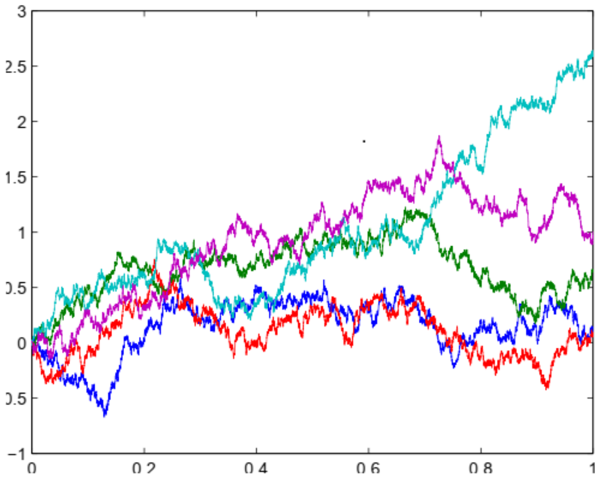

FIGURE 2.1 – Propriétés des trajectoires d'un mouvement brownien

Exemple : Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout $t \geq 0$, nous posons$X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique$X = \{X_t, t \geq 0\}$a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0, X_t$ est de loi $\mathcal{N}(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien ?.Justifiez votre réponse.

Réponse : Non, puisque pour $0 \leq s \leq t < \infty$:

$$\mathbb{V}ar[X_t - X_s] = \mathbb{V}ar\left[\sqrt{t}Z - \sqrt{s}Z\right] = (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2 \mathbb{V}ar\left[Z\right] = t - 2\sqrt{t}\sqrt{s} + s \neq t - s$$

Théorème 2.10. *(* ***Caractérisation du mouvement Brownien*** *)[2]*
Un processus W est un mouvement Brownien si et seulement si c'est un processus gaussiens continu centré de fonction de covariance :

$$\mathrm{C}ov(\mathrm{W}_s, \mathrm{W}_t) = s \wedge t = \min(s,t)$$

Donc $\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s$ *est indépendante de tout vecteur* $(\mathrm{W}_{r_1}, \ldots, \mathrm{W}_{r_n})$ *et donc de* $\mathcal{F}_s^W = \sigma(\mathrm{W}_r, r \leq s)$

Preuve 2.11. *Pour $s \leq t$, $\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s$ est gaussienne et est donc déterminée par son espérance $\mathbb{E}[\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s] = 0$ et sa variance :*

$$\mathbb{V}ar[\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s] = \mathbb{V}ar(\mathrm{W}_t) + \mathbb{V}ar(\mathrm{W}_s) - 2\mathrm{C}ov(\mathrm{W}_t, \mathrm{W}_s) = t + s - 2(s \wedge t) = t - s$$

donc $\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*, et la loi de* $\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s$ *ne dépendant que de* $t - s$*, les accroissements sont stationnaires.*

2.8 Intégrale stochastique

Définition 2.13. On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t \theta(s)dW(s)$ pour des processus stochastiques θ.

2.8.1 Cas de processus étagés

On appelle processus θ étagé (ou élémentaire), s'il existe une suite de réels $t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_i telles que θ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, appartienne à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et que $\theta(t) = \theta_i, \forall t \in]t_i, t_{i+1}]$, le processus de type

$$\theta(s)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$$

On définit alors :

$$\int_0^{+\infty} \theta(s)dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

On vérifie : $\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} \theta(s)dW(s)\right) = 0$ et $Var\left(\int_0^{+\infty} \theta(s)dW(s)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} \theta^2(s)ds\right)$

2.8.2 Cas général

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déjà le cas pour le cas de processus étagé.

On définit les processus càglàd de carré intégrable comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés càglàd, $(\mathcal{F}_t)$-adapté tels que

$$\|\theta\|^2 \stackrel{def}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \theta^2(t)dt\right] < \infty$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que θ_n converge vers θ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$

$$\|\theta - \theta_n\|^2 \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

L'application $\theta \to \|\theta\|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet.

On peut définir $\int_0^\infty \theta(s)dW(s)$ pour tous les processus θ de Γ : On approche θ par des processus étagés.

Soit $\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n$ où $\theta_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \widetilde{\theta}_i^n 1_{]t_i,t_{i+1}]}$, avec $\widetilde{\theta}_i^n \in \mathcal{F}_{t_i}$ la limite étant au sens de $\mathbb{L}^2(\Omega\times\mathbb{R})$

L'intégrale $\int_0^\infty \theta(s)dW(s)$ est alors la limite dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des sommes $\sum_{i=1}^{k(n)} \widetilde{\theta}_i^n(W(t_{i+1}) - W(t_i))$

dont l'espérance est 0 et la variance

$$\mathbb{E}\left[\sum_i \widetilde{\theta}_i^2(t_{i+1}-t_i)\right]$$

On a alors

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta(s)dW(s)\right) = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta(s)dW(s)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta^2(s)ds\right)$$

On note

$$\int_0^t \theta(s)dW(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \theta(s)1_{[0,t]}(s)dW(s)$$

Si θ est étagé

$$\int_0^t \theta(s)dW(s) = \sum_i \theta_i(W(t_{i+1}\wedge t) - W(t_i \wedge t))$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1_{]0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit

$$\int_0^{\tau\wedge t} \theta(s)dW(s) = \int_0^t \theta(s)1_{]0,\tau]}(s)dW(s)$$

2.9 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

Définition 2.14. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration, $(\mathcal{W}_{t\geq 0})$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{W}_s \quad \mathbb{P}\text{-p.s} \quad \forall t \leq T$$

avec :

-X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

-$(K_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(H)_{0\leq t\leq T}$ des processus adaptés à $\mathcal{F}_t$

–$\int_0^T |K_s|\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

–$\int_0^T |H_s|^2\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

Proposition 2.12. *[17] Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t K_s ds \text{ avec } \mathbb{P}p.s \int_0^T |K_s|\, ds < +\infty$$

avec :

$$M_t = 0 \ \mathbb{P}\text{-}p.s \ \forall t \leq T$$

Ceci entraîne que :

La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{W}_s = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' d\mathcal{W}_s$$

alors :

$$X_0 = X_0' \ d\mathbb{P} \ p.s \qquad K_s = K_s' \ ds \times d\mathbb{P} \ p.p \qquad H_s = H_s' \ ds \times d\mathbb{P} \ p.p$$

– Si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{W}_s$$

alors :

$K_t = 0$ $dt \times d\mathbb{P}$ p.p

La formule d'Itó prend la forme suivante :

2.9.1 Formule d'Itô unidimensionnelle

Théorème 2.13. *[17] Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itó :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{W}_s$$

et f une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)d(X_s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\left\langle X,X\right\rangle_s$$

où par définition

$$\left\langle X,X\right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f'(X_s)dX_s = \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \int_0^t f'(X_s)H_s d\mathcal{W}_s$$

De même si $(t,x) \longrightarrow f(t,x)$ est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t,x) (on dit dans ce cas que f est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$) on a :

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f'(s,X_s)ds + \int_0^t f'_x(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}f''_{xx}(s,X_s)d\left\langle X,X\right\rangle_s$$

Proposition 2.14. *[17]**(Formule d'intégration par parties)***
SoientX_t et Y_t deux processus d'Itô, $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s d\mathcal{W}_s$ et $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s d\mathcal{W}_s$, Alors :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \left\langle X,Y\right\rangle_t \text{ avec la convention que :}$$
$$\left\langle X,Y\right\rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds$$

Preuve 2.15. *On a, d'aprés la formule d'Itô*

$$(X_t+Y_t)^2 = (X_0+Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s+Y_s)d(X_s+Y_s) + \int_0^t (H_s+H'_s)^2 ds$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :
$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds$
$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s'^2 ds$

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds$$

2.9.2 Formule d'Itô multidimensionnelle :

La formule d'Itô multidimensionnelle se généralise aux cas oû la fonction f dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements browniens.

Définition 2.15. On appelle $\mathcal{F}$-mouvement Brownien d-dimensionnel un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(\mathcal{W}_t)_{t\geq 0}$ adapté à $\mathcal{F}_t$, avec $\mathcal{W}_t = ((\mathcal{W}_t^1, \dots, \mathcal{W}_t^d))$, où les $(\mathcal{W}_t^i)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$ -mouvements browniens standards indépendants. On généralise la notion de processus d'Itô.

Définition 2.16. On dit que $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus d'Itô si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^i d\mathcal{W}_s^i$$

Où

$-K_t$ et les (H_t^i) sont adaptés à $(\mathcal{F}_t)$.
$-\displaystyle\int_0^T |K_s|\, ds \quad \mathbb{P}$ p.s.
$-\displaystyle\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P}$ p.s.

La formule d'Itô prend alors la forme suivante :

Proposition 2.16. *Soient* $(X_t^1, ..., X_t^n)$ *n processus d'Itô :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,j} d\mathcal{W}_s^i$$

alors si f est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t,x) :

$$f(t, X_t^1, ..., X_t^n) = f(0, X_0^1, ..., X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, ..., X_s^n) ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, ..., X_s^n) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(s, X_s^1, ..., X_s^n) d\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s$$

où

- $dX_s^i = K_s^i ds + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} H_s^{i,j} d\mathcal{W}_s^j$
- $d\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s = \displaystyle\sum_{m=1}^{p} H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds$

2.10 Équation différentielle stochastique

Définition 2.17. Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est , comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficient , l'équation différentielle a une unique solution . Il est utile de préciser les données .

Définition 2.18. Soit b et σ deux fonctions de $\mathrm{IR}^+ \times \mathrm{IR}^{\mathrm{n}}$ à valeurs réelles données . On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien W sur cet espace. Une solution de processus X continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ ont un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

est satisfaite pour tout t , P p.s

2.10.1 Solutions fortes

Définition 2.19. Un processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est appelé une solution forte de l'EDS avec condition initiale X_0 si

- X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in [0, T]$
- on a les conditions de régularité
$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T |b(s, X_s)|\, ds < \infty\right\} = \mathbb{P}\left\{\int_0^T \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty\right\} = 1$$
- pour tout $t \in [0, T]$, on a
$$X_t = X_0 + \int_0^T b(s, X_s)ds + \int_0^T \sigma(s, X_s)dW_s$$

avec probabilité .

2.10.2 Théorème d'existence

Théorème 2.17. *[15] on suppose que*

- *les fonctions b et σ sont continues*
- *il existe K tel que pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathrm{R}$, $y \in \mathrm{R}$*
  - $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y|$
  - $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2)$
- *la condition initiale X_0 est indépendante de $(W_t, t \geq 0)$ et est de carré intégrable alors il existe une unique solution à trajectoires continues pour $t \leq T$ de plus cette solution vérifie*

$$E(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2) < \infty$$

2.11 Changement de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité. Une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à P si :

$$\forall A \in \mathcal{F} : P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0$$

Théorème 2.18. *[15] Q est absolument continue par rapport à P si et seulement si, il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : Q(A) = \int_A Z(\Omega) dP(\Omega)$$

Z est appelée densité de Q par rapport à P notée $\dfrac{d(Q)}{d(P)}$

2.12 Théorème de Girsanov

Théorème 2.19. *[15] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement Brownien standard $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, et soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :*

$$L_t = exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

Soit une $\mathcal{F}_t$ -martingale , Alors il exist une probabilité $\mathbb{P}^{(L)}$ de densité L_t équivalente à P sous laquelle le processus $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$B_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

est un $\mathcal{F}_t$ *-mouvement Browien standard.*

Chapitre 3

Modèle de Black et Scholes

Le premier modèle d'évolution des actif financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle porte le nom de modèle de Black et Scholes. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle log-normal. Ils ont obtenu le prix Nobel d'économie en 1997 pour ces travaux ce qui n'a pas empêché, leur fond d'investissement "Long Term Capital Market" de faire faillite en 1998.

3.1 Hypothèses sur le marché

Nous reprenons ici les hypothèses faîtes au début du cours :

- Les actifs sont divisibles à l'infini .
- Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant .
- On peut emprunter et vendre à découvert.
- Les échanges ont lieu sans coûts de transaction .
- On peut emprunter et prêter au même taux constant r .

3.2 Modélisation probabiliste du marché

Pour modéliser l'incertitude sur le marché, nous considérons un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, muni d'un mouvement brownien standard W. Nous supposons que notre marché est constitué d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$.

• **Actif sans risque.** Dans le modèle discret à n périodes, lorsque l'on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles de longeur T/n , que l'on considère un taux sans risque r_n de la forme rT/n , la valeur de l'actif sans risque à l'instant rT/n a la forme suivante : $(1 + rT/n)^p$. Donc, lorsque n tend vers l'infini, S_t^0 se comporte comme e^{rt} La dynamique retenue pour l'évaluation de l'actif sans risque en temps continu est donc naturellement :

$$dS_0^t = rS_0^t dt \quad et \quad S_0^0 = 1 \Rightarrow \quad S_0^t = e^{rt}, \quad t \in [0, T]$$

• **Actif risqué.** Il suit la dynamique donnée par l'EDS de Black et Scholes

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u(\mu du + \sigma dW_u), \quad t \in [0, T] \tag{3.1}$$

où S_0, μ et σ sont des constantes avec $\sigma > 0$ et $S_0 > 0$. Ce modèle est le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser l'évolution d'un actif risqué en temps continu tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous allons le voir, cela revient à supposer que les rendements de l'actif sont normaux. les coefficients μ et σ sont respectivement appelés tendance et volatilité de l'actif S.

Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à la date t, l'aléa provient seulement de S, donc

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S_r, r \leq t)$$

La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est alors appelée probabilité historique.

Pour s'assurer qu'un tel modèle est bien défini, il nous faut résoudre l'EDS de Black et Scholes.

Théorème 3.1. *L'EDS admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad \mathbb{P}\text{−}p.s.$$

pour tout $t \in [0, T]$

Preuve 3.2. *Vérifions tout d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS en appliquant la formule d'Ito à* $f(t, W_t)$ *avec*

$$f : (t, x) \mapsto S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} df(t, W_t) &= f_x(t, W_t) dW_t + f_t(t, W_t) dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) d\langle W \rangle_t && (3.2) \\ &= \sigma f(t, W_t) dW_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) f(t, W_t) dt + \frac{\sigma^2}{2} f(t, W_t) dt && (3.3) \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit donc :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

Donc S, *processus* $\mathcal{F}$ *-adapté est bien solution de l'EDS (3.1) Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais, dans notre cas, nous pouvons également la démontrer : soit* Y *un processus solution de l'EDS (3.1) Remarquons que* S_t *ne s'annule jamais si bien que l'on peut appliquer la formule d'Ito pour déterminer la dynamique de* $\frac{1}{S_t}$ *:*

$$\begin{aligned} d(\frac{1}{S_t}) &= -\frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{2} \frac{2}{S_t^3} d\langle S \rangle_t && (3.4) \\ &= -\frac{1}{S_t}(\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{S_t} \sigma^2 dt && (3.5) \end{aligned}$$

Donc la formule d'intégration par partie donne la dynamique de $\frac{Y_t}{S_t}$ *:*

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t} dY_t + d\left\langle \frac{1}{S}, Y \right\rangle_t && (3.6) \\ &= \frac{Y_t}{S_t}((\sigma^2 - \mu)dt - \sigma dW_t) + \frac{Y_t}{S_t}(\mu dt + \sigma dW_t) - \sigma Y_t \frac{\sigma}{S_t} dt && (3.7) \\ &= 0 && (3.8) \end{aligned}$$

Remarque que aurait pu obtenir directement le résultat en appliquant la formule d'Ito à la fonction $(y, s) \mapsto y/s$ *On a donc :*

$$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{Y_0}{S_0} + \int_0^t 0 dW_s = 1$$

Donc les processus Y *et* S *sont égaux presque sûrement et l'EDS admet une unique solution.*

3.3 Probabilité risque neutre

3.3.1 Ecart sur les changements de probabilité

On cherche à construire une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ équivalente à $\mathbb{P}$. si $\hat{\mathbb{P}}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors le théorème de Radon Nikodym assure l'existence d'une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable Z_T telle que $d\hat{\mathbb{P}} = Z_T d\mathbb{P}$ i.e

$$\forall A \in \mathcal{F}_T \quad \hat{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}$$

Dire que $\hat{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes revient à dire qu'elles chargent les mêmes ensembles et donc que Z_T ne s'annule jamais, i.e. $Z_T > 0$. Alors, la densité de Radon Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport à $\hat{\mathbb{P}}$ est $1/Z_T$
Pour que $(\Omega, \mathcal{F}_T, \hat{\mathbb{P}})$ soit toujours un espace probabilisé, il faut de plus

$$\hat{\mathbb{P}}(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T] = 1$$

La formule de Bayes nous assure que pour toute v.a. X_T , $\mathcal{F}_T$ -mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T]$$

On associe naturellement à la v.a. Z_T , le processus martingale $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$Z_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T | \mathcal{F}_t]$$

Alors, pour tout t et toute variable aléatoire X_t,$\mathcal{F}_t$ -mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_t | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t X_t]$$

En fait, Z_t est la densité de Radon Nikodym de $\hat{\mathbb{P}}$ restreint à $\mathcal{F}_t$ par rapport à $\mathbb{P}$ restreint à $\mathcal{F}_t$. On note :

$$Z_t = \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}$$

Si l'on considère un processus X , $\mathcal{F}$ -adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_T}{Z_t} X_t | \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{Z_t}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T | \mathcal{F}_t]$$

En effet, pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_t$ -mesurable bornée Y_t , on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T Y_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T Y_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T | \mathcal{F}_t] Y_t] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T | \mathcal{F}_t] Y_t\right]$$

Définition 3.1. Dans le modèle de Black-Scholes, $\lambda = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ est appelé la prime de risque.

Intrduisons le processus $\widehat{W}_t$ défini pour $t \in [0, T]$

$$\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$$

Avec ce nouveau processus, la dynamique de $\widetilde{S}$ est donnée par :

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

Donc si nous arrivons à construire une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement brownien, cette probabilité rend l'actif risqué actualisé martingale et peut être la probabilité risque neutre qu'on cherche. L'existence de cette probabilité est démontrée par le théorème de Girsanov :

Théorème 3.3. *[5] Il existe une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par :*

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = Z_T = e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2}}T$$

sous laquelle le processus $\widehat{W}_t$ défini par $\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

3.4 Portefeuilles autofinançants

Une stratégie de portefeuille consiste en l'investissement à tout instant $t \in [0, T]$ dans une quantité dénotée φ_t d'actif risqué S et d'une quantité φ_t^0 d'actif sans risque S^0 . La **valeur du portefeuille** est donc donnée par

$$X_t^{x,\varphi} \quad = \quad \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t, \quad t \in [0, T]$$

Une stratégie **autofinancée** est une stratégie pour laquelle les variations de valeur du portefeuille viennent uniquement des gains dus à l'agitation des cours. La condition d'autofinancement est sous la forme suivante :

$$dX_t^{x,\varphi} = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$$

Définition 3.2. Une **stratégie de portefeuille simple autofinancement** $X^{x,\varphi}$ est la donnée d'un capital de départ x et d'une stratégie continue d'investissement dans l'actif risqué, soit un $\mathcal{F}$ -adapté $(\varphi_t)_{0\leq t\leq T}$ qui doit vérifier certaines conditions d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T \left|\varphi_s \tilde{S}_t\right|^2 dt\right] < \infty$$

A chaque instant t, la quantité φ_t^0 est déterminée à l'aide de la condition d'autofinancement du portefeuille.

Proposition 3.4. *Pour tout processus d'Ito Y , $\mathcal{F}$ -adapté (appelé numéraire) "qui ne s'annule pas", la condition d'autofinancement se réécrit :*

$$d\left(\frac{X^{x,\varphi}}{Y}\right)_t = \varphi_t^0 d\left(\frac{S^0}{Y}\right)_t + \varphi_t d\left(\frac{S}{Y}\right)_t$$

Preuve 3.5. *Appliquons la formule d'intégration par partie aux processus $X^{x,\varphi}$ et $U = \dfrac{1}{Y}$*

$$\begin{aligned}
d(UX^{x,\varphi})_t &= U_t dX_t^{x,\varphi} + X^{x,\varphi} dU_t + d\left\langle X^{x,\varphi}, U\right\rangle_t \\
&= U_t(\varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t) + (\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t)dU_t + d\left\langle \varphi^0 S^0 + \varphi S, U\right\rangle_t \\
&= \varphi_t^0(U_t dS_t^0 + S_t^0 dU_t + d\left\langle S^0, U\right\rangle_t) + \varphi_t(U dS_t + S_t dU_t + d\left\langle S, U\right\rangle_t) \\
&= \varphi_t^0 d(US^0)_t + \varphi_t d(US)_t
\end{aligned}$$

La difficulté vient du passage de la deuxième à la troisième ligne, qui nécessite la relation :

$$d\left\langle \varphi^0 S^0 + \varphi S, U\right\rangle_t = \varphi_t^0 d\left\langle S^0, U\right\rangle_t + \varphi_t d\left\langle S, U\right\rangle_t$$

Cette relation vient du fait que la covariance entre 2 processus d'Ito fait uniquement intervenir linéairement leurs parties Browniennes. Or grâce à la condition autofinancement, on a :

$$d(\varphi^0 S^0 + \varphi S)_t \quad = \quad \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$$

Donc la partie Brownienne de $\varphi^0 S^0 + \varphi S$ est la somme de celles de S^0 (qui est nulle) et de S ce qui donne le résultat.

En particulier la relation d'autofinancement écrite dans le numéraire cash S^0 donne :

$$d\widetilde{X}_t^{x\varphi} = \varphi_t d\widetilde{S}_t \quad \Rightarrow \quad d\widetilde{X}_t^{x\varphi} = x + \int_0^t \varphi_r d\widetilde{S}_r$$

et donc la dynamique de la valeur actualisée du portefeuille $d\widetilde{X}_t^{x\varphi}$ sous la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ est

$$d\widetilde{X}_t^{x\varphi} = \quad \varphi_t d\widetilde{S}_t \quad = \sigma\varphi_t\widetilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

ce qui justifie la forme que l'on a donné a notre condition d'intégrabilité pour rendre $\widetilde{X}$ martingale .

Proposition 3.6. *La probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ construite précédemment est une probabilité risque neutre. La valeur en t de toute stratégie autofinancement (x, φ) de flux final $X_T^{x,\varphi} = h_T$. $\widehat{\mathbb{P}}$ -intégrable est*

$$X_t^{x,\varphi} = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h_T|\mathcal{F}_t]$$

Preuve 3.7. *Les dynamiques de $\widetilde{S}$ et de $\widetilde{X}^{x,\varphi}$ sous $\widehat{\mathbb{P}}$ sont données par*

$$d\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t d\hat{W}_t \quad \Rightarrow \quad d\widetilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\widetilde{S}_t = \sigma\varphi_t\widetilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

Donc grâce aux conditions d'intégrabilité de φ , $\widetilde{X}^{x,\varphi}$ est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$ et donc :

$$X_t^{x,\varphi} = e^{rt}\widetilde{X}_t^{x,\varphi} = e^{rt}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[\widetilde{X}_T^{x,\varphi}|\mathcal{F}_t] = e^{rt}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}X_T^{x,\varphi}|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h_T|\mathcal{F}_t]$$

Proposition 3.8. *L'existence d'une probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ implique l'AOA entre stratégies de portefeuille simple*

Preuve 3.9. *si $X_t^{0,\varphi} \geq 0$, comme $\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[\widetilde{X}_T^{0,\varphi}] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[\widetilde{X}_0^{0,\varphi}] \Rightarrow X_T^{0,\varphi}$, sauf sur un ensemble de mesure nulle pour $\hat{\mathbb{P}}$ qui est également un ensemble de mesure nulle pour $\mathbb{P}$*
Ce qui assure que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage entre portefeuilles simples est bien vérifiée dans le cadre du modèle de Black-Scholes.
La valeur en t de toute stratégie de portefeuille simple s'écrit comme l'espérance sous la proba risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé, donc, si un produit dérivé est duplicable, pour éviter les arbitrages, on définit économiquement son prix comme l'espérance sous $\hat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé.
Il est important de bien visualiser la dynamique de l'actif sans risque actualisé ou non sous les différentes probabilités :

	Probabilité historique	*Probabilité risque neutre*
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}_t$
Actif risqué actualisé	$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$d\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t d\widehat{W}_t$

3.5 Duplication d'un produit dérivé

Proposition 3.10. *Considérons un produit dérivé de la forme $h(S_T)$ avec h fonction mesurable telle que $h(S_T)$ est $\widehat{\mathbb{P}}$ -intégrable. Alors il existe une fonction $v : [0,T]\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$v(t,S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_T\right)|\mathcal{F}_t\right]$$

pour tout $t \in [0,T]$

Preuve 3.11. *Dans le modèle de Black Scholes, la valeur du sous-jacent en t est :*

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\widehat{W}_t}$$

On en déduit que :

$$S_T = S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)}$$

L'espérance conditionnelle se réécrit donc

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_T\right)|\mathcal{F}_t\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)}\right)|\mathcal{F}_t\right]$$

Or la variable aléatoire S_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable et la variable aléatoire $W_T - W_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$. On en déduit grâce aux propriétés des espérances conditionnelles que :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_T\right)|\mathcal{F}_t\right] = v(t,S_t)$$

avec la fonction v définie par :

$$v : (t,x) \mapsto e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(x e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)}\right)\right]$$

Proposition 3.12. *[11] Si l'on suppose que $v \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$, alors il existe une stratégie autofinancante (x,φ) qui duplique le produit dérivé, i.e. telle que $X_t^{x,\varphi} = v(t,S_t)$ pour tout $t \in [0,T]$, et les quantités x et φ sont données par :*

$$x = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_T\right)\right] \quad \varphi_t = \frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t) \quad t \in [0,T]$$

En AOA, le prix en t du produit de flux final $h(S_T)$ est donc $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_T\right)|\mathcal{F}_t\right]$ De plus le prix de l'option $v(t,S_t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2v_{xx}(t,x)+rxv_x(t,x)+v_t(t,x)-rv(t,x)=0 \quad et \quad v(T,x)=h(x) \tag{3.9}$$

Pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+^*$

***Réciproquement**,*

si l'EDP précédente admet une solution v^* (dont la dérivée partielle $\partial_x v^*(t,x)$ est bornée), alors $v^*(t,x)$ est le prix de l'option de flux terminal $h(S_T)$

Preuve 3.13.

***Duplication du produit dérivé** :*

Supposons que $v\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$, et construisons le portefeuille de couverture. Considérons le processus défini sur $[0,T]$ par :

$$U_t=e^{-rt}v(t,S_t)=\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Par construction, ce processus est une martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}$, en effet

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[U_t|\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_s]=U_s$$

Pour tout $s\leq t$. Remarquons que l'on peut écrire

$$U_t=u(t,\widetilde{S}_t) \quad avec \quad u:(t,x)\mapsto e^{-rt}v(t,e^{rt}x)$$

Alors $u\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$ et la formule d'Ito nous donne

$$\begin{aligned} dU_t &= u_x(t,\widetilde{S}_t)d\widetilde{S}_t+u_t(t,\widetilde{S}_t)dt+\frac{1}{2}u_{xx}(t,\widetilde{S}_t)d\left\langle\widetilde{S}\right\rangle_t && (3.10)\\ &= \sigma\widetilde{S}_tu_x(t,\widetilde{S}_t)d\widehat{W}_t+\left(u_t(t,\widetilde{S}_t)+\frac{\sigma^2}{2}\widetilde{S}_t^2u_{xx}(t,\widetilde{S}_t)\right)dt && (3.11)\end{aligned}$$

Le processus U est un processus d'Ito martingale donc sa partie en dt est nulle et l'on obtient finalement :

$$U_t=U_0+\int_0^t u_x(r,\widetilde{S}_r)d\widetilde{S}_r, \quad t\in[0,T]$$

Considérons maintenant la stratégie de portefeuille donnée par :

$$x=U_0=e^{-rT}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)] \quad et \quad \varphi_t=u_x(t,\widetilde{S}_t)=v_x(t,S_t), \quad t\in[0,T]$$

Par construction, U est une vraie martingale donc (x, ϕ) est une stratégie de portefeuille et grâce à la condition d'autofinancement, la valeur actualisée de ce portefeuille est donnée par

$$\widetilde{X}_t^{x,\varphi} = x + \int_0^t \varphi_r d\widetilde{S}_r = U_0 + \int_0^t U_x(r, \widetilde{S}_r) d\widetilde{S}_r = U_t$$

Pour tout $t \in [0, T]$. Le portefeuille $X^{x,\varphi}$, qui vérifie de bonnes conditions d'intégrabilité car U est une martingale, est donc bien un portefeuille de duplication car il vérifie :

$$X_T^{x,\varphi} = e^{rT} U_T = v(T, S_T) = e^{-r(T-T)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_T] = h(S_T)$$

3.6 EDP d'évaluation

Le processus U est une martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}$ donc la partie en dt de sa décomposition en processus d'Ito est nulle ce qui s'écri :

$$u_t(t, \widetilde{S}_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \widetilde{S}_t) = 0$$

Or par définition de u , on a les relations suivantes :

$$u_t(t, x) = -re^{-rt} v(t, e^{rt}x) + e^{-rt} v_t(t, e^{rt}x) + rxv_x(t, e^{rt}x)$$

et

$$u_{xx}(t, x) = (e^{rt})^2 v_{xx}(t, e^{rt}x)$$

Donc l'EDP en u se réécrit comme une EDP en v de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) + rS_t v_x(t, S_t) + v_t(t, S_t) - rv(t, S_t) = 0$$

avec la condition terminale $v(T, S_t) = h(S_T)$. L'idée pour obtenir l'EDP en tout x est que le mouvement brownien W_t diffuse sur tout $\mathbb{R}$, donc S_t diffuse sur tout $\mathbb{R}_*^+$.(car $\sigma > 0$) et par conséquent v est solution sur $\mathbb{R}^+$ de :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x) + rxv_x(t, x) + v_t(t, x) - rv(t, x) = 0 \quad et \quad v(T, x) = h(x)$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Réciproque :

Si v^* est solution de l'EDP précédente. Introduisons le processus $U_t^* = e^{-rt} v^*(t, S_t)$ et u^* la fonction associée. Alors la dynamique de U^* est donnée par

$$dU_t^* = \sigma \widetilde{S}_t u_x^*(t, \widetilde{S}_t) d\widehat{W}_t + \left(u_t^*(t, \widetilde{S}_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{S}_t^2 u_{xx}^*(t, \widetilde{S}_t) \right) dt$$

Comme v^* est solution de l'EDP, le terme en dt est nul et l'on obtient que :

$$U_t^* = U_0 + \int_0^t u_x^*(r, \widetilde{S}_r) d\widetilde{S}_r$$

Donc, la dérivé v_x^* bornée assurant les conditions d'intégrabilité suffisantes car l'actif riqué actualisé a des moments à tout ordre , U^* est une martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}$. On en déduit que, pour tout $t \in [0, T]$

$$v^*(t, S_t) = e^{rt} U_t^* = e^{rt} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[U_T^* | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Donc $v^*(t, S_t)$ est bien le prix en t du produit dérivé $h(S_T)$.

Remarque 3.14. *Le résultat indiquant que le prix Black Scholes de payoff $h(S_T)$, donné par*

$$v(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)/S_t = x], \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$$

est solution de (3.9) est une résultat très important connu sous le nom plus général de formule de Feynman-Kac. Une espérance conditionnelle sur un processus Markovien peut se réécrire comme solution d'une EDP, créant ainsi des liens entre le monde déterministe et le monde probabiliste.

Remarque 3.15. *Tout produit dérivé de carré intégrable est duplicable, donc le marché est complet*

Proposition 3.16. *La probabilité risque neutre est unique.*

Preuve 3.17. *Par définition, la probabilité risque neutre rend tout portefeuille autofinançant actualisé martingale. Supposons que l'on ait deux probabilités risques neutres $\widehat{\mathbb{P}}_1$ et $\widehat{\mathbb{P}}_2$ Pour tout $\mathcal{B}$ élément de $\mathcal{F}_T$, $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ est une v.a. $\mathcal{F}_T$ mesurable et de carré intégrable donc elle est duplicable par une stratégie de portefeuille (x, φ) qui est martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}_1$ et $\widehat{\mathbb{P}}_2$ et l'on a :*

$$\widehat{\mathbb{P}}_1(\mathcal{B}) = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}_1}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] = e^{rT} x = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}_2}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] = \widehat{\mathbb{P}}_2(\mathcal{B})$$

3.7 Formule de Black Scholes

Le prix en t d'une option Européenne de payoff $h(S_T)$ est de la forme $v(t, S_t)$ avec :

$$v(t, S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

et de plus la fonction v est solution de l'EDP :
$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T,x) = h(x)$
Dans le cadre du modèle de Black Scholes, pour certains payoff, il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t. C'est en particulier le cas du Call et du Put.

Proposition 3.18. *[22] Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix d'un call de maturité T et de strike K est :*

$$C_t = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2), \quad t \in [0, T]$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, d_1 et d_2 donnés par :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T} - t} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formule de Parité Call Put s'écrit :

$$C_t - P_t \quad = \quad S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in [0, T]$$

Et donc le prix du Put est donné par :

$$P_t \quad = \quad Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1), \quad t \in [0, T] \tag{3.12}$$

Preuve 3.19. ***Prix du Call*** *: Le prix du call en t est donné par :*

$$C_t = e^{-t(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t] = e^{-t(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t)} - K)^+|\mathcal{F}_t\right]$$

Donc, comme nous l'avons déjà vu $C_t = v(t, S_t)$ avec

$$v(t,x) \quad = \quad e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{P}}\left[(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_T)}) - K)^+\right] \tag{3.13}$$

$$\quad = \quad x\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[e^{\sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\right] - Ke^{-r(T-t)}\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{E}) \tag{3.14}$$

avec $\mathcal{E}$ le région d'exercice donnée par :

$$\mathcal{E} = \left\{xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t)} > K\right\} = \left\{\frac{\widehat{W}_T - \widehat{W}_t}{\sqrt{T-t}} < \frac{(\ln\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}$$

Introduisons, la probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ définie par :

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\widehat{\mathbb{P}}}|_{\mathcal{F}_T} \quad = \quad Z_T \quad = \quad e^{\sigma \widehat{W}_T} - \frac{\sigma^2}{2}T$$

Alors, comme $\mathcal{E}$ est un évènement indépendant de $\mathcal{F}_t$ on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\frac{Z_T}{Z_t}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\frac{1}{Z_t}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}]\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{Z_t}\right] = \mathbb{P}^*(\mathcal{E})$$

Par conséquent, $v(t,x)$ se réécrit :

$$v(t,x) = x\mathbb{P}^*(\mathcal{E}) - Ke^{-r(T-t)}\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$$

D'après le théorème de Girsanov, le processus W^* défini par $W_t^* = \widehat{W}_t - \sigma t$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^*$. Or $\mathcal{E}$ se réécrit :

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{\widehat{W}_t - \widehat{W}_T}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} = \left\{ \frac{W_t^* - W_T^*}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}$$

Donc, comme $\dfrac{\widehat{W}_t - \widehat{W}_T}{\sqrt{T-t}}$ et $\dfrac{W_t^* - W_T^*}{\sqrt{T-t}}$ suivent respectivement une loi $\mathcal{N}(0,1)$ sous $\hat{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}^*$ le prix du call se réécrit :

$$C_t = v(t, S_t) = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

Prix du Put : *Appliquez la formule de parité Call Put et remarquez que par symétrie $\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 1$*

Remarque 3.20. *Le prix d'un call en t est de la forme $C(T-t, \sigma, S_t, r, K)$. et vérifie la relation d'homogénéité :*

$$C(T-t, \lambda\sigma, S_t, r, \lambda K) = \lambda C(T-t, \sigma, S_t, r, K)$$

Le code suivant permet de calculer la valeur théorique du prix de l'option donnée par l'équation (3.12).

```
Programme Prix Simulé et prix théorique
clear all;
n=7000;
r=0.03;
sigma=0.2;
Szero=100;
K=Szero*1;
T=1;
d1=(log(Szero/K)+(r+(sigma^2)/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
PrixTheorique=Szero*normcdf(d1,0,1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2,0,1);
Z=normrnd(0,1,1,n);
ST=Szero*exp((r-(sigma^2)/2)*T+sigma*sqrt(T)*Z);
payoffact=exp(-r*T)*max(ST-K*ones(1,n),zeros(1,n));
prixsimule=mean(payoffact');
plot(ST,payoffact);
```

Le prix théorique donnée par la formule de Black Scholes est 9.41 euros pour une unité d'actif risqué.

Conclusion

Ce modeste travail nous a permis d'avoir une vision global du calcul stochastique et de son application, en particulier, la formule d'Itô, et conduit à des expressions calculables.

De nombreuses extensions des méthodes de Black et Scholes ont été développées ces dernières années. Nous nous efforcerons, à partir d'une étude approfondie du modèle de Black-Scholes sous sa forme la plus simple, de donner des formules explicites pour résoudre le problème de l'évaluation et de la couverture de l'option Européenne.

L'étude et la compréhension de l'évaluation des prix des options constituent un enjeu toujours plus important sur les marchés financiers. De nos jours, les mathématiciens cherchent à développer de nouveaux modèles plus précis pour représenter les dynamiques aléatoires telles que les évaluations boursières. La formule de Black-Sholes a permis de répondre à la question de l'évaluation du prix d'une option européenne.

Bibliographie

[1] Abi Ayad Ilham. Mémoire pour l'obtention du diplôme de Mas- ter.Option :Probabiliste et statistiques.Théme : Introduction aux équa- tion differentielles stochastiques.

[2] A. Belqadhi, Etude du calcul stochastique : martingale, mouvement Brownien et intégration d'Itô, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 14 janvier 2008

[3] Arthur Charpentier , "Méthodes numériques en finance" , ENSAE-ENSAI-CREST Katholieke Universiteit Leuven , 2006/2007.

[4] B. Lapeyre D. Lamberton et. INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE APPLIQUÊ Â LA FINANCE Université Paris-Est, Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France, Université Paris-Est,Professeur à l'Êcole des Ponts Paris-Tech,France. 2012 Pages 53-54.

[5] F. Black, M. Scholes : The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81, No.3, 637-645, 1973.

[6] J. Christophe Breton. Processus stochastiques, M2 Mathématiques. Université de Rennes 1 Septembre-Octobre 2018.

[7] J. Christophe Mourrat. Processus stochastiques, 17 décembre 2014.

[8] J. Claude lafeut. Processus et intégrales stochastiques, Elipses Édition marketing S.A., 2014, 32, rue Bargue 75740 parise cedex 15

[9] Joël Priolon, "les marchés financiers", Novembre 2010.

[10] J. Yves Dauxois. Cours de probabilités, Septembre 2013.

[11] J-P. Laurent, Modèles de Prix de Produits Financiers, 14 octobre 1996.

[12] H. Guiol. Calcul stochastique avancé. TIMB-TIMC-IMAG 2006.

[13] H. PHAM, Introduction aux mathématique et modèle stochastique des marchés ?-nanciers, 2006-2007.

[14] Imen Ben Tahar et Gabriel Turinici , "Mouvement Brownien et évaluation d'actifs contingents" , Université Paris Dauphine, M1 MMD , Janvier 2013.

[15] M.Jeanblanc. Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes (2006).

[16] M. Bossy INRIA. Introduction à la modélisation financière en temps continue et calcul stochastique. 16 Novembre 2013.

[17] M. Jeanblanc, Thomas Simon, Elements de calcul stochastique, Septembre 2005.

[18] N. Rousseau, Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, Laboratoire Dieudonné, Université de Nice-Sophia Antipolis, January 29, 2007.

[19] O. Lévêque. Cours De Probabilités et calcul stochastiques. Semestre d'hiver 2004-2005.

[20] P. Tankov, R. Cont, Financial Modelling with Jump Processes, Chapman-Hall CRC press, 2004.

[21] Peter Tankov , "Mathématiques financière" , Master 2 ISIFAR Edition 2013-2014.

[22] R. Kangro, R. Nicolaides : Far Field Boundary Conditions For Black- Sholes Equations, Siam J. Numer. Anal., vol. 38, No.4, 1357-1368.

[23] S. Ikonen, J. Toivanen : Pricing American Options using LU decompo- sition, Applied Mathematical Sciences, vol.1, No.51, 2529-2551, 2007.