

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université de Saida - Dr Moulay Tahar.  
Faculté des Sciences.  
Département de Mathématiques.



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHÉMATIQUES

Spécialité : ASSPA

par

**Mentefa Abdelmadjid**<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Dr.L.Yahiaoui**

**Thème :**

**Système de file d'attente Markovien avec  
vacances multiples et service par groupe**

Soutenue le 15/06/2022 devant le jury composé de

<b>Dr. Mlle F.Benziadi</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
<b>Dr. L.Yahiaoui</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
<b>Dr. M.Kadi</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examineur

Année univ: 2021/2022

---

1. e-mail : mentefaabdelmadjid@gmail.com

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Structure de la file d'attente</b>	<b>3</b>
1.1	Processus stochastique . . . . .	3
1.1.1	Processus de comptage . . . . .	3
1.1.2	Processus de renouvellement . . . . .	4
1.1.3	Processus à accroissements indépendants . . . . .	5
1.1.4	Processus de Poisson . . . . .	5
1.1.5	Loi exponentielle . . . . .	6
1.1.6	Processus de Markov . . . . .	7
1.1.7	Processus de naissance et de mort . . . . .	11
1.2	La file d'attente simple . . . . .	14
1.2.1	Notations et Symboles . . . . .	14
1.2.2	Structure et discipline de la file . . . . .	16
1.2.3	Discipline de service . . . . .	16
1.2.4	Notation de Kendall . . . . .	17
1.2.5	Loi de Little . . . . .	17
1.3	Analyse mathématique dans un système des files d'attentes . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Systèmes des files d'attentes Markoviennes</b>	<b>20</b>
2.1	Modèles des files d'attentes Markoviennes . . . . .	20
2.1.1	File d'attente M/M/1 . . . . .	20
2.1.2	File d'attente M/M/c . . . . .	25
2.1.3	File d'attente M/M/c/k . . . . .	27
2.1.4	File d'attente $M/M/\infty$ . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Système de files d'attente Markovien avec vacances multiples et service par groupe</b>	<b>32</b>
3.1	Système de files d'attente avec vacances . . . . .	33

---

3.2	Description du modèle . . . . .	34
3.3	Modèle 01 . . . . .	34
3.3.1	Probabilités de régime transitoire . . . . .	34
3.3.2	Probabilités de régime stationnaire . . . . .	35
3.3.3	Cas particulier . . . . .	38
3.3.4	Condition de stabilité . . . . .	38
3.3.5	Mesures de performances du Système . . . . .	38
3.4	Études numériques . . . . .	39
3.5	Modèle 02 . . . . .	42
3.5.1	Probabilités de régime transitoire . . . . .	42
3.5.2	Probabilités de régime stationnaire . . . . .	43
3.5.3	Condition de stabilité . . . . .	45
3.5.4	Mesures de performances du système . . . . .	45
3.5.5	Etude numérique . . . . .	46

# Table des figures

1.1	Diagramme schématique représentant processus de comptage ( $N(t)$ en fonction de $t$ .) . . . . .	4
1.2	Diagramme schématique représentant processus de renouvellement . . . . .	5
1.3	Graphe de transition d'un processus de naissance et mort . . . . .	12
1.4	Une file d'attente simple . . . . .	14
1.5	File d'attente avec plusieurs serveurs . . . . .	16
2.1	File d'attente M/M/1 . . . . .	21
2.2	File d'attente M/M/1(FIFO,PS) . . . . .	21
2.3	File d'attente M/M/1 . . . . .	23
2.4	File d'attente M/M/c . . . . .	25
2.5	File de transition d'état M/M/c . . . . .	26
2.6	File de transition d'état M/M/c/k . . . . .	28
2.7	File d'attente M/M/1/k . . . . .	29
3.1	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ", " $k = 2$ " . . . . .	40
3.2	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ", " $k = 4$ " . . . . .	40
3.3	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ", " $k = 10$ " . . . . .	41
3.4	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ", " $k = 2$ " . . . . .	41
3.5	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ", " $k = 10$ " . . . . .	42
3.6	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ", " $k = 2$ " . . . . .	46
3.7	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ", " $k = 4$ " . . . . .	47
3.8	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ", " $k = 10$ " . . . . .	47
3.9	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ", " $k = 2$ " . . . . .	48
3.10	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ", " $k = 4$ " . . . . .	48
3.11	Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ", " $k = 10$ " . . . . .	49

## ✧ *Remerciements* ✧

Nous remercions Dieu (sans Lui rien n'aurait pu être possible) tout puissant de nous avoir accordé santé, courage et la volonté pour accomplir ce modeste travail.

Nous tenons également à remercier encadreur de mémoire et mon professeur Monsieur :**LAHCENE Yahiaoui** de m'avoir encadré orienté aidé et conseillé pour ses précieux conseils, sa disponibilité et ses encouragements qui nous ont poussés à donner le meilleur de nous-même tout au long de la préparation de ce mémoire.

Nous voudrions également remercier la présidente **Dr.Mlle.F.Benziadi** et **D.r M.Kadi** pour m'avoir donné l'honneur d'accepter de devenir examinateurs de mon mémoire. Et de prendre le temps de lire et de corriger ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à tous Les membres du laboratoire des Modèles Stochastiques, Statistique et Applications et à la tête le directeur

**Pr.A. Kandouci.**

Nos remerciements les plus vifs vont tout particulièrement à nos parents et à nos familles. Et pour finir, merci à toutes les personnes que j'ai oubliées de citer et qui m'ont permis de mener à bien ce mémoire.

※ *Dédicaces* ※

Je dédie ce modeste travail :

A mon source de courage, mes très chers parents,

A toutes ma famille : A ma sœur, A mes frère **Zaki, Sid Ahmed, Sadik**

A tous mes professeurs,

A tous mes ami(e)s, et particulièrement :  
"Khelifa Berkan", "Alaa".

*M. Mentefa Abdelmadjid*

# Introduction

L'APPLICATION de la théorie des probabilités est la modélisation stochastique à la description et à l'analyse des phénomènes en réalité. Celles-ci sont souvent si complexes que les lois déterministes non formulé qui conduisent à une utilisation de la notion stochastique. Les applications dans les télécommunications ou les assurances fournis des méthodes et des résultats pour la modélisation stochastique aux sciences appliquées telles que l'ingénierie et l'économie. La modélisation stochastique est la science de l'interaction entre la théorie et l'application pratique. L'un des domaines dans la modélisation stochastique est la théorie des files d'attente. Dans le contexte historiques, les phénomènes à l'origine des travaux de **Agner Krarup Erlang** (1878-1929)[14] aux années (1900-1920) ; concernant le réseau téléphonique de Copenhague (côté pratique), le côté théorique se développer notamment grâce aux contributions de **Palm, Kolmogorov, khintchin**, et autres. Nombreux champs d'applications de cette théorie comme les télécommunications, gestion des stocks, . . . etc. La théorie des files d'attente pour un objet à mobiliser et analyser des situations de schéma descriptif général suivant :

- les clients arrivent à des intervalles aléatoires dans un système contient un ou plusieurs serveurs.
  - les durées des services est aléatoire. Après avoir été servi, le client quitte le système.
- Les travaux sur les files d'attente de service par groupe réalisés par quelques chercheurs :

**Bailey** [3] était la première étude sur les files d'attente de service par groupe, et même **Miller**[12], **Jaiswal**[11], examine une file d'attente de service par groupe lorsque la taille du service est aléatoire. **Neuts**[16] ont proposé la "**régle générale du service par groupe**" dans quel service ne démarre que lorsqu'un certain nombre de clients dans la file d'attente est disponible, la règle de service a été étendue par **Borthakur** et **Medhi**[4]. **Dhas**, considéré comme un systèmes markovien de service par groupe et obtenu les distributions de longueur de file d'attente en méthodes géométriques

matricielles.

Dans autre situation, le serveur par fois n'est pas disponible pour servir les clients pendant des temps aléatoire, soit en repo, soit fait des fins différentes comme la maintenance du système, . . . etc. Ce cas s'appelle "**modèle des files d'attente avec vacances des serveurs**". Les modèles de vacances ont été l'intérêt de plusieurs chercheurs à cause de leur applicabilité en réalité tel que problème de production et de contrôle qualité, . . . etc. Parmi les travaux réalisés par quelques chercheurs, on peut citer :

**Ayyappan et al[9]** ont étudié système de file d'attente avec service par groupe de serveur unique et vacances multiples avec catastrophe. Des études sur les temps d'attente dans une file d'attente de services par groupe ont aussi été publiées par **Downton[6]**, **Cohen[5]**, **Medhi[13]** et **Powell[17]** il y a eu quelques travaux connexes.

- Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

- ▶ Le premier chapitre est consacré à la présentation des notions de base utilisés dans la la théorie des files d'attentes comme les définitions des **processus Stochastiques, processus de comptage, processus de Markov, processus de poissons, processus de naissances et de mort**, par la suite nous présentons la **structure du files d'attente**.

- ▶ Dans la deuxième chapitre nous présentons les systèmes Markoviens classiques  $M/M/1, M/M/C, M/M/C/K, M/M/1/K, M/M/\infty$

- ▶ Enfin, dans la troisième chapitre, nous présentons les probabilités stationnaires et les mesure de performance, et puis une ulustration numérique pour la validété des résultats présentés.

# Chapitre 1

## Structure de la file d'attente

DANS ce chapitre nous avons étudié quelques définitions des processus stochastiques utilisées en théorie des files d'attente.

### 1.1 Processus stochastique

**Définition 1.1.1** (Processus stochastique). [8]

Un processus stochastique est une famille  $(X_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires  $X_t$ . L'indice  $t$  peut représenter par exemple le temps appartient à un ensemble ordonné  $T$ .

- L'ensemble des indices  $T$  du processus peut-être : **finie**, **infinie-dénombrable** comme  $(\mathbb{N})$  ou  $(\mathbb{Z})$ , **infinie non dénombrable** comme  $(\mathbb{R})$  ou  $(\mathbb{R}^+)$ .
- Lorsque  $T$  est **fini ou dénombrable**, le processus est dit **temps discrets**.
- Si  $T$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , le processus est dit à **temps continue**.

L'état à l'instant 0 est l'état initial du processus, il est en général aléatoire et on appelle sa loi la loi initiale du processus.

$X_t$  peut par exemple être :

- ▶ le nombre de véhicule sur une autoroute au kilomètre  $t$ .
- ▶ le nombre d'accidents de voiture à Montréal à l'instant  $t$ .

#### 1.1.1 Processus de comptage

**Définition 1.1.1.1** (Processus de comptage). [19]

Un processus stochastique  $N(t)$  est appelé processus de comptage si  $N(t)$  représente le nombre total des évènements qui sont arrivés avant l'instant  $t$ . Tout processus de comptage vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $t \geq 0$  le nombre  $N(t)$  est a valeurs entières positives.
2. La fonction  $t \mapsto N(t)$  est croissante.
3. Pour tout couple  $(s < t)$ , la différence  $N(t) - N(s)$  représente le nombre d'évènement se produisant dans l'intervalle de temps  $]s, t]$ .

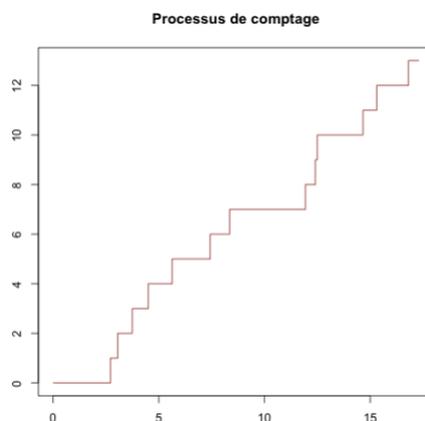


FIGURE 1.1 – Diagramme schématisant un processus de comptage ( $N(t)$  en fonction de  $t$ .)

## 1.1.2 Processus de renouvellement

**Définition 1.1.2.1** (Processus de renouvellement). [7]

Un processus de comptage pour lequel les temps entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires *i.i.d.* s'appelle processus de renouvellement. Les temps de renouvellement ou les temps de la  $n$ -ième arrivée sont :

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad n = 1, 2, \dots$$

avec  $a_i, i = 1, 2, \dots$  est le temps entre deux arrivées consécutives. Il est facile de voir que le nombre d'arrivées avant le temps  $t$ , i.e. le processus

$$(N_t)_{t \in \mathbb{R}} = \sup\{k : A_k \leq t\}$$

est un processus de comptage.

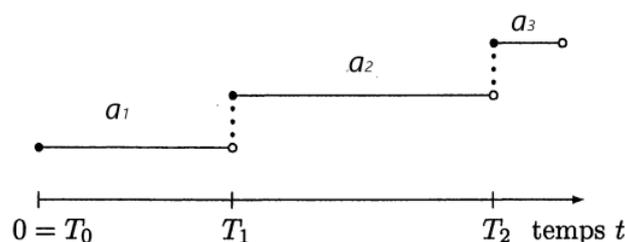


FIGURE 1.2 – Diagramme schématique représentant processus de renouvellement

### 1.1.3 Processus à accroissements indépendants

**Définition 1.1.3.1** (Processus à accroissements indépendants).

• Un processus à accroissements indépendants est un processus stochastique qui vérifie la propriété :

$\forall t \geq 0, \forall s \geq 0, N_{t+s} - N_t$  est indépendants de  $N_u, \forall u \leq t$ .

• Un processus à accroissements stationnaires est un processus stochastique qui vérifie la propriété :

La loi de  $N_{t+s} - N_t$  ne dépend de  $u, \forall u \leq t$ .

### 1.1.4 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est le plus utilisé dans la théorie des files d'attente, il modélisera généralement le processus d'arrivée des clients dans un système.

**Exemple 1.1.4.1.** Les arrivées d'appels à un central téléphonique, les arrivées de clients à un guichet.

**Définition 1.1.4.1** (Processus de poisson). [8]

Le processus de comptage  $(N(t))_{t \geq 0}$  est appelée **Processus de Poisson** d'intensité  $\lambda$ , avec  $\lambda > 0$  si :

1.  $N(0) = 0$ .
2. Le processus à des accroissement indépendantes, c'est à dire pour  $t > s$ , le nombre de sauts  $N(t) - N(s)$  intervenus sur  $(s, t]$  est indépendant du nombre de sauts  $N(s)$  intervenus avant l'instant  $s$ .
3. le nombre d'évènements sur un intervalle de longueur  $t$  est distribué selon une loi de Poisson  $P(\lambda t)$

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Les accroissements de même longueur du processus de Poisson ont tous la même loi, on dit que le processus à des accroissements stationnaires.

### 1.1.5 Loi exponentielle

**Définition 1.1.5.1** (Loi exponentielle).

Une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  suit une loi exponentielle de paramètre (ou de taux)  $\lambda > 0$  est une variable continue à valeurs positives de densité :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$$

**Propriété 1.1.1.** La loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est notée  $\xi(\lambda)$ , soit  $\mathbf{X}$  une variable aléatoire de loi exponentielle  $\xi(\lambda)$ .

- Sa fonction de répartition est :

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda t) & \text{si } t > 0; \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

- Sa fonction génératrice des moments est :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \infty & \text{si } t \geq \lambda; \\ \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{si } t < \lambda. \end{cases}$$

- Sa moyenne et sa variance sont :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Preuve 1.1.5.1** (loi exponentielle). Soit  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle  $\varepsilon(\lambda)$

1. si  $F(t) = P(X \leq t) = 0$ , sit  $\geq 0$  car  $X \geq 0, t \geq 0$

On a :

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

2. Sa fonction génératrice des moments vérifie :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{tx}) = \int_0^\infty \lambda e^{tx} e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)x} dx = \left[ \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \right]_0^\infty$$

D'où le résultat, calculons les dérivées de la fonction génératrice, on a

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad \varphi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

D'où

$$E[x] = \varphi'(0) = \frac{\lambda}{(\lambda)^2} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{var}(x) = \varphi''(0) - E[x]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

## 1.1.6 Processus de Markov

**Définition 1.1.6.1** (processus de Markov).

Soit  $E$  un ensemble finie,  $T \in \mathbb{R}^+$  on définit l'espace  $E, T$  :

$E =$  Espace des états,  $T =$  Espace de temps.

• Un Processus stochastique  $\{X_t\}$ , avec  $X_t$  variable aléatoire discret est processus de Markov, s'il vérifié la propriété sans mémoire[15] :

$\forall i, j, X \in E, \forall (t_1, t_n, t_{n+1}) \in T$  telsque  $t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}$

On a :

$$\mathbb{P}[X(t_{n+1}) = j / X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n] = P[X(t_{n+1}) = j / X(t_n) = i_n]. \quad (1.1)$$

• On dit l'état présent du système contient toute les information sur son évaluation(aléatoire) future.

**Remarque 1.1.6.1.** *Un processus de Markov est dit homogène, si la matrice de probabilité de transition ne dépend que  $t - s$ , c'est à dire la longueur de l'intervalle d'observation de transition, on ne considérera que les processus de Markov homogènes on note :*

$$P_{ij}(t) = P[X_{t+s} = j / X_t = i], \quad s, t \in T, \quad i, j \in E \quad \text{et} \quad (P_{ij}(t))$$

la matrice de transition de processus de Markov.

► Les probabilités de transition infinitésimales sont données par :

$$P_{ij}(s) = \begin{cases} \lambda_{ij}q_{ij}s + o(s) & \text{si } j \neq i; \\ 1 - \lambda_{ij}s + o(s) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

- $P_{ij}(s) = P[X_{t+s} = j / X_s = i]$ .
- $\lambda_{ij}q_{ij}s$ , le taux de quitter l'état  $i$  vers l'état  $j$ .
- $\lambda_i$ , le taux de quitter l'état  $i$ .
- $o(s)$ , représente la probabilité de réalisation de l'évènement avec au moins deux changement d'état.

**Proposition 1.1.1.** *soient  $s, t, u$  des instants et  $u$  un instant intermédiaire ( $s < u < t$ ) pour  $s, t, u \in T$  et  $i, j \in E$  ;  $P_{ij}$*

On a :

1.  $\sum_{ij} P_{ij}(s, t) = 1, \forall (i, j) \in E$ .
2.  $\forall (i, j) \in E^2, P_{ij}(s, t) = \sum_{k \in E} P_{i,k}(s, u)P_{k,j}(u, t)$  (Equation de Chapman-Kolmogorov).
  - On peut représenté ce système d'équation de façon matricielle est appelée matrice de probabilités de transition :

$$H(s, t) = H(s, u)H(u, t)$$

$$\text{, avec } H(s, t) = (P_{ij}(s, t))_{i \in E}^{j \in E}.$$

► **Générateur infinitésimal d'un processus de Markov :**  
les probabilités de transition infinitésimales [20], sont données par :

$$P_{ij}(s) = \begin{cases} \lambda_{ij}q_{ij}s + o(s) & \text{si } j \neq i; \\ 1 - \lambda_{ij}s + o(s) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

On déduit que

$$\frac{P_{ij}(s) - P_{ij}(0)}{s} = \begin{cases} \lambda_{ij}q_{ij}s + \frac{o(s)}{s} & \text{si } j \neq i; \\ -\lambda_{ij}(s) + \frac{o(s)}{s} & \text{si } j = i. \end{cases}$$

où

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i; \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

on a alors

$$a_{ij} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(s) - P_{ij}(0)}{s} = \begin{cases} \lambda_i q_{ij} \geq 0 & \text{si } j \neq i; \\ -\lambda_{ij} \leq 0 & \text{si } j = i. \end{cases} \quad (1.2)$$

ces limites sont les entrées du générateur noté  $A = (a_{ij})$ , les entrées de cette matrice satisfont

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} = a_{ii} + \sum_{j,j \neq i} a_{ij} = -\lambda_i + \lambda_i \sum_{j,j \neq i} q_{ij} & \forall i; \\ \sum_j a_{ij} = 0. \end{cases}$$

$$\sum_{j,j \neq i} q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i > 0; \\ 0 & \text{si } \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Pour les probabilités de transition de l'instant 0 à l'instant  $s + t$  pour  $t > 0$ , on obtient :

$$P_{ij}(t + s) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

► **Équations de Chapman-Kolmogorov au processus de Markov :**

► **Régime transitoire :**

Pour  $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$  l'équation de Chapman-Kolmogorov en notation matricielle est :

$$P(t + s) = P(t)P(s).$$

D'où

$$\frac{P(t+s) - P(t)}{s} = P(t) \frac{P(s) - I}{s}.$$

avec  $I$  qui représente la matrice identité, on conclut alors que :

$$P' = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(t+s) - P(t)}{s} = P(t) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(s) - I}{s} = P(t)A. \quad (1.3)$$

C'est l'équation progressive de Kolmogorov donc on obtient l'équation différentielle matricielle

$P' = P(t)A$  qui est l'équation rétrograde de Kolmogorov, solution de l'équation est

$$P(t) = e^{At} = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}. \quad (1.4)$$

En effet on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \left( \sum_{n \geq 1} \frac{n A^{n-1} t^{n-1}}{n!} A \right); \\ &= \left( \sum_{n \geq 0} \frac{A^n t^n}{n!} A \right); \\ &= e^{At} A; \\ &= A e^{At}. \end{aligned}$$

Pour calculer  $P_t$  on suppose ici que le générateur  $A$  est diagonalisable, on a donc :

$$A = Q \Lambda Q^{-1}.$$

$$\text{où } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} \text{ est la matrice diagonale des valeurs propres de } A \text{ et}$$

$Q$  est une matrice inversible dont les colonnes sont des vecteurs propres.

On a alors :

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{n \geq 0} \frac{Q(\Lambda^n)Q^{-1}t^n}{n!}; \\ &= Q \left( \sum_{n \geq 0} \frac{\Lambda^n t^n}{n!} \right); \\ &= Q e^{\Lambda t} Q^{-1}; \end{aligned}$$

$$= Q \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_N t} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

► **Régime stationnaires d'un processus de Markov :**

On dit que  $\pi$  est la loi de  $X_t$ ,  $\pi(t) = (\pi_x(t)) = P([X_t = x])$  on a

$$\pi(t) = \pi(0)P(t)$$

la loi est stationnaire du processus de Markov, si :

la loi de processus  $X_t$  est indépendant de  $t$ .

- On appelle distribution stationnaire toute probabilité  $\pi$  qui vérifié :

$$\begin{cases} \pi A = 0; \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1. \end{cases}$$

avec  $A =$  générateur infinitésimal de processus  $X_t$ .

### 1.1.7 Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort sont combine le processus de naissance et le processus de mort en un seul. Ici une fois à l'état  $i \geq 0$ , le temps avant une naissance est de loi  $Exp(\lambda_i)$  et le temps avant une mort est de loi  $Exp(\mu_i)$ , les deux temps étant indépendants, on s'intéresse au cas continu avec des taux de transition utilisés pour modéliser les systèmes d'attente et l'évolution de populations, il est considéré le point de départ de la théorie des files d'attente.

**Définition 1.1.7.1** (Processus de naissance et de mort). [15]

Soit  $Z_t$  un processus de Markov homogène, nous identifions les états du processus avec  $E_j (j \in N)$  sont :

- $E_j \longrightarrow E_{j+1}$  appelée naissance.
- $E_j \longrightarrow E_{j-1}$  appelée mort.

Le processus  $\{Z_t, t \geq 0\}$ , est un processus de naissance et de mort s'il satisfait les conditions Suivantes :

soit  $Z_t = k$  définir le Processus d'introduire les événements est leur probabilités de

façons suivantes :

$$P(\text{une naissance dans } [t, t + \Delta_t] \mid (\text{population de taille } k)) = \lambda_k \Delta_t + o(\Delta_t) \quad (1.5)$$

$$P(\text{une mort dans } [t, t + \Delta_t] \mid (\text{population de taille } k)) = \mu_k \Delta_t + o(\Delta_t) \quad (1.6)$$

$$P(0 \text{ naissance dans } [t, t + \Delta_t] \mid (\text{population de taille } k)) = 1 - \lambda_k \Delta_t + o(\Delta_t) \quad (1.7)$$

$$P(0 \text{ mort dans } [t, t + \Delta_t] \mid (\text{population de taille } k)) = 1 - \mu_k \Delta_t + o(\Delta_t) \quad (1.8)$$

On introduit les données suivantes :

$\lambda_k$  : taux de naissances pour une population de taille  $k$ .

► Si la taille d'une population a une transition  $k \mapsto k + 1$  donc il correspond à une naissance "toujours croissant".

$\mu_k$  : taux de morts pour une population de taille  $k$ .

► Si la taille d'une population a une transition  $k \mapsto k - 1$  une mort un processus de mort "toujours décroissant".

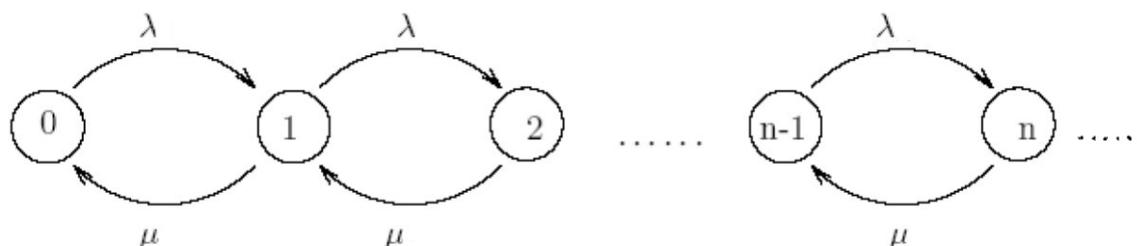


FIGURE 1.3 – Graphe de transition d'un processus de naissance et mort

• **Régime transitoire :** [1]

Soit  $P(t) = P_{ij}(t) = P([X_{t+s} = j \mid X_t = i])$ , alors :

$$P(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

La loi de  $X_t$  est alors donnée, en théorie par :

$$\pi(t) = \pi(0)P(t)$$

en dérivant :

$$\pi'(t) = \pi(t)P'(t) = \pi(0)P(t)A = \pi(t)A, \text{ donc } \pi'(j)(t) = \sum_i \pi(t)a_{ij}$$

le système suivant, dit l'équations de Kolmogorov :

$$\begin{cases} \pi'_0(t) = -\lambda_0\pi_0(t) + \mu_1\pi_1(t); \\ \pi'_n(t) = \lambda_{n-1}\pi_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)\pi_n(t) + \mu_{n+1}\pi_{n+1}(t), n \geq 1. \end{cases}$$

• **Régime stationnaire** :[1]

Soit la distribution stationnaire du processus étudié. Ceci se traduit par les équations dites "de balance"

$$\begin{cases} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0; \\ \lambda_{n-1}\pi_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \mu_{n+1}\pi_{n+1} = 0. \end{cases}$$

avec l'équation de normalisation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1.$$

Ces équations se simplifient successivement pour donner finalement des égalités

$$\begin{cases} \mu_1\pi_1 = \lambda_0\pi_0; \\ \mu_2\pi_2 = \lambda_1\pi_1; \\ \vdots \\ \mu_n\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1}. \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \pi_0;$$

$$\pi_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \right) = 1$$

## 1.2 La file d'attente simple

L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques, On les rencontre dans les domaines d'activité comme( guichet de poste, central téléphonique).

**Définition 1.2.1** (La file d'attente simple). [1]

*Une file d'attente (ou station) est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. Afin de spécifier complètement une file d'attente, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente.*

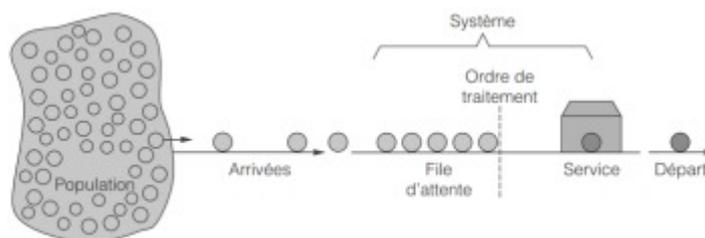


FIGURE 1.4 – Une file d'attent simple

### 1.2.1 Notations et Symboles

- $\lambda$  : le nombre moyen d'arrivées;(taux d'arrivée).
- $\mu$  : le nombre moyen de clients servis (taux de service).
- $\bar{N} = E(N)$  : nombre moyen de clients dans le système.
- $\bar{N}_s$  : nombre moyen de clients en train d'être servis.
- $\bar{N}_Q$  : nombre moyen de clients dans la file d'attente,  $N_Q$ ,  $N_S$  et  $N$  sont les v.a. correspondant.
- $\bar{T}$  : temps moyen qu'un client passe dans le système.
- $\bar{T}_s$  : temps moyen de service.
- $\bar{T}_Q$  : temps moyen d'attente d'un client dans la file.  $T_Q$ ,  $T_S$  et  $T$  sont les v.a.correspondant.

## Processus d'arrivée [1]

L'arrivée des clients à la station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$ , si  $A_n$  désigne la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du  $n$ -ième client dans le système, on aura ainsi :

$$A_0 = 0 \text{ et } A_n = \inf\{t ; N_t = n\}.$$

Si  $T_n$  désigne la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du  $(n-1)$ -ième client et du  $n$ -ième client, on a alors :

$$T_n = A_n - A_{n-1}.$$

L'arrivée des clients à une file simple est supposée décrite par un processus de renouvellement, on suppose que les temps entre deux arrivées consécutives sont indépendants et identiquement distribués. Le processus d'arrivée le plus simple et le plus couramment employé, est le processus de Poisson,  $\lambda$  le taux des arrivées, c'est un processus de renouvellement qui est tel que les interarrivées sont distribuées selon une loi exponentielle.

## Temps de service [1]

La distribution du temps de service la plus simple à étudier est la distribution exponentielle. Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, mais ne correspond pas forcément à un début de service.

## Nombre de serveurs [1]

Une station peut disposer de plusieurs serveurs en parallèle, le nombre de serveurs. Des qu'un client arrive à la station, soit il y a un serveur de libre et le client entre instantanément en service, soit tous les serveurs sont occupés et le client se place dans la file en attente de libération d'un des serveurs. La plupart du temps, les serveurs sont supposés identiques (ils possèdent donc la même distribution) et indépendants les uns des autres.

Une station particulière est la station IS (infinité servers) dans laquelle le nombre de serveurs est infini. Cette station ne comporte donc pas de file d'attente.

Dés qu'un client s'y présente, il trouve en effet instantanément un serveur disponible et entre donc directement en service. Elle permet de représenter des systèmes pour

lesquels le nombre de serveurs est toujours supérieur au nombre de clients qui peuvent s'y trouver.

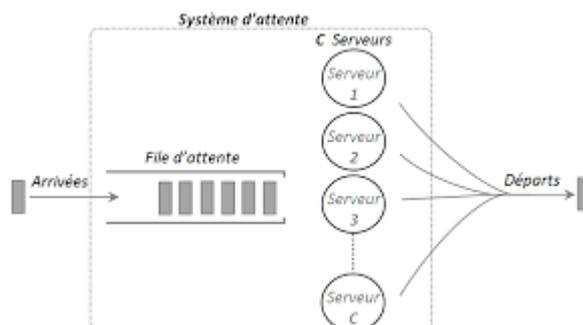


FIGURE 1.5 – File d'attente avec plusieurs serveurs

### 1.2.2 Structure et discipline de la file

- **Capacité de la File d'attente** : Elle représente le nombre maximal de clients dans le système. Un client arrivant et trouvant ce nombre de clients présents dans le système sera perdu.

La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie.

### 1.2.3 Discipline de service

Les disciplines les plus courantes sont :

- FIFO (First in First Out)** : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée.
- LIFO (last in, first out)** : les disciplines LIFO ne sont équivalentes que pour une file de un seul serveur. i.e Le dernier client dans la file est le premier à être servi.
- RANDOM (aléatoire)** : Le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente :
  - ★ **Round-Robin (cyclique)** : Cette discipline de service a été introduite afin de modéliser des systèmes informatiques

★ **PS (Processor Sharing)** : Tous les clients sont servis en même temps, mais avec une vitesse inversement proportionnelle au nombre de clients simultanément présents.

### 1.2.4 Notation de Kendall

La notation de Kendall normalise la description d'une file d'attente, est largement utilisé pour classer les différents systèmes de files d'attente [1]

$$T/Y/C/K/m/Z$$

avec :

$T$  : distribution d'interarrivée.

$Y$  : distribution de service.

$C$  : nombre de serveurs .

$K$  : capacité de la file.

$m$  : population des usagers.

$Z$  : discipline de service.

Lorsque les trois derniers éléments de la notation de Kendall ne sont pas précisés, il est sous entendu que  $K = \infty$  ,  $m = \infty$  ,  $Z = \text{" FIFO "}$  , Le paramètre  $m$  précise le nombre maximum d'usagers susceptibles d'arriver dans la file, cette dernière étant "plongée" dans un monde fermé contenant  $m$  clients.

### 1.2.5 Loi de Little

La loi de Little est une relation très générale qui s'applique à une grande classe de systèmes , La seule condition d'application de la loi de Little est que le systèmes soit stable. La loi de Little s'exprime telle que dans la propriété suivante :

**Théorème 1.2.5.1** (Formule de little). *Le nombre moyen de clients, le temps moyen passé dans le système et le débit moyen d'un système stable se relient de la façon suivante :*

$$\bar{N} = \lambda_e \bar{T}$$

où  $\lambda_e$  est le taux d'entrée dans le système, ( $\lambda_e = \lambda$ ) pour un file (M/M/1)

La loi de Little peut aussi s'appliquer en considérant uniquement l'attente dans la queue (sans le service). Elle permet alors de relier le nombre moyen de clients en attente ( $\bar{N}_Q$ ) au temps moyen d'attente d'un client avant service  $\bar{T}_Q$ .

Par la relation :

$$\bar{N}_Q = \lambda_e \bar{T}_Q$$

Enfin, on peut appliquer la loi de Little en ne considérant que le serveur. Dans ce cas, elle relie le nombre moyen de clients en service ( $\bar{N}_S$ ) au temps moyen de séjour d'un client dans le serveur qui n'est rien d'autre que le temps moyen de service  $\bar{T}_S$  par la relation :

$$\bar{N}_S = \lambda_e \bar{T}_S$$

On a obtenu trois relations en appliquant la loi de Little successivement au système entier à la file d'attente seule et enfin, au serveur seul. Ces trois relations ne sont bien sûr pas indépendantes. On peut en effet déduire l'une d'entre elles à partir des deux autres en remarquant que

$$\bar{N} = \bar{N}_S + \bar{N}_Q$$

et

$$\bar{T} = \bar{T}_Q + \bar{T}_S$$

**Remarque 1.2.5.1.** La loi de Little s'applique à tous les modèles de file d'attente rencontrés en pratique (pas seulement à la file (M/M/1)).

## 1.3 Analyse mathématique dans un système des files d'attentes

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait le plus souvent par l'introduction d'un processus stochastique[1]

- on s'intéresse au nombre  $N(t)$  de clients se trouvant dans le système à l'instant  $t$ .

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à calculer :

- les probabilités d'état  $\pi_n(t) = P([N_t = n])$  qui définissent le **régime transitoire** du processus .
- le régime stationnaire du processus, défini par

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} \pi_n(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P([X_t] = n), (n = 0, 1, 2, \dots)$$

où  $\pi_n$  est appelée distribution stationnaire du processus  $N(t), t \geq 0$ .

• A partir de la distribution stationnaire du processus , on pourra obtenir d'autres caractéristiques d'exploitation du système telles que :

- ▶ le nombre moyen  $\bar{N}$  de clients dans le système .
- ▶ le nombre moyen  $\bar{N}_Q$  de clients dans la file d'attente .
- ▶ la durée d'attente moyenne  $\bar{T}_Q$  d'un client .
- ▶ la durée de séjour moyenne  $\bar{T}$  dans le système (attente + service) .
- ▶ le taux d'occupation des postes de service .
- ▶ le pourcentage de clients n'ayant pu être servis .
- ▶ la durée d'une période d'activité, c'est-à-dire de l'intervalle de temps pendant lequel il y a toujours au moins un client dans le système.

# Chapitre 2

## Systèmes des files d'attentes Markoviennes

DANS ce chapitre nous avons étudié la file d'attentes Markoviennes ( $M/M/1, M/M/C, M/M/C/K, M/M/\infty$ ) et calculer leurs mesure de performances et déterminer ses caractéristiques.

### 2.1 Modèles des files d'attentes Markoviennes

Les files d'attentes Markoviennes sont celles pour les lesquelles les inter arrivées et les durées de service sont exponentielles. Leur notation de Kendall sera de la forme  $M/M/\dots$ , ( $M$  comme markovien.) L'évolution temporelle du processus Markovien est complètement définie grace à la propriété d'absence de mémoire.

• Voici quelques exemples classiques des modèles des les file d'attente Modèles Markoviens sont :

#### 2.1.1 File d'attente $M/M/1$

Le système de files d'attente  $M/M/1$  est le système le plus élémentaire de la théorie des files d'attente.[\[2\]](#)

**Modèle :**

- $M$  : Les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .
- $M$  : Le temps de service de chaque client suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu > 0$  (et est indépendant du temps de service des autres clients) .
- 1 : Un seul serveur, une infinité de places dans la file.

- **FIFO** : Discipline de service (first-in, first-out).
- la file d'attente est de capacité infinie. Le cas d'un guichet de poste avec un seul serveur.
- Le nombre de clients dans le système est un processus de naissance et de mort.
- Le système est stable si :

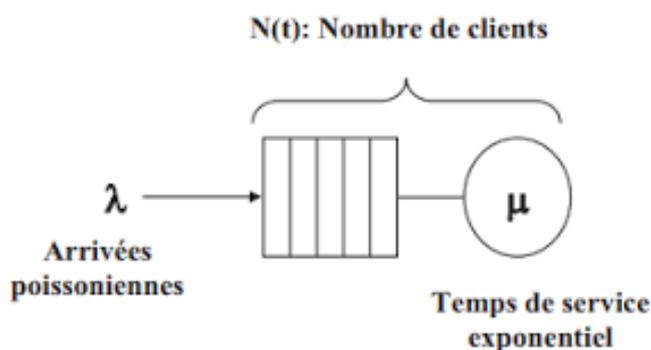


FIGURE 2.1 – File d'attente M/M/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1;$$

\* si  $\rho > 1$  le nombre de client tend vers l'infini donc le système n'est pas stable. On suppose de plus que la discipline de service est **FIFO**, même si la plupart des résultats sont valables pour d'autres disciplines de service.



FIGURE 2.2 – File d'attente M/M/1(FIFO,PS)

\* La file peut être considérée comme un processus de naissance et de mort, pour lequel :

$$\lambda_n = \lambda, \forall n \geq 0.$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \forall n \geq 1; \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

• **Régime transitoire :**

Pour le système de file d'attente  $M/M/1$  (plus simple), il y a un seul serveur. Grâce aux propriétés du processus de Poisson et de la loi exponentielle, nous avons pour un petit intervalle de temps  $\Delta_t$  les probabilités suivantes :

$$P(\text{exactement une arrivée pendant } \Delta_t) = \lambda \Delta_t + o(\Delta_t) \quad (2.1)$$

$$P(\text{aucune arrivée pendant } \Delta_t) = 1 - \lambda \Delta_t + o(\Delta_t) \quad (2.2)$$

$$P(2 \text{ arrivées ou plus pendant } \Delta_t) = o(\Delta_t) \quad (2.3)$$

$$P(\text{un départ pendant } \Delta_t \mid X_t \geq 1) = \mu \Delta_t + o(\Delta_t) \quad (2.4)$$

$$P(\text{aucun départ pendant } \Delta_t \mid X_t \geq 1) = 1 - \mu \Delta_t + o(\Delta_t) \quad (2.5)$$

$$P(2 \text{ départs ou plus pendant } \Delta_t) = o(\Delta_t) \quad (2.6)$$

Les probabilités ne dépendent ni du temps  $t$  ni de l'état  $X(t)$  dans lequel le système se trouve.

Les équations du régime transitoire du système sont déterminées par le calcul de :

$$P_n(t + \Delta_t) = P(X(t + \Delta_t) = n) \text{ et } P_0(t + \Delta_t) = 0.$$

Les équations de Kolmogorov seront données alors par le système suivant :

Les probabilités d'état  $p_n(t) = P[N(t) = n]$  peuvent être calculées par les équations différentielles de Kolmogorov, d'après les conditions initiales du processus

$$\begin{cases} p'_n(t) &= -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t); \\ p'_0(t) &= \lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \end{cases}$$

• **Régime Stationnaire :** [2]

Sous la condition de stationnarité du système  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , pour laquelle le régime stationnaire existe, il est aisé d'obtenir les probabilités stationnaires :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t);$$

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\pi = \{\pi_n\}$  est appelé distribution stationnaire, elle suit une loi géométrique.

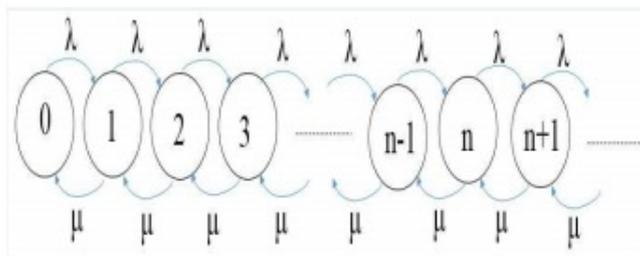


FIGURE 2.3 – File d'attente M/M/1

**Remarque 2.1.1.1.** *Le régime stationnaire du système M/M/1 est gouverné par la loi géométrique de paramètre  $1 - \rho$ ,  $\rho$  est appelé le coefficient d'utilisation du système où intensité du trafic correspondant. Il constitue une mesure de saturation du système.*

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  (nombre moyen d'arrivées par la durée moyenne de service).

Si  $\lambda \geq \mu$ , on a

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = 0$$

(la longueur de la file dépasse toute limite, donc le système est instable).

• **Caractéristiques du système M/M/1 :**

► **Nombre moyen de clients dans le système  $\bar{N}$  :**

Le nombre moyen de clients se calcule à partir des probabilités stationnaires de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{N} = E(N) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n = \rho(1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)\rho^n \\ &= \rho(1 - \rho)(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots) \\ &= \rho(1 - \rho) \frac{d}{d\rho} (\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) \end{aligned}$$

$$= \rho(1 - \rho) \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{1 - \rho} \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{\rho}{1 - \rho} \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda}. \end{aligned}$$

► Nombre moyen de clients en train d'être servis  $\bar{N}_S$  :

$$\bar{N}_S = 1 - \pi_0 = \rho$$

► Le nombre moyen de clients dans la file  $\bar{N}_Q$  :

$$\begin{aligned} \bar{N}_Q &= \sum_{n>1} (n - 1) \pi_n; \\ &= \frac{\rho^2}{1 - \rho}; \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}. \end{aligned}$$

Le temps moyen qu'un client passe dans le système  $\bar{T}$ , le temps moyen de service  $\bar{T}_s$  et le temps moyen d'attente dans la file  $\bar{T}_Q$  sont obtenus partir des formules de Little, ou des distributions du système .

► Temps moyen qu'un client passe dans le système  $\bar{T}$  :

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\bar{N}}{\lambda} \\ &= \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} \\ &= \frac{1}{(\mu - \lambda)}. \end{aligned}$$

► Temps moyen de service  $\bar{T}_s$  :

$$\bar{T}_s = \frac{1}{\mu}.$$

► Temps moyen d'attente  $\bar{T}_Q$  :

$$\begin{aligned} \bar{T}_Q &= \bar{T} - \bar{T}_s \\ &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}. \end{aligned}$$

### 2.1.2 File d'attente M/M/c

- **Description du modèle**

- $M$  : les clients arrivent vers le système selon un processus de Poisson de taux  $\lambda > 0$
- $M$  : Les temps de service sont exponentiellement distribués de moyenne finie  $\frac{1}{\mu}$ , Les durées entre deux arrivées consécutives et les durées de service sont mutuellement indépendantes.
- $c$  : Le service est assuré par  $c \geq 1$  serveurs montés en parallèle.
- **Capacité** : La capacité d'attente est illimitée (le nombre de positions d'attente est infini).

la discipline d'attente est **FIFO**.

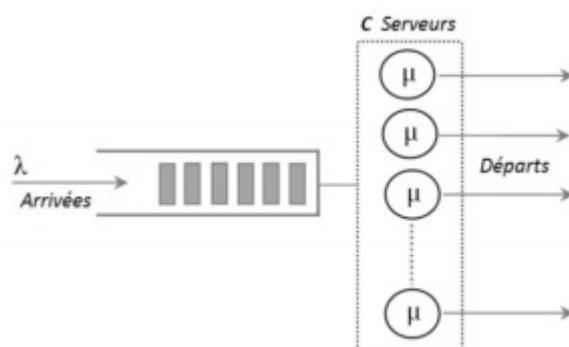


FIGURE 2.4 – File d'attente M/M/c

Le processus de naissance et de mort modélisant ce type de file d'attente est alors défini de la façon suivante :

$$\lambda_n = \lambda, \quad \forall n \geq 0.$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0; \\ n\mu & \forall n = 1, \dots, c; \\ c\mu & \forall n \geq c. \end{cases}$$

**Remarque 2.1.2.1.**  $c\mu$  est le taux de service globale du système.

La condition de **stabilité** de ce modèle est  $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$

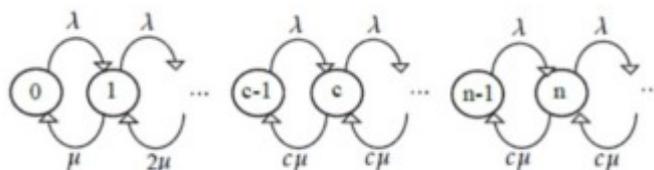


FIGURE 2.5 – File de transition d'état M/M/c

### Régime Stationnaire

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1; \\ (\lambda + n\mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1}, & 1 \leq n < c; \\ (\lambda + c\mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + c\mu\pi_{n+1}, & n \geq c. \end{cases}$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

La résolution du système ci-dessus présente la distribution stationnaire suivante :

$$\bar{N} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n$$

$$= \bar{N} - (1 - \pi_0)$$

$$\pi_n = \frac{\rho^c}{C!} A^{n-C} \pi_0, \quad n \geq C$$

où

$$\pi_0 = \left[ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!} \sum_{n=C}^{\infty} A^{n-C} \right]^{-1};$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

et

$$A = \frac{\lambda}{C\mu}$$

Cette dernière existe si

$$\lambda < C\mu$$

• **Caractéristiques du système  $M/M/c$  :**

► **Le nombre moyen de clients dans le système  $\bar{N}$  :**

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=1}^{c-1} \frac{n(\lambda/\mu)^n}{n!} \pi_0 + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n(\lambda/\mu)^n}{c!c^{n-c}} \pi_0 = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^{c+1}}{c!c \left(1 - \frac{\lambda}{\mu c}\right)^2} \pi_0 = \rho \frac{\rho^{c+1}}{c!c (1 - A^2)} \pi_0.$$

► **Le Nombre moyen de clients dans la file d'attente  $\bar{N}_Q$  :**

$$\bar{N}_Q = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_{c+k} = \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^k \pi_0 = \frac{(\lambda/\mu)^{c+1}}{c!c \left(1 - \frac{\lambda}{\mu c}\right)^2} \pi_0 = \frac{\rho^{c+1}}{c!c (1 - A^2)} \pi_0.$$

► **Temps moyen qu'un client passe dans le système  $\bar{T}$  :**

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda} = \frac{c\mu (\lambda/\mu)^c}{c! (c\mu - \lambda)^2} \pi_0; = \frac{c\mu \cdot \rho^c}{c! (c\mu - \lambda)^2} \pi_0.$$

► **Temps moyen d'attente  $\bar{T}_Q$  :**

$$\bar{T}_Q = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!c \left(1 - \frac{\lambda}{\mu c}\right)^2} \pi_0 = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho^c}{\mu c \cdot c! (1 - A)^2} \pi_0.$$

### 2.1.3 File d'attente $M/M/c/k$

On considère un système à serveur simple identique à la file  $M/M/1$  excepté que la capacité de la file d'attente est finie, dans le système  $M/M/c$ , les serveurs montés en parallèle. Dans la file  $M/M/c/k$  supposons que le nombre de positions d'attente est limité (égal à  $k$ ) à l'arrivée d'un client, si tous les serveurs et toutes les positions d'attente sont occupées, le processus de naissance et de mort modélisant ce type de file d'attente est alors définie de la façon suivante :

$$\lambda_n = \lambda \text{ si } 0 < n < k.$$

$$\mu_n = \mu \times \min(n, c), \text{ si } 1 \leq n \leq k.$$

• **Graphe de transition :**

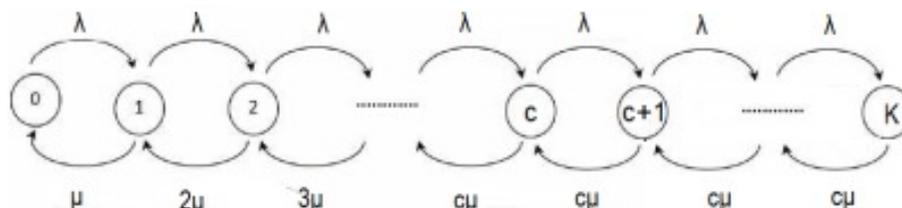


FIGURE 2.6 – File de transition d'état M/M/c/k

• **Régime stationnaire :**

La distribution stationnaire satisfait le système d'équations de "balance" suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda\pi(0) + \mu\pi(1) = 0, \quad n = 0; \\ \lambda\pi_{n-1} - (\lambda + n\mu)\pi_n + (n+1)\mu\pi_{n+1} = 0, \quad 1 \leq n \leq c; \\ \lambda\pi_{n-1} - (\lambda + n\mu)\pi_n + c\mu\pi_{n+1} = 0, \quad c \leq n \leq k; \\ \lambda\pi_{k-1} - c\mu\pi_k = 0, \quad n = k. \end{array} \right.$$

on donne :

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0; \\ \frac{1}{c!c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \pi_0. \end{cases}$$

La mesure importante de ce système est la probabilité de perte, la probabilité pour que le système se trouve dans l'état  $k$

$$\pi_k = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \pi_0.$$

l'équation de normalisation

$$\sum_{n=0}^k \pi_n = 1.$$

avec

$$\pi(\text{pert}) = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \pi_0.$$

• **Caractéristiques du système :**

► **Le nombre moyen de clients dans la file d'attente  $\bar{N}_Q$**

$$\bar{N}_Q = \sum_{n=1}^{k-c} n \pi_{c+n} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \pi_0 \left( 1 + 2 \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right) + 3 \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^2 + \dots + (k-c) \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^{k-c-1} \right)$$

$$\bar{N}_Q = \frac{(\lambda/\mu)^{c+1} \frac{1 - (\frac{\lambda}{\mu c})^{k-c}}{1 - (\frac{\lambda}{\mu c})}}{(c-1)! \left(c - \frac{\lambda}{\mu c}\right)} \pi_0$$

L'application des relations de Little, on déduit

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda}, \quad \bar{T}_Q = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda}, \quad \bar{N} = \bar{N}_Q + \frac{\lambda}{\mu}$$

► **Cas particuliers du système  $M/M/c/K$  :**

► **Système  $M/M/1/K$**

On considère un Système à serveur simple identique à la file  $M/M/1$  excepté que la capacité de la file d'attente est finie. On a donc toujours les hypothèses suivantes : le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux  $\mu$ .

Soit  $K$  la capacité de la file d'attente :

c'est le nombre maximal de clients qui peuvent être présents dans le système, soit en attente, soit en service. Quand un client arrive alors qu'il y a déjà  $k$  clients présents dans le système, il est perdu ce système est connu sous le nom de file  $M/M/1/k$

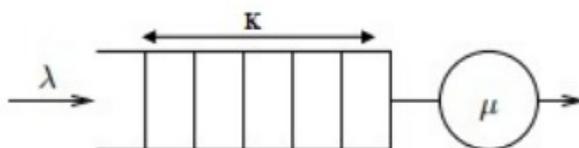


FIGURE 2.7 – File d'attentes  $M/M/1/k$

Donc on a les mesures de performance lorsque  $K$  tend vers l'infini et  $\rho < 1$ , on retrouve les résultats de la file  $M/M/1$

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda}$$

### 2.1.4 File d'attente $M/M/\infty$

On considère un système composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il rentre donc instantanément en service. Dans cette file particulière, il n'y a donc pas d'attente. On suppose toujours que le processus d'arrivée des clients est poissonnier de taux  $\lambda$  et que les temps de service sont exponentiels de taux  $\mu$  (pour tous les serveurs). Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/\infty$ .

Comme cela a été fait pour la file  $M/M/c$  on peut démontrer :

- le taux de transition d'un état  $n$  quelconque vers l'état  $n - 1$  est égal à  $n\mu$  et correspond au taux de sortie d'un des  $n$  clients en service.
- le taux de transition d'un état  $n$  vers l'état  $n + 1$  est égal à  $\lambda$  et correspond au taux d'arrivée d'un client.[2]

• **Condition de stabilité :**

la capacité de traitement de la file est infinie puisque tout nouveau client se présentant à l'entrée de la file est instantanément traité. La condition de stabilité exprimant que "le nombre moyen de clients arrivant à la file par unité du temps doit être inférieur à la capacité de traitement de la file" est donc toujours satisfaite.

• **Régime Stationnaire :**

Soit  $\pi_n$  la probabilité stationnaire d'être dans l'état  $n$  donc c'est un processus de naissance et de mort avec les équations suivantes :

$$\pi_{n-1}\lambda = \pi_n n\mu, \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

On peut écrire

$$\pi_n = \frac{\rho}{n} \pi_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

où

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

On peut alors exprimer toutes les probabilités en fonction de  $\pi_0$

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0.$$

avec la condition de normalisation, on obtient  $\pi_0$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \Rightarrow \pi_0 = \exp(-\rho)$$

On obtient finalement

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} \exp(-\rho) \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

- **Caractéristiques du système :**
- **Nombre moyen de clients  $\bar{N}$  :**

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n \\ &= \exp(-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} \\ &= \exp(-\rho) \rho \exp(\rho) \\ &= \rho \end{aligned}$$

- **Le temps moyen d'attente d'un client  $\bar{T}$  :**

En utilisant la loi de Little

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda_0}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu}$$

# Chapitre 3

## Système de files d'attente Markovien avec vacances multiples et service par groupe

Dans un modèle de file d'attente classique, les serveurs sont toujours disponibles. Toute fois, dans de nombreux systèmes d'application pratiques, les serveurs peuvent ne plus être disponibles pendant un certain temps pour des raisons. Cette période d'absence du serveur peut signifier que le serveur travaille sur certaines tâches supplémentaires, par exemple en cours de maintenance ou simplement une pause.

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur un groupe spécial file d'attente de service appelée file d'attente de service par groupe de taille fixe avec vacances multiples. Le modèle sous considération est décrite dans la section 3.2 et analysez le modèle en dérivant les équations du système en régime stationnaire. En utilisant ces équations, les fonctions génératrices de probabilité sont obtenues et les probabilités en régime stationnaire sont obtenues. D'après on étude numérique est réalisée dans la section 3.3 (**Modèle 1**), et La section 3.5 (**Modèle 2**), pour tester l'effet de la mesure de la performance du système discutée à la subsection 3.3.5 (**Modèle 1**), la subsection 3.5.4 (**Modèle 2**). Des études numériques ont été faites pour mesurés de performance du système pour différentes valeurs de  $\lambda, \mu, \alpha$ , et  $k$ .

## 3.1 Système de files d'attente avec vacances

Un système de files d'attente avec vacances est un système dans lequel le temps passé loin du centre de service principal s'appelle des vacances, peut être le résultat de nombreux facteurs. Cette période, lorsque le serveur n'est pas disponible pour les clients principaux, est appelé vacances (**Chandrasekaran et al.(2016)**).

Les modèles de files d'attente avec vacances peuvent être classés en fonction des processus d'arrivée, des processus de service et des politiques de vacances. Ainsi, comme il a été mentionné ci-dessus, d'excellentes enquêtes sur des travaux antérieurs de modèles de vacances ont été donnés par(**Joshi (1986)**, **Taka gi (1991)**, et **Tian et Zhang (2006)**).

- Dans de nombreuses situations pratiques, il existe des types de vacances :

- **vacances unique :**

A la fin de chaque période de service, si le système est vide le serveur passe en vacances et revient immédiatement après la fin des vacances.

- **Vacances multiples :**

Ce type de vacances peut provenir de cas tels que maintenance dans les systèmes informatiques et de communication où les processeurs en informatique et les systèmes de communication effectuent des tests et une maintenance approfondis en plus de leur principales fonctions (traitement des appels téléphoniques, réception et transmission de données ,etc). Les travaux d'entretien nécessaires sont divisés en segments courts. Chaque fois que les clients sont absents, le processeur effectue une maintenance. Lorsque le système est inactif. Le serveur prend des vacances à chaque fois que le système devient vide. Si le serveur revient de vacances et trouve un système non vide, il démarre immédiatement le service et continue jusqu'à ce que le système devienne vide (service exhaustif). Si le serveur revient de vacances pour retrouver un système vide, il commence immédiatement une autre vacances et continue jusqu'à ce qu'il trouve un ou plusieurs clients à son retour.

- **Vacances à service limité :** dans lequel le serveur prend des vacances pour devenir inactif ou après avoir servi k clients consécutifs, ou après un certain temps T

## 3.2 Description du modèle

On considère un système de file d'attente de service par groupe fixe avec un seul serveur sous type de vacances multiples dans lequel le taux d'arrivée  $\lambda$  suit un processus de Poisson et le temps de service suit une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$ .

► On suppose que le système contient initialement  $k$  clients lorsque le serveur dans l'état de service normale, donc il démarre le service immédiatement par groupe de taille  $k$ . Après le service complète, s'il y a plus de  $k$  clients dans la file d'attente alors les  $k$  premiers clients seront être sélectionnés et service en groupe. Après la fin de service, s'il trouve moins de  $k$  clients dans la file d'attente, alors le serveur part pour des vacances multiples de taux  $\alpha$ . Après son retour de vacances, s'il trouve moins de  $k$  clients dans la file d'attente, il prendre d'autres vacances et ainsi de suit jusqu'à ce qu'il trouve, enfin,  $k$  ou plus clients attendant dans la file d'attente.

## 3.3 Modèle 01

► Si le serveur démarre le service pour un groupe de  $k$  clients , les clients autorisés à entrer dans la file d'attente :

### 3.3.1 Probabilités de régime transitoire

• Soit  $\langle N(t), C(t) \rangle$  un processus de Markov à temps continue où  $N(t)$  est la variable aléatoire qui représente le nombre de clients en file d'attente à l'instant  $t$  et  $C(t)$  soit le variable aléatoire qui représente l'état du serveur (occupé/en vacances) à l'instant  $t$ . Les clients seront autorisés.

Nous définissons :

•  $P_{(n,1)}(t)$  Probabilité que le serveur soit occupé s'il y a  $n$  clients dans la file d'attente à l'instant  $t$ .

•  $P_{(n,2)}(t)$  Probabilité que le serveur soit en vacances s'il y a  $n$  clients dans la file d'attente à l'instant  $t$ .

• Les équations de Chapman-Kolmogorov sont :

$$P'_{(0,1)}(t) = -(\lambda + \mu)P_{(0,1)}(t) + \mu P_{(k,1)}(t) + \alpha P_{(k,2)}(t), \text{ pour } n = 0 \quad (3.1)$$

$$P'_{(n,1)}(t) = -(\lambda + \mu)P_{(n,1)}(t) + \mu P_{(n+k,1)}(t) + \alpha P_{(n+k,2)}(t), \text{ pour } n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$$P'_{(0,2)}(t) = -\lambda P_{(0,2)}(t) + \mu P_{(0,1)}(t), \text{ pour } n = 0 \quad (3.3)$$

$$P'_{(n,2)}(t) = -\lambda P_{(n,2)}(t) + \lambda P_{(n-1,2)}(t) + \mu P_{(n,1)}(t) \quad , \text{ pour } n = 1, 2, \dots; \quad (3.4)$$

$$P'_{(n,2)}(t) = -(\lambda + \alpha)P_{(n,2)}(t) + \lambda P_{(n-1,2)}(t) \quad , \text{ pour } n \geq k. \quad (3.5)$$

### 3.3.2 Probabilités de régime stationnaire

Dans cette section, nous présentons les états stationnaire pour nombre de clients dans la file d'attente lorsque le serveur est occupé ou en vacances, en utilisant **les fonctions génératrices**. Lorsque le régime permanent (Stationnaire), les équations 3.1 à 3.5 deviennent[21]

$$(\lambda + \mu)P_{(0,1)} = \mu P_{(k,1)} + \alpha P_{(k,2)}, \text{ pour } n = 0 \quad (3.6)$$

$$(\lambda + \mu)P_{(n,1)} = \lambda p_{n-1,1} + \mu P_{(n+k,1)} + \alpha P_{(n+k,2)}, \text{ pour } n = 1, 2, 3 \dots; \quad (3.7)$$

$$\lambda P_{(0,2)} = \mu P_{(0,1)}, \text{ pour } n = 0 \quad (3.8)$$

$$\lambda P_{(n,2)} = \lambda P_{(n-1,2)} + \mu P_{(n,1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, k-1 \quad (3.9)$$

$$(\lambda + \alpha)P_{(n,2)} = \lambda P_{(n-1,2)}, \quad n \geq k \quad (3.10)$$

• Les fonctions génératrices pour le nombre de clients dans la file d'attente lorsque le serveur est occupé ou en vacances sont définis comme :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,1} z^n \quad \text{et} \quad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,2} z^n$$

d'après l'équation de balance 3.6 à 3.10, on trouve :

$$G(z)[\lambda z^{k+1} - (\lambda + \mu)z^k + \mu] + \alpha H(z) = \mu \sum_{n=0}^{k-1} p_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} p_{n,2} z^n \quad (3.11)$$

on a

$$H(z)[\alpha + \lambda(1 - z)] = \mu \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,2} z^n \quad (3.12)$$

$$H(z) = \frac{\mu \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,2} z^n}{\alpha + \lambda(1 - z)} \quad (3.13)$$

L'équation 3.13 représente la fonction génératrice de probabilité pour le nombre de clients dans la file d'attente lorsque le serveur est en vacances.

De 3.11 et 3.13, on obtient

$$G(z) = \frac{[\mu \sum_{n=0}^{k-1} p_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} p_{n,2} z^n](\lambda(1-z))}{(\alpha + \lambda(1-z))(\lambda z^{k+1} - (\lambda + 1)z^k + 1)}$$

$$G(z) = \frac{[\mu \sum_{n=0}^{k-1} p_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} p_{n,2} z^n](\rho(1-z))}{(\alpha + \lambda(1-z))(\rho z^{k+1} - (\rho + 1)z^k + 1)} \quad (3.14)$$

tel que

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

La fonction génératrice  $G(z)$  à la propriété qu'elle doit converger à l'intérieur du cercle unité.

- Par Théorème de Rouché[18], on remarque que l'expression du dénominateur de  $G(z)$ , se trouve  $k + 1$  racines, ces racines  $k$  varient sur ou à l'intérieur de cercle unitaire.

on choisit :

$$f(z) = -(\rho + 1)z^k \text{ et } g(z) = \rho z^{k+1} + 1$$

$$f(z) + g(z) = \rho z^{k+1} - (\rho + 1)z^k + 1$$

on a

$$|f(z)| = \rho + 1, \text{ avec } |z| = 1$$

$$|g(z)| = |\rho z^{k+1} + 1| \leq \rho + 1 = |f(z)|$$

donc  $f(z) + g(z)$  possède même nombre de racines. Elle possède donc  $k$  racines qui varient dans le cercle et une racine à l'extérieur du cercle on note  $z_0$  cette racine  $|z_0| > 1$ .

Lorsque  $G(z)$  converge,  $k$  racines du numérateur et du dénominateur l'équation 3.13 sera annulée, alors

$$G(z) = \frac{A}{(\alpha + \lambda)(z - z_0)} \quad (3.15)$$

pour trouver  $A$ , on pose  $z = 0$ , on obtient

$$G(0) = \frac{A}{(\alpha + \lambda)(-z_0)}$$

par définition on déduit  $G(0) = p_{0,1}$

on trouve, par définition

$$A = p_{0,1}(\alpha + \lambda)$$

d'après on remplace  $A$  dans l'équation 3.15, on obtient

$$G(z) = \frac{(\alpha + \lambda)z_0}{(\alpha + \lambda - \lambda z)(z_0 - z)} p_{0,1}$$

d'après appliquant des transformation et utilisant le produit de cauchy, on a

$$G(z) = p_{0,1} \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \left( \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right)^k \left( \left( \frac{1}{z_0} \right)^{n-k} \right) \right) z^n \quad (3.16)$$

par identification, on obtient

$$p_{n,1} = p_{0,1} s^n \left( 1 + \left( \frac{r}{s} \right) + \dots + \left( \frac{r}{s} \right)^n \right) = p_{0,1} s^n \sum_{k=0}^n \left( \frac{r}{s} \right)^{n-k} \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

telque

$$r = \frac{1}{z_0} \text{ et } s = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha}$$

en utilisant les équation 3.17, 3.8, 3.9 et par récurrence pour  $n = 1, 2, 3, \dots, k-1$ , on obtient

$$p_{n,2} = \frac{\mu}{\lambda} p_{0,1} \left[ 1 + s \left( \frac{r}{s} + 1 \right) + \dots + s^{n-1} \left[ 1 + \left( \frac{r}{s} + \dots + \left( \frac{r}{s} \right)^{n-1} \right] + s^n \left( 1 + \left( \frac{r}{s} \right) + \dots + \left( \frac{r}{s} \right)^n \right) \right] \quad (3.18)$$

,pour  $n = 1, 2, \dots, k-1$

$$p_{n,2} = \left( \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right)^{n-k+1} p_{k-1,2}; \text{ pour } n \geq k \quad (3.19)$$

afin de trouver  $p_{0,1}$ , on utilise la condition de normalisation

$$p_{0,1} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,1} + \sum_{n=0}^{k-1} p_{n,2} + \sum_{n=k}^{\infty} p_{n,2} = 1 \quad (3.20)$$

on trouve

$$p_{0,1} = \frac{1}{D} \quad (3.21)$$

tel que

$$D = \frac{1}{(1-s)(1-r)} + \frac{\mu}{\lambda} \left( 1 + \sum_{n=1}^{k-1} [1 + \dots + s^n [1 + \dots + \left(\frac{r}{s}\right)^n]] \right) + \frac{\mu}{\alpha} [1 + \dots + s^{k-2} [1 + \dots + \left(\frac{r}{s}\right)^{k-2}] + s^{k-1} (1 + \dots + \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1})]$$

### 3.3.3 Cas particulier

Dans le modèle de file  $M/M/1$  avec vacances multiples. On a

$$P_{0,1} = \frac{1}{D}$$

où

$$D = \frac{1}{(1-s)(1-r)} + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\alpha}$$

avec

$$s = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \text{ et } r = \frac{1}{z_0}$$

$z_0$  est solution de l'équation  $\rho z^2 - (\rho + 1)z + 1$

$$\text{on trouve } z_0 = \frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{\lambda}$$

on remplace dans l'expression, on obtient

$$P_{(0,1)} = \frac{\alpha(\mu - \lambda)}{\mu(\lambda + \alpha)}$$

### 3.3.4 Condition de stabilité

La condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable, d'après les calculs de probabilités stationnaires est

$$\frac{\lambda}{k\mu} < 1$$

### 3.3.5 Mesures de performances du Système

Dans cette section, énumérez quelques mesures de performance importantes avec leurs formules.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{0,1} = \frac{1}{D}; \\ s = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha}; \\ r = \frac{1}{z_0}; \\ P_{n,1} = p_{0,1} s^n \left( 1 + \left(\frac{r}{s}\right) + \dots + \left(\frac{r}{s}\right)^n \right) = p_{0,1} s^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{r}{s}\right)^{n-k}, \text{ pour } n = 1, 2, 3 \dots \\ p_{n,2} = \frac{\mu}{\lambda} p_{0,1} \left[ 1 + s \left(\frac{r}{s} + 1\right) + \dots + s^{n-1} \left[ 1 + \left(\frac{r}{s} + \dots + \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1}\right) \right] + s^n \left( 1 + \left(\frac{r}{s}\right) + \dots + \left(\frac{r}{s}\right)^n \right) \right]; \\ p_{n,2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \alpha}\right)^{n-k+1} p_{k-1,2}, \text{ pour } n \geq k. \end{array} \right.$$

- Nombre moyen De clients dans la file d'attente  $\bar{N}_Q$

$$\bar{N}_Q = \sum_{n \geq 0} n(p_{n,1} + p_{n,2}) \cdot$$

- Nombre moyen de clients dans le système  $\bar{N}$

$$\bar{N} = [(n + k)p_{n,1} + np_{n,2}] \cdot$$

- Nombre moyen de clients dans le système  $\bar{N}_s$

$$\bar{N}_s = \bar{N} - \bar{N}_Q = [(n + k)p_{n,1} + np_{n,2}] - \sum_{n \geq 0} n(p_{n,1} + p_{n,2}).$$

- Temps moyen qu'un client passe dans le système  $\bar{T}$

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{((n + k)p_{n,1} + np_{n,2})}{\lambda} \cdot$$

## 3.4 Études numériques

Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ " de différent  $k$  :

Dans le figure 3.1, 3.2, 3.3, le nombre de clients augmente avec l'augmentation de la valeur de lambda, et c'est logique car plus le nombre de clients qui arrivent est

important, plus leur nombre dans la file d'attente est important.

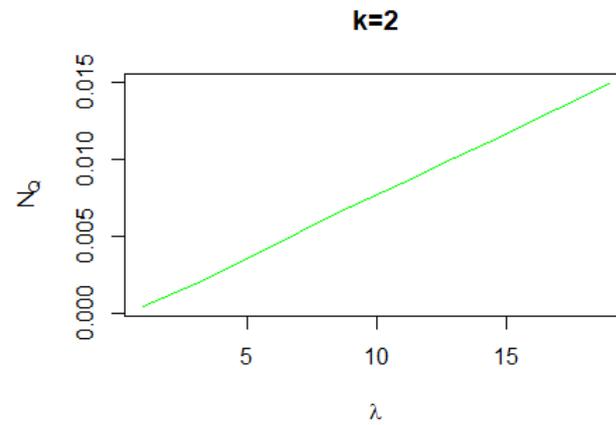


FIGURE 3.1 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ", " $k = 2$ "

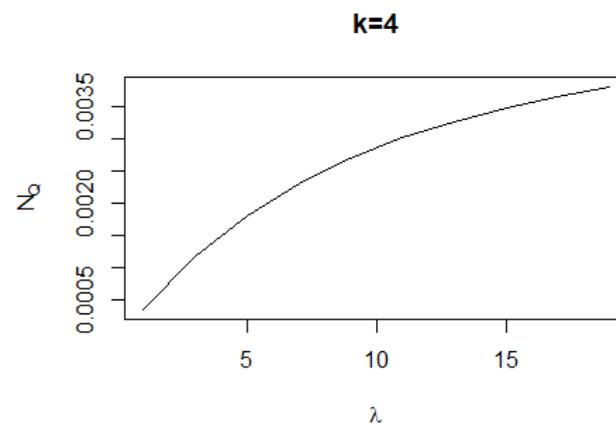


FIGURE 3.2 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ", " $k = 4$ "

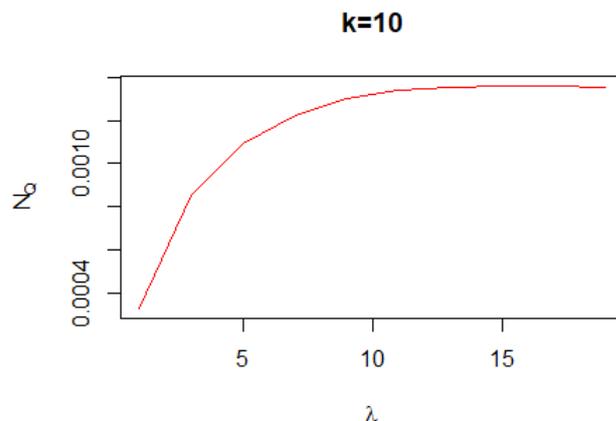


FIGURE 3.3 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ,"  $k = 10$ "

### Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ " de différent $k$ :

Dans les figures 3.4 , 3.5 le nombre de clients dans la file d'attente est décroissant et les valeurs de  $\alpha$  sont croissant, ça c'est logique a cause de chaque augmentation de  $\alpha$  signifie que le temps moyen de vacances est diminue, ce qui signifie que le serveur revient rapidement à son état normal, et donc le service client, c'est-à-dire une diminution du nombre de clients en attente.

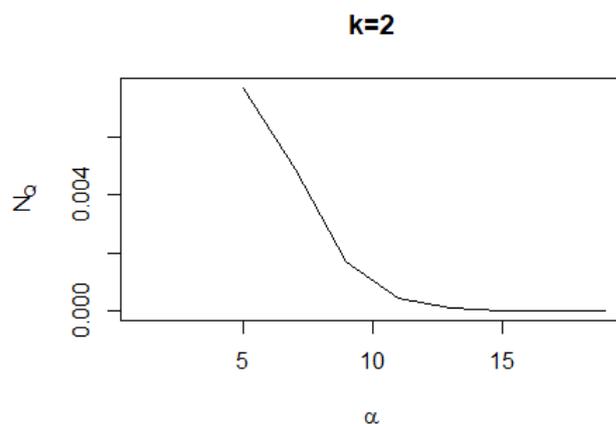


FIGURE 3.4 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ,"  $k = 2$ "

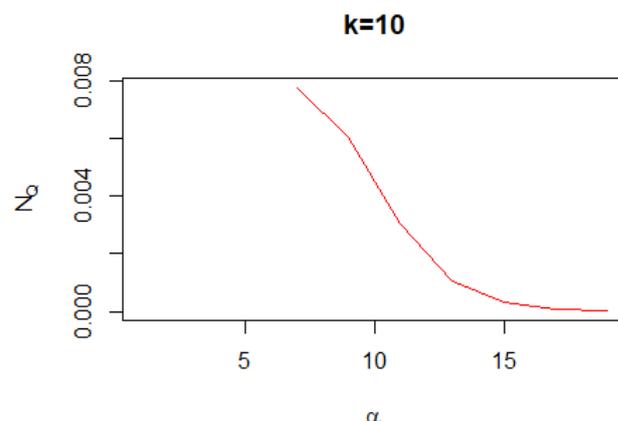


FIGURE 3.5 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ", " $k = 10$ "

## 3.5 Modèle 02

► Si le serveur démarre le service pour un groupe de  $k$  clients, les clients ne seront pas autorisés à entrer dans la file d'attente :

### 3.5.1 Probabilités de régime transitoire

• Soit  $\langle N(t), C(t) \rangle$  un processus de Markov à temps continu où  $N(t)$  est la variable aléatoire qui représente le nombre de clients en file d'attente à l'instant  $t$  et  $C(t)$  soit le variable aléatoire qui représente l'état du serveur (occupé/en vacances) à l'instant  $t$ . Les clients ne seront pas autorisés.

Nous définissons :

- $P_{(n,1)}(t)$  Probabilité que le serveur soit occupé s'il y a  $n$  clients dans la file d'attente à l'instant  $t$ .
- $P_{(n,2)}(t)$  Probabilité que le serveur soit en vacances s'il y a  $n$  clients dans la file d'attente à l'instant  $t$ .
- **Les équations de Chapman-Kolmogorov sont :**

$$P'_{(0,1)}(t) = -\mu P_{(0,1)}(t) + \mu P_{(k,1)}(t) + \alpha P_{(k,2)}(t), \text{ pour } n = 0 \quad (3.22)$$

$$P'_{(n,1)}(t) = -\mu P_{(n,1)}(t) + \mu P_{(n+k,1)}(t) + \alpha P_{(n+k,2)}(t), \text{ pour } n = 1, 2, \dots ; \quad (3.23)$$

$$P'_{(0,2)}(t) = -\lambda P_{(0,2)}(t) + \mu P_{(0,1)}(t) ; \quad (3.24)$$

$$P'_{(n,2)}(t) = -\lambda P_{(n,2)}(t) + \lambda P_{(n-1,2)}(t) + (\lambda + \mu)P_{(n,1)}(t) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots ; \quad (3.25)$$

$$P'_{(n,2)}(t) = -(\lambda + \alpha)P_{(n,2)}(t) + \lambda P_{(n-1,2)}(t) \quad \text{pour } n \geq k \quad (3.26)$$

### 3.5.2 Probabilités de régime stationnaire

Dans cette section, nous présentons les états stationnaire pour nombre de clients dans la file d'attente lorsque le serveur est occupé ou en vacances, en utilisant **les fonctions génératrices**. Lorsque le régime permanent (Stationnaire), les équations 3.22 à 3.26 deviennent [10]

$$\mu P_{(0,1)} = \mu P_{(k,1)} + \alpha P_{(k,2)}, \text{ pour } n = 0 \quad (3.27)$$

$$\mu P_{(n,1)} = \mu P_{(n+k,1)} + \alpha P_{(n+k,2)}, \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.28)$$

$$\lambda P_{(0,2)} = \mu P_{(0,1)}, \text{ pour } n = 0 \quad (3.29)$$

$$\lambda P_{(n,2)} = \lambda P_{(n-1,2)} + \mu P_{(n,1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, k-1 \quad (3.30)$$

$$(\lambda + \alpha)P_{(n,2)} = \lambda P_{(n-1,2)}, \quad n \geq k \quad (3.31)$$

• Les fonctions de génératrices pour le nombre de clients dans la file d'attente lorsque le serveur est occupé ou en vacances sont définis comme :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,1} z^n \quad \text{et} \quad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,2} z^n$$

d'après l'équation de balance 3.27 a 3.28, on trouve

$$G(z)\mu(1 - z^k) + \alpha H(z) = \mu \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,2} z^n \quad (3.32)$$

d'après 3.29 a 3.31, on trouve

$$H(z)[(\alpha + \lambda)(1 - z)] = \mu \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,2} z^n \quad (3.33)$$

$$H(z) = \frac{\mu \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,2} z^n}{\alpha + \lambda(1 - z)} \quad (3.34)$$

L'équation 3.34 représente la fonction génératrice de probabilité pour le nombre de clients dans la file d'attente lorsque le serveur est en vacances.

d'après l'équation 3.32 et 3.34

$$G(z) = \frac{\lambda(1-z)H(z)}{\mu(1-z^k)} \quad (3.35)$$

puis, on utilise l'équation 3.34 et 3.35

$$G(z) = \frac{(\lambda/\mu)(1-z) \left( \mu \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,1} z^n + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} P_{n,2} z^n \right)}{\lambda z^{k+1} - (\lambda + \alpha) z^k - \lambda z + (\lambda + \alpha)} \quad (3.36)$$

Par Théorème de Rouché[18], on remarque que l'expression du dénominateur de  $G(z)$ , se trouve  $k + 1$  racines, ces racines  $k$  varient sur ou à l'intérieur de cercle unitaire.

on choisit

$$\lambda z^{k+1} - (\lambda + \alpha) z^k - \lambda z + (\lambda + \alpha)$$

On a,

$$G(z) = \frac{A}{u(z - z_0)} \quad (3.37)$$

d'après l'équation 3.35, si  $z = 1$ , on déduit

$$G(1) = \frac{\lambda}{k\mu} H(1) \quad (3.38)$$

et

$$H(1) + G(1) = 1 \quad (3.39)$$

d'après l'équation 3.38, 3.39, on a

$$H(1) = \left( 1 + \frac{\lambda}{k\mu} \right)^{-1} \quad (3.40)$$

Si,  $z = 1$

$$G(1) = \frac{A}{\mu(1 - z_0)} \quad (3.41)$$

d'après l'équation 3.38, 3.40, 3.41

$$A = \frac{\lambda}{k\mu} \left( 1 + \frac{\lambda}{k\mu} \right)^{-1} (1 - z_0) \quad (3.42)$$

d'après l'équation 3.37,3.42

$$G(z) = \frac{\lambda/k\mu(z_0 - 1)}{1 + \lambda/k\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_0^{n+1}} \quad (3.43)$$

d'après les calculs précédent on déduit

$$P_{n,1} = \frac{\lambda/k\mu(z_0 - 1)}{1 + \lambda/k\mu} \left( \frac{1}{z_0^{n+1}} \right) \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.44)$$

d'après l'utilisation des équations 3.28,3.29,3.30

$$P_{n,2} = \frac{\mu}{\lambda} \sum_{t=0}^n P_{t,1} \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots, k - 1 \quad (3.45)$$

$$P_{n,2} = \left( \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right)^{n-k+1} P_{k-1,2} \text{ pour } n \geq k \quad (3.46)$$

### 3.5.3 Condition de stabilité

La condition nécessaire et suffisante pour que le système stable, d'après les calculs de probabilités stationnaires est

$$\frac{\lambda}{k\mu} < 1$$

### 3.5.4 Mesures de performances du système

Dans cette section, énumérez quelques mesures de performance importantes avec leurs formules.

$$\begin{cases} P_{n,1} = \frac{\lambda/k\mu(z_0-1)}{1+\lambda/k\mu} \left( \frac{1}{z_0^{n+1}} \right) \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots; \\ P_{n,2} = \frac{\mu}{\lambda} \sum_{t=0}^n P_{t,1} \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots, k - 1; \\ P_{n,2} = \left( \frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \right)^{n-k+1} P_{k-1,2} \text{ pour } n \geq k. \end{cases}$$

- Nombre moyen de clients dans la file d'attente  $\bar{N}_Q$

$$\bar{N}_Q = \sum_{n \geq 0} n(p_{n,1} + p_{n,2})$$

•variance  $v(x)$

$$v(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n \geq 0} n^2 (p_{n,1} + p_{n,2}) \right) - \bar{N}_Q^2$$

### 3.5.5 Etude numérique

Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ " de différent  $k$  :

Dans le figure 3.6, 3.7, 3.8, le nombre de clients augmente avec l'augmentation de la valeur de lambda, et c'est logique car plus le nombre de clients qui arrivent est important, plus leur nombre dans la file d'attente est important.

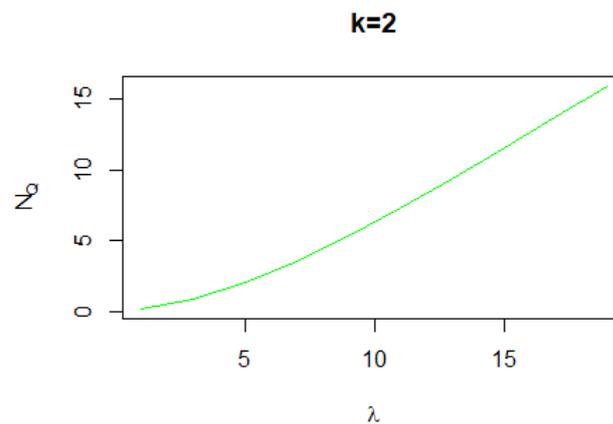


FIGURE 3.6 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ,"  $k = 2$ "

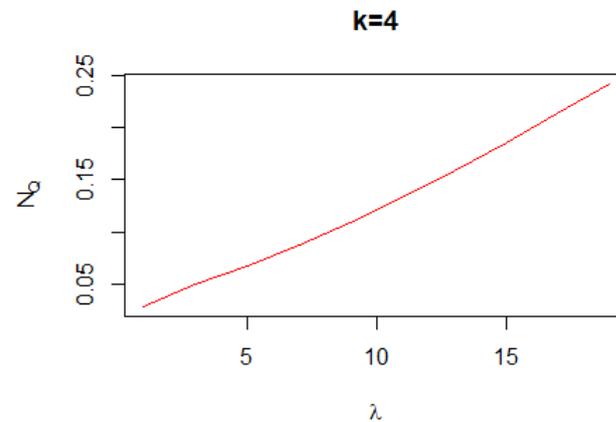


FIGURE 3.7 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ,"  $k = 4$ "

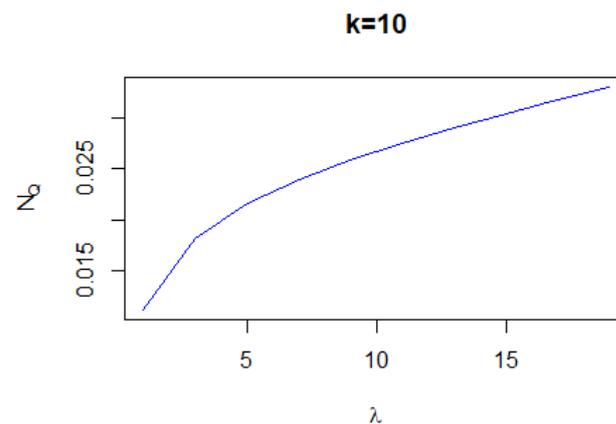


FIGURE 3.8 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\lambda$ ,"  $k = 10$ "

### Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ " de différent $k$ :

Dans les figures "3.9, 3.10, 3.11" le nombre de clients dans la file d'attente est décroissant et les valeurs de  $\alpha$  sont croissant, ça c'est logique a cause de chaque augmentation de  $\alpha$  signifie que le temps moyen de vacances est diminue, ce qui signifie que le serveur revient rapidement à son état normal, et donc le service client, c'est-à-dire une diminution du nombre de clients en attente.

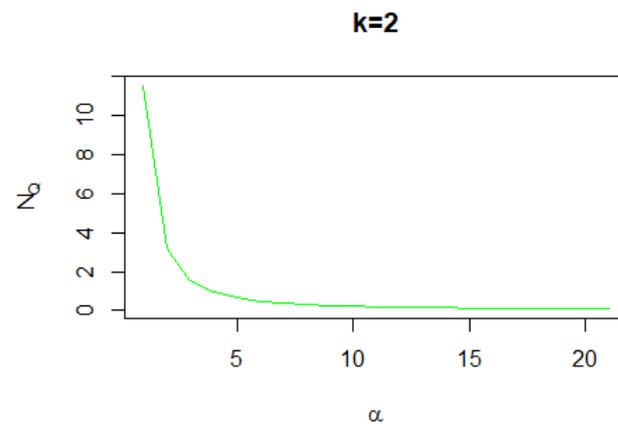


FIGURE 3.9 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ,"  $k = 2$ "

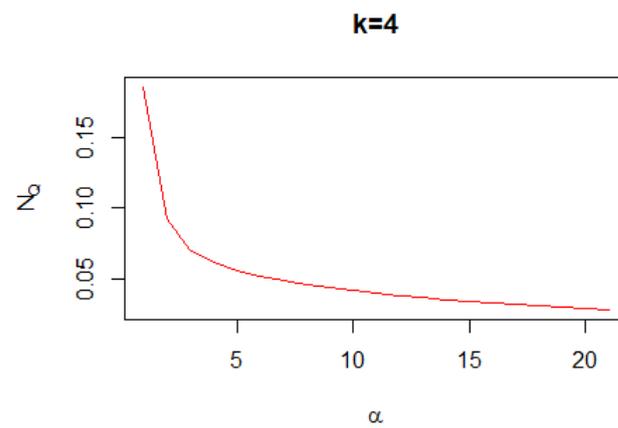


FIGURE 3.10 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ,"  $k = 4$ "

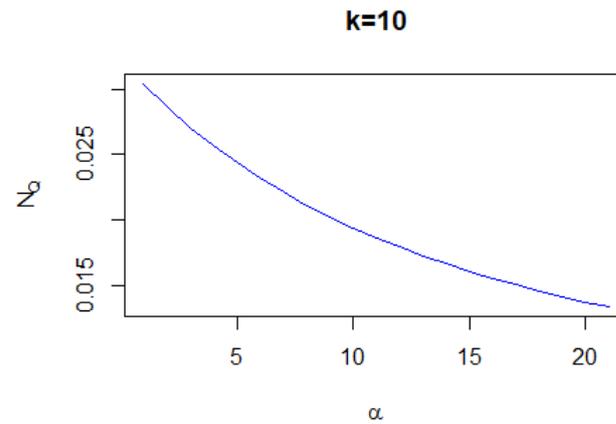


FIGURE 3.11 – Nombre moyen de clients dans la file en fonction de " $\alpha$ ,"  $k = 10$ "

## Conclusion

Un système de file d'attente avec service par groupe fixé sur un seul serveur avec vacances multiples dans lequel le taux d'arrivée  $\lambda$  suit un processus de Poisson et le temps de service suit une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$ . S'il ya dans le système  $k$  clients lorsque le serveur dans le système et le service immédiatement de taille  $k$ . Alors les  $k$  premiers clients seront sélectionné dans la file d'attente et le service sera donné sous forme de groupe. Jusqu'à ce que tout terminé tous les clients.

# Bibliographie

- [1] *Agnés Lagnoux :Claudie Hassenforder. Processus stochastique modélisation Responsable UE(lagnoux@univ-tlse2.fr),Conception polycopié.*
- [2] *Anais Vergne et Céline Comte(2018),conception polycopie(Files d'attente)*
- [3] *Bailey,N.T.J,1954, on queueing process with bulk service, Journal of Royal Statistical Society, B16,80-97.*
- [4] *Borthakur,A.and Medhi,J,1973,A queueing system with arrival and service in batches of variable size,Transportation sciences,7,85-99*
- [5] *Cohen,J.W,1980,The Single Server Queue, 2nd edition,North-Holland, Amsterdam*
- [6] *Downton,F,1955,Waiting time in bulk service queues,Journal of Royal Statistical Society B17,256-261*
- [7] *Florin Avran (2009-2010), "Processus de Markov, de Levy, Files d'attente, Actuariat et Fiabilité",*
- [8] *Guérin Héléne(2012), conception Polycopie (Mat-3017 - Processus stochastiques)*
- [9] *G.Ayyappan,G.Devipriya and A. Muthu Ganapthi Subramanian,2013, Analysis of Single Server Fixed Batch Service Queueing System under Multiple Vacation with Catastrophe,at Mathematical Theory and Modeling Vol3,No.11*
- [10] *G.Ayyappan,Article in international journal of computer applications, March 2014*
- [11] *Jaiswal,N.K,1964,A bulk service queueing problem with variable capacity, Journal of Royal Statistical Society,B26,143-148*
- [12] *Miller,R.G,1959,A contribution to the theory of bulk queues,Journal of Royal Statistical Society, B21,320-337*
- [13] *Medhi,J,1975,Waiting time distribution in a Poisson queue with a general bulk service rule, Mgmt. Sci. 217,777-782*

- 
- [14] M. Youcef TALEB , *Principes d'invariace dans les systèmes de files d'attente avec Rappels*, page05, 2013
- [15] Nasser saheb (2004), *conception Polycopie Processus stochastique et simulation (processus de Markov, processus de naissance)*, IUP Miage Bordeaux
- [16] Neuts, M.F, 1967, *A general class of bulk queues with Poisson input*, *Ann. Math. Stat.* 38, 757-770.
- [17] Powell, W.B, 1987, *Waiting time distribution for bulk arrival, bulk service queues with vehicle holding and cancellation strategies*, *Naval Res. Logist.* 34, 207-227
- [18] Rudin, *Analyse réelle et complexe. Théorème de Rouché et applications.*
- [19] S. Ross (2e éd, 1996), *Stochastic Processes. John-Wiley and Sons, New York.*
- [20] Sabin Lessard, *Processus Stochastiques Cours et Exercices Corrigés (z-lib.org)*
- [21] Thomas L. Saaty, *Element of queueing theory, With applications, office of Naval Research, 1961*