

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Rayonnements

Par

Halimi Rekia

Sur le thème

**L'effet des propriétés thermo-physiques sur le transfert
de chaleur dans un matériau bicouche**

Soutenu le : 23/06/2022 devant le jury composé de :

Dr. Abada Ahmed	MCA	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Président
Dr. Sahabi Toufik	MCB	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Encadreur
Pr. Doumi Bendouma	Pr	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Examineur

Année Universitaire 2021 - 2022

DEDICACE

Je dédie ce mémoire à

*Ma mère; dont le rêve était d'atteindre ce diplôme, à
mon père qui m'a poussé à rechercher la connaissance*

Pour chaque famille "HALIMI"

*Je dédie ce mémoire à mes chères
sœurs "KARIMA. AMINA. NADIA. NAWAL."*

à mes chers frères: "Aziz, Youssef"

à ma chérie "OUARDA"

*à mes amis "Souad, Imane, Jojo, Houda, Aicha
Fatima, wijdene, Khaireur" et à tous les étudiants du
Master 2 physique des rayonnements 2022.*

*À mon encadreur Dr "Sahabi. T" qui a proposé le
thème de ce mémoire.*

*À tous les professeurs de l'université de Saida et
spécialement les professeurs de la physique des*

Rayonnements.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné la force et la volonté

J'exprime mes profondes reconnaissances à mon encadreur Docteur «SAHABI T.» pour sa disponibilité, sa patience et la qualité de son encadrement

Mes remerciements vont également aux membres du jury, Ma profonde gratitude à monsieur Dr. Abada Ahmed ,Dr. Doumi Bendouma d'avoir accepté de lire mémoire et de l'évaluer.

« Merci Beaucoup »

Tables des matières

Introduction générale	01
Références	03
<i>Chapitre I Etude de transfert de chaleur</i>	
I. 1 Introduction	05
I. 2 La chaleur	05
I.3 La température	05
I.4 Modes de transfert de chaleur	05
I.4.1 La conduction	06
I.4.2 La convection	07
(a) Convection naturelle	07
(b) Convection forcé	07
I.4.3 Le rayonnement	08
I. 5 Applications des propriétés thermiques de matériaux	09
I. 6 Propriétés thermo-physiques	09
I.6.1 Conductivité	09
I.6.2 Résistivité	10
I.6.3 Diffusivité	10
I.6.4 Coefficient de convection	10
I.6.5 Nombre de Biot	11
Références	12
<i>Chapitre II Equation de chaleur</i>	
II.1. Introduction	14
II.2 Définition	14
II.3 Formulations des équations de la Chaleur	14
II.3.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes	14
II.3.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques	15
II.3.3 Equation de la chaleur en coordonnées sphériques	15
II.4 Condition initiales et aux limites	16
II.5 Résolution de l'équation de chaleur	16
II.5.1 Méthode séparation des variables	16

II.5.2 Méthodes numériques	19
• Les différences finies	19
• Les volumes finis	19
• Les éléments finis	20
II.6 Logiciel de calcul	20
II.6.1 La simulation	20
II.6.2 Le Maple	21
(a) Aperçu historique	21
(b) Définition	21
(c) Structure	21
Références	23
<i>Chapitre III L'effet des propriétés thermo physiques sur le transfert de chaleur dans un matériau</i>	
III.1 Introduction	25
III.2 Etude de transfert de chaleur à une dimension pour un matériau bicouche	25
III.3 La méthode de séparation de variables	26
III.4 Les solutions adimensionnelles	29
III.5 L'effet des propriétés thermo-physiques sur le transfert de chaleur	30
III.5 La procédure Maple	32
Références	35
Conclusion	36
ملخص	37
Abstract	37
Résumé	37

Liste de figures & tables

Figure I.1: <i>Les trois types de Transfer de chaleur .</i>	06
Figure I.2 : <i>Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par conduction thermique.</i>	06
Figure I.3 : <i>Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par convection thermique.</i>	07
Figure I.4: <i>Convection naturelle d'une plaque chaude</i>	07
Figure I.5 : <i>Convection forcée d'une plaque chaude</i>	08
Figure I.6 : <i>Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par rayonnement</i>	08
Figure I.7 : <i>Longueur d'ondes électromagnétiques</i>	09
Figure II.1: <i>Structure du programme MAPLE.</i>	22
Figure III.1 : <i>Représentation d'un matériau bicouche</i>	26
Figure III.2 : <i>La fonction $E(\beta)$ pour $\omega = 0.5, \kappa = 1.5, \gamma = 1.5, Biot_1 = 1.5,$ et $Biot_2 = 2.5$</i>	28
Table III.1 : <i>Les racines de la fonction $E(\beta)$</i>	28
Figure III.3 : <i>L'étude paramétrique en foction de (a) La conductivité, (b) La diffusivité, (c) Les épaisseur, (d) Nombre de Biot1, (e) Nombre de Biot2</i>	30
Table III.2 : <i>Les grandeurs utilisées lors de l'étude paramétrique</i>	31
Figure III.4 <i>L'étude paramétrique en foction de (a) La conductivité, (b) La diffusivité, (c) Les épaisseur, (d) Nombre de Biot1, (e) Nombre de Biot2</i>	32

INTRODUCTION

GENERALE

La thermodynamique est une science qui naît à la fin du 17^{ème} siècle. Elle étudie les propriétés des systèmes où interviennent les notions de température et de chaleur. En Physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. L'équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail, et quantité de chaleur ont une même unité : le joule [1]

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température. Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un corps à un autre corps est le fait d'une différence de température entre les deux systèmes.

La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue le second principe de la thermodynamique. Ce second principe met en évidence la notion d'irréversibilité : la chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail.

Un matériau est la forme marchande d'une matière première choisie en raison de propriétés d'usage spécifiques et mise en œuvre par des techniques appropriées pour l'obtention d'un objet de géométrie donnée à fonction préméditée. Un matériau est une matière d'origine naturelle ou artificielle que l'homme les utilise pour fabriquer des objets [2]. Les propriétés thermo-physiques de la matière sont extrêmement variées et très utiles dans différents domaines : - Industriel pour confection et amélioration de qualité de nouveaux matériaux - Agroalimentaire pour la conservation des produits - Génie civile - Scientifique pour construction et simulations de systèmes physiques Les propriétés retenues concernent, la conduction et le rayonnement thermique des matériaux.

Un transfert de chaleur ou transfert thermique entre deux corps est une interaction énergétique qui résulte d'une différence de température entre les deux corps. Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et des composantes électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs des procédés industriels, etc

Dans ce mémoire, on va traiter le sujet de passage de la chaleur entre deux systèmes mis en contact en fonction de leurs propriétés thermo-physiques (conductivités, diffusivités, etc...). Le premier chapitre vas aborder de manière générale la description mathématique du phénomène de transfert de chaleur par conduction moyennant l'équation différentielle descriptif connues sous le nom l'équation de chaleur ou l'équation de diffusion.

Références

[1] Cours de Thermodynamique, Rachida OUARGLI-SAKER, 2015/2016, Université des Sciences et de la Technologie D'Oran Mohamed BOUDIAF.

[2] Cours de Les matériaux et leur application ,TEMMAR FATIMA ,Département physique des rayannmennts ,Université Moulay Tahar Saida.

Chapitre I

Le transfert de chaleur

I. 1 Introduction

Le transfert de chaleur est l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. Il intervient naturellement entre deux systèmes dès qu'existe entre eux une différence de température et cela quel que soit le milieu même vide qui les sépare. La base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les principes de quantité de chaleur et de différence de température définis par la thermodynamique dans ses principes mêmes. Toutefois, la thermodynamique classique traite de l'état des systèmes sous l'angle macroscopique et ne fait aucune hypothèse concernant la structure de la matière. Ainsi, elle s'attache aux états d'équilibre et néglige les différents mécanismes qui y conduisent [1]. Dans ce chapitre, nous étudierons les modes de transfert de chaleur et quelques propriétés thermo-physiques des matériaux

I. 2 La chaleur

En physique, une forme particulière d'énergie est appelée chaleur. L'équivalence de la chaleur et du travail est le premier principe de la thermodynamique. Ainsi, énergie, travail et chaleur ont la même unité : le joule. La base de la recherche sur le transfert de chaleur est le concept de chaleur et de différence de température [2].

I.3 La température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu. Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température [2].

I.4 Modes de transfert de chaleur

Le transfert de chaleur est défini par la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de températures. Le transfert de chaleur est régi, non seulement par une relation unique, mais, plutôt par une combinaison de différentes lois physiques indépendantes. On distingue, généralement, trois modes de transfert [3]. Figure (I.1).

- **Conduction** : Transfert dans la masse
- **Rayonnement** : Transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée.

- **Convection** : Transfert par transport.

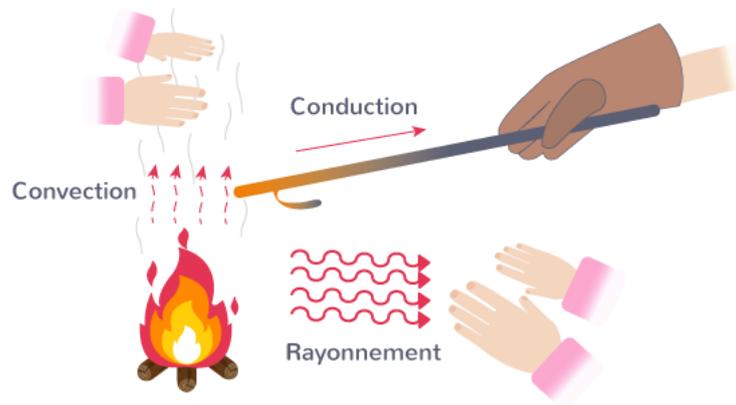


Figure (I.1) *Les trois types de Transfer de chaleur*

I.4.1 La conduction

La conduction thermique résulte de « chocs » à l'échelle moléculaire et atomique. Elle va donc être liée à la structure et à l'organisation du matériau. Elle peut avoir lieu dans les solides et dans une moindre mesure dans les fluides, plus dans les liquides que dans les gaz. C'est un phénomène ; de transport de la chaleur ; très analogue à la conduction de l'électricité. Il s'agit d'un transfert d'énergie à petite échelle, dans un corps localement au repos. Nous parlons de conducteur et d'isolant de la chaleur. Elle est décrite par la loi de Fourier (1807). Elle peut aussi être définie, par une simple explication, comme un phénomène par lequel l'énergie est transférée des zones à haute température vers des zones à basse température. Dans n'importe quel milieu, ce mode de transfert thermique tend à uniformiser la répartition d'énergie cinétique des particules constituant dans la masse du corps. Des exemples typiques pour la conduction sont : le transfert de chaleur par des parois de bâtiments, des conduites qui transportent des différents agents chauds ou froids, [4] (Figure (I. 2))

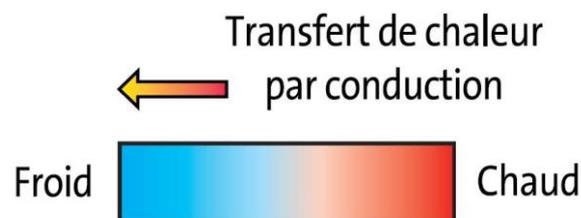


Figure (I.2) *Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par conduction thermique.*

I. 4 .2 La convection

La convection est un phénomène d'échange de chaleur dans lequel la chaleur est transférée d'une surface solide vers un fluide (ou un gaz) en mouvement. La convection se compose de deux éléments:

- Transfert d'énergie causé par un mouvement moléculaire aléatoire (diffusion),
- Transfert d'énergie par un mouvement volumique ou macroscopique du fluide

Le coefficient de transfert thermique par convection (h) dépend du mouvement du fluide, de la géométrie et des propriétés thermodynamiques et physiques (Figure (I.3)) [5]

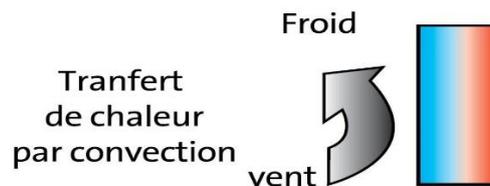


Figure (I.3) Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par convection thermique

En principe, il existe deux modes de transfert thermique par convection

(a) convection naturelle

Le mouvement du fluide le long de la surface solide est dû aux poussées induites par les changements dans la densité du fluide résultant de la différence de température entre le solide et le fluide. Lorsqu'une plaque chaude est immergée dans un fluide froid, les particules de fluide en contact avec la plaque se réchauffent et leur densité diminue, ce qui provoque leur mouvement vers le haut (Figure (I.4)).

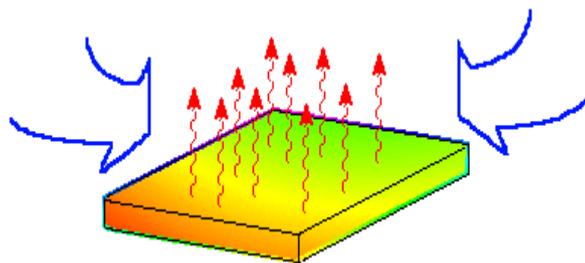


Figure (I.4) Convection naturelle d'une plaque chaude

(b) Convection forcé

Un moyen extérieur, comme un ventilateur ou une pompe, est employé pour accélérer le mouvement du fluide au niveau de la surface du solide. Le mouvement rapide des particules du fluide sur la face du solide permet d'atteindre une valeur maximum du gradient

de température, ce qui augmente le taux d'échange thermique. Dans la figure suivante, l'air est forcé au-dessus d'une plaque chaude (Figure (I.5)) [5]

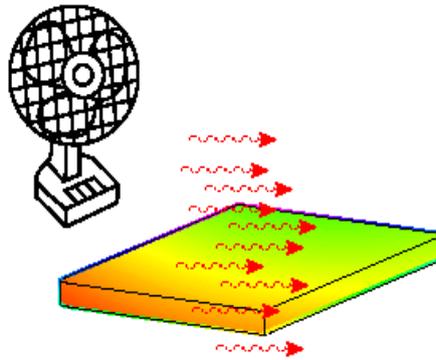


Figure (I.5) Convection forcée d'une plaque chaude

I.4.3 Le rayonnement

Le rayonnement est un transfert d'énergie sous forme d'ondes ou de particules, qui peut se produire par rayonnement électromagnétique (par exemple : infrarouge) ou par une désintégration (par exemple : radioactivité α). Par conséquent, le transfert peut se réaliser dans le vide. L'exemple caractéristique de rayonnement est celui du soleil dans l'espace (cf. figure I.6).

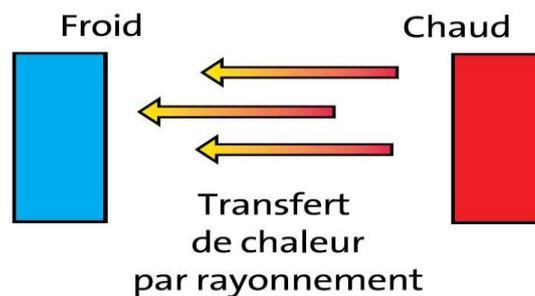


Figure (I.6) Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par rayonnement

En physique, le terme radiation ou son synonyme rayonnement désigne le processus d'émission ou de transmission d'énergie sous forme de particules ou d'ondes électromagnétiques les radiations électromagnétiques (ondes radio, infrarouge, lumière, rayons X, rayons gamma) ainsi que les rayonnements particulaires (particules alpha, bêta, neutrons). Le terme de "rayonnement" désigne également l'énergie ainsi émise et propagée, qui est aussi appelée "énergie rayonnante". On parle aussi de rayonnement lumineux, et de rayonnement calorifique [6] (Figure (I.7))

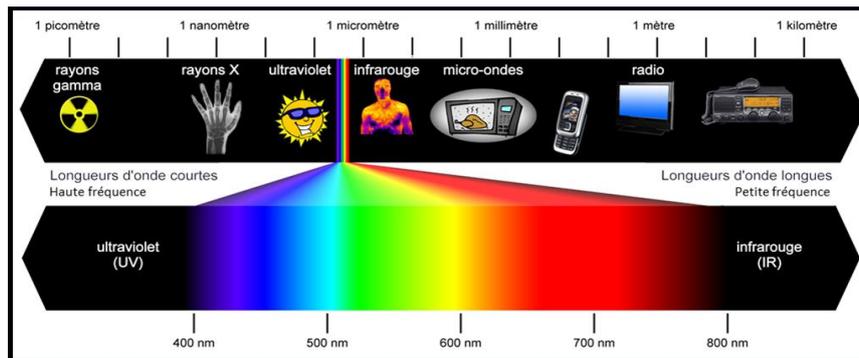


Figure (I.7) Longueur d'ondes électromagnétiques

I. 5 Applications des propriétés thermiques de matériaux

Les applications de la connaissance des propriétés thermiques des matériaux, et donc de leurs mesures, couvrent la quasi-totalité de l'activité industrielle: génie des procédés de matériaux, modification des structures et des formes, production d'énergie électrique (centrales thermiques), combustion des matériaux, sidérurgie, métallurgie, génie climatique et bâtiment (production, stockage et isolation du chaud ou de froid), mécanique (résistance des matériaux soumis à des variations ou gradients de température), aérospatial et aéroonastique (protection thermique), électronique (propriétés de conduction, protection des composants, capteurs nano- et micro-électronique), agriculture et agroalimentaire (production et conservation des aliments, cuisson), environnement (imagerie thermique des sols), pharmacie (production et conservation), chimie et biologie (synthèse, réactions), médecine ("diagnostic et soins, contrôle" non destructif des produits (imagerie infrarouge)...

I. 6 Propriétés thermo-physiques

La connaissance des propriétés thermiques des matériaux permet de modéliser les transferts thermiques dans des systèmes complexes et de prédire leurs comportements thermiques. L'établissement du bilan thermique permet de dimensionner les systèmes d'évacuation de la chaleur (système climatique) ou les dispositifs d'isolation pour limiter les pertes d'énergie, et de calculer au plus juste l'énergie à apporter à un système pour la transformation des matériaux, d'améliorer la qualité et la sécurité des produits par la maîtrise des processus de fabrication...Les équations (expressions mathématiques des grandeurs physique sa mises en jeu dans les phénomènes thermiques) reposent principalement sur le principe de la conservation de l'énergie appelée bilan énergétique [7].

I.6.1 Conductivité

La conductivité thermique (notée λ) correspond à la capacité d'un matériau à conduire la chaleur. Elle représente la quantité de chaleur transférée par unité de surface et par unité de temps, sous un gradient de température [8].

I.6.2 Résistivité

Puisque la résistivité est l'inverse de la conductivité, la résistivité dépend des mêmes paramètres physiques que la conductivité. Ainsi, ce n'est pas tous les matériaux qui sont de bon conducteur à température ambiante. Plus un matériau est résistif, plus il est coûteux en différence de potentielle pour y faire circuler un courant (loi d'Ohm).

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi} \quad (I.1)$$

I.6.3 diffusivité

La diusivité thermique notée D est, comme son nom l'indique, un coefficient de diffusion qui intervient directement dans l'équation de la chaleur. Elle s'exprime de fait en m^2s^{-1} et décrit la rapidité avec laquelle la chaleur se transmet dans le matériau. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$D = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (I.2)$$

Elle donne notamment le temps caractéristique de diusion en fonction de la longueur caractéristique de diffusion et vice versa [11]

$$D = \frac{[Lc]^2}{[t_c]} \Rightarrow \begin{cases} L_c = \sqrt{D \times T_c} \\ T_c = \frac{L_c^2}{D} \end{cases} \quad (I.3)$$

I.6.4 coefficient de transfert thermique (coefficient de convection)

Le coefficient de transfert thermique ou coefficient de transmission thermique est un coefficient quantifiant le flux d'énergie traversant un milieu, par unité de surface, de volume ou de longueur. L'inverse du coefficient de transfert thermique est la résistance thermique. C'est un terme important dans l'équation d'un transfert thermique et permet d'indiquer la facilité avec laquelle l'énergie thermique passe un obstacle ou un milieu.

Dans le cas d'un transfert surfacique, il est appelé coefficient de transfert thermique surfacique. C'est dans ce cas un flux thermique au travers d'une surface d'échange. Il permet

de calculer l'intensité de l'énergie échangée par unité de surface et unité de temps en fonction de la différence de température de part et d'autre de la surface d'échange.

Dans le cas d'un transfert le long d'une surface dont l'une des dimensions excède fortement l'autre, on parle de coefficient de transfert thermique linéique. Dans le cas d'un transfert pour lequel on peut considérer que le flux passe par un point, on parle de coefficient de transfert thermique ponctuel.

$$U = \frac{\phi}{S\Delta T} \quad (\text{I.4})$$

I.6.5 Nombre de Biot

Le nombre de Biot (Bi) est un nombre sans dimension utilisé dans les calculs de transfert thermique en phase transitoire. Il compare les résistances au transfert thermique à l'intérieur et à la surface d'un corps. Le nombre de Biot est défini comme

$$B_i = \frac{hL_c}{\lambda_b} \quad (\text{I.5})$$

avec:

- h - coefficient global de transfert thermique ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$)
- L_c - longueur caractéristique (m)
- λ_b - conductivité thermique du corps ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)

Le nombre de Biot est donc le rapport entre la résistance thermique de conduction et la résistance thermique de convection. Si le nombre de Biot est plus petit que 0.1 la variation de température dans le solide est inférieure à 5% et donc négligeable

Références

- [1] Dr Abdelkrim Haddad, Transferts thermiques, Dar -El - Djazairia Alger 2001.
- [2] Salmi Somia, Etude numérique d'une convection naturelle en 2D par la méthode de volumes finis, Mémoire du diplôme de Master en Mathématiques et Informatique, Université de M'SILA, Année 2017/ 2018
- [3] Soumia Derghal, Etude des sauts & chutes de températures dans un matériau bicouche lors de l'équilibre instantané, Mémoire de Master, 2020/2021. Université de saïda.
- [4] Tabet Sara, Etude numérique de la convection naturelle dans un enciente ferméé partiellement chauffée, Mémoire de Doctorat, 2017, Unversité d'oran 2.
- [5] Bahloul Ilyes, Conception et dimensionnement d'un radiateur automobile, Mémoire Master, 2018, Unversité de Blida.
- [6] Arbaoui Khayra, Etude de transfert de chaleur dans un matériau bicouche, Mémoire de Master, 2020/2021. Université de Saida.
- [7] Mr. Benacer Bousaria, Etude de la convection forcée en régime laminaire sur une plaque plane chaude pour différents angles d'attaque, Mémoire de Master, 2018/2019. Université mohamed khider de Biskra.
- [8] Sébastien Gauthier, Caractérisation thermique de la matière par la méthode 3ω , Mémoire de Doctorat 2012, Spécialité : Électronique, Université Montpellier 2.

Chapitre II

Equation de chaleur

II. 1 Introduction

L'équation de la chaleur obéit aux principes de la thermodynamique, elle-même branche de la physique développée au 18ème siècle Son principal objet de recherche est l'échange d'énergie thermique. C'est son ascension L'origine de la révolution industrielle, notamment grâce au développement de la machine à vapeur Cela a permis le développement de nouveaux moyens de transport et de machines industrielles. Par la suite, la thermodynamique comprend également l'étude des conditions d'équilibre du système selon les grandeurs qui les caractérisent (température, pression, quantité de substance, activité chimique, etc.) [1]. Dans ce chapitre, nous allons parler de l'équation de la chaleur avec toutes ses coordonnées et aborder ses solutions théorique et numérique.

II.2 Définition

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en 1811, modélisa l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Il a permis ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques. [2]. L'équation de chaleur unidimensionnelle est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (\text{II.1})$$

où $c > 0$ est une constante donnée et u est une fonction réelle inconnue de deux variables x et t . L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique. Exister d'une manière générale, les équations aux dérivées partielles sont divisées en trois catégories : ellipse, parabole et hyperbole. Ici, $u = u(x, t)$ est la température dans un conducteur à 1D. la valeur de $u(x, t)$ dépend du temps $t \geq 0$ et de la position x .

II.3 Formulations des équations de la Chaleur

II.3.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes

Dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général [3]

$$K \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q \quad (\text{II.2})$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $q = 0$
- c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Les hypothèses (a) + (b) + (c) permettent d'écrire

$$d \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dt} \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dz} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.4})$$

Le rapport $\alpha = \lambda \rho c$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{II.5})$$

II.3.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques

Elle s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{q}{\lambda} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.6})$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de z , l'équation (II.6) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

$\frac{q}{k} = 0$ (Sans source de chaleur). Donc l'équation devient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{II.8})$$

II.3.3 Equation de la chaleur en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, on a

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{q}{\lambda} \quad (\text{II.9})$$

II.4 Condition initiales et aux limites

L'équation générale de la chaleur exprime une relation entre la fonction température T et les variables x ; y ; z et t . La solution mathématique de cette équation aux dérivées partielles, linéaire, du deuxième ordre admet en principe une infinité de solutions. Aussi, sa résolution nécessite la connaissance, d'une part de la condition initiale c'est à dire la répartition initiale des températures en tout point du milieu $T(x; y; z; 0)$, d'autre part la loi de variation en fonction du temps de la température ou de sa dérivée normale sur la surface S . Ce sont les Conditions aux limites spatio-temporelles. Sur les frontières d'un matériau différents types de conditions aux limites peuvent apparaître dans les problèmes couramment rencontrés en transfert de chaleur.

- ✓ La température est imposée sur la surface S (problème de Dirichlet)
- ✓ La densité de flux est imposée en surface (problème de Neumann)

II.5 Résolution de l'équation de chaleur

Au début du 19e siècle, J. Fourier étudia le phénomène de la propagation de la chaleur. Ses études l'ont amené à développer une méthode analytique pour résoudre le modèle mathématique qu'il a construit ; à savoir un problème au bord pour l'équation de la chaleur. Cette méthode établit l'idée générale et originale, selon laquelle toute fonction réelle définie sur un intervalle fermé peut être représentée comme série de fonctions trigonométriques [4]

II.5.1 Méthode séparation des variables

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur unidimensionnelle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

avec les relations de compatibilité entre la condition initiale et les conditions aux limites [5]

$$u_0(0) = u_0(L) = 0 \quad (\text{II.11})$$

- **1ère étape** : La méthode de séparation des variables consiste à poser

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x) \quad (\text{II.12})$$

dans l'équation et de "séparer les variables". L'équation devient

$$\psi'(t) \varphi(x) = k \psi(t) \varphi''(x) \quad (\text{II.13})$$

On divise alors formellement par $u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{k} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \quad (\text{II.14})$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'ils sont constants, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \lambda k \psi(t) \\ \varphi''(x) &= \lambda \varphi(x) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

On a bien obtenu deux équations à variables séparées.

- **2ème étape** : On cherche les solutions non nulles de l'équation en x avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \lambda \varphi(x) \\ \varphi(0) &= \varphi(L) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Les solutions dépendent de la constante λ :

(a) Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = A e^{\sqrt{\lambda}x} + B e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (\text{II.17})$$

On cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \\ \varphi(L) = 0 &\Rightarrow A(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \\ &\Rightarrow 2A \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

(b) Si $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= Ax + B \\ \varphi(0) = 0 &\Rightarrow B = 0, \\ \varphi(L) = 0 &\Rightarrow AL = 0 \Rightarrow A = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

(c) Si $\lambda < 0$ alors

$$\varphi(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B \cos(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$\begin{aligned}\varphi(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ \varphi(L) = 0 &\Rightarrow A \sin(\sqrt{-\lambda L}) = 0 \\ \Rightarrow \text{ou bien } A = 0 &\text{ ou bien } \sqrt{-\lambda L} = n\pi, n > 0 \text{ entier}\end{aligned}\tag{II.20}$$

Il existe donc des solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n > 0\tag{II.21}$$

associées aux valeurs de λ suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\tag{II.22}$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à une valeur de n . On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées. La fonction propre, comme les vecteurs propre en algèbre linéaire, sont définis à un scalaire multiplicatif près.

- **3ème étape** : On remarque que le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx,\tag{II.23}$$

orthogonalise la suite des $\varphi_n(x)$, dans le sens où

$$\langle \varphi_n(x), \varphi_m(x) \rangle = 0 \text{ pour } n \neq m\tag{II.24}$$

Ceci indique que la suite des $\varphi_n(x)$ est une base sur laquelle on va pouvoir développer la solution en la projetant grâce au produit scalaire.

- **4ème étape** : On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi'(t) = \lambda_n k \psi_n(t)\tag{II.25}$$

a pour solutions

$$\psi_n(t) = c_n e^{k\lambda_n t} = c_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\tag{II.26}$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 1 on trouve un espace vectoriel de dimension 1 de solutions. c_n est une constante arbitraire pour le moment.

A ce stade, les fonctions

$$\psi_n(t)\varphi_n(x) \quad (\text{II.27})$$

sont solutions de l'EDP (II.10) et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.

5ème étape : L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(t, x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (\text{II.28})$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients c_n pour que la solution $u(t, x)$ vérifie la condition initiale. Cette condition initiale s'écrit

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (\text{II.29})$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(0)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) = u_0 \quad (\text{II.30})$$

Ici, les c_n peuvent s'interpréter directement comme étant les coordonnées de la décomposition de u_0 dans la base des $\varphi_n(x)$. Comme les $\varphi_n(x)$ sont orthogonales pour le produit scalaire défini précédemment cf. (II.23), on a

$$c_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (\text{II.31})$$

On obtient donc la solution sous la forme d'une série. Ici il s'agit d'une série de Fourier où seules les composantes en $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ sont présentes, puisqu'on a imposé : $u(0) = u(L) = 0$ [5].

II.5.2 Méthodes numériques

D'un problème exact continu régissant par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

- **Les différences finies**

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre n_i de points discrets ou nœuds du maillage. Elle fournit une grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul, mais présente des inconvénients comme limitation à des géométries simples, et la difficulté de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann [6].

- **Les volumes finis**

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en oeuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles. Elle a comme avantage la permission de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, ainsi que une détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann. Son inconvénient est qu'elle a peu de résultats théoriques de convergence [6].

- **Les éléments finis**

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre n de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage. Elle a comme avantages un traitement possible de géométries complexes, et nombreux résultats théoriques sur la convergence. Son inconvénient est la complexité de mise en oeuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire [6].

II.6 Logiciel de calcul

II.6.1 La simulation

La simulation par ordinateur progresse avec le développement du matériel informatique. Depuis l'apparition des premiers ordinateurs, de nombreuses méthodes se sont inventées pour résoudre des problèmes restaient jusqu'à alors sans solutions. Aujourd'hui, la simulation numérique est utilisée dans de nombreux domaines de recherche et développement : mécanique, science des matériaux, astrophysique, physique nucléaire, aéronautique, climatologie, météorologie, physique théorique, mécanique quantique, biologie, chimie... ainsi qu'en sciences humaines : démographie, sociologie... Elle intervient aussi dans des secteurs comme celui de la finance [6].

II.6.2 Le Maple

(a) Aperçu historique

Le logiciel Maple est né vers les années 1980 avec l'idée de couvrir tous les domaines (ou tout du moins le plus possible) d'applications du calcul formel. Il a été développé par l'unité de calcul symbolique de l'université de Waterloo au Canada (le mot Maple, qui désigne l'érable en anglais, a été choisi pour rappeler l'origine canadienne du logiciel). Il a été initialement développé en langage C en environnement UNIX [7].

(b) Définition

Maple est un logiciel propriétaire de calcul formel développé et édité par la société canadienne Maplesoft. Les objets de base du calcul sont les expressions mathématiques. Maple est utilisé dans un nombre remarquable d'applications des sciences et des mathématiques allant de la démonstration du dernier théorème de Fermat en théorie des nombres, à des problèmes de la relativité générale et la mécanique quantique.

(c) Structure

Le logiciel Maple est composé de trois entités distinctes:

- Le noyau (Kernel en anglais): c'est lui qui interprète les commandes, qui gère la mémoire. Il contient aussi les fonctions de base pour le calcul.
- L'interface utilisateur, nommée Iris, permet le dialogue entre l'utilisateur et le noyau. Son rôle est de vérifier que les commandes passées par l'utilisateur sont syntaxiquement correctes: il signalera l'oubli d'une parenthèse fermante par exemple. Il gère aussi l'interface graphique de sortie (tracé de graphiques, gestion de la feuille de calcul,...)
- La bibliothèque : Elle contient l'aide en ligne et toutes les fonctions de Maple qui ne sont pas les fonctions de base. Elle occupe environ 10 Mo sur le disque dur.

Figure (II. 1)

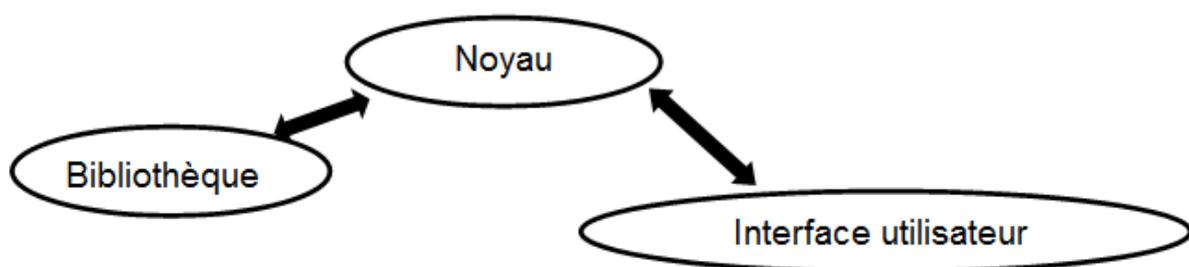


Figure (II. 1) Structure du programme MAPLE

Références

- [1] Chadli hayat, Résolution numérique de l'équation de chaleur à une Dimension, , Mémoire master, 2018/2019. Université de saida.
- [2] Bouazza Mimoune, Discrétisation explicite de l'équation de chaleur pour une plaque carré, Mémoire master, 2019/2020. Université de saida.
- [3] Bouazza Mimoune, Discrétisation explicite de l'équation de chaleur pour une plaque carré, Mémoire master, 2019/2020. Université de saida.
- [4] Cour EDP.pdf
- [5] Aude Rondepierre & Adeline Rouchon, Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles 2012-2013, Département STPI, 2^{ème} année IC.
- [6] Cours de resolution numerique, discretisation des EDP et EDO, Institut National polytechnique de Grenobl, ERIC Goncalvès. Septembre 2005.
- [7] I. Essaoudi, et M. Sabbane, Cours d'Initiation à Maple et à la Simulation Numérique en physique, Université Moulay ismail, département de physique.

Chapitre III

L'effet des propriétés thermo-physiques sur le transfert thermique entre deux couches

III.1 Introduction

L'équation de chaleur peut décrire le transfert de chaleur par conduction entre deux couches d'un matériau composite séparées par une surface de contact parfaite. On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude adimensionnelle à une dimension de ce transfert. Pour cela, on va résoudre tout d'abord l'équation de chaleur liée aux conditions physiques de notre système ce qui nous ramène à déterminer les valeurs propres apparentes dans les solutions obtenues en utilisant la méthode de séparation de variables. Ces valeurs sont calculées numériquement par la méthode de Newton à une tolérance relative prise. En suite, on discute comment le transfert de chaleur réagit en fonction des propriétés physiques définies précédemment

III.2 Etude de transfert de chaleur à une dimension pour un matériau bicouche

À une dimension, l'équation de chaleur (II.1) décrivant le transfert de chaleur par conduction s'écrit sous la forme [1]

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (\text{III.1})$$

où on a utilisé le changement de variable suivant [2]

$$\theta_i(x, t) = T_{amb} - T_i(x, t) \quad (\text{III.2})$$

L'index i réfère la couche ($i = 1, 2$), T_{amb} étant la température ambiante, et $T_i(x, t)$ est la température inconnue fonction de l'espace-temps de la couche i . Les propriétés thermo-physiques intervenant dans ce transfert des deux matériaux sont : Les conductivités k_i , les diffusivités α_i , les chaleurs spécifiques Cp_i , les masses volumiques ρ_i , les épaisseurs a_i , et les coefficients de convection des deux côtés sont h_i . Tout pour $i = 1, 2$. On représente dans la figure III.1 un matériau composé de deux couches S_1 , et S_2 séparées par une surface de contact parfaite [3].

Les deux couches sont maintenues initialement aux deux températures initiales T_{01} , et T_{02} . Les conditions physiques sont composées des conditions aux bords, les conditions sur la surface de contact, et les conditions initiales [4] :

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=-a_1} + h_1 \theta_1 \Big|_{x=-a_1} = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=a_2} + h_2 \theta_2 \Big|_{x=a_2} = 0 \quad (\text{III.4})$$

$$\theta_2 \Big|_{x=0} = \theta_1 \Big|_{x=0} \quad (\text{III.5})$$

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (\text{III.6})$$

$$\theta_{0i} = T_{amb} - T_{0i} \quad (\text{III.7})$$

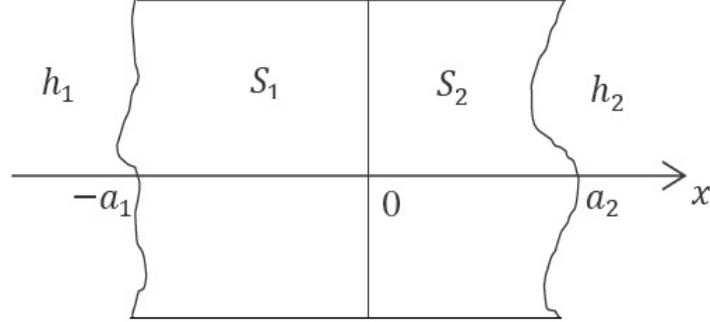


Figure III.1 Représentation d'un matériau bicouche

III.3 La méthode de séparation de variables

La résolution analytique par la méthode de séparation de variables de l'équation (III.1) se fait tout d'abord par la séparation des deux variable x et t . Alors, on écrit

$$\theta_i(x, t) = X_i(x) \cdot G_i(t), i = 1, 2 \quad (\text{III.8})$$

pour chaque couche d'indice i . Par injection dans (3.1), on obtient les solutions préliminaires suivantes [5]

$$X_i(x) = A_i \cos(\lambda_i x) + B_i \sin(\lambda_i x) \quad (\text{III.9})$$

$$G_i(t) = \exp(-\alpha_i \lambda_i^2 t) \quad (\text{III.10})$$

A_i , B_i et λ_i sont des constantes à déterminer. On définit le groupe adimensionnel par les rapports des propriétés thermo-physiques [5]

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (\text{III.11})$$

$$\kappa = \frac{k_2}{k_1} \quad (\text{III.12})$$

$$\gamma = \frac{a_2}{a_1} \quad (\text{III.13})$$

et les nombres de Biot

$$Biot_i = \frac{h_i a_1}{k_1} \quad (\text{III.14})$$

et également les deux variables spatiotemporelle par

$$\xi = \frac{x}{a_1} \quad (\text{III.15})$$

$$\tau = \frac{a_1^2}{\alpha_1} t \quad (\text{III.16})$$

Dans cette notation adimensionnelle, on obtient les formes finales des solutions exprimant le transfert de chaleur entre les deux couches

$$X_1(\xi) = B\{P_1(\beta)\cos(\beta\xi) + \sin(\beta\xi)\} \quad (\text{III.17})$$

$$G_1(\tau) = \exp(-\beta^2\tau) \quad (\text{III.18})$$

$$X_2(\xi) = \frac{B}{\kappa\omega}\{-P_2(\beta)\cos(\omega\beta\xi) + \sin(\omega\beta\xi)\} \quad (\text{III.19})$$

$$G_2(\tau) = \exp(-\beta^2\tau) \quad (\text{III.20})$$

où, on a défini les fonctions $P_i(\beta)$ par

$$P_i(\beta) = \frac{(\kappa\omega)^{i-1}\beta + Biot_i \text{tg}((\omega\gamma)^{i-1}\beta)}{Biot_i - (\kappa\omega)^{i-1}\beta \text{tg}((\omega\gamma)^{i-1}\beta)} \quad (\text{III.21})$$

Ces fonction dépendent de ce qu'on appelle valeurs propres notées β telles que

$$\beta = \lambda_1 a_1 \quad (\text{III.22})$$

On a $\tau \geq 0$, $-1 \leq \xi \leq 0$ pour la première couche, et $0 \leq \xi \leq \gamma$ pour la seconde. Nous devons donc déterminer les constantes B et β . Pour B , cela peut être fait en utilisant les conditions initiales et la propriété d'orthogonalité de X_i . Pour β , nous pouvons définir un problème propre décrit par l'équation suivante [6]

$$E(\beta) = P_1(\beta) + \frac{P_2(\beta)}{\kappa\omega} = 0 \quad (\text{III.23})$$

On trace dans la figure (III.2) la fonction $E(\beta)$ pour $\omega = 0.5$, $\kappa = 1.5$, $\gamma = 1.5$, $Biot_1 = 1.5$, et $Biot_2 = 2.5$

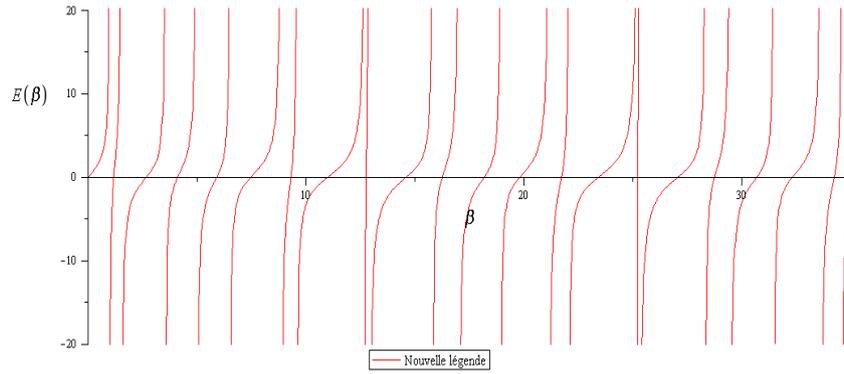


Figure III.2 La fonction $E(\beta)$ pour $\omega = 0.5, \kappa = 1.5, \gamma = 1.5, Biot_1 = 1.5,$ et $Biot_2 = 2.5$

On calcul par la méthode numérique de Newton implimentée dans le programme Maple les vingt premiers valeurs propres solutions de (III.23) avec une tolérance relative de 10^{-5} . Ils sont collectées dans le tableau (III.1). La solution finale est une combinaison linéaire par rapport les valeurs propres β_n . On s'arrête à $n = 20$ racines qui est un nombre suffisant pour diminuer l'erreur relatif (entre la valeur initial et la valeur de la solution à $t = 0$) à moins de 0.5% [7]

$$\theta_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \approx \sum_{n=1}^{20} B_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \quad (\text{III.24})$$

N	β_n
1	1.174564997
2	2.670341640
3	4.100755655
4	5.902293511
5	7.463000332
6	9.311800164
7	10.99791545
8	12.76394020
9	14.59650467
10	16.25466773
11	18.18431142
12	19.80816753
13	21.72556781
14	23.42691725
15	25.23379476
16	27.07242465
17	28.75147230
18	30.68935659
19	32.32010618
20	34.24837236

Table III.1 Les racines de la fonction $E(\beta)$

Les constantes d'intégration B_n sont obtenues d'après la relation d'orthogonalité satisfaisant les solutions spatiales $X_{i,n}(\xi)$ [8].

III.4 Les solutions adimensionnelles

On peut reformuler les solutions finales (III.24) décrivant le transfert de chaleur entre les deux couches en définissant une solution adimensionnelle dans l'intervalle $[0, 1]$ par la relation suivante

$$\Theta_i = \frac{\theta_i}{\theta_{01}} = \frac{T_{amb} - T_i}{T_{amb} - T_{01}} \quad (\text{III.25})$$

Le rapport des deux valeurs initiales représente la température adimensionnelle de la deuxième couche

$$F = \frac{\theta_{02}}{\theta_{01}} \quad (\text{III.26})$$

Les constantes B_n se transforment aux constantes adimensionnelles suivantes [8]

$$C_n = \frac{B_n}{\theta_{01}} \quad (\text{III.27})$$

On obtient, pour chaque couche, la solution analytique adimensionnelle par

$$\Theta_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{20} C_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \quad (\text{III.28})$$

L'équilibre final s'effectue lorsque toutes les températures tendent vers la température ambiante équivalente à la température adimensionnelle 0 (d'après (III.25)). Avant celui-ci, on observe un équilibre instantané suite de l'échange des deux températures initiales. Cet équilibre se traduit par la relation [7]

$$F_{eq} = \frac{\kappa\omega F + 1}{\kappa\omega + 1} \quad (\text{III.29})$$

Nous pouvons regrouper les deux températures en une seule expression décrivant l'ensemble du matériau composé de deux couches

$$\Theta(\xi, \tau) = \begin{cases} \Theta_1(\xi, \tau) & \text{if } -1 \leq \xi \leq 0 \\ \Theta_2(\xi, \tau) & \text{if } 0 \leq \xi \leq \gamma \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

On peut varier les propriétés thermo-physiques et voir comment l'équilibre instantané se réagit. Plus d'explications est détaillé dans la section suivante. Dans la figure III.3, on représente

l'évolution de la température dans les deux couches en fonction des positions pour certains temps adimensionnel pour les condition initiales : $T_{amb} = 300K$, $T_{01} = 400K$, et $T_{02} = 500K$

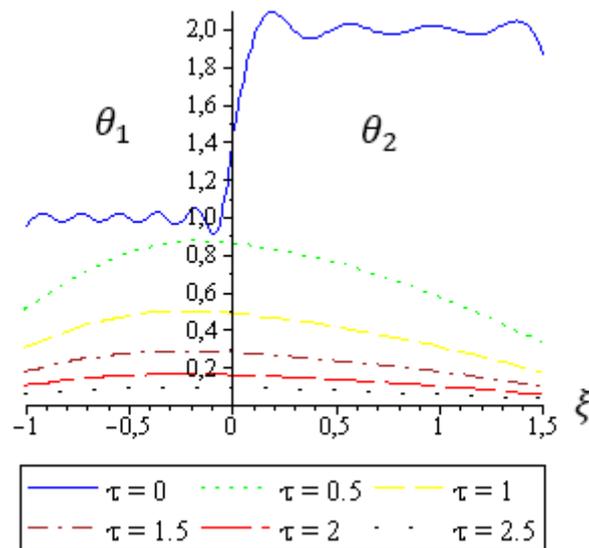


Figure III. 3 L'évolution de la température dans un matériau bicouche

On remarque qu'il y a un équilibre instantané à la valeur $F_{eq} \approx 1.4$. Puis les températures tendent vers la température ambiante dans quelques instants adimensionnelles.

III.5 L'effet des propriétés thermo-physiques sur le transfert de chaleur

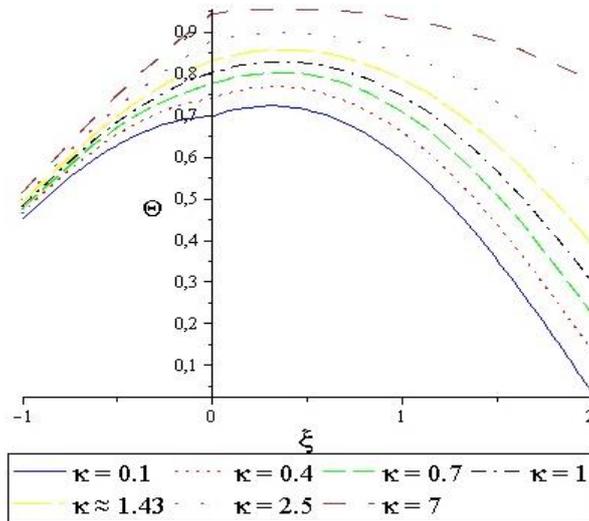
On va étudier dans cette section, l'influence des propriétés thermo-physiques adimensionnelles (conductivité, diffusivité, épaisseur,...) sur le transfert de chaleur dans le matériau bicouche. Pour des conditions initiales égaux, nous présenterons (à partir d'une procédure Maple complète) son comportement en fonction de chaque paramètre en gardant les autres constants (Table III.2). Cette étude paramétrique consiste à fixer une propriété thermo-physique (que ce soit la conductivité, la diffusivité...) de la première couche en modifiant l'autre [7]. Nr étant le nombre de racines (valeurs propres) calculé, et τ le temps adimensionnel choisi pour avoir la convergence dans la méthode de Newton.

En figure III.4(a), nous décrivons comment le flux de chaleur réagit en fonction de κ . Nous remarquons que si nous augmentons les valeurs de κ pour un temps déterminé ($\tau = 0,67$), le processus de refroidissement des deux couches devient lent, en particulier dans la deuxième couche.

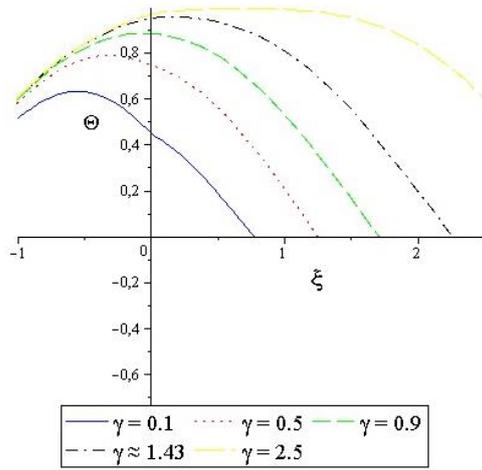
Function/ parameter	κ	γ	ω	$Biot_1$	$Biot_2$	Nr	τ
$\Theta(\kappa)$	/	2	1	1	2	20	0.67
$\Theta(\gamma)$	2	/	1	1	2	≥ 20	0.29
$\Theta(\omega)$	3.5	2	/	1	2	≥ 19	0.70
$\Theta(Biot_1)$	2	2	1	/	2	20	1.67
$\Theta(Biot_2)$	2	2	1	2	/	≥ 20	1.67

Table III.2 Les grandeurs utilisées lors de l'étude paramétrique

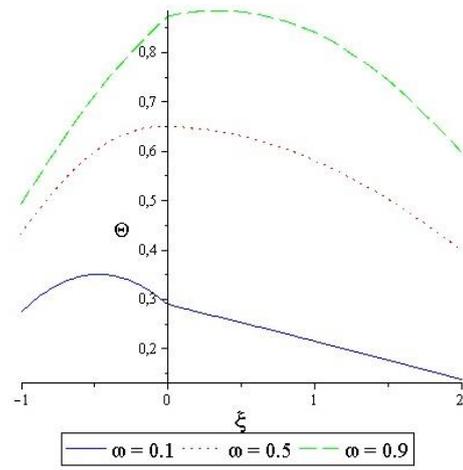
De même, on peut observer la même réaction de transfert de chaleur vs. le rapport d'épaisseur γ au moyen de la figure III.4(b) puisque la couche mince se refroidit plus vite que l'épaisse. En figure III.4(c), nous nous restreignons à trois courbes à $\tau = 0,70$ en raison des divergences pour les autres valeurs de ω dans la méthode de Newton. On remarque que la vitesse de refroidissement du matériau composite est inversement proportionnelle au rapport de diffusivité. Les deux derniers graphiques (figure III.4(d) et figure III.4(e)) étudient l'effet des nombres de Biot. Comme ils dépendent des coefficients de convection, augmenter l'un des deux conduira à un refroidissement plus rapide surtout dans la couche de même indice.



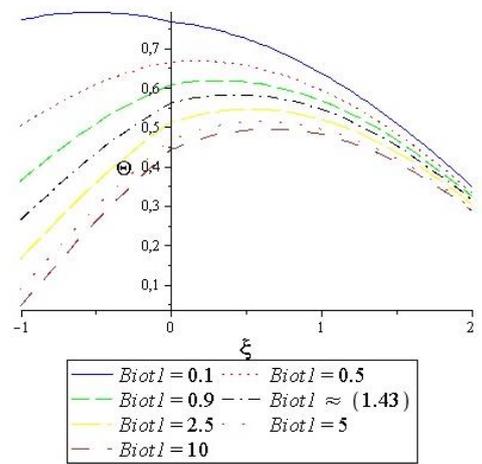
(a)



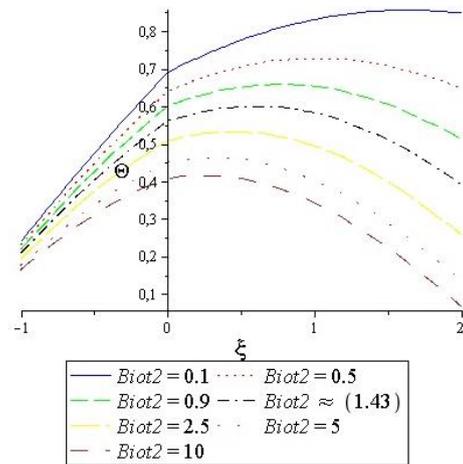
(b)



(c)



(d)

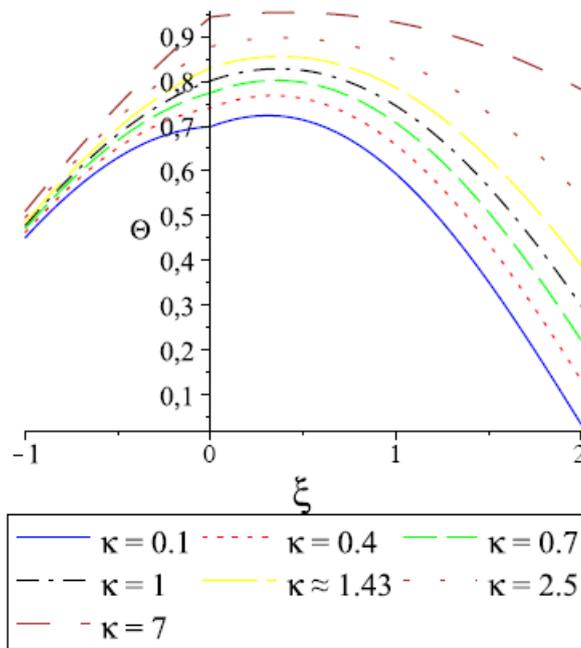


(e)

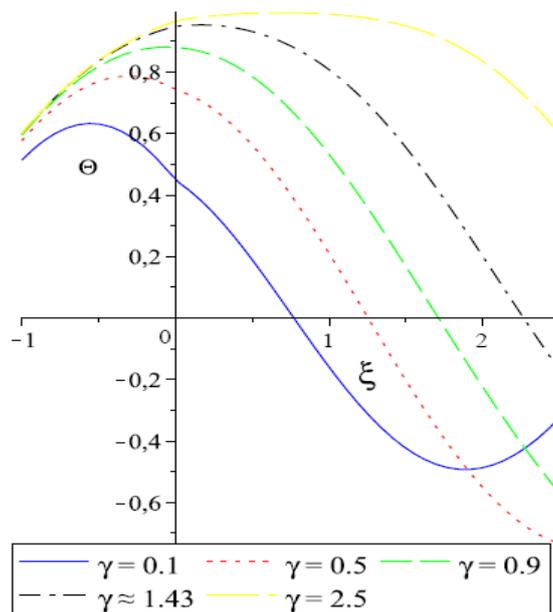
Figure III.4 L'étude paramétrique en fonction de (a) La conductivité, (b) La diffusivité, (c) Les épaisseur, (d) Nombre de Biot1, (e) Nombre de Biot2

III.5 La procédure Maple

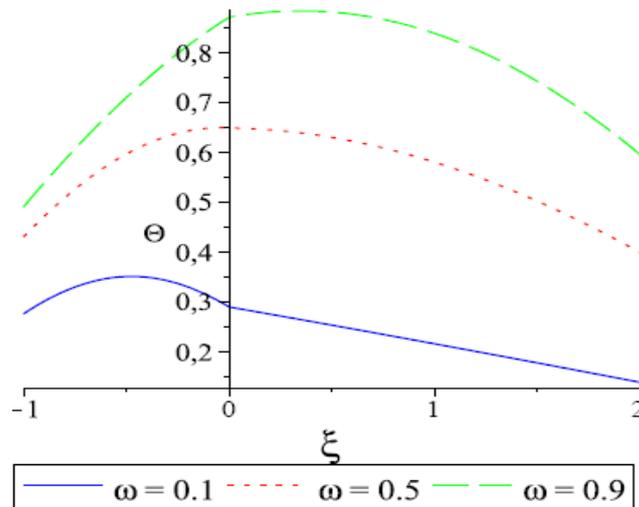
```
> plot([seq(Temp(85, STP1(i), STP2(i), 2, 1, 1, 2)(TE, 3), i = 1 .. 7)], x = -1 .. 2, linestyle
= [seq(Line(i), i = 1 .. 7)], color = [seq(Col(i), i = 1 .. 7)], legend = ["κ = 0.1", "κ = 0.4",
"κ = 0.7", "κ = 1", "κ ≈ 1.43", "κ = 2.5", "κ = 7"])
```



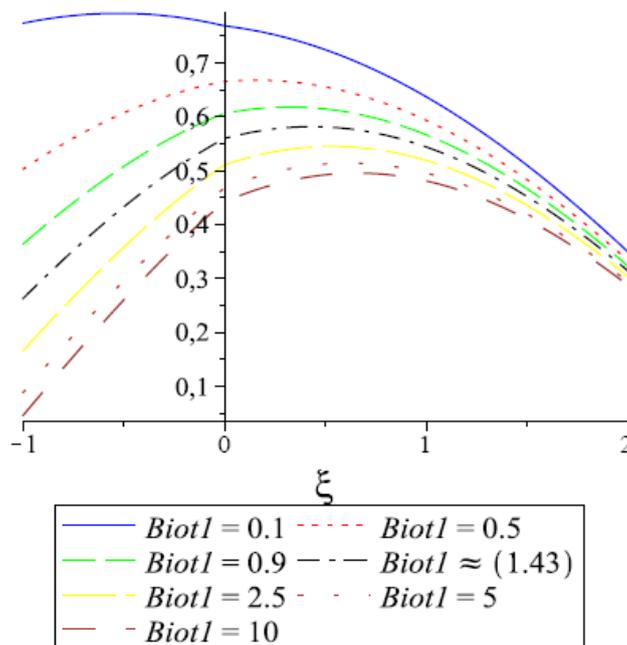
> `plot([seq(Temp(STP3(i), STP4(i), 2, STP5(i), 1, 1, 2)(TE, 3), i = 1 ..5)], x = -1 ..STP5(5),
 linestyle = [seq(Line(i), i = 1 ..5)], color = [seq(Col(i), i = 1 ..5)], legend = ["γ = 0.1",
 "γ = 0.5", "γ = 0.9", "γ ≈ 1.43", "γ = 2.5"])`



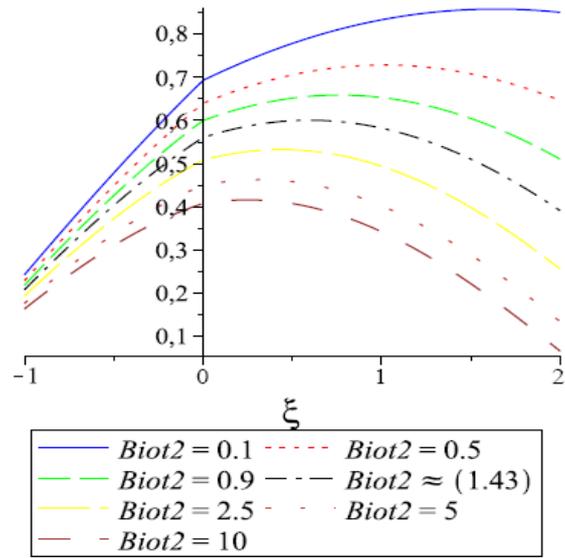
> `plot([seq(Temp(STP6(i), STP7(i), 3.5, 2, STP5(i), 1, 2)(TE, 8), i = 1 ..3)], x = -1 ..STP8(1),
 linestyle = [seq(Line(i), i = 1 ..3)], color = [seq(Col(i), i = 1 ..3)], legend = ["ω = 0.1",
 "ω = 0.5", "ω = 0.9"])`



> `plot([seq(Temp(STP9(i), STP10(i), 2, 2, 1, STP5(i), 2)(TE, 6), i=1..7)], x=-1..2, linestyle = [seq(Line(i), i=1..7)], color=[seq(Col(i), i=1..7)], legend=['Biot1=0.1','Biot1=0.5','Biot1=0.9','Biot1 ≈ 1.43','Biot1=2.5','Biot1=5','Biot1=10'])`



> `plot([seq(Temp(STP11(i), 20, 2, 2, 1, 2, STP5(i))(TE, 6), i=1..7)], x=-1..2, linestyle = [seq(Line(i), i=1..7)], color=[seq(Col(i), i=1..7)], legend=['Biot2=0.1','Biot2=0.5','Biot2=0.9','Biot2 ≈ 1.43','Biot2=2.5','Biot2=5','Biot2=10'])`



Références

- [1] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.
- [2] F. De Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000
- [3] H. Belghazi, *Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement*, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2008
- [4] F. De Monte, [An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media](#), International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 45, pp. 1333-1343, 2002.
- [5] F. De Monte, [Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results](#), International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 46, pp. 1455-1469, 2003.
- [6] H. Belghazi, M. El Ganaoui and J. C. Labbe, *Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source*, [International Journal of Thermal Sciences](#), Vol. 49, Issue 2, pp. 311-318, 2010.
- [7] Toufik Sahabi, Smain Balaska. Analytical one-dimensionless study of unsteady heat transfer in bilayer, and three-layer materials. 2020. (hal-02966165).
- [8] F. De Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000.

Conclusion

Le transfert de chaleur entre deux couches dans un matériau est bien décrit par l'équation de chaleur. On a utilisé la méthode de séparation de variables pour la résolution analytique. On a vu que cette résolution est suffisante pour résoudre notre problème moyennant la détermination des valeurs propres par la méthode numérique de Newton et à l'aide du programme Maple. Les résultats montrent qu'il existe un équilibre instantané avant l'équilibre final, et que l'étude adimensionnelle présente un outil mathématique optimal et puissant pour bien décrire le changement de température

On a également produit une procédure Maple pour étudier la réaction de ce transfert lors de changement des propriétés thermo-physiques des deux matériaux. Nous avons trouvé qu'il se développe proportionnellement avec chacune des conductivités, diffusivités et épaisseurs, alors qu'il se développe inversement avec les nombres de Biot.

Résumé

Nous avons vu dans ce mémoire, une description complète de la méthode analytique adimensionnelle pour résoudre l'équation de la chaleur. Cela montre comment la chaleur est transférée et développée à travers un matériau bicouche. Par la méthode de séparation de variables, nous avons trouvé qu'en utilisant l'équation différentielle avec toutes les conditions initiales et aux limites, le problème est réduit à trouver les valeurs propres β , ainsi que les constantes C en utilisant la propriété d'orthogonalité entre les solutions spatiales.

Le transfert de chaleur a été étudié en termes de propriétés thermophysiques des deux couches, et nous avons trouvé qu'il se développe proportionnellement avec chacune des conductivités, diffusivités et épaisseurs, alors qu'il se développe inversement avec les nombres de Biot.

Abstract

We have seen in this thesis, a complete description of the dimensionless analytical method to solve the heat equation. This shows how heat is transferred and developed through a bilayer material. By the method of separation of variables, we have found that by using the differential equation with all the initial and boundary conditions, the problem is reduced to finding the eigenvalues β , as well as the constants C using the property of orthogonality between spatial solutions.

The heat transfer has been studied in terms of the thermophysical properties of the two layers, and we have found that it develops proportionally with each of the conductivities, diffusivities and thicknesses, while it develops inversely with the Biot numbers.

ملخص

قد رأينا في هذه المذكرة وصفًا كاملاً للطريقة التحليلية الالبعديّة لحل معادلة الحرارة وكيف يتم نقل الحرارة وتطورها من خلال مادة ثنائية الطبقة. من خلال طريقة فصل المتغيرات، وجدنا أنه باستخدام المعادلة التفاضلية مع جميع الشروط الأولية والحدودية، يتم تحويل المشكلة إلى إيجاد القيم الذاتية β ، وكذلك الثوابت C باستخدام خاصية التعامد بين الحلول المكانية. من جهة أخرى، تم دراسة انتقال الحرارة من حيث الخصائص الفيزيائية الحرارية للطبقتين، ووجدنا أنه يتطور بشكل متناسب مع كل من معاملات التوصيل والانتشار والسكن، بينما يتطور عكسياً مع أرقام.