République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2021/2022

Estimation non paramétrique de la fonction de risque conditionnel :Cas uni, multi-varié et fonctionnel

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des processus et Applications

par

Badia Mellal [1]

Sous la direction de

Dr. T. Djebbouri

Soutenue le 13/06/2022 devant le jury composé de

R. Hazeb	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
T. Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : mellalbadia@gmail.com

Remerciement

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé dans ce travail.

Tout d'abord, je remercie le Dr Djebbouri Tayeb, il m'a guidé dans mon travail et m'a aidé à trouver des solutions pour aller de l'avant.

Je voudrais également remercier tous les membres de jury d'avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques.

Je tiens également à remercier toute l'équipe pédagogique de l'Université de Saïda - Dr Moulay Taher

Je tiens à exprimer ma gratitude aux personnes suivantes pour leur aide de quelque manière que ce soit : Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été à mes côtés.

Enfin, je remercie mes frères et mes amis qui ont toujours été à mes côtés. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Merci à tous

Dédicace

Je dédie ce travail à l'âme de ma grand-mère, que Dieu lui fasse miséricorde, et à mes parents pour leur soutien et leurs encouragements constants, et à la famille en général, et Dr. Barkat Tayeb.

Table des matières

1 Présentation générale **6**

1.1 Introduction 6

1.2 Les modèles de survie 9

1.2.1 Analyse des données de survie 10

1.3 Fonctions associées aux distributions de survie 11

1.3.1 Distribution de la durée de survie 12

1.4 Estimation de la fonction de hasard 14

1.5 Définitions et outils 17

2 Estimation non paramétrique de la fonction de risque conditionnel :Cas uni-varié **20**

2.1 Modèle 20

2.2 Cas iid 22

2.2.1 Notations et hypothèses 22

2.2.2 Convergence presque complète 23

2.3 Cas dépendant 34

2.3.1 Hypothèses 34

2.3.2 Convergence presque complète 35

3 Estimation non paramétrique de la fonction de risque conditionnel : Cas multi-varié **44**

3.1 Modéle 44

3.2 Hypothèses 45

3.3 Propriétés asymptotiques 46

4 Estimation non paramétrique de la fonction de risque conditionnel : Cas fonctionnel **60**

4.1 Modèle 60

4.2 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle : cas i.i.d. 62

4.2.1 Notations et hypothèses 62

4.2.2 Propriétés asymptotiques 63

4.3 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle : cas dépendant . . 75

4.3.1 Notations et hypothèses 75

4.3.2 Propriétés asymptotiques 76

Bibliographie **82**

Chapitre 1

Présentation générale

1.1 Introduction

L'estimation de la fonction de hasard à une grande intérêt en statistique. En effet, elle est utilisée dans l'analyse de risque ou pour l'étude des phénomènes de survie. L'objectif de ce travail est d'étudier l'estimation non paramétrique de ce modèle, lorsque, les donnés sont de dimension éventuellement infinie.

Les premiers résultats conséquents sur le sujet furent établis au début des années 60 (voir Watson et Leadbetter [23]). L'estimation de ce modèle par la méthode du noyau a été partiellement utilisé en 1989 par Roussas [20]. Ce dernier a estimé la fonction de hasard comme rapport entre l'estimateur à noyau de la densité et l'estimateur empirique de la fonction de répartition et il a établi sous des conditions de mélange faible, la convergence presque sûre de cet estimateur. Un an plus tard, le même auteur [21] a obtenu la normalité asymptotique de cet estimateur, en considérant les différents types de mélange , à savoir, le ϕ, le ρ, le α et le β -mélange. En 1993, J.P. Lecoutre en collaboration avec E. Ould-Saïd [14] ont étudié les propriétés de convergence simple et uniforme d'un estimateur à noyau de la fonction de hasard, dans le cas de variables aléatoires multi-dimensionnelles, issus d'un processus fortement mélangeant, avec censure aléatoire. En utilisant l'estimation par la méthode du noyau pour les deux paramètres fonctionnels (la densité et la fonction de répartition), Youndjé et al. [24] (1996) ont construit un estimateur pour la fonction de hasard et ils ont élaboré une méthode permettant le choix optimale de paramètre de lissage pour l'estimation de ce paramètre, lorsque les observations sont i.i.d. Ce dernier résultat à été généralisé par Estèvez et al. [5] (2002) au cas des observations dépendantes. Dans la même année Est èvez [4], a rétabli les résultats de Vieu en 1991 [22] en précisant la vitesse de convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la fonction de hasard, en considérant des observations fortement mélangeantes. Récemment, en 2006 Quintela-del-Rio [18] a établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique d'un estimateur à noyau pour le maximum de la fonction de hasard. On trouvera aussi dans cet article une application sur des données réelles permettant de prévoir la période à haut risque sismique pour la région de Granada en Espain.

La modélisation par des modèles conditionnel en utilisant des variables aléatoires fonctionnelles connaissent depuis longtemps un grand intérêt en statistique. En effet, les premiers résultats ont été obtenus par Ferraty et al. [9]. Ils ont étudié la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de la densité conditionnelle en considérant des observations i.i.d. On trouvera aussi dans cet article une application traitant de la prévision via le mode conditionnel dans le cas i.id. Ce dernier résultat a été généralisé par Ferraty et al. [8] au problème de prévision en série chronologique fonctionnelle. La monographie de Ferraty et Vieu [10] présente une collection importante d'outils statistiques pour la prévision, à partir de variables fonctionnelles, tels la régression, le mode conditionnel et la médiane conditionnelle. La normalité asymptotique de ces outils a été obtenue, respectivement, par Masry [17], Ezzahrioui et Ould-Saïd [6]. Récemment, Laksaci [15] a étudié la convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle, et il a donné l'expression asymptotique exacte de l'erreur quadratique de cet estimateurs. Nous renvoyons à Niang et Laksaci [3] pour des résultats sur la convergence en norme L^p d'estimateurs du mode conditionnel.

Dans ce travail, on se propose d'étudier l'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle quelques soient la dimension des données et la corrélation des observations. Ce document est présenté en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des défnitions et des outils techniques que nous allons employé pour obtenir les vitesses de convergence. En particulier, nous rappelons la défnition de la fonction de hasard et la fonction de hasard conditionnelle, la convergence presque complète,l'inégalité de Hoeffeding, l'inégalité de Fuk-Nagaev,.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons le cas d'une variable explicative uni-variée. Sous des conditions standard, on construit un estimateur à noyau pour la fonction de hasard conditionnelle et on établit la convergence presque complète uniforme, quelque soit la corrélation des observations, indé-pendantes ou fortement mélangeantes. Nous explicitions l'expression de nos vitesses de convergence et nous insistons sur le faite que les axes structurels du sujet, à savoir la corrélation des observations et la "dimensionnalité" du modèle sont bien exploitées dans notre étude.

Le troisième chapitre est consacrée à la généralisation des résultats obtenus dans le cas uni-varié au cas vectoriel. Ce chapitre est présenté en trois Sections. Dans la première Section on construit l'estimateur à noyau pour ce modèle dans le cas multi-varié, puis nous nous donnons les hypothèses, nécessaires dans le deuxième paragraphe. Les propriétés asymptotiques de notre estimateur sont présentées dans le dernier paragraphe.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à un modèle non paramétrique pour des variables aléatoires fonctionnelles. Dans ce contexte, sous des conditions générales moins restrictives, nous établissons la convergence presque complète avec précision dans le cas i.i.d. ou α-mélangeant. Ces propriétés asymptotiques sont étroitement liées au phénomène de concentration de la mesure de probabilité de la variable explicative sur des petites boules. Ces résultats nous permettent d'établir une solution originale au problème du fléau de la dimension et de généraliser à la dimension infinie de nombreux résultats asymptotiques existants dans le cas multi-varié. Ce chapitre suit le même plan des chapitres précédents.

1.2 Les modèles de survie

On peut faire remonter l'analyse des données de survie à 1693 avec l'astronome "Halley" qui aprés une étude des relevés d'état civil de Londres donna les premières tables de mortalité et enseigna le moyen d'y lire la probabilité de survie d'un individu. Ces analyses, très générales, ne sont affinées qu'à partir du 19-ème siècle, avec l'apparition de catégorisations suivant des "variables exogènes" (sexe, nationalité, catégories socio-professionnelles, ...). Durant ce siècle, apparaissent également les premières modélisations concernant la probabilité de mourir à un certain âge, probabilité qui sera par la suite désignée sous le terme de "fonction de risque".

Enfin, l'analyse des données de survie commence de déborder le cadre stricte de la démographie pour investir, au 20-ème siècle, notamment dans les années qui ont suivi la seconde guerre mondiale, on s'est intéressé à l'analyse des données de survie plus pour des applications industrielles (avec l'apparition de la théorie de la fiabilité) en utilisant des modèles paramétriques avec des lois exponentielles ou de Weibull. Ce n'est que plus récemment, motivées par des applications médicales (pharmaceutique, biomédicale), que sont apparues les méthodes non-paramétriques (Kaplan-Meier 1958)[12], pour l'estimation non-paramétrique d'une fonction de survie. De l'estimateur résultant, ils étudient l'espérance, la variance et les propriétés asymptotiques. L'aspect semi-paramétrique a été initié par Cox en 1972 [2]. Ce dernier modèle comporte des variables exogànes qui sont introduites, dans la fonction de risque, au moyen d'une composante de régression paramétrique, le reste de cette fonction de risque, non paramétrique, demeurant indéterminée.

Les modèles de survie forment une classe de méthodes statistiques qui ont pour but d'étudier le nombre et la répartition des temps d'apparition des événements. On peut s'intéresser à des modèles où l'on ne considère que le temps d'apparition des événements, mais on s'intéresse plus généralement à des modèles où le risque d'apparition d'un événement dépend de covariables. On retrouve ainsi l'expression d'un modèle de régression.

1.2.1 Analyse des données de survie

L'analyse des données de survie est l'étude de la survenue, au cours du temps, d'un événement précis pour un ou plusieurs groupes d'individus donnés. Cet événement, souvent appelé décès, peut aussi bien être la mort d'un individu que la survenue d'une maladie, la réponse à un traitement ou la panne d'une machine (c'est un changement d'état en général.) Chaque observation est définie par :
Une date d'origine : Cela peut être la date de naissance du sujet, si l'on étudie l'âge du sujet lorsque survient l'événement ou la date de mise en contact avec un agent infectieux, si l'on l'étudie la durée d'incubation d'une maladie infectieuse. Chaque individu a une date d'origine différente sur le calendrier, mais la mesure qui nous intéresse est le délai depuis cette date. La date d'origine définit pour chaque individu le temps 0.

Pour permettre la comparaison des durées de survie entre les individus, une définition précise de **l'événement d'intérêt** est nécessaire. S'il s'agit du décès provoqué par une maladie, il faut s'assurer que chaque décès est effectivement dû à la maladie étudiée, et non à d'autre cause.

La durée de survie : Elle est définie comme le délai entre la date d'origine et la survenue de l'événement d'intérêt. Les durées de survie correspondent à des variables aléatoires positives, de distribution le plus souvent dissymétrique, rendant difficile leur description par les lois de distribution usuelles.

Les individus ou groupes d'individus sont susceptibles de différer pour un ou plusieurs facteurs. Ces facteurs, dénommés variables explicatives ou covariables peuvent expliquer une différence importante de la durée de survie des sujets étudiés. Leurs effets sont analysés par des modèles de régression. Il peut s'agir de facteurs individuels (sexe, âge, paramètres biologiques relatifs à une maladie, paramètres génétiques..), ou liés à un essai thérapeutique (appartenance au groupe de traitement ou au groupe placebo, dosage médicamenteux...).

L'analyse des données de survie s'attache alors à la description des temps de survie et à voir dans quelle mesure ils dépendent de ces variables explicatives. Les approches classiques en analyse des données de survie sont de type stochastique, le temps d'apparition d'un événement est supposé être la réalisation d'un processus aléatoire associé à une distribution particulière.

De nombreux travaux sont consacrés à l'analyse des données de survie : Kalbeisch et Prentice (1980) [11], Cox et Oakes (1984) [1], Klein et Moeschberger (1997) [13], ...

1.3 Fonctions associées aux distributions de survie

Soit T une variable aléatoire continue positive définie sur un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ associée à une durée de vie (c'est à dire une v.a à valeurs dans R) passée dans un certain état, l'origine des temps étant prédéfinie.Dans le domaine médical cet événement peut être la mort ou la guérison,dans le domaine économique, la perte d'un emploi et en fiabilité, l'instant de première panne.
Les durées de survie sont des variables aléatoires positives, de distribution,le plus souvent dissymétrique rendant difficile leur description par les distributions théoriques usuelles. Par exemple, la distribution normale qui joue un role important en statistique ne peut pas être utilisée en analyse de survie car les variables étudiées sont supposées ne prendre que des valeurs positives. Toutefois, l'étude des durées de survie utilise les fonctions classiques permettant de d'écrire les variables aléatoires continues.
La loi de cette durée peut aussi être caractérisée par l'intermédiaire d'autres fonctions faciles à interpréter et qui de plus s'introduisent naturellement dans divers calculs, parmi ces fonctions, les plus importantes sont : La fonction de densité, la fonction de répartition, la fonction de survie, la fonction de hasard de la durée de vie.

Pour faciliter la description de ces fonctions, nous supposons que T est continu.

1.3.1 Distribution de la durée de survie

Supposons que la variable aléatoire T positive correspondant la durée de survie absolument continue, alors sa loi de probabilité peut être définie par l'une des cinq fonctions équivalentes suivantes (chacune des fonctions ci-dessous peut être obtenue à partir de l'une des autres fonctions) :

Définition 1.3.1. *La fonction de densité de probabilité, notée $f(t)$:*

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$f(t)\Delta t + o(\Delta t)$ est donc la probabilité de connaître l'événement d'intérêt entre t et $t + \Delta t$. La fonction de répartition, notée $F(t)$, vérifie :

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \int_0^t f(u)du$$

$F(t)$ définit la probabilité de connaître l'événement d'intérêt entre $[0, t]$, cette fonction est monotone et l'on a

$$F(0) = 0 \quad et \quad \lim_{t \to \infty} F(t) = 1$$

Définition 1.3.2. *La fonction de survie, notée $S(t)$ définie par :*

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F(t)$$

Cette fonction représente la probabilité de connaître l'événement d'intérêt au delà du temps t. C'est une fonction monotone décroissante telle que

$$S(0) = 1 \quad et \quad \lim_{t \to \infty} S(t) = 0.$$

Elle caractérise également la loi de T.

Définition 1.3.3. *La fonction de risque, ou fonction de hasard, ou bien le risque instantané de changement d'état notée $h(t)$, (hazard function en englais, car hazard veut dire risque en anglais), elle est définie comme étant la probabilité instantanée qu'une durée T de "séjour" dans un état se termine à l'instant $t+\Delta t$ sachant qu'on y était à l'instant t, i.e. :*

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+\Delta t / T \geq t)}{\Delta t}$$

On montre facilement que

$$\begin{aligned} h(t) &= \tfrac{f(t)}{S(t)} \\ &= \tfrac{-dlog(s(t))}{d(t)} \end{aligned}$$

donc $h(t)\Delta t$ représente, quand Δt est petit, la probabilité "approchée" pour un individu d'atteindre l'événement d'intérêt avant $t+\Delta t$, conditionnellement au fait qu'il est encore dans l'état précédent juste avant t. Cette fonction est aussi appelée risque instantané à l'instant t.
On constate aussi que la fonction de risque caractérise la loi de T (ou $S(t)$.)

Définition 1.3.4. *La fonction de risque cumulé, notée $H(t)$ définie par :*

$$H(t) = \int_0^t h(u)du$$

Par manipulation des définitions précédentes, on retrouve facilement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(t) &= -\tfrac{dS(t)}{dt} \\ S(t) &= \exp(-\textstyle\int_0^t h(u)du) \\ S(t) &= \exp(-H(t)) \\ f(t) &= h(t)\exp(-\textstyle\int_0^t h(u)du) \end{aligned}$$

Donc la fonction de risque cumulé caractérise la loi de T (ou $S(t)$.)

La distribution de la durée de survie T peut être décrite par l'une des fonctions définies ci-dessus. Toutefois l'une des plus intéressantes est la fonction de risque $h(t)$ car elle est une description probabiliste du futur immédiat du sujet "encore à risque" et reflète des différences entre les modèles souvent moins visibles au travers des fonctions de répartition ou de survie. En épidémiologie, elle peut dans certains cas s'interpréter en termes d'incidence.
On constate que si $h(t)$ est constante (on la note λ), alors

$$S(t) = \exp(-\int_0^t h(u)du) = e^{-\lambda t}$$

devient la queue d'une distribution de loi exponentielle. Cela présume que l'on peut adopter le modèle markovien à deux états pour estimer la survie et le problème devient purement paramétrique. Mais en général, $h(t)$ n'est pas constante ; ce qui laisse une place pour traiter le problème en utilisant la statistique fonctionnelle.

1.4 Estimation de la fonction de hasard

L'estimation de la fonction de hasard à un grand intérêt en statistique. En effet, elle est utilisée dans l'analyse de risque ou pour l'étude des phénomènes de survie. Le taux de hasard inconditionnel est défini comme étant la probabilité instantanée que le changement d'état se fasse dans l'instant infinitésimal qui suit l'instant présent, noté t. Plus précisément, le taux de hasard $h(t)$ est défini par :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t + \Delta t / T \geq t)}{\Delta t} \qquad (t > 0)$$

Il n'est pas difficile de voir que que le taux de hasard peut être réécrit comme étant le rapport de la densité $f(.)$ dont elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et la fonction de survie $S(.) = 1 - F(.)$ de T à l'instant t ; autrement dit :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{1.1}$$

où la fonction de survie $S(t)$ n'est autre que la fonction de répartition du complémentaire de l'évènement considéré. En fait c'est la dérivée d'une probabilité que la durée soit comprise entre t et Δt, sachant que l'on ait atteint la période t. Plus pratiquement il s'agit d'un taux instantané de sortie de l'état à la date t. La courbe de survie prend une signification particulière donnée par :

$$S(t) = \exp(-\int_0^t h(u)du)$$

Il existe une littérature étendue sur l'estimateur du taux hasard non paramétrique, d'une manière approximative et pour le cas non paramétrique, deux méthodes ont été proposées pour estimer le taux du hasard.
La première approche remplace $f(t)$ et $S(t)$ dans l'expression de $h(t)$ par leurs estimateurs $\hat{f}(t)$ et $\hat{S}(t)$ respectivement, ce qui nous donne l'estimateur du taux de hasard par :

$$\hat{h}(t) = \frac{\hat{f}(t)}{\hat{S}(t)} \tag{1.2}$$

Nielsen et Linton (1995) appellent ce type d'estimateur par (estimateur externe). L'estimateur à noyau externe du taux de hasard des données non censurées a été introduit par Watson et Leadbetter (1964) et Munhy (1965).
La deuxième méthode est basée sur la relation entre le hasard cumulé et le taux de hasard où le hasard cumulé est défini par :

$$H(t) = \int_0^t h(u)du \tag{1.3}$$

Nielsen et Linton (1995) appellent ce type d'estimateurs par (estimateur interne). La relation entre le hasard cumulé et le taux de hasard suggère que $h(t)$ peut être obtenue en lissant $H(t)$ en utilisant un noyau autrement dit :

$$h(t) = \int K_h(t-u)d\hat{H}u$$

où h est une largeur de fenêtre tel que $h \to 0$ quand $n \to \infty$. L'estimateur interne du taux de hasard pour les données censurées à été aussi introduit par Watson et Leadbetter (1964). Ramlau-Hansen (1983), Yandell(1983), Tanner et Wong (1983, 1984), Blum et susarla (1980), Fötdes et Retjö (1981) et Lo, Mack et Wang (1989) ont étudié des estimateurs similaires en présence des données censurées. De plus, Tanner et Wang (1984) ainsi que Sarda et Vieu (1996) utilisent la sélection de la largeur de fenêtre pour ce type d'estimateurs. Jusqu'à maintenant, l'intérêt porté sur le taux de hasard va généralement dépendre de certaines covariances, par exemple, le temps de survie d'un patient va être affecté par plusieurs caractéristiques tels l'âge et le genre. Le taux de hasard conditionnel de t sachant $Z = z$ est définie par :

$$h^z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(T \leq t + \Delta t / T > t, Z = z)}{\Delta t}$$

Ainsi la fonction de hasard conditionnelle T sachant $Z = z$ est définie par :

$$\hat{h}^z(t) = \frac{\hat{f}^z(t)}{\hat{S}^z(t)}$$

tel que F^z (resp f^z) est la distribution conditionnelle (resp. la densité conditionnelle) de T sachant $Z = z$ qu'on suppose qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Afin d'illustrer l'importance de la fonction de hasard conditionnelle on considère l'exemple suivant

Exemple 1.4.1. *Supposons qu'un matériel de durée de vie Y soit en état de bon fonctionnement a l'instant t et on veut calculer la probabilité conditionnelle, sachant*

$X = x$, d'une panne dans l'intervalle de temps $(t, t+ \triangle\, t)$. Cette probabilité est bien $\mathbb{P}^x(Y\epsilon(t, t+ \triangle\, t) \mid Y > t)$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}^x(Y\epsilon(t, t+ \triangle\, t) \mid Y > t) & = & \frac{\mathbb{P}^x(Y\epsilon(t,t+\triangle t), Y>t)}{\mathbb{P}^x(Y>t)} \\ & = & \frac{\mathbb{P}^x(Y\epsilon(t,t+\triangle t)}{\mathbb{P}^x(Y>t)} \\ & = & \frac{F^x(t,t+\triangle t)-F^x(t)}{1-F^x(t)}\end{array}$$

il s'ensuit par passage à la limite

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle\, t} \mathbb{P}^x(Y\epsilon(t, t+ \triangle\, t) \mid Y > t) = h^x(t)$$

Autrement dit, la quantité $h^x(t) \triangle\, t$ est une approximation à la probabilité conditionnelle "instantanée" de panne à l'instant t.

1.5 Définitions et outils

Définition 1.5.1. *Soit $(X_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbb{P})$. On dit que (X_n) converge presque complètement vers X une variable aléatoire réelle définie sur le même espace,si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}| X_n - X |> \varepsilon < \infty$$

et on écrit $(X_n \longrightarrow^{p.co} X)$.

Définition 1.5.2. *Soit $(Z_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires,$(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(Z_n) = O(U_n)$ en p.co. si et seulement si*

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \mid Z_n |> \varepsilon(U_n) < \infty$$

Définition 1.5.3. *Soit* $\triangle_i, i\epsilon\mathbb{Z}$ *une famille de variables aléatoires dans un même espace probabilisable* $(\mathbf{E}, \mathcal{A})$*. Pour tout couple* $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ *dans* $\mathbb{Z} \cup]-1, +1[$*,on note* σ_i^j *la tribu engendrée par* $\triangle_k, i < k < j$*. On appelle cofficients de mélange fort, la suite des réels*

$$\alpha(n) = \sup \mid \mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - \mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{B}) \mid$$

Définition 1.5.4. *On dit qu'une famille* $\triangle_i, i\epsilon\mathbb{Z}$ *de variables aléatoires dans un même espace probabilisable* $(\mathbf{E}, \mathcal{A})$ *est fortement mélangeante(α-mélangeante), si l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha(n) = 0$$

Définition 1.5.5. *On dit qu'une famille* $\triangle_i, i \in \mathbb{Z}$ *de variables aléatoires dans un même espace probabilisable* $(\mathbf{E}, \mathcal{A})$ *est algébriquement* α*-mélangeante, s'il existe deux constantes* c, a *dans* $\mathbb{R}^{*+}$ *telles que les coefficients de mélange vérifient*

$$\alpha(n) \leq cn^{-a}$$

Proposition 1.5.1. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles. Si* X_n *converge presque complète vers* 0 *et s'il existe* $\exists\delta > 0$ *tel que* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y_n < \delta\} < \infty$*. Alors, la suite* $(X_n/Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque complète vers* 0.

Lemme 1.5.1. *[7] "**Inégalité exponentielle de Bernstein**"*
Soit $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires réelles centrées, indépendantes et de même loi (i.i.d) définies sur l'espace de probabilité, telles qu'il existe deux réels positifs* θ_1 *et* θ_2 *vérifiant* $X_1 < \theta_1$ *et* $\mathbb{E}X_1^2 < \theta_2$ *alors, pour tout* $\varepsilon \in]0, \frac{\theta_1}{\theta_2}[$ *on a :*

$$\mathbb{P}\left(n^{-1}\left|\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{4\theta_2}\right)$$

Lemme 1.5.2. *[7] **"Inégalité de type Fuk-Nagaev sous mélange algébrique"***
Soit $\{\Delta_i, i \in \mathbb{N}\}$ une famille de variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}$ fortement mélangeantes, de coefficient de mélange algébriquement décroissant. On pose

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |cov(\Delta_i, \Delta_j)|$$

Si $\forall i, \|\Delta_i\|_\infty < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $r > 1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\right| > 4\varepsilon\right) \leq 4\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{r s_n^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}\left(\frac{2r}{\varepsilon}\right)^{a+1}$$

Lemme 1.5.3. *[7] **"Inégalité de covariance pour variables bornées"***
Soit $\{\Delta_i, i \in \mathbb{N}\}$ une famille de variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}$ fortement mélangeantes telle que $\forall i, \|\Delta_i\|_\infty < \infty$, alors, pour tout $i \neq j$

$$|cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq 4\|\Delta_i\|_\infty \|\Delta_j\|_\infty \alpha(|i - j|).$$

Chapitre 2

Estimation non paramétrique de la fonction de risque conditionnel :Cas uni-varié

Ce chapitre est consacré à l'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode du noyau. Il est présenté en trois sections. La premiére section est consacrée à la présentation du modèle et à la construction de l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle. Dans la deuxième section, on s'intèresse à la convergence presque complète de l'estimateur construit dans le cas ou les observations sont indépendantes identiquements distribuées (i.i.d.). Tandis que, dans la dernière section on traitera le cas des observations α-mélangeantes.

2.1 Modèle

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désigne par F^x la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$, on suppose que F^x est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité f^x.

Étant donné $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ une suite des observations de même loi que

(x, y) on estime par la méthode à noyau la fonction de répartition conditionnelle F^x par l'estimateur, noté $\widehat{F^x}$, défini par :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}(x - X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}(x - X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

ou K est un noyau, H est une fonction de répartition et $h_k = h_{k,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) est une suite de réels positifs. On déduit de $\widehat{F^x}$ un estimateur de la densité conditionnelle, noté $\widehat{f^x}$, défini par

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{h_H^{-1} \sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}(x - X_i))H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}(x - X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Pour simplifier la notation, on pose

$$K_i(x) = K(h_K^{-1}(x - X_i)) \qquad , \qquad H_i(y) = H(h_H^{-1}(y - Y_i))$$

et

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_K} \sum_{i=1}^{n} K_i \qquad , \qquad g_n^{(j)}(x, y) = \frac{1}{nh_H^j h_K} \sum_{i=1}^{n} K_i H_i^{(j)}(y), \; j = 0, 1$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{g_n(x, y)}{f_n(x)} \qquad et \qquad \widehat{f}^x(y) = \frac{g_n^{(1)}(x, y)}{f_n(x)}.$$

En vertu de sa définition, l'éstimateur naturel de la fonction de hasard conditionnelle, noté $\widehat{h}^x$, est :

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

le but principal est d'étudier les propriétés asymptotiques de l'éstimateur $\widehat{h}^x$ dand les deux cas : le cas iid et le cas de mélange.

2.2 Cas iid

Dans cette section, on suppose qu'on dispose d'une suite des observations $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ indépendantes identiquement distribuées et on démontre la convergence presque complète uniforme sur un compact réel de $\widehat{h^x}$ vers h^x.

2.2.1 Notations et hypothèses

Par la suite, on fixe un point x (resp. un compact $\mathcal{S}$) de $\mathbb{R}$, et on désigne par A ou A' toutes constantes générique de $\mathbb{R}^{*+}$.on introduit les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H_1}$) La fonction de répartition conditionnelle est $(K+1)$-fois continument dérivable autour de $\mathcal{S}$.

($\mathbf{H_2}$) La densité de la variable explicative est strictement positive, et de classe C^k au voisinage de x.

($\mathbf{H_3}$) La fonction H est strictement croissante, de dérivée bornée et d'ordre k, et telle que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}, \qquad |H^{(j)}(y_1) - H^{(j)}(y_2)| \leq A|y_1 - y_2|; \qquad j = 0, 1.$$

($\mathbf{H_4}$) Le noyau K est supposé d'ordre k intégrable, d'intégrale égale à 1, borné et positif.

($\mathbf{H_5}$)

$$\lim_{n\to+\infty} h_k = 0 \quad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n h_H^j h_K} = 0, \qquad j = 0, 1$$

$(\mathbf{H_6})$

$$\lim_{n\to+\infty} h_H = 0 \quad et \qquad \lim_{n\to+\infty} n^{\beta} h_H = \infty, \qquad \forall \beta > 0$$

2.2.2 Convergence presque complète

Théorème 2.2.1. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_6})$, *on a :*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| = O(h_K^k) + O(h_H^k) + O(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H h_K}}) \quad p.co. \tag{2.2}$$

Preuve du théorème (2.2.1)

On considére la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \widehat{h}^x(y) - h^x(y) &= \frac{\widehat{f}^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)} - \frac{f^x(y)}{1-F^x(y)} \\ &= \frac{\widehat{f}^x(y) - \widehat{f}^x(y)F^x(y) - f^x(y) + f^x(y)\widehat{F}^x(y)}{(1-\widehat{F}^x(y))(1-F^x(y))} \\ &= \frac{1}{1-\widehat{F}^x(y)}[(\widehat{f}^x(y) - f^x(y)) + \frac{f^x(y)}{1-F^x(y)}(\widehat{F}^x(y) - F^x(y))] \end{aligned} \tag{2.3}$$

D'où,

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| \leq \frac{1}{\inf_{y\in\mathcal{S}} |1-\widehat{F}^x(y)|}[\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}^x(y) - f^x(y)| + \frac{\sup_{y\in\mathcal{S}} |f^x(y)|}{\inf_{y\in\mathcal{S}} |1-F^x(y)|} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)|]$$

Ainsi,la démonstration de (2.3)repose sur les résultats suivants

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = O(h_K^k) + O(h_H^k) + O(\sqrt{\frac{\log n}{n h h_K}}) \quad p.co. \tag{2.4}$$

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}^x(y) - f^x(y)| = O(h_K^k) + O(h_H^k) + O(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H h_K}}) \quad p.co. \tag{2.5}$$

$$\exists \delta > 0 \quad telque \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\inf_{y\in\mathcal{S}} |1-\widehat{F}^x(y)| < \delta\} < \infty \tag{2.6}$$

De même la démonstration de (2.4)(resp.de (2.5))est basée respectivement sur les décomposition suivantes

$$\widehat{F}^x(y)-F^x(y) = \frac{1}{f_n(x)}\{(g_n(x,y)-\mathbb{E}g_n(x,y))-(F^x(y)f(x)-\mathbb{E}g_n(x,y))\}+\frac{F^x(y)}{f_n}(f(x)-f_n(x)) \tag{2.7}$$

et

$$\widehat{f}^x(y)-f^x(y) = \frac{1}{f_n(x)}\{(g_n^{(1)}(x,y)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y))-(f^x(y)f(x)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y))\}+\frac{f^x(y)}{f_n}(f(x)-f_n(x)) \tag{2.8}$$

Finalement,la démonstration du théorème est issue des lemmes suivants. ■

Lemme 2.2.1. *sous les hypothèses ($\mathbf{H_1}$) et ($\mathbf{H_4}$)-($\mathbf{H_5}$), on a,*

$$f_n(x) - f(x) = O(h_K^k) + O(\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}), p.co. \tag{2.9}$$

$$\exists \delta > 0 \quad telque \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(f_n(x) < \delta) < \infty. \tag{2.10}$$

Lemme 2.2.2. *sous les même conditions du théorème (2.2.1), ona*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |F^x(y)f(x) - \mathbb{E}g_n(x,y)| = O(h_K^k) + O(h_H^k). \tag{2.11}$$

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |f^x(y)f(x) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)| = O(h_K^k) + O(h_H^k). \tag{2.12}$$

Preuve du lemme (2.2.2)

Les observations (X_i, Y_i) étant équidistribuées, alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}g_n(x,y) &= \tfrac{1}{nh_K}\mathbb{E}[\textstyle\sum_{i=1}^n K(\tfrac{x-X_i}{h_K})H(\tfrac{y-Y_i}{h_H})] \\ &= \tfrac{1}{h_K}\mathbb{E}[K(\tfrac{x-X}{h_K})\mathbb{E}(H(h_H^{-1}(y-Y))/X)]\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}(H(h_H^{-1}(y-Y))/X) = \int_{\mathbb{R}} H(\frac{y-u}{h_H})f^X(u)du.$$

Une intégration par partie et le changement des variables usuelle $t = \frac{y-u}{h_H}$ entrainent que

$$\mathbb{E}(H(h_H^{-1}(y-Y))/X) = \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)F^X(y-h_Ht)dt.$$

Donc,

$$\mathbb{E}g_n(x,y) = \frac{1}{h_K}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(\frac{x-u}{h_K})H^{(1)}(t)F^u(y-h_Ht)f(u)dtdu.$$

par ailleurs

$$\mathbb{E}g_n(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(z)H^{(1)}(t)F^{x-h_kz}(y-h_Ht)f(x-h_kz)dtdz.$$

posons $g(x,y) = F^x(y)f(x)$ on obtient, sous $(\mathbf{H_3})$ et $(\mathbf{H_4})$, que

$$\mathbb{E}g_n(x,y) - g(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(z)H^{(1)}(t)[g(x-h_Kz, y-h_Ht) - g(x,y)]dtdz.$$

En utilisant le développement de Taylor de $g(x,y)$ ce qui est possible car g est de classe $\mathcal{C}^k$, on trouve

$$g(x-h_Kz, y-h_Ht) - g(x,y) = \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{i=i_1+i_2}\frac{\partial^i g(x,y)}{\partial x^{i_1}\partial y^{i_2}}((h_Kz)^{i_1}(h_Ht)^{i_2}) + O(h_K^k) + O(h_H^k).$$

Ainsi, $\mathbb{E}g_n(x,y) - g(x,y) =$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(z)H^{(1)}(t)\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{i=i_1+i_2}\frac{\partial^i g(x,y)}{\partial x^{i_1}\partial y^{i_2}}((h_Kz)^{i_1}(h_Ht)^{i_2})dtdz + O(h_K^k) + O(h_H^k).$$

comme les noyaux K et $H^{(1)}$ sont d'ordre k, on trouve que

$$\mathbb{E}g_n(x,y)-g(x,y)=\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{k=i_1+i_2}\frac{\partial^k g(x,y)}{\partial x^{i_1}\partial y^{i_2}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}K(z)H^{(1)}(t)((h_K z)^{i_1}(h_H z)^{i_2})dtdz+O(h_K^k)+O(h_H^k)$$

Il découle de ce dernier calcul que

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n(x,y)-g(x,y)|=O(h_K^k)+O(h_H^k).$$

De même pour l'équation (2.12), ona

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y) & = & \frac{1}{nh_Hh_K}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n K(\frac{x-X_i}{h_K})H^{(1)}(\frac{y-Y_i}{h_H})] \\ & = & \frac{1}{h_Hh_K}\mathbb{E}[K(\frac{x-X}{h_K})\mathbb{E}(H^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y))/X)]\end{array}$$

comme

$$\mathbb{E}(H^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y))/X)=\int_{\mathbb{R}}H^{(1)}(\frac{y-u}{h_H})f^X(u)du.$$

on considère le changement de variables $t=\frac{y-u}{h_H}$, on trouve

$$\mathbb{E}(H^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y))/X)=h_H\int_{\mathbb{R}}H^{(1)}(t)f^X(y-h_Ht)dt.$$

D'ou

$$\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)=\frac{1}{h_K}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}K(\frac{x-u}{h_K})H^{(1)}(t)f^u(y-h_Ht)f(u)dtdu$$

De même, par un changement des variables similaire, on obtient

$$\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}K(z)H^{(1)}(t)f^{x-h_Kz}(y-h_Ht)f(x-h_Kz)dtdz$$

posons

$$g_1(x,y)=f^x(y)f(x)$$

,alors

$$\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)-g_1(x,y)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}K(z)H^{(1)}(t)[g_1(x-h_Kz,y-h_Ht)-g_1(x,y)]dtdz.$$

Maintenant, on considére le développement de Taylor de la fonction $g_1(x,y)$ pour montrer que $\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y) - g_1(x,y) =$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K(z)H^{(1)}(t)\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{i=i_1+i_2}\frac{\partial^i g(x,y)}{\partial x^{i_1}\partial y^{i_2}}((h_K z)^{i_1}(h_H z)^{i_2})dtdz + O(h_K^k) + O(h_H^k).$$

On fait appel aux hypothèses $(\mathbf{H_3})$ et $(\mathbf{H_4})$ pour achever la démonstration de ce lemme. ■

Lemme 2.2.3. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_1})$ - $(\mathbf{H_6})$ *,on a,*

$$\frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,y) - \mathbb{E}g_n(x,y)| = O(\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}), p.co. \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x,y) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)| = O(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H h_K}}), p.co. \tag{2.14}$$

Preuve du lemme (2.2.3)
L'édée est de recouvrir le compact $\mathcal{S}$ par un nombre s_n des intervalles
$\mathcal{S}_k := [m_k - l_n, m_k + l_n]$, tel que $m_k \in \mathcal{S}$ et $s_n = l_n^{-1}$. On pose

$$m_y = \arg\min_{k\in 1,\ldots,s_n}|y - m_k|.$$

Ainsi,on peut écrire que,pour $j = 0,1$:

$$\begin{aligned}\left|g_n^{(j)}(x,y) - \mathbb{E}g_n^{(j)}(x,y)\right| &\leq \left|g_n^{(j)}(x,y) - g_n^{(j)}(x,m_y)\right| \\ &+ \left|\mathbb{E}g_n^{(j)}(x,m_y) - \mathbb{E}g_n^{(j)}(x,y)\right| + \left|g_n^{(j)}(x,m_y) - \mathbb{E}g_n^{(j)}(x,m_y)\right|.\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour montrer l'équation (2.13), on a

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,y) - \mathbb{E}g_n(x,y)| &\leq \underbrace{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,m_y) - \mathbb{E}g_n(x,m_y)|}_{T_1} \\ &+ \underbrace{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,y) - g_n(x,m_y)| + \sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n(x,m_y) - \mathbb{E}g_n(x,y)|}_{T_2}\end{aligned}$$

donc, il suffit de démontrer que les deux termes T_1 et T_2 converge presque complètement à la vitesse de $\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}$. En effet,

En ce qui concerne ($\mathbf{T_2}$) L'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) entraine

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,y)-g_n(x,m_y)| & \leq & \frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}\frac{1}{nh_K}\sum_{i=1}^{n}|H_i(y)-H_i(m_y)|K_i \\ & \leq & \frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}\frac{A|y-m_y|}{h_H}(\frac{1}{nh_K}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{K_i}) \\ & \leq & A\frac{l_n}{h_H} \end{array}$$

Le choix de $l_n = n^{-\beta-\frac{1}{2}}$ nous permrt d'obtenir la majoration suivante

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,y)-g_n(x,m_y)| \leq A\frac{n^{-\beta-\frac{1}{2}}}{h_H}$$

par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n(x,y)-\mathbb{E}g_n(x,m_y)| & \leq & \frac{1}{f_n}\mathbb{E}\sup_{y\in\mathcal{S}}\frac{1}{nh_K}\sum_{i=1}^{n}|H_i(y)-H_i(m_y)|K_i \\ & \leq & A\frac{l_n}{h_H} \\ & \leq & A\frac{n^{-\beta-\frac{1}{2}}}{h_H} \end{array}$$

En vertu de l'hypothèse ($\mathbf{H_6}$) et à l'aide d'un calcul simple, on montre que

$$l_n/h_H = O(\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}})$$

Ainsi, il existe un entier N_0 pour lequel nous avons

$$\exists\epsilon>0 \quad telque \quad \forall n>N_0, \mathbb{P}(\frac{1}{f_n}T_2>\epsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}})=0 \tag{2.15}$$

on peut écrire , donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\frac{1}{f_n}T_2>\epsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) = \sum_{n=1}^{N_0}\mathbb{P}(\frac{1}{f_n}T_2>\epsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) < \infty. \tag{2.16}$$

En ce qui concerne $(\mathbf{T_1})$

Il faut montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{f_n} T_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) < \infty$$

avac $\varepsilon_0 = \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}$. pour cela, on a,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(T_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) & \leq & \mathbb{P}(\max_{k\in 1,\dots,s_n} |g_n(x,m_k) - \mathbb{E}g_n(x,m_y)| > \frac{\varepsilon_0}{2}) \\ & \leq & \sum_{k=1}^{s_n} \mathbb{P}(|g_n(x,m_k) - \mathbb{E}g_n(x,m_y)| > \frac{\varepsilon_0}{2}) \\ & \leq & s_n \max_{k\in 1,\dots,s_n} \mathbb{P}(|g_n(x,m_k) - \mathbb{E}g_n(x,m_y)| > \frac{\varepsilon_0}{2}) \\ & \leq & l_n^{-1} \max_{k\in 1,\dots,s_n} \mathbb{P}(|g_n(x,m_k) - \mathbb{E}g_n(x,m_k)| > \frac{\varepsilon_0}{2}) \end{array}$$

D'autre part, on a

$$\begin{array}{rcl} \forall k \leq s_n \quad g_n(x,m_k) - \mathbb{E}g_n(x,m_k) & = & \frac{1}{nh_K}\sum_{i=1}^{n} K_i(x)H_i(m_k) - \mathbb{E}K_i(x)H_i(m_k) \\ & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{h_K}(K_i(x)H_i(m_k) - \mathbb{E}K_i(x)H_i(m_k))}_{\Lambda_i} \end{array}$$

Pour évaluer la quantité $\mathbb{P}(T_1 > \frac{\varepsilon_0}{2})$, on applique l'inégalité (1.5.1) qui nécessite la majoration des quantités $|\Lambda_i|$ et $\mathbb{E}\Lambda_i^2$. pour la premiére quantité, on a

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_i & \leq & \frac{1}{h_K}[K(\frac{x-X_i}{h_K})H(\frac{m_k-Y_i}{h_H})] \\ & < & \frac{A}{h_K}K(\frac{x-X_i}{h_K})(car 0 < H < 1) \end{array}$$

et comme le noyau Ket borné $(voir(\mathbf{H_4}))$, on obtient

$$|\Lambda_i| \leq \frac{A}{h_K}.$$

Pour le moment d'ordre deux de Λ_i, on a,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\Lambda_i^2 & \leq & \frac{A}{h_K^2}\mathbb{E}K^2(\frac{x-X}{h_K}) \\ & \leq & \frac{A}{h_K^2}\int f(u)K^2(\frac{x-u}{h_K})du, \end{array}$$

par un changement de variable $z = \frac{x-u}{h_K}$, on montre

$$\mathbb{E}\Lambda_i^2 \leq \frac{A}{h_K}\int f(x - zh_K)K^2(z)dz,$$

Comme, la densité f est de classe C^k et K est un noyau borné, intégrable alors

$$\mathbb{E}(\Lambda_i^2) \leq \frac{A'}{h_K}$$

Nous somme donc en mesure d'appliquer lemme (1.5.1) aux variables Λ_i.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|g_n(x,m_y) - \mathbb{E}g_n(x,m_y)| > \tfrac{\varepsilon_0}{2}) &= \mathbb{P}(\tfrac{1}{n}|\textstyle\sum_{i=1}^n \Lambda_i| > \tfrac{\varepsilon_0}{2}) \\
&\leq 2\exp(-An\varepsilon_0^2 h_K) \\
&\leq 2\exp(-An\tfrac{\epsilon^2 \log n}{nh_K}h_K) \\
&\leq 2n^{-A\epsilon^2}
\end{aligned}$$

Finalament, on obtient

$$\mathbb{P}(T_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) \leq 2l_n^{-1}n^{-A\epsilon^2}$$

En utilisant le fait que $l_n = n^{-\beta-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\mathbb{P}(T_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) \leq 2n^{-A\epsilon^2+\beta+\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

Il suffit de choisir ϵ de telle sorte que $-A\epsilon^2 + a < -1$, pour que la série de terme général $2n^{-A\epsilon^2+a}$ soit convergente.Finalement, il suffit d'utiliser le résultat (2.10) pour arriver à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{f_n}T_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) < \infty.$$

Ce qui achévera la démonstration de l'équation (2.13). Il nous reste maintenant, la deuxiéme partie du lemme. La démonstration de celle partie est trés similaire a cette de l'équation (2.13).En effet, on grade les mêmes notations du cas précédent et on considére la décomposition suivante

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x,y)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)| &\leq \underbrace{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x,m_y)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_y)|}_{F_1}\\ &+ \underbrace{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x,y)-g_n^{(1)}(x,m_y)|+\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_y)\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)|}_{F_2}\end{aligned}$$

Il suffit, donc, de démontrer que

$$\mathbb{P}(F_1>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K}})<\infty \quad et \quad \mathbb{P}(F_2>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K}})<\infty$$

avec

$$\varepsilon_0=\varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K}}$$

Pour $\mathbf{F_2}$, on utilise l'hypothèse $(\mathbf{H_3})$, pour arriver à

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^1(x,y)-g_n^1(x,m_k)| &\leq \frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}\frac{1}{nh_Hh_K}\sum_{i=1}^n|H_i^1(y)-H_i^1(m_y)|K_i\\ &\leq \frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}\frac{A|y-m_y|}{h_H^2}(\frac{1}{nh_K}\sum_{i=1}^n K_i)\\ &\leq A\frac{l_n}{h_H^2}\end{aligned}$$

On choisit $l_n=n^{-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}}$ ou a est donné dans l'hypothèse $(\mathbf{H_6})$, ce qui nous permet d'"crire

$$l_n/h_H^2=O(\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K}})$$

Finalement,

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^1(x,y)-g_n^1(x,m_k)|+\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n^1(x,m_y)-\mathbb{E}g_n^1(x,y)|\leq A\frac{n^{-\frac{3}{2}}\beta-\frac{1}{2}}{h_H^2}$$

Ce qui signifie, que il existe un N_0 tel que

$$\forall n > N_0, \quad \mathbb{P}(F_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) = 0$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{f_n} F_2 > \frac{\varepsilon_0}{2}) < \infty$$

Pour $\mathbf{F_1}$, on applique l'inégalité (1.5.1), car, on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(F_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) & \leq & \mathbb{P}(\max_{k\in(1,\dots,s_n)} |g_n^1(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^1(x,m_k)| > \frac{\varepsilon_0}{2}) \\ & \leq & \sum_{k=1}^{s_n} \mathbb{P}(|g_n^1(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^1(x,m_k)| > \frac{\varepsilon_0}{2}) \\ & \leq & S_n \max_{k\in(1,\dots,s_n)} \mathbb{P}(|g_n^1(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^1(x,m_k)| > \frac{\varepsilon_0}{2}) \\ & \leq & \frac{A}{l_n} \max_{k\in(1,\dots,s_n)} \mathbb{P}(|g_n^1(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^1(x,m_k)|) > \frac{\varepsilon_0}{2}) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} g_n^1(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^1(x,m_k) & = & \frac{1}{nh_H h_K} \sum_{i=1}^n K_i(x)H_i^1(m_k) - \mathbb{E}K_i(x)H_i^1(m_k) \\ & = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{h_H h_K}(K_i(x)H_i^1(m_k) - \mathbb{E}K_i(x)H_i^1(m_k))}_{\Lambda_i^*}. \end{array}$$

Les hypothèses $(\mathbf{H_3})$ et $(\mathbf{H_4})$ entrainent

$$|\Lambda_{i^*}| \leq \frac{A}{h_H h_K}$$

Pour le moment d'ordre deux de Λ_i^*, on a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(\Lambda_i^{*2}) & \leq & \frac{1}{h_H^2 h_K^2} \mathbb{E}(K_i^2(x) H_i^{(1)^2}(m_k)) \\ & = & \frac{1}{h_H^2 h_K^2} \mathbb{E}[K^2(\frac{x-X}{h_K}) H^{(1)^2}(\frac{m_k - Y}{h_H})] \\ & = & \frac{1}{h_H h_K^2} \mathbb{E}[K^2(\frac{x-X}{h_K}) \frac{1}{h_H} \mathbb{E}(H^{(1)^2}(\frac{m_k-Y}{h_H})/X)], \end{array}$$

on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{h_H} \mathbb{E}(H^{(1)^2}(\frac{m_k-Y}{h_H})/X) & = & \frac{1}{h_H} \int_{\mathbb{R}} (H^{(1)^2}(\frac{m_k-u}{h_H}) f^X(u) du \\ & = & \int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(t) f^X(m_k - h_H t) dt \\ & \leq & f^X(m_k) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(t) dt + O(h_H). \end{array} \tag{2.18}$$

Aprés un changement de variable $\frac{x-X}{h_K} = Z$, on montrer que

$$\mathbb{E}(\Lambda_i^{*2}) \leq \frac{A'}{h_H h_K}$$

On peut appliquer,maintenant,le lemme (1.5.1) aux variables Λ_i^*.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|g_n^1(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^1(x,m_k)| > \tfrac{\varepsilon_0}{2}) &= \mathbb{P}(\tfrac{1}{n}|\textstyle\sum_{i=1}^n \Lambda_i^*| > \tfrac{\varepsilon_0}{2}) \\
&\leq 2\exp(-An\varepsilon_0^2 h_H h_K) \\
&\leq 2\exp(-An\tfrac{\epsilon^2 \log n}{nh_H h_K} h_H h_K) \\
&\leq 2n^{-A\epsilon^2}
\end{aligned}$$

Comme $l_n = n^{-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}}$,alors, le choix de ε tel que $A\varepsilon^2 = \frac{5}{3}\beta + \frac{3}{2}$, permet de conclure que

$$\mathbb{P}(F_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) \leq An^{-1-\beta}$$

On combine avec (2.10),on obtient que

$$\mathbb{P}(\frac{1}{f_n}F_1 > \frac{\varepsilon_0}{2}) \leq An^{-1-\beta}$$

■

Lemme 2.2.4. *Sous les conditions du théorème précédent*

$$\exists\delta > 0 \quad telque \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\inf_{y\in\mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^x(y)| < \delta\} < \infty$$

Preuve du lemme (2.2.4)

Nous avons déja démontré de l'équation (2.4), la convergence presque compléte de $\widehat{F}^x(y)$ vers $F^x(y)$. Autrement dit, nous avons

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| > \varepsilon\} < \infty$$

D'autre part,on a par hypothèse $F^x < 1$,c'est à dire

$$1 - \widehat{F}^x \geq F^x - \widehat{F}^x$$

Ainsi,

$$\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^x(y)| \leq (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^x(y))/2 \Rightarrow \sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^x(y))/2$$

En terme de probabilité,on obtient

$$\mathbb{P}\{\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^x(y)| < \delta\} \leq \mathbb{P}\{\sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^x(y))/2\} < \infty.$$

Finalement, il suffit de prendre $\delta = (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^x(y))/2$ pour achever la démonstration du lemme. ■

2.3 Cas dépendant

On garde les mêmes notations de la section précédente, on suppose que nos observations $(X_1, Y_1), ...(X_n, Y_n)$ sont α-mélangeantes et on introduit les conditions suivantes.

2.3.1 Hypothèses

$\mathbf{H}_1^{'}$ La suite $(X_i, Y_i)_{i=1,...,n}$ est algébriquement α-mélangeante

$\mathbf{H}_2^{'}$ Le couple de variables aléatoires (X_i, Y_j) admet une densité continue notée f_{ij}, pour tout $i \neq j$

$\mathbf{H}_3^{'}$

$$\exists \eta > 0, An^{\frac{4-a+3\beta}{a+1}+\eta} \leq h_H h_K \quad et \quad h_K \leq A' n^{\frac{1}{1-a}}$$

avec

$$a > \frac{(6 - 3\beta) - \sqrt{(6 - 3\beta)^2 - 12(1 + \beta)}}{2}$$

Remarque 2.3.1. *:*
- L'aspect non paramétrique est bien exploité dans ce travail par l'hypothèse $(\mathbf{H_2})$. *Autrement dit, cette hypothèse de régularité qui caractérise l'espace de notre modèle, elle a justifé notre procédure non paramétrique.*
- On peut diviser nos hypothèses en trois catégories : des hypothèses sur le modèle comme $(\mathbf{H_1})$ *et* $(\mathbf{H_2})$*, des hypothèse sur la variable explicative* $\mathbf{H_1^{'}}$ *ou bien* $\mathbf{H_2^{'}}$ *et des hypothèses techniques (sont des hypothèses classiques en estimation non paramétrique).*
- Les hypothèses $\mathbf{H_1^{'}}$-$\mathbf{H_3^{'}}$ *sont ajoutées pour éviter l'expression de covariance dans la vitesse de convergence. Autrement dit, on peut démontrer la convergence presque complète sans ces hypothèses. Cependant,la vitesse de convergence sera donnée en fonction de covariance des observations et de plus elle sera relativement lente par rapport à la vitesse du cas indépendant.*

2.3.2 Convergence presque complète

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses du théorème* (2.2.1) *et si* $(\mathbf{H_1^{'}})$,$(\mathbf{H_2^{'}})$ *et* $(\mathbf{H_3^{'}})$ *soient vérifiées, alors,*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{h}^x(y)-h^x(y)| = O(h_K^k)+O(h_H^k)+O(\sqrt{\frac{logn}{nh_Hh_K}})p.co. \tag{2.19}$$

Preuve du théorème (2.3.1)
La démonstration est basée sur les mêmes arguments du théorème précédent. Notons que la corrélation des observations n'intervient pas dans les parties biais. Cependant, les parties dispersions sont étroitement liées à cette conditions. Ainsi, on peut dire que le présent théorème est une conséquence des lemmes (2.2.1, 2.2.3) et les résultats suivants : ■

Lemme 2.3.1. *Sous les conditions du théorème (2.3.1) on a :*

$$f_n(x)-\mathbb{E}f_n(x) = O(\sqrt{\frac{logn}{nh_K}}) \tag{2.20}$$

Preuve du lemme (2.3.1)
Par définition de la convergence presque complète il faut montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(f_n(x) - \mathbb{E}f_n(x) > \varepsilon\sqrt{\frac{logn}{nh_K}}) < \infty. \tag{2.21}$$

On peut écrire

$$f_n(x) - \mathbb{E}f_n(x) = \frac{1}{nh_K}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{K_i(x) - \mathbb{E}K_i(x)}_{\Delta_i}$$

Contrairement au cas, on applique, ici, l'inégalité de Fuc-Nagaev, pour laquelle, il nécessite le calcul de S_n^2 défini par

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| = s_n^{*^2} + nVar(\Delta_1)$$

ou

$$s_n^{*^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j} |cov(\Delta_i, \Delta_j)|.$$

Pour celà, on utilise les techniques de Masry (1986) et on définit les ensembles $\mathbf{S_1}$,$\mathbf{S_2}$,

$$\mathbf{S_1} = (i,j)telque1 \leq j - i \leq m_n$$

;

$$\mathbf{S_2} = (i,j)telquem_n + 1 \leq j - i \leq n - 1$$

où $(m_n)_n$ est une suite arbitraire d'entier positive. Donc,

$$s_n^{*^2} = \sum_{S_1} |cov(\Delta_i, \Delta_j| + \sum_{S_2} |cov(\Delta_i, \Delta_j|.$$

Comme, les variables Δ_i sont centrées alors,

$$cov(\Delta_i, \Delta_j) = \mathbb{E}(\Delta_i\Delta_j)$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta_i\Delta_j) &= \mathbb{E}((K_i(x)-\mathbb{E}K_i(x))(K_j(x)-\mathbb{E}K_j(x))) \\
&= \mathbb{E}(K_i(x)K_j(x)) - \mathbb{E}(K_i(x))\mathbb{E}(K_j(x)) \\
&\leq A\int\int K(\tfrac{x-u}{h_K})K(\tfrac{x-v}{h_K})|f_{ij}(u,v)-f(u)f(v)|dudv \\
&\leq Ah_K^2\int\int K(z)K(t)|f_{ij}(x-h_Kz,x-h_Kt)-f(x-h_Kz)f(x-h_Kt)|dzdt
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que les fonctions f et f_{ij} sont continue au voisinage de x et que le noyau k est borné, on déduit que

$$cov(\Delta_i,\Delta_j) = O(h_K^2)$$

D'autre part, et grâce au lemme (1.5.3),

$$s_n^{*^2} \leq A(\sum\sum_{S_1} h_K^2 + \sum\sum_{S_2}\alpha(|i-j|)) = O(nh_K^2 m_n + n^2\alpha(m_n))$$

Pour $m_n = \frac{1}{h_K}$ on trouve

$$s_n^{*^2} = O(nh_K) + O(n^2\alpha(\frac{1}{h_K}))$$

Ainsi,d'après $(\mathbf{H_1'})$ on a

$$\alpha(\frac{1}{h_k}) \leq Ah_K^a$$

et sous $(\mathbf{H_3'})$ on obtient

$$S_n^{*^2} = O(nh_K)$$

Il nous reste a étudier la variance, nous avons pour cela

$$
\begin{aligned}
var(\Delta_1) &\leq \mathbb{E}K_i^2(x) \\
&\leq \int K^2(\tfrac{x-u}{h_K})f(u)du \\
&\leq h_K\int K^2(z)f(x-h_Kz)dz
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$nvar(\Delta_1) = O(nh_K)$$

On obtient, finalement, que

$$S_n^2 = O(nh_K)$$

Le lemme (1.5.2) entraîne que, pour $\varepsilon > 0$ et $r > 1$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon) & = & \mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n \Delta_i| > \varepsilon nh_K) \\ & \leq & 4(1 + \frac{\varepsilon^2 n^2 h_K^2}{16 r S_n^2})^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}(\frac{8r}{\varepsilon nh_K})^{a+1} \end{array}$$

Ainsi, on arrive à

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) & \leq & 4(1 + \frac{\varepsilon^2 n^2 h_K^2 \frac{\log n}{nh_K}}{16 r S_n^2})^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}(\frac{8r}{\varepsilon nh_K\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}})^{a+1} \\ & \leq & 4(1 + \frac{\varepsilon^2 nh_K \log n}{16 r S_n^2})^{\frac{-r}{2}} + Anr^a \varepsilon^{-(a+1)}(nh_K \log n)^{\frac{-(a+1)}{2}} \\ & \leq & 4(1 + \frac{\varepsilon^2 \log n}{16 r})^{\frac{-r}{2}} + An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \varepsilon^{-(a+1)}(h_K \log n)^{\frac{-(a+1)}{2}} \\ & \leq & A \exp^{\frac{-r}{2}\log(1+\frac{\varepsilon^2 \log n}{16r})} + An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \varepsilon^{-(a+1)}(\log n)^{\frac{-(a+1)}{2}} h_K^{\frac{-(a+1)}{2}} \end{array}$$

Choisissons r sous la forme $r = C(\log n)^2$, où C est une constante. Nous obtenons,

$$\mathbb{P}(|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) \leq An^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} h_K^{\frac{-(a+1)}{2}}$$

On applique $(\mathbf{H_3'})$ on arrive à

$$\mathbb{P}(|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) \leq An^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{\frac{-(a+1)}{2}(\frac{3+a}{a+1}+\eta)}$$

Pour ε suffisamment grand et $\nu > 0$ on aboutira,

$$\mathbb{P}(|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) \leq A' n^{-1-\nu} \tag{2.22}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} A' n^{-1-\nu} < \infty$$

■

Lemme 2.3.2. *Sous les conditions du théorème (2.3.1) on a :*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,y)-\mathbb{E}g_n(x,y)| = O(\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}), p.co. \tag{2.23}$$

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x,y)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)| = O(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H h_K}}), p.co. \tag{2.24}$$

Preuve du lemme (2.3.2)

La démonstration est très similaire à celle du lemme (2.2.3). On garde les mêmes notations, les mêmes décomposition, ainsi que le même nombre des intervalles, selon le cas, qui recouvrent le compact $\mathcal{S}$. Pour l'équation (2.23), il suffit démontre que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) < \infty \tag{2.25}$$

Notons que

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) \leq Al_n^{-1}\max_{k\in(1,\dots,s_n)}\mathbb{P}(|g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}}) \tag{2.26}$$

On pose

$$g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k) = \frac{1}{nh_K}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{K_i(x)H_i(m_k)-\mathbb{E}K_i(x)H_i(m_k)}_{\Lambda_i}$$

On applique de nouveau le lemme (1.5.2) dont il faut calculer

$$s_n'^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|cov(\Lambda_i,\Lambda_j)| = s_n^{*'^2} + nvar(\Lambda_1)$$

où

$$s_n^{*'^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} |cov(\Lambda_i, \Lambda_j)|$$

$$\begin{array}{rcl}
cov(\Lambda_i, \Lambda_j) & = & \mathbb{E}\left(K_i(x)H_i(m_k)K_j(x)H_j(m_k)\right) - \mathbb{E}\left(K_i(x)H_i(m_k)\right)\mathbb{E}\left(K_j(x)H_j(m_k)\right) \\
& = & \mathbb{E}\left(K(\frac{x-X_i}{h_K})H(\frac{m_k-Y_i}{h_H})K(\frac{x-X_j}{h_K})H(\frac{m_k-Y_j}{h_H})\right) - \\
& & \mathbb{E}\left(K(\frac{x-X_i}{h_K})H(\frac{m_k-Y_i}{h_H})\right)\mathbb{E}\left(K(\frac{x-X_j}{h_K})H(\frac{m_k-Y_j}{h_H})\right) \\
& \leq & A\left[\mathbb{E}(K(\frac{x-X_i}{h_K})K(\frac{x-X_j}{h_K})) - \mathbb{E}(K(\frac{x-X_i}{h_K}))\mathbb{E}(K(\frac{x-X_j}{h_K}))\right] \\
& \leq & A\int\int K(\frac{x-u}{h_K})K(\frac{x-v}{h_K})|f_{ij}(u,v) - f(u)f(v)|dudv \\
& \leq & Ah_K^2\int\int K(z)K(t)|f_{ij}(x-h_Kz, x-h_Kt) - f(x-h_Kz)f(x-h_Kt)|dzdt
\end{array}$$

Nous avons,donc,

$$cov(\Lambda_i, \Lambda_j) = O(h_K^2)$$

Grâce au lemme (1.5.3), on a,

$$S_n^{*'^2} \leq A(nh_K^2 m_n + n^2\alpha(m_n)) \leq A'(nh_K^2 m_n + n^2 m_n^{-a})$$

Pour un choix de $m_n = \frac{1}{h_K}$ on trouve, à l'aide d'un simple calcul que

$$S_n^{*'^2} = O(nh_K)$$

Pour la variance

$$\begin{array}{rcl}
var(\Lambda_1) & = & \mathbb{E}[K_i(x)H_i(m_k)]^2 - \mathbb{E}^2[K_i(x)H_i(m_k)] \\
& = & \mathbb{E}[K(\frac{x-X_1}{h_K})H(\frac{m_k-Y_1}{h_H})]^2 - \mathbb{E}^2[K(\frac{x-X_1}{h_K})H(\frac{m_k-Y_1}{h_H})] \\
& \leq & A\int K^2(\frac{x-u}{h_K})f(u)du - A[\int K(\frac{x-u}{h_K})f(u)du]^2 \\
& \leq & Ah_K\int K^2(z)f(x-h_Kz)dz - Ah_K^2[\int K(z)f(x-h_Kz)dz]^2 \\
& \leq & Ah_K\int K^2(z)f(x-h_Kz)dz
\end{array}$$

Alors

$$nvar(\Lambda_1) = O(nh_K)$$

Finalement

$$S_n'^2 = O(nh_K)$$

Donc

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,m_k-\mathbb{E}g_n(x,m_k|>\delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_K}})\leq Al_n^{-1}(B_1+B_2)$$

où B_1 et B_2 sont respectivement définies par

$$B_1=4(1+\frac{\delta^2\log n}{16r})^{\frac{-r}{2}}$$

$$B_2=An^{1-\frac{(a+1)}{2}}r^a\delta^{-(a+1)}(h_K\log n)^{\frac{-(a+1)}{2}}$$

Pour r sous la forme $r=C(\log n)^2$, on a

$$B_1=\exp^{\frac{-r}{2}\log 4(1+\frac{\delta^2\log n}{16r})}\leq\exp^{\frac{-C(\log n)^2}{2}}\log(1+\frac{C\delta^2}{16\log n})$$

Il est claire que

$$B_1\leq An^{\frac{-\delta^2}{32}}$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse ($\mathrm{H}_3^{'}$), on montre que

$$l_n^{-1}B_2\leq An^{-1-\nu},\nu>0$$

Finalement, pour un choix convenable de δ, on déduit que

$$l_n^{-1}(B_1+B_2)\leq An^{-1-\mu},\mu>0$$

Cela montre l'équation (2.25). Il nous reste à montrer l'équation (2.24), pour laquelle il suffit, aussi, de montrer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x,m_k)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k)|>\delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K}})<\infty \tag{2.27}$$

On a

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x,m_k)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k)|>\delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K}})$$

$$\leq Al_n^{-1}\max_{k\in(1,\ldots,s_n)}\mathbb{P}(|g_n^{(1)}(x,m_k)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k)|>\delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K}})$$

on peut écrire

$$g_n^{(1)}(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k) = \frac{1}{nh_Hh_K}\sum_{i=1}^{n} K_i(x)H_i^{(1)}(m_k) - \mathbb{E}K_i(x)H_i^{(1)}(m_k)$$

De même, on applique le lemme (1.5.2), sur les variables

$$\Lambda_i^* = K_i(x)H_i^{(1)}(m_k) - \mathbb{E}K_i(x)H_i^{(1)}(m_k)$$

Donc, il faut d'abord évaluer la quantité

$$S_n^{'2} = S_n^{*'^2} + nvar(\Lambda_1)$$

où

$$S_n^{*'^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j} |cov(\Lambda_i^*, \Lambda_j^*)|$$

À l'aide d'un simple calcul , on montre que

$$cov(\Lambda_i^*, \Lambda_j^*) = O(h_H^2 h_K^2)$$

Alors,

$$S_n^{*'^2} \leq A(nh_H^2h_K^2m_n' + n^2\alpha(m_n')) \leq A'(nh_H^2h_K^2m_n' + n^2m_n'^{-a})$$

Nous choisissons m_n sous la forme $m_n' = \frac{1}{h_Hh_K}$, on montre que

$$S_n^{*'^2} = O(nh_Hh_K)$$

les hypothèses ($\mathbf{H}_3$) et ($\mathbf{H}_4$) montrent que

$$var(\Lambda_i^*) = O(h_Hh_K)$$

Finalement, on trouve

$$S_n^{'2} = O(nh_Hh_K)$$

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |g_n^{(1)}(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K}}) \leq Al_n^{-1}(B_1 + B_2)$$

où B_1 et B_2 sont respectivement définies par

$$B_1 = 4(1 + \frac{\delta^2 \log n}{16r})^{\frac{-r}{2}};$$

$$B_2 = An^{1-\frac{-(a+1)}{2}} r^a \delta^{-(a+1)} (h_H h_{K \log n})^{\frac{-(a+1)}{2}}$$

Il suffit d'utiliser la deuxième partie de l'hypothèse $(\mathbf{H}_3^{'})$, pour achever la démonstration du lemme.

$\blacksquare$

Chapitre 3

Estimation non paramétrique de la fonction de risque conditionnel : Cas multi-varié

Dans le présent chapitre, on généralise les résultats déjà obtenus dans le cas univarié à une variable explicative de dimension finie, dont l'objectif est d'étudier l'effet de la "dimensionnalité" dans notre estimation. Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la première Section, on présente le modèle et l'estimateur adapté pour le cas multi-varié. Nous donnons les hypothèses nécessaires pour l'obtention de nos résultats à la deuxième Section. La dernière Section est consacrée à l'étude des propriétés asymptotiques de cet estimateur en considérant les deux cas des observations i.i.d. et α-mélangeantes .

3.1 Modéle

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, A, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ Soit $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ une suite des observation identiquement distribuées que (X, Y). On fixe un point $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$, on désigne par $F^x = F^{(x_1,\ldots,x_p)}$ la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$. L'estimateur à noyau de la fonction de répartition conditionnelle, noté $\widehat{F}^x = \widehat{F}^{(x_1,\ldots,x_p)}$ est défini par :

$$\widehat{F}^{(x_1,\dots,x_p)}(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}((x_1,...,x_p) - X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}((x_1,...,x_p) - X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

ou K est un noyau, H est une fonction de répartition et $h_k = h_{k,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) est une suite de réels positifs. Notons que cet estimateur est une généralisation à la dimension p de l'estimateur (2.1). Avant d'estimer la densité conditionnelle, on estime la densité de la variable explicative et la densité conjointe des variable (X, Y) dans $\mathbb{R}^{p+1}$, respectivement par ;

$$f_n(x_1,...,x_p) = \frac{1}{nh_K^p} \sum_{i=1}^{n} K_i(x_1,...,x_p)$$

et

$$g_n^{(j)}(x_1,...,x_p,y) = \frac{1}{nh_H^j h_K^p} \sum_{i=1}^{n} K_i(x_1,...,x_p) H_i^{(j)}(y)$$

où

$$K_i(x_1,...,x_p) = K(h_K^{-1}((x_1,...,x_p - X_i)) et H_i^{(j)}(y) = H^{(j)}(h_H^{-1}(y - Y_i))$$

Ainsi, l'estimateur de la densité conditionnelle noté $\widehat{f}^{(x_1,\dots,x_p)}$ est le rapport entre $g_1^{(j)}(x_1,...,x_p,y)$ et $f_n(x_1,...,x_p)$. L'estimateur naturel de la fonction de hasard conditionnelle, noté $\widehat{h}^{(x_1,\dots,x_p)}$, est la variable aléatoire définie par

$$\widehat{h}^{(x_1,\dots,x_p)}(y) = \frac{\widehat{f}^{(x_1,\dots,x_p)}(y)}{1 - \widehat{F}^{(x_1,\dots,x_p)}(y)}$$

3.2 Hypothèses

Afin d'établir les propriétés asymptotique de l'estimateur$\widehat{h}^{(x_1,\dots,x_p)}$.on introduit les hypothèses suivantes :

(H₁) La fonction de répartition conditionnelle est $K+1$-fois continument dérivable autour de $\mathcal{S}$.

$(\mathbf{H_2})$ La densité de la variable explicative est strictement positive,et de classe C^k au voisinage de $(x_1, ..., x_p)$.

$(\mathbf{H_3})$ La fonction H est strictement croissante, de dérivée bornée et d'ordre k,et tels que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}, \qquad |H^{(j)}(y_1) - H^{(j)}(y_2)| \leq A|y_1 - y_2|; \qquad j = 0, 1.$$

$(\mathbf{H_4})$ k un noyau de $\mathbb{R}^p$ d'ordre k, borné et intégrable d'intégrale égale à un.

$(\mathbf{H_5})$

$$\lim_{n\to+\infty} h_k = 0 \quad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n h_H^j h_K^p} = 0, \qquad j = 0, 1$$

$(\mathbf{H_6})$

$$\lim_{n\to+\infty} h_H = 0 \quad et \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\beta h_H = \infty, \qquad \forall \beta > 0$$

3.3 Propriétés asymptotiques

On établit le résultat suivant

Théorème 3.3.1. *Soit $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ un n-échantillon de (X, Y), alors, Sous les hypothèses $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_6})$,on a :*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{h}^{(x_1,...,x_p)}(y) - h^{(x_1,...,x_p)}(y)| = O(h_K^k) + O(h_H^k) + O(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H h_K^p}}) \quad p.co. \tag{3.2}$$

et si la suite $(X_i, Y_i)_{i=1,...,n}$ est algébriquement α-mélangeante, tel que le couple (X_i, X_j) à densité continue notée f_{ij}, pour touti $\neq j$, et que

$$\exists \eta > 0, A n^{\frac{4-a+3\beta}{a+1}+\eta} \leq h_H h_K^p \quad et \quad h_K^p \leq A' n^{\frac{1}{1-a}}$$

$$avec \quad a > \frac{(6-3\beta) - \sqrt{(6-3\beta)^2 - 12(1+\beta)}}{2} alors,$$

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{h}^{x_1,...,x_p}(y) - h^{x_1,...,x_p}(y)| = O(h_K^k) + O(h_H^k) + O(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H h_K^p}}) p.co.$$

Preuve du théorème (3.3.1)

Par une démonstration analogue à celle utilisée dans le cas uni-variée on montre que notre résultat est issue des trois résultats préliminaire suivants :

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}^{(x_1,\ldots,x_p)}(y) - F^{(x_1,\ldots,x_p)}(y)| = o(h_K^k) + o(h_H^k) + o(\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}) \quad p.co. \tag{3.3}$$

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}^{(x_1,\ldots,x_p)}(y) - f^{(x_1,\ldots,x_p)}(y)| = o(h_K^k) + o(h_H^k) + o(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H h_K^p}}) \quad p.co. \tag{3.4}$$

$$\exists\delta > 0 \quad telque \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\inf_{y\in\mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^{(x_1,\ldots,x_p)}(y)| < \delta\} < \infty \tag{3.5}$$

La démonstration de (3.5) est identique à celle du lemme (2.2.4) du chapitre précédent. Tandis que la démonstration des équations (3.3) et (3.4) repose sur les décompositions suivantes

$$\begin{aligned}\widehat{F}^x(y) - F^x(y) \quad = \quad & \tfrac{1}{f_n(x)}\{(g_n(x,y) - \mathbb{E}g_n(x,y)) - (F^x(y)f(x) - \mathbb{E}g_n(x,y))\}+ \\ & \tfrac{F^x(y)}{f_n}(f(x) - f_n(x))\end{aligned} \tag{3.6}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{f}^x(y) - f^x(y) \quad = \quad & \tfrac{1}{f_n(x)}\{(g_n^1(x,y) - \mathbb{E}g_n^1(x,y)) - (f^x(y)f(x) - \mathbb{E}g_n^1(x,y))\}+ \\ & \tfrac{f^x(y)}{f_n}(f(x) - f_n(x))\end{aligned} \tag{3.7}$$

Par ailleurs, la preuve du théorème est basée sur les résultats suivants. ■

Lemme 3.3.1. *Sous les hypothèses du théorème (3.3.1), on a*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |f_n(x_1,\ldots,x_p) - f(x_1,\ldots,x_p)| = O(h_K^k) + O(\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}) \qquad p.co. \tag{3.8}$$

$$\exists \delta > 0 \quad telque \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(f_n(x_1, ..., x_p) < \delta) < \infty \tag{3.9}$$

Lemme 3.3.2. *Sous les mêmes conditions du lemme précédent, on a :*

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |F^{(x_1,...,x_p)}(y) f(x_1, ..., x_p) - \mathbb{E} g_n(x_1, ..., x_p, y)| = O(h_K^k) + O(h_H^k) \tag{3.10}$$

$$\sup_{y \in \mathcal{S}} |f^{(x_1,...,x_p)}(y) f(x_1, ..., x_p) - \mathbb{E} g_n^{(1)}(x_1, ..., x_p, y)| = o(h_K^k) + o(h_H^k) \tag{3.11}$$

Preuve du lemme (3.3.2) Par définition, on a de $g_n(x_1, ..., x_p, y)$

$$\mathbb{E} g_n(x_1, ..., x_p, y) = \frac{1}{h_K^p} \mathbb{E}\big[K(\frac{(x_1, ..., x_p) - X}{h_K}) \mathbb{E}(H(h_H^{-1}(y - Y))/X)\big]$$

Par intégration par parties on montre que

$$\mathbb{E}(H(h_H^{-1}(y - Y))/X) = \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) F^X(y - h_H t) dt$$

donc
$\mathbb{E} g_n(x_1, ..., x_p, y) =$

$$\frac{1}{h_K^p} \int ... \int K(\frac{x_1 - u_1, ..., x_p - u_p}{h_K}) H^{(1)}(t) F^{(u_1,...,u_p)}(y - h_H t) f(u_1, ..., u_p) du_1 ... du_p dt$$

on considère le changement, pour tout $i \leq p, h_K^{-1}(x_i - u_i) = z_i$ on obtient
$\mathbb{E} g_n(x_1, ..., x_p, y) =$

$$\int ... \int K(z_1, ..., z_p) H^{(1)}(t) F^{(x_1 - h_K z_1,...,x_p - h_K z_p)}(y - h_H t) f(x_1 - h_K z_1, ..., x_p - h_K z_p) dz_1 ... dz_p dt$$

Pour simplifier la notations on pose

$$F^{(x_1,...,x_p)}(y) f(x_1, ..., x_p) = g(x_1, ..., x_p, y)$$

nous avons, donc,

$\mathbb{E}g_n(x_1, ..., x_p, y) - g(x_1, ..., x_p, y) =$

$$\int ... \int K(z_1, ..., z_p)H^{(1)}[g(x_1 - h_K z_1, ..., x_p - h_K z_p, y - h_H t) - g(x_1, ..., x_p, y)]dz_1...dz_p dt$$

En utilisant le développement de Taylor pour la fonction g au voisinage $(x_1, ..., x_p, y)$, on obtient

$g(x_1 - h_K z_1, ..., x_p - h_K z_p, y - h_H t) - g(x_1, ..., x_p, y) =$

$$- \sum_{i=i_1+...+i_{p+1}=1} \frac{\partial^i g(x_1, ..., x_p, y)}{\partial x^{i_1}...\partial x^{i_p}\partial y^{i_{p+1}}}((h_K z_1)^{i_1}...(h_K z_p)^{i_p}(h_H t)^{i_{p+1}})+$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=i_1+...+i_{p+1}=2} \frac{\partial^i g(x_1, ..., x_p, y)}{\partial x^{i_1}...\partial x^{i_p}\partial y^{i_{p+1}}}((h_K z_1)^{i_1}...(h_K z_p)^{i_p}(h_H t)^{i_{p+1}})+$$

$$\frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=i_1+...+i_{p+1}=k} \frac{\partial^i g(x_1, ..., x_p, y)}{\partial x^{i_1}...\partial x^{i_p}\partial y^{i_{p+1}}}((h_K z_1)^{i_1}...(h_K z_p)^{i_p}(h_H t)^{i_{p+1}}) + o(h_K^k) + o(h_H^k)$$

En général,

$g(x_1 - h_K z_1, ..., x_p - h_K z_p, y - h_H t) - g(x_1, ..., x_p, y) =$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{i=i_1+...+i_{p+1}} \frac{\partial^i g(x_1,...,x_p,y)}{\partial x^{i_1}...\partial x^{i_p}\partial y^{i_{p+1}}}((h_K z_1)^{i_1}...(h_K z_p)^{i_p}(h_H t)^{i_{p+1}}) + o(h_K^k) + o(h_H^k)$$

On remplace dans l'intégrale précédent et on utilise le fait que les noyaux K et H sont d'ordre k pour arriver à

$$g_n(x_1, ..., x_p, y) - F^{(x_1,...,x_p)}(y)f(x_1, ..., x_p) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=i_1+...+i_{p+1}=k} \frac{\partial^i g(x_1, ..., x_p, y)}{\partial x^{i_1}...\partial x^{i_p}\partial y^{i_{p+1}}} \int ...$$

$$\int K(z_1, ..., z_p)((h_K z_1)^{i_1}...(h_K z_p)^{i_p})dz_1...dz_p \int H^{(1)}(t)(h_H t)^{i_{p+1}}dt + o(h_K^k) + o(h_H^k)$$

Par conséquent,

$$g_n(x_1,...,x_p,y) - F^{(x_1,...,x_p)}(y)f(x_1,...,x_p) = o(h_K^k) + o(h_H^k)$$

Concernant l'équation (3.11)**,** on a

$$\mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y) = \frac{1}{h_H h_K^p}\mathbb{E}[K(\frac{(x_1,...,x_p)-X}{h_K})\mathbb{E}(H(h_H^{-1}(y-Y))/X)]$$

Il est claire que

$$\mathbb{E}(H^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y))/X) = h_H\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)F^X(y-h_Ht)dt$$

$\mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y) =$

$$\frac{1}{h_K^p}\int...\int K(\frac{x_1-u_1,...,x_p-u_p}{h_k})H^{(1)}(t)f^{(u_1,...,u_p)}(y-h_Ht)f(u_1,...,u_p)du_1,...,du_pdt$$

On considère le changement des variables usuelle pour arriver à
$\mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y) =$

$$\int...\int K(z_1,...,z_p)H^{(1)}(t)f^{(x_1-h_Kz_1,...,x_p-h_Kz_p)}(y-h_Ht)f(x_1-h_Kz_1,...,x_p-h_Kz_p)dz_1,...,dz_pdt$$

On pose

$$f^{(x_1,...,x_p}(y)f(x_1,...,x_p) = g_1(x_1,...,x_p,y)$$

alors $\mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y) - g_1(x_1,...,x_p,y) =$

$$\int...\int K(z_1,...,z_p)H^{(1)}(t)[g_1(x_1-h_Kz_1,...,x_p-h_Kz_p,y-h_Ht)-g_1(x_1,...,x_p,y)]dz_1,...,dz_pdt$$

En utilisant le développement de Taylor pour la fonction g_1 au voisinage de $(x_1,...,x_p,y)$, on obtient
$g_1(x_1-h_Kz_1,...,x_p-h_Kz_p,y-h_Ht) - g_1(x_1,...,x_p,y) =$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{i=i_1+...+i_{p+1}}\frac{\partial^i g(x_1,...,x_p,y)}{\partial x^{i_1}...\partial x^{i_p}\partial y^{i_{p+1}}}((h_Kz_1)^{i_1}...(h_Kz_p)^{i_p}(h_Ht)^{i_{p+1}}) + o(h_K^k) + o(h_H^k).$$

Finalement, il suffit d'utiliser le fait que le noyau K (resp. H) est d'ordre k pour obtenir le résultat de l'équation (3.11) et pour achever la preuve du lemme (3.3.2) ■

Lemme 3.3.3. *Sous les hypothèses* (**H1**) – (**H4**) *et* (**H6**) *On a,*

$$\frac{1}{f_n(x_1,...,x_p)}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,y)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,y)| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}\right)\ \ p.co. \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{f_n(x_1,...,x_p)}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y)| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}}\right)\ \ p.co. \tag{3.13}$$

et si la suite $(\mathbf{X_i},\mathbf{Y_i})_{i=1,...,n}$ *est algébriquement* α*-mélangeante, tel que le couple* $(\mathbf{X_i},\mathbf{X_j})$ *à densité continue notée* f_{ij} *, pour tout* $i\neq j$ *, et que*

$$\exists\eta>0, \mathbf{A}n^{\frac{4-a+3\beta}{a+1}+\eta}\leq h_Hh_K^p \quad et \quad h_K^p\leq \mathbf{A}'n^{\frac{1}{1-a}}$$

avec

$$a>\frac{(6-3\beta)-\sqrt{(6-3\beta)^2-12(1+\beta)}}{2}$$

Alors,

$$\frac{1}{f_n(x_1,...,x_p)}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,y)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,y)| = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}\right), p.co.$$

$$\frac{1}{f_n(x_1,...,x_p)}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y)| = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}}\right), p.co.$$

Preuve du lemme (3.3.3)

On Considère d'abord le cas i.i.d. et ensuite on traite le cas de mélange. En générale, la démonstration est analogue à du lemme (2.2.3) En effet, pour l'équation (3.3), on considère la décomposition suivante

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,y)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,y)| \leq \underbrace{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,m_y)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_y)|}_{T_1}$$

$$+\underbrace{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,y)-g_n(x_1,...,x_p,m_y)|+\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_y)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,y)|}_{T_2}$$

où m_y est telle que

$$\mathcal{S}\subset\bigcup_{k=1}^{S_n}]m_k-l_n,m_k+l_n]$$

et $m_y=\arg\min_{k\in 1,...,S_n}|y-m_k|$

Il suffit, donc, d'étudier séparément les deux quantités T_1 et T_2 car

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,y)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,y)|>\varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}\} \quad &\leq \quad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\{T_1>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}\}+\\ &\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\{T_2>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}\}\end{aligned}$$

(a) **Étude du terme T_1**

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{T_1>\tfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_K^p}}\} &\leq \mathbb{P}(\max_{k\in 1,...,S_n}|g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)|>\tfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_K^p}})\\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{S_n}\mathbb{P}(|g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)|>\tfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_K^p}})\\ &\leq S_n\max_{k\in 1,...,S_n}\mathbb{P}(|g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)|>\tfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_K^p}})\\ &\leq Al_n^{-1}\max_{k\in 1,...,S_n}\mathbb{P}(|g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)|>\tfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_K^p}})\end{aligned}$$

De plus

$$g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)=\frac{1}{nh_K^p}\sum_{i=1}^{n}K_i(x)H_i(m_k)-\mathbb{E}K_i(x)H_i(m_k)$$

Posons

$$\Lambda_i=\frac{1}{h_K^p}[k(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H(\frac{m_k-Y_i}{h_H})-\mathbb{E}K(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H(\frac{m_k-Y_i}{h_H})]$$

Pour appliquer le lemme de Hoffding aux variables Λ_i, il faut majorer $|\Lambda_i|$ et $\mathbb{E}\Lambda_i^2$, en effet,

$$\begin{array}{rcl}\Lambda_i & \leq & \frac{1}{h_K^p}[k(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H(\frac{m_k-Y_i}{h_H})] \\ & < & \frac{A}{h_K^p}k(\frac{(x_1,...,x_p)-X}{h_K}) \quad (car 0 < H < 1),\end{array}$$

et comme K est borné d'après l'hypothèse $(\mathbf{H_4})$, on déduit que

$$|\Lambda_i| \leq \frac{A}{h_K^p}$$

Pour le moment d'ordre deux de Λ_i, on pose

$$\Upsilon_i = \frac{1}{h_K^p}[k(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H(\frac{m_k-Y_i}{h_H})]$$

Nous avons

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}\Upsilon_i^2 & = & \frac{1}{h_K^{2p}}[k^2(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H^2(\frac{m_k-Y_i}{h_H})] \\ & \leq & \frac{A}{h_K^{2p}}\mathbb{E}k^2(\frac{(x_1,...,x_p)-X}{h_K}) \\ & \leq & \frac{A}{h_K^{2p}}\int...\int k^2(\frac{(x_1-u_1,...,x_p-u_p)}{h_K})f(u_1,...,u_p)du_1...du_p.\end{array}$$

On considère les changements $z_i = \frac{x_i-u_i}{h_K}$, $i \leq p$ on en tire alors

$$\mathbb{E}\Upsilon_i^2 \leq \frac{A}{h_K^p}\int...\int f(x_1-h_Kz_1,...,x_p-h_Kz_p)k^2(z_1,...,z_p)dz_1...dz_p.$$

Comme, la densité f est continue et le noyau K est borné, alors

$$\mathbb{E}\Upsilon_i^2 \leq \frac{A'}{h_K^p}$$

Ce qui entraîne également

$$\mathbb{E}\Lambda_i^2 = var(\Upsilon_i) \leq \mathbb{E}\Upsilon_i^2 \leq \frac{A'}{h_K^p}$$

En appliquant de nouveau le lemme (1.5.1) on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|g_n(x,m_k)-\mathbb{E}g_n(x,m_k)|>\tfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_K^p}}) &= \mathbb{P}(\tfrac{1}{n}|\textstyle\sum_{i=1}^n\Lambda_i|>\tfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_K^p}})\\ &\leq 2\exp(-An\tfrac{\varepsilon^2\log n}{nh_K^p}h_K^p)\\ &\leq 2n^{-A\varepsilon^2}\end{aligned}$$

En prenant $l_n = n^{-\beta-\frac{1}{2}}$, on montre que il suffit de choisir les constantes de telle sorte que la série de terme général $l_n n^{-A\varepsilon^2}$ soit convergente. Finalement,le résultat de l'équation (3.9) montre que

$$\mathbb{P}\{\frac{1}{f_n}T_1>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}\}<\infty$$

(b) Étude du terme T_2

L'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) entraîne

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x,y)-g_n(x,m_y)| &\leq \tfrac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}\tfrac{1}{nh_K^p}\textstyle\sum_{i=1}^n|H_i(y)-H_i(m_y)|K_i\\ &\leq \tfrac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}\tfrac{A|y-m_y|}{h_H}(\tfrac{1}{nh_K^p}\textstyle\sum_{i=1}^n K_i)\\ &\leq A\tfrac{l_n}{h_H}\end{aligned}$$

Comme $l_n = n^{-\beta-\frac{1}{2}}$, alors, on peut écrire

$$\frac{1}{f_n(x_1,...,x_p)}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,y)-g_n(x_1,...,x_p,m_y)|\leq A\frac{n^{-\beta-\frac{1}{2}}}{h_H}$$

De même

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{f_n(x_1,...,x_p)}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,y)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_y)| &\leq A\tfrac{l_n}{h_H}\\ &\leq A\tfrac{n^{-a-\frac{1}{2}}}{h_H}\end{aligned}$$

D'après ($\mathbf{H_6}$), on peut écrire

$$l_n/h_H = o(\sqrt{\log n(nh_K^p)^{-1}})$$

Donc, pour n assez grand, on a

$$\mathbb{P}\{\frac{1}{f_n}T_2 > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}\} = 0$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\{\frac{1}{f_n}T_2 > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}\} < \infty$$

Il nous reste, maintenant, la démonstration de l'équation (3.3). On a

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y)| \leq \underbrace{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,m_y) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,m_y)|}_{F_1}$$

$$+\underbrace{\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y) - g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,m_y)| + \sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,m_y) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1,...,x_p,y)|}_{F_2}$$

Concernant F_1

$$g_n^{(1)}(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i$$

où

$$\Gamma_i = \frac{1}{h_H h_K^p}[K(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H^{(1)}(\frac{m_k-Y_i}{h_H}) - \mathbb{E}K(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H^{(1)}(\frac{m_k-Y_i}{h_H})]$$

On applique le lemme de Hoeffding aux variables Γ_i. Rappelons qu'il nécessite la majoration de $|\Gamma_i|$ et $\mathbb{E}|\Gamma_i|^2$ En ffet, Il est clair que

$$|\Gamma_i| \leq \frac{A}{h_H h_K^p}$$

D'après l'équation (2.18), on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_H}\mathbb{E}(H^{(1)^2}(\frac{m_k-Y}{h_H})/X) = f^X(m_k)\int_{\mathbb{R}}H^{(1)^2}(t)dt$$

Avec la même méthode employée dans l'étude précédente du terme T_1 on montre

$$\mathbb{E}\Gamma_i^2 \leq \frac{A'}{h_H h_K^p}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(|g_n^{(1)}(x,m_k)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k)|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}}) & = & \mathbb{P}(\frac{1}{n}|\sum_{i=1}^n\Gamma_i|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}})\\ & \leq & 2\exp(-An\frac{\varepsilon^2\log n}{nh_Hh_K^p}h_Hh_K^p)\\ & \leq & 2n^{-A\varepsilon^2}\end{array}$$

De plus, on a

$$\mathbb{P}\{F_1>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}}\}\leq Al_n^{-1}\max_{k\in 1,\ldots,S_n}\mathbb{P}(|g_n^{(1)}(x,m_k)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k)|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}})$$

Donc,

$$\mathbb{P}\{F_1>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}}\}\leq Al_n^{-1}n^{-A\varepsilon^2}$$

on prend $l_n=\frac{-3}{2}\beta-\frac{1}{2}$ et on choisi ε tel que $A\varepsilon^2=\frac{5}{3}\beta+\frac{3}{2}$, on déduit que

$$\mathbb{P}\{F_1>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}}\}\leq An^{-1-\beta}$$

Et d'après l'équation (3.9), on obtient

$$\mathbb{P}\{\frac{1}{f_n}F_1>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_Hh_K^p}}\}\leq An^{-1-\beta}$$

Concernant F_2
L'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) entraîne

$$\begin{array}{rcl}\frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n^{(1)}(x,y)-g_n^{(1)}(x,m_y)| & \leq & \frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}\frac{1}{nh_Hh_K^p}\sum_{i=1}^n|H_i^{(1)}(y)-H_i^{(1)}(m_y)|K_i\\ & \leq & \frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}\frac{A|y-m_y|}{h_H^2}(\frac{1}{nh_K^p}\sum_{i=1}^nK_i)\\ & \leq & A\frac{l_n}{h_H^2}\end{array}$$

De même
$$\frac{1}{f_n}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,y)-\mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_y)|\le A\frac{l_n}{h_H^2}$$

Pour $l_n = n^{\frac{-3}{2}\beta-\frac{1}{2}}$, en utilisant l'hypothèse ($\mathbf{H_6}$) on montre

$$l_n/h_H^2 = o(\sqrt{\log n (nh_H h_K^p)^{-1}})$$

Autrement dit, il existe un entier N_0, tel que

$$\sum_{n>N_0}\mathbb{P}\{\frac{1}{f_n}F_2 > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\log n}{nh_H h_K^p}}\} = 0$$

Ceci montre bien l'équation (3.3), et par évidence on termine la preuve du lemme (3.3.3) Pour le cas dépendant, on utilise les lemmes (2.2.3) et (2.3.2) pour évaluer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,m_k)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_k)|>\delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}})$$

En effet, on a

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,m_k)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_k)|>\delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}})\le$$

$$Al_n^{-1}\max_{k\in 1,\dots,S_n}\mathbb{P}(|g_n(x_1,...,x_p,m_k)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_k)|>\delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}) \qquad (3.14)$$

Or

$$g_n(x_1,...,x_p,m_k)-\mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_k) = \frac{1}{nh_K^p}\sum_{i=1}^{n}K_i(x_1,...,x_p)H_i(m_k)-\mathbb{E}K_i(x_1,...,x_p)H_i(m_k)$$

On pose
$$\Lambda_i = K_i(x_1,...,x_p)H_i(m_k)-\mathbb{E}K_i(x_1,...,x_p)H_i(m_k)$$

Nous avons, d'après le lemme de Fuk-Nagaev,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|g_n(x_1,...,x_p,m_k) - \mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_k)| > \delta) &= \mathbb{P}(\tfrac{1}{nh_K^p}|\textstyle\sum_{i=1}^n \Lambda_i| > \delta) \\ &\leq 4(1+\tfrac{n^2h_K^{2p}\delta^2}{16rS_n'^2})^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}(\tfrac{8r}{nh_K^p\delta})^{a+1} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Il est nécessaire de calculer asymptotiquement la quantité $S_n'^2$. En effet, on garde les mêmes notations et on considère les mêmes arguments employés dans la démonstration du lemme (2.3.2), on déduit le résultat suivant :

$$cov(\Lambda_i, \Lambda_j) = o(h_K^{2p})$$

Le choix de la suite m_n sous la forme $m_n = \frac{1}{h_K^p}$ permet de montrer que

$$S_n'^2 = o(h_K^p)$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation (3.15), on arrive que

$$\mathbb{P}(|g_n(x_1,...,x_p,m_k) - \mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_k)| > \delta) \leq An^{-1-\nu}$$

l'équation (3.14) implique que

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|g_n(x_1,...,x_p,m_k) - \mathbb{E}g_n(x_1,...,x_p,m_k)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_K^p}}) \leq A' l_n^{-1} n^{-1-\nu}$$

De même, pour l'autre terme, on a

$$g_n^{(1)}(x,m_k) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x,m_k) = \frac{1}{nh_Hh_K^p}\sum_{i=1}^n \Gamma_i^*$$

où

$$\Gamma_i^* = [K(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H^{(1)}(\frac{m_k-Y_i}{h_H}) - \mathbb{E}K(\frac{(x_1,...,x_p)-X_i}{h_K})H^{(1)}(\frac{m_k-Y_i}{h_H})]$$

Nous avons d'après le lemme de Fuk-Nagaev

$$\mathbb{P}(\frac{1}{nh_Hh_K^p}|\sum_{i=1}^n \Gamma_i| > \delta) \leq 4(1+\frac{n^2h_H^2h_K^{2p}\delta^2}{16rS_n'^2})^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}(\frac{8r}{nh_Hh_K^p\delta})^{a+1}$$

Pour le calcul de $S_n^{'2}$, on a

$$S_n^{'2} = {S_n^*}^{'2} + nvar(\Gamma_1^*)$$

où

$${S_n^*}^{'2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} |cov(\Gamma_i^*, \Gamma_j^*)|$$

On montre facilement

$$cov(\Gamma_i^*, \Gamma_j^*) = o(h_H^2 h_K^{2p})$$

on a

$${S_n^*}^{'2} \leq A(nh_H^2 h_K^{2p} m_n^{'} + n^2 \alpha(m_n^{'})) \leq A^{'}(nh_H^2 h_K^{2p} m_n^{'} + n^2 m_n^{'-a})$$

Nous choisissons $m_n^{'}$ sous la forme $m_n^{'} = \frac{1}{h_H h_K^p}$, on montre que

$${S_n^*}^{'2} = o(nh_H h_K^p)$$

aussi que

$$\sum_{i=1}^{n} var(\Gamma_i^*) = o(nh_H h_K^p)$$

Finalement, on trouve

$$S_n^{'2} = o(nh_H h_K^p)$$

$$\mathbb{P}(\sup_{y \in \mathcal{S}} |g_n^{(1)}(x_1, ..., x_p, m_k) - \mathbb{E}g_n^{(1)}(x_1, ..., x_p, m_k)| > \delta \sqrt{\frac{\log n}{nh_H h_K^p}}) \leq A l_n^{-1}(\mathbf{B_1} + \mathbf{B_2})$$

où $\mathbf{B_1}$ et $\mathbf{B_2}$ sont respectivement dfinies par

$$\mathbf{B_1} = 4(1 + \frac{\delta^2 \log n}{16r})^{\frac{-r}{2}}$$

$$\mathbf{B_2} = An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \delta^{-(a+1)} (h_H h_K^p \log n)^{-\frac{(a+1)}{2}}$$

le choix de l_n et la majoration de $h_H h_K^p$ permettent d'achever la démonstration du lemme. ∎

Chapitre 4

Estimation non paramétrique de la fonction de risque conditionnel : Cas fonctionnel

L'essentiel de ce chapitre est de traiter de l'estimation non paramétrique de la fonction de risque d'une variable aléatoire réelle conditionnellement à une variable fonctionnelle. On garde le même plan du chapitre précédent. En commençant par la présentation de notre modèle dans la première Section.
Ensuite, dans la deuxième Section, on suppose que nos observations sont *i.i.d.* et on démontre la convergence presque complète de notre estimateur fonctionnel. Dans la troisième Section, on étend nos résultats obtenus dans la section précédente au cas dépendant.

4.1 Modèle

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, A, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ où $\mathcal{F}$ est un espace semi-métrique de semi-métrique d.
Étant donné une suite d'observations $(X_i, Y_i)_{i=1,\dots,n}$ de même loi de probabilité que (X, Y), on définit un estimateur de la fonction de répartition conditionnelle $F^{\mathcal{X}}$ par

la méthode du noyau comme suit :

$$\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(\mathcal{X}, X_i))H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{K(h_K^{-1}d(\mathcal{X}, X_i))}, \forall y \in \mathbb{R}$$

où K est un noyau, H est une fonction de répartition et $h_K = h_{K,n}$ (resp.$h_H = h_{H,n}$) est une suite de réels positifs. On pose :

$$K_i(\mathcal{X}) = K(h_K^{-1}d(\mathcal{X}, X_i)) et H_i(y) = H(h_H^{-1}(y - Y_i))$$

Ce qui nous permet d'exprimer $\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)$ par

$$\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y) = \frac{\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}$$

avec

$$\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^{n} K_i H_i(y) \quad et \quad \widehat{F}_D^{\mathcal{X}} = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^{n} K_i$$

De cet estimateur, on déduit un estimateur pour la densité conditionnelle. noté $\widehat{f}^{\mathcal{X}}$, défini par :

$$\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y) = \frac{h_H^{-1}\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(\mathcal{X}, X_i))H^{(1)}(h_H^{-1}(y - Y_i))}{K(h_K^{-1}d(\mathcal{X}, X_i))}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y) = \frac{\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}$$

où

$$\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y) = \frac{1}{nh_H\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^{n} K_i H_i^{(1)}(y)$$

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de la convergence presque complète de l'estimateur $\widehat{h}^{\mathcal{X}}(y) = \frac{\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y)}{1-\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)}$ vers $h^{\mathcal{X}}(y) = \frac{f^{\mathcal{X}}(y)}{1-F^{\mathcal{X}}(y)}$ quelque soit la corrélation des observations.

4.2 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle : cas i.i.d.

Dans cette Section, les observations $(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont supposées de type indépendantes identiquement distribuées.

4.2.1 Notations et hypothèses

On fixe un point $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{F}$ dont on note $N_{\mathcal{X}}$ un voisinage de ce point et on pose $B(\mathcal{X}, h) = \{\mathcal{X}' \in \mathcal{F}/d(\mathcal{X}', \mathcal{X}) < h\}$ la boule de centre $\mathcal{X}$ et de rayon h On introduit les hypothèses suivantes :

(H$_1$) $\forall \mathcal{X} \in \mathcal{F}, \forall h > 0, \mathbb{P}(\mathcal{X} \in B(\mathcal{X}, h)) = \phi_{\mathcal{X}}(h) > 0$

(H$_2$) $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \forall (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in N_{\mathcal{X}} \times N_{\mathcal{X}}$,
$|F^{\mathcal{X}_1}(y_1) - F^{\mathcal{X}_2}(y_2)| \leq A_{\mathcal{X}}(d(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)^{b_1}) + (|y_1 - y_2|)^{b_2}, b_1, b_2 > 0$

(H$_3$) $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \forall (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in N_{\mathcal{X}} \times N_{\mathcal{X}}$,
$|f^{\mathcal{X}_1}(y_1) - f^{\mathcal{X}_2}(y_2)| \leq A_{\mathcal{X}}(d(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)^{b_1}) + (|y_1 - y_2|)^{b_2}, b_1, b_2 > 0$

(H$_4$) $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |H^i(y_1) - H^j(y_2)| \leq A|y_1 - y_2|$

$$\int |t|^{b_2} H^{(1)}(t)dt < \infty \quad et \quad \exists \nu > 0, \forall j' \leq j+1 \lim_{y \to +\infty} |y|^{1+\nu} |H^{(j')}(y)| = 0$$

pour $j = 0, 1$.

(H$_5$) K un noyau à support compact $(0, 1)$ vérifiant $0 < A_1 < K(t) < A_2 < \infty$

(H$_6$)

$$\lim_{n \to +\infty} h_K = 0 \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n h_H^j \phi_{\mathcal{X}}(h_K)} = 0, j = 0, 1.$$

(H$_7$)

$$\lim_{n \to +\infty} h_H = 0 \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} n^\beta h_H = \infty, \forall \beta > 0$$

4.2.2 Propriétés asymptotiques

Théorème 4.2.1. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_1})-(\mathbf{H_7})$,*on a :*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{h}^{\mathcal{X}}(y)-h^{\mathcal{X}}(y)|=o(h_K^{b_1})+o(h_H^{b_2})+o(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\quad p.co. \tag{4.1}$$

Preuve du théorème (4.2.1)

On peut écrire $\widehat{h}^{\mathcal{X}}(y)-h^{\mathcal{X}}(y)$ sous la forme

$$\begin{aligned}\widehat{h}^{\mathcal{X}}(y)-h^{\mathcal{X}}(y) &= \tfrac{\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y)}{1-\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)}-\tfrac{f^{\mathcal{X}}(y)}{1-F^{\mathcal{X}}(y)}\\ &= \tfrac{\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y)-\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y)F^{\mathcal{X}}(y)-f^{\mathcal{X}}(y)+f^{\mathcal{X}}(y)\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)}{(1-\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y))(1-F^{\mathcal{X}}(y))}\\ &= \tfrac{1}{1-\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)}[(\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y)-f^{\mathcal{X}}(y))+\tfrac{f^{\mathcal{X}}(y)}{1-F^{\mathcal{X}}(y)}(\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)-F^{\mathcal{X}}(y))]\end{aligned} \tag{4.2}$$

D'après la décomposition précédente, il suffit de montrer que

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)-F^{\mathcal{X}}(y)|=o(h_K^{b_1})+o(h_H^{b_2})+o(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\quad p.co. \tag{4.3}$$

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y)-f^{\mathcal{X}}(y)|=o(h_K^{b_1})+o(h_H^{b_2})+o(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\quad p.co. \tag{4.4}$$

$$\exists\delta>0\quad telque\quad \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{\inf_{y\in\mathcal{S}}|1-\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)|<\delta\}<\infty \tag{4.5}$$

On remarque que

$$\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)-F^{\mathcal{X}}(y) = \tfrac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\{(\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y))-(F^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y))\}+\tfrac{F^{\mathcal{X}}(y)}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}-\mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}\} \tag{4.6}$$

et

$$\widehat{f}^{\mathcal{X}}(y)-f^{\mathcal{X}}(y) = \tfrac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\{(\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y))-(f^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y))\}+\tfrac{f^{\mathcal{X}}(y)}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}-\mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}\} \tag{4.7}$$

Ce qui nous permet de conclure que la preuve du théorème est basée sur les résultats ci-dessous. ■

Lemme 4.2.1. *Sous les hypothèses* ($\mathbf{H_1}$)*,* ($\mathbf{H_4}$) *et* ($\mathbf{H_6}$)*, on a :*

$$\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} = o(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}), p.co. \tag{4.8}$$

Preuve du lemme(4.2.1) ona

$$\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{\mathbb{E}K_1} - \frac{1}{n}\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{\mathbb{E}K_1})$$

donc

$$\begin{aligned}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{\mathbb{E}K_1} - \frac{\mathbb{E}K_i}{\mathbb{E}K_1}\\ &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\end{aligned}$$

où $\Delta_i = \frac{K_i}{\mathbb{E}K_1} - \mathbb{E}\frac{K_i}{\mathbb{E}K_1}$ (Δ_i est une variable centrée).En appliquant le lemme (1.5.1) sur les variables Δ_i, pour cela il faut majorer $|\Delta_i|$ et $\mathbb{E}\Delta_i^2$ En effet, les hypothèses ($\mathbf{H_1}$) et ($\mathbf{H_5}$) permettent d'écrire

$$0 < \frac{A'}{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)} < \mathbb{E}(K_1) < \frac{A}{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}$$

d'où,

$$|\Delta_i| < \frac{A}{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)} = \theta_1$$

D'après l'hypothèse ($\mathbf{H_5}$), on montre de la même manière que

$$0 < \frac{A'}{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)} < \mathbb{E}(K_1^2) < \frac{A}{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}$$

alors, il existe $A^{'}$ telle que

$$\mathbb{E}\Delta_i^2 < \frac{A^{'}}{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)} = \theta_2$$

Donc, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\theta_1}{\theta_2}[$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon(\sqrt{\tfrac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})) &\leq 2\exp(\tfrac{-\varepsilon^2 \log n}{4\phi_{\mathcal{X}}(h_K)\theta_2}) \quad (4.9)\\ &= 2n^{-\varepsilon^2/4\phi_{\mathcal{X}}(h_K)\theta_2} \\ &= 2n^{-A\varepsilon^2}\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pour un choix convenable de ε^2, la série du terme général $n^{-A\varepsilon^2}$ converge.On peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2n^{-A\varepsilon^2} < +\infty$$

■

Corollaire 4.2.1. *Sous les hypothèses du lemme* (4.2.1)*, on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} < 1/2) < \infty \tag{4.10}$$

Preuve de Corollaire 4.2.1

on a

$$\{|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| \leq 1/2\} \subseteq \{|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - 1| > 1/2\}$$

par suite

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| \leq 1/2\} &\leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - 1| > 1/2\}\\ &\leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > 1/2\}\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} = 1$ on applique le résultat du lemme (4.2.1) on montre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} < 1/2) < \infty$$

■

Lemme 4.2.2. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_7})$ *on a ,*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)|=o(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}),p.co. \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)|=o(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}),p.co. \tag{4.12}$$

Preuve du lemme (4.2.2)

L'idée est de recouvrir le compact $\mathcal{S}$ par des intervalles S_k de longueurs égales. Cependant, La compacité de $\mathcal{S}$ implique qu'on peut extraire de cet recouvrement un recouvrement fini dont le nombre des intervalles sera noté s_n .Autrement dit,

$$\mathcal{S}\subset\bigcup_{k=1}^{s_n}S_k \quad ou \quad S_k=(m_k-l_n,m_k+l_n) \quad .Posons \quad m_y=\arg\min_{k\in 1,\dots,s_n}|y-m_k|$$

En ajoutant et retranchant le terme $\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)+\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)$ et appliquant l'in-égalité trigonométrique. On montre que :

$$|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)|\leq|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)-\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|+|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|+|\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)|$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)|\leq\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)-\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|}_{T_1}+\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|}_{T_2}+$$

$$\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)|}_{T_3}$$

En ce qui concerne (T_1)

L'hypothèse($\mathbf{H_4}$) entraîne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y) - \widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| &\leq \frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} \frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^n |H_i(y) - H_i(m_y)| K_i \\
&\leq \frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} \frac{A|y-m_y|}{h_H} \left(\frac{1}{n\mathbb{E}K_1} \sum_{i=1}^n K_i\right) \\
&\leq \frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} \frac{A|y-m_y|}{h_H} \widehat{F}_D^{\mathcal{X}} \\
&\leq A\frac{l_n}{h_H}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

En prenant $l_n = n^{-\beta-\frac{1}{2}}$ et on montre que

$$l_n/h_H = o(\sqrt{\log n (n\phi_{\mathcal{X}}(h_K))^{-1}})$$

en effet

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{l_n}{h_H} \sqrt{\frac{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}{\log n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h_H n^{\beta}} \sqrt{\frac{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}{\log n}}$$

d'après $(H7)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h_H n^{\beta}} \sqrt{\frac{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}{\log n}} = 0$$

et cela montre que

$$l_n/h_H = o(\sqrt{\log n (n\phi_{\mathcal{X}}(h_K))^{-1}})$$

D'après la définition de la limite, on a $\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0$ pour $n > N_\varepsilon$

$$\frac{l_n}{h_H} \sqrt{\frac{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}{\log n}} \leq \varepsilon$$

donc pour $\varepsilon/3, \exists N_0$ pour $n > N_0$

$$\frac{l_n}{h_H} \sqrt{\frac{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}{\log n}} \leq \varepsilon/3$$

et d'après (4.13) on déduit que

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| \leq \varepsilon/3 \sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}$$

et il résulte que, pour $n > N_0$

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|>\varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}\Big)=0 \tag{4.14}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(T_1>\varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\leq\sum_{n=1}^{N_0}\mathbb{P}(T_1>\varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})+\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\mathbb{P}(T_1>\varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})$$

le premier terme du membre de droit est fini, et le second est nul d'après (4.14). D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(T_1>\varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})<\infty \tag{4.15}$$

En ce qui concerne (T_2)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|>\varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\\
=\;&\mathbb{P}\big(\max_{k\in 1,\dots,s_n}|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)|>\varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}\big)\\
\leq\;&\textstyle\sum_{k=1}^{s_n}\mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)|>\varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\\
\leq\;&s_n\max_{k\in 1,\dots,s_n}\mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)|>\varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\\
\leq\;&\tfrac{A}{l_n}\max_{k\in 1,\dots,s_n}\mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)|>\varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})
\end{aligned}$$

On a

$$|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{H_i(m_k)K_i}{\mathbb{E}(K_1)}-\frac{\mathbb{E}(H_i(m_k)K_i)}{\mathbb{E}(K_1)}}_{\Lambda_i}$$

d'après $(H5)$ et comme $H\leq 1$, on en déduit que $|\Lambda_i|\leq A/\phi_{\mathcal{X}(h_k)}$ et $\mathbb{E}(\Lambda_i^2)=\frac{A'}{\phi_{\mathcal{X}(h_k)}}$
On applique le lemme (1.5.1) on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) &= \mathbb{P}(\tfrac{1}{n}|\textstyle\sum_{i=1}^n \Lambda_i| > \varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \\
&\leq 2\exp(-An\tfrac{\varepsilon^2 \log n}{n\phi_{\mathcal{X}(h_k)}} h_H^j \phi_{\mathcal{X}(h_k)}) \\
&\leq 2n^{-A\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

En choisissant ε tel que $A\varepsilon^2 = 3/2 + 2\beta$, nous obtenons

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq Al_n^{-1} n^{-3/2-2\beta},$$

pour $l_n = n^{-\beta-\frac{1}{2}}$, on déduit que

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq An^{-1-\beta}$$

Finalement, on utilise le corollaire (4.2.1), on obtient

$$\mathbb{P}(\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq An^{-1-\beta}$$

Et cela montre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_2 > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) < \infty \tag{4.16}$$

En ce qui concerne (T_3)

Nous avons

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)| \leq \frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y) - \widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|$$

et d'après (4.13) il résulte que

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)| \leq A\frac{l_n}{h_H}$$

On a

$$\left\{T_3 > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\right\} \subseteq \left\{T_1 > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\right\}$$

ce qui implique

$$\mathbb{P}\left\{T_3 > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\right\} \leq \mathbb{P}\left\{T_1 > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\right\}$$

et par suite

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{T_3 > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{T_1 > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\}$$

Et finalement grâce à (4.15) nous aurions alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{T_3 > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})\} < \infty \tag{4.17}$$

Ce qui prouve l'équation (4.11) du lemme (4.2.2). Il nous reste, maintenant,l'équation (4.12), en effet, remarquons que

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)| \leq \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y) - \widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|}_{F_1} +$$

$$\underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|}_{F_2} + \underbrace{\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)|}_{F_3}$$

Concernant F_1 **et** F_3 :on utilise les mêmes arguments employés dans la démonstration de T_1 et T_3, on montre que

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y) - \widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| \leq A\frac{l_n}{h_H^2} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)| \leq A\frac{l_n}{h_H^2}$$

On choisit maintenant l_n sous la forme $l_n = n^{-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}}$ et d'après $(H7)$, on déduit

$$l_n/h_H^2 = o(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})$$

Concernant F_2 :

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(\max_{k\in 1,\dots,s_n} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \\
&\leq \textstyle\sum_{k=1}^{s_n} \mathbb{P}(|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \\
&\leq s_n \max_{k\in 1,\dots,s_n} \mathbb{P}(|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \\
&\leq \tfrac{A}{l_n} \max_{k\in 1,\dots,s_n} \mathbb{P}(|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})
\end{aligned}$$

On a

$$|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{H_i^{(1)}(m_k)K_i}{h_H\mathbb{E}(K_1)} - \frac{\mathbb{E}H_i^{(1)}(m_k)K_i}{h_H\mathbb{E}(K_1)}}_{\Lambda_i^*}$$

il est clair d'après $(H1)$ et $(H5)$ que $|\Lambda_i^*| \leq A/h_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)$ Cherchons un majorant pour $\mathbb{E}\Lambda_i^{*^2}$

on a $\mathbb{E}(\Lambda_i^{*^2}) \leq \frac{\mathbb{E}H_1^{(1)}(m_k)^2K_1^2}{(h_H\mathbb{E}(K_1))^2}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H_1^{(1)}(m_k)^2K_1^2) &= \mathbb{E}\mathbb{E}(H_1^{(1)}(m_k)^2K_1^2/X) \\
&= \mathbb{E}(K_1^2\mathbb{E}H_1^{(1)}(m_k)^2/X)
\end{aligned}$$

d'après $(H4)$ $\int_{\mathbb{R}} H_1^{(2)}(y)dy < +\infty$,donc

$$\begin{aligned}
I &= \left|\tfrac{1}{h_H}\mathbb{E}(H_1^{(1)}(m_k)^2/X) - f^X(m_k)\textstyle\int_{\mathbb{R}} H_1^{(2)}(y)dy\right| \\
&= \left|\textstyle\int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{h_H}H_1^{(2)}(\tfrac{m_k-z}{h_H})f^X(z)dz - f^X(m_k)\textstyle\int_{\mathbb{R}} H_1^{(2)}(y)dy\right|
\end{aligned}$$

par changement de variable $m_k - z = u$ dans le premier intégrale et $y = \frac{u}{h_H}$ dans le deuxième intégrale on trouve

$$\begin{aligned}
I &= |\int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{h_H} H^{(1)^2}(\tfrac{u}{h_H}) f^X(m_k-u)du - \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{h_H} H^{(1)^2}(\tfrac{u}{h_H}) f^X(m_k)du| \\
&= |\int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{h_H} H^{(1)^2}(\tfrac{u}{h_H})(f^X(m_k-u) - f^X(m_k))du \\
&\leq |\int_{|u|\leq M} \tfrac{1}{h_H} H^{(1)^2}(\tfrac{u}{h_H})(f^X(m_k-u) - f^X(m_k))du + |\int_{|u|>M} \tfrac{1}{h_H} H^{(1)^2}(\tfrac{u}{h_H}) f^X(m_k-u)du| + \\
&\quad |\int_{|u|>M} \tfrac{1}{h_H} H^{(1)^2}(\tfrac{u}{h_H}) f^X(m_k)du| \\
I &\leq \underbrace{A' \sup_{|u|\leq M} f^X(m_k-u) - f^X(m_k)}_{c1} + \underbrace{\sup_{|y|>M/h_H} H^{(1)^2}(y)}_{c2} + \underbrace{f^X(m_k)\int_{|y|>M/h_H} H^{(1)^2}(y)dy}_{c3}
\end{aligned}$$

Comme f^X est continue sur le compact $\{|u| \leq M\}$ alors elle est bornée et on peut écrire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon, \forall M \leq M_\varepsilon, c_1 < \varepsilon/3$$

et d'après $(H4)$ on déduit que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon, \exists n_{M,\varepsilon}, \forall n > n_{M,\varepsilon}, c_1 + c_2 < 2\varepsilon/3$$

Finalement quand $n \to +\infty$

$$\mathbb{E}(H_1^{(1)}(m_k)^2/X) \leq h_H f^X(m_k) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)^2}(y)dy < +\infty$$

comme $\mathbb{E}K_1 > A\phi_{\mathcal{X}}(h_K)$ et $\mathbb{E}K_1^2 < A'\phi_{\mathcal{X}}(h_K)$,on déduit

$$\mathbb{E}(\Lambda_i^{*^2}) \leq \frac{A'}{h_H \phi_{\mathcal{X}}(h_K)}$$

On applique le lemme (1.5.1) on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n h_H \phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) &= \mathbb{P}(\tfrac{1}{n}|\textstyle\sum_{i=1}^n \Lambda_i^*| > \varepsilon/3\sqrt{\tfrac{\log n}{n h_H \phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \\
&\leq 2\exp(-An\tfrac{\varepsilon^2 \log n}{n h_H \phi_{\mathcal{X}}(h_K)} h_H \phi_{\mathcal{X}}(h_K)) \\
&\leq A' n^{-A\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n h_H \phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq A' l_n^{-1} n^{-A\varepsilon^2}$$

En choisissant ε de façon que $A\varepsilon^2 = \frac{5}{3}\beta + \frac{3}{2}$, on obtient

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_k)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq An^{-\beta-1}$$

en appliquant le corollaire (4.2.1), on déduit

$$\mathbb{P}(\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq An^{-\beta-1}$$

Ce qui achève finalement le lemme (4.2.2) ■

Lemme 4.2.3. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_6})$ *on a ,*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |F^{\mathcal{X}}(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}), \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |f^{\mathcal{X}}(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}), \tag{4.19}$$

Preuve du lemme (4.2.3)

Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y) - F^{\mathcal{X}}(y) &= \tfrac{1}{n\mathbb{E}K_1}\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{E}K_iH_i(y) - F^{\mathcal{X}}(y) \\
&= \tfrac{1}{\mathbb{E}K_1}[\mathbb{E}K_1H_1(\tfrac{y-Y_i}{h_H}) - F^{\mathcal{X}}(y)] \\
&= \tfrac{1}{\mathbb{E}K_1}\mathbb{E}(K_1[\mathbb{E}(H_1(h_H^{-1}(y-Y_i)/X) - F^{\mathcal{X}}(y))]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H_1(h_H^{-1}(y-Y_i)/X) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} H(\tfrac{y-u}{h_H})f^X(u)du \\
&= \textstyle\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)F^X(y-h_Ht)dt
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(H_1(h_H^{-1}(y-Y_i)/X) - F^X(y)| &= |\textstyle\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)F^X(y-h_Ht)dt - F^X(y)| \\
&\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)|F^X(y-h_Ht)dt - F^X(y)|dt
\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à $(H2)$ on obtient

$$|\mathbb{E}(H_1(h_H^{-1}(y-Y_i)/X) - F^X(y)| \leq A_{\mathcal{X}} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(h_K^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2}) dt \tag{4.21}$$

Cette inégalité est uniforme en y, en remplaçant dans (4.20) et simplifiant le terme $(\mathbb{E}K_1)$ on trouve

$$\mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y) - F^X(y) \leq A_{\mathcal{X}}(h_K^{b_1} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)dt + h_H^{b_2} \int_{\mathbb{R}} |t|^{b_2} H^{(1)}(t)dt)$$

Finalement, l'hypothèse $(H4)$ et le corollaire (4.2.1) entraînent la preuve de l'équation (4.18). Il nous reste à montrer l'équation (4.19), en effet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y) - f^X(y) &= \tfrac{1}{h_H \mathbb{E}K_1}[\mathbb{E}K_1 H_1^{(1)}(\tfrac{y-Y_i}{h_H}) - h_H f^X(y)] \\ &= \tfrac{1}{h_H \mathbb{E}K_1}\mathbb{E}(K_1[\mathbb{E}(H_1^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y_i))/X) - h_H f^X(y)])\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_1^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y_i))/X) &= \quad \textstyle\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(\tfrac{y-u}{h_H}) - f^X(u)du \\ &= h_H \textstyle\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t) f^X(y - h_H t)dt\end{aligned}$$

Et par suite

$$|\mathbb{E}(H_1^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y_i))/X) - h_H f^X(y)| \leq h_H \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(t)|f^X(y-h_H t) - f^X(y)|dt$$

l'hypothèse $(H3)$ entraîne que

$$|\mathbb{E}(H_1^{(1)}(h_H^{-1}(y-Y_i))/X) - h_H f^X(y)| \leq A_{\mathcal{X}} h_H \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(h_K^{b_1} + |t|^{b_2} h_H^{b_2}) dt$$

l'hypothèse $(H4)$ et le corollaire (4.2.1) entraînent la preuve de l'équation (4.19). Ce qui achève la preuve du lemme (4.2.3) ∎

Lemme 4.2.4. *Sous les conditions du théorème précédent*

$$\exists \delta > 0 telque \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\inf_{y\in\mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)| < \delta\} < \infty$$

Preuve du lemme (4.2.4)
Dès lemmes précédents on déduit que

$$\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y) \rightarrow^{p.co.} F^{\mathcal{X}}(y)$$

Ce qui implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y) - F^{\mathcal{X}}(y)| > \varepsilon\} < \infty$$

D'autre part, nous aurions par l'hypothèse $F^{\mathcal{X}} < 1$

$$\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)| \leq (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^{\mathcal{X}}(y))/2 \Rightarrow \sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y) - F^{\mathcal{X}}(y))| \geq 1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^{\mathcal{X}}(y))/2$$

Ce qui implique

$$\mathbb{P}\{\inf_{y \in \mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^{\mathcal{X}}(y)| < \delta\} \leq \mathbb{P}\{\sup_{y \in \mathcal{S}} |\widehat{F}^{\mathcal{X}}(y) - F^{\mathcal{X}}(y)| \geq (1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^{\mathcal{X}}(y))/2\} < \infty$$

On prend

$$\delta = 1 - \sup_{y \in \mathcal{S}} F^{\mathcal{X}}(y))/2$$

■

4.3 Estimation de la fonction de hasard conditionnelle : cas dépendant

On se propose dans cette section de généraliser les résultats obtenus dans la section précédente sur les observations *i.i.d.* au cas dépendant.

4.3.1 Notations et hypothèses

Nous gardons les mêmes notations ainsi que les mêmes hypothèses du cas indépendant on introduit aussi,

$H^{'}1)$ La suite $(X_i, Y_i)_{i=1,\dots,n}$ est algébriquement $\alpha - mlangeante$ avec $a > \frac{5+\sqrt{17}}{2}$

$H^{'}2)$

$$\frac{\sup_{i\neq j}\mathbb{P}((X_i, X_j) \in B(\mathcal{X}, h) \times B(\mathcal{X}, h))}{\mathbb{P}(X_i \in B(\mathcal{X}, h))} = o((n^{-1}\phi_{\mathcal{X}(h)})^{1/a})$$

$H^{'}3)$

$$\exists \eta > 0, An^{\frac{4-a+3\beta}{a+1}+\eta} \leq h_H\phi_{\mathcal{X}(h_K)} \quad et \quad \phi_{\mathcal{X}(h_K)} \leq A^{'}n^{\frac{1}{1-a}}$$

4.3.2 Propriétés asymptotiques

Théorème 4.3.1. *Sous les hypothèses du théorème* (4.2.1) *et* $(H^{'}1) - (H^{'}3)$ *on a :*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{h}^{\mathcal{X}}(y) - h^{\mathcal{X}}(y)| = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}(h_K)}}}) \tag{4.22}$$

Preuve du théorème (4.3.1)
En utilisant les décompositions (4.2)*et*(4.6). La preuve sera une conséquence du lemme (4.2.3, 4.2.4) et le lemme suivant.

Lemme 4.3.1. *Sous les conditions du théorème* (4.3.1) *on a :*

$$\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} = o(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}(h_K)}}}) \tag{4.23}$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(y)| = o(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}(h_K)}}}) \tag{4.24}$$

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(y)| = o(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}(h_K)}}}) \tag{4.25}$$

Preuve du lemme (4.3.1)

En ce qui concerne (4.23) : notre objectif est de démontrer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}(h_K)}}}) \leq \infty \tag{4.26}$$

On a

$$\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} = \frac{1}{n\mathbb{E}K_1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$$

où $\Delta_i(\mathcal{X}) = K_i - \mathbb{E}K_i$ Il suffit d'appliquer l'inégalité de Fuc-Nagaev. Pour cela, on doit d'abord calculer asymptotiquement s_n^2 En effet

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|cov(\Delta_i, \Delta_j)| = s_n^{*^2} + \sum_{i=1}^{n} var(\Delta_i) \tag{4.27}$$

où

$$s_n^{*^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}|cov(\Delta_i, \Delta_j)|$$

ainsi pour tout $i \neq j$ on a

$$cov(\Delta_i, \Delta_j) = \mathbb{E}(\Delta_i\Delta_j) - \mathbb{E}(\Delta_i)\mathbb{E}(\Delta_j)$$

Par définition

$$\begin{aligned} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| &\leq A\mathbb{E}(I_{B(\mathcal{X},h_K)\times B(\mathcal{X},h_K)}(X_i, X_j)) + A\mathbb{E}(I_{B(\mathcal{X},h_K)}(X_i))\mathbb{E}(I_{B(\mathcal{X},h_K)(X_j)} \\ &\leq A\mathbb{P}((X_i, X_j) \in B(\mathcal{X}, h_K) \times B(\mathcal{X}, h_K)) + A\mathbb{P}(X_i \in B(\mathcal{X}, h_K))\mathbb{P}(X_j \in B(\mathcal{X}, h_K)) \\ &\leq A'\phi_{\mathcal{X}}(h_K)((n^{-1}\phi_{\mathcal{X}}(h))^{1/a} + \phi_{\mathcal{X}}(h_K)) \end{aligned} \tag{4.28}$$

En utilisant les techniques de Masry (1986) et on définit les ensembles S_1, S_2

$$S_1 = \{(i, j) \quad telque 1 \leq j - i \leq m_n\};$$

$$S_2 = \{(i, j) \quad telque m_n + 1 \leq j - i \leq n - 1\}$$

où $(m_n)_n$ est une suite arbitraire d'entier positive vérifiant $m_n \to \infty$. Donc pour n assez grand on obtient

$$s_n^{*^2} = \sum_{S_1} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| \sum_{S_2} |cov(\Delta_i, \Delta_j)|$$

D'après la définition de S_1 et (4.28) on déduit que

$$\sum_{S_1} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq A^{'} n m_n \phi_{\mathcal{X}}(h_K)(n^{-1}\phi_{\mathcal{X}}(h))^{1/a}$$

il découle du lemme (1.5.3) que

$$|cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq A\alpha(|i-j|)$$

donc on obtient

$$\sum_{S_2} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq An^2\alpha(m_n) \leq A^{'} n^2 m_n^{-a}$$

On prend $m_n = (\frac{n}{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)})^{1/a}$,il résulte que

$$s_n^{*^2} = O(n\phi_{\mathcal{X}}(h_K))$$

Dans un second temps, on a, pour tout $i = 1, ..., n$

$$\sum_{i=1}^{n} var(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\Delta_i^2) - (\mathbb{E}(\Delta_i))^2$$

On montre par la même méthode utiliser dans le calcul de la $cov(\Delta_i, \Delta_j)$ que

$$var(\Delta_i) \leq A^{'} \phi_{\mathcal{X}}(h_K)$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^{n} var(\Delta_i) = o(n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)) \tag{4.29}$$

Finalement, d'après (4.27) on combine (4.28) et (4.29) on trouve

$$s_n^2 = o(n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)) \tag{4.30}$$

L'inégalité de Fuk-Nagaev sur la variable Δ_i entraîne pour $\varepsilon > 0 \quad et \quad r > 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n \Delta_i| > \varepsilon n \mathbb{E}K_1)\\ &\leq 4(1 + \frac{\varepsilon^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1}{16 r s_n^2})^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}(\frac{8r}{\varepsilon n \mathbb{E}K_1})^{a+1}\end{aligned}$$

Ainsi on arrive à

$$\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq 4(1 + \frac{\varepsilon^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1 \frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}{16 r s_n^2})^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}(\frac{8r}{\varepsilon n \mathbb{E}K_1\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}})^{a+1}$$

$$\begin{aligned}&\leq 4(1 + \frac{\varepsilon^2 n \log n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}{16 r s_n^2})^{\frac{-r}{2}} + Anr^a\varepsilon^{-(a+1)}(n\log n\phi_{\mathcal{X}}(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}}\\ &\leq 4(1 + \frac{\varepsilon^2 \log n}{16r})^{\frac{-r}{2}} + An^{\frac{-(a+1)}{2}} r^a \varepsilon^{-(a+1)}(\log n\phi_{\mathcal{X}}(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}}\\ &\leq A\exp^{\frac{-r}{2}\log(1+\frac{\varepsilon^2 \log n}{16r})} + An^{\frac{-(a+1)}{2}} r^a \varepsilon^{-(a+1)}(\log n)^{\frac{-(a+1)}{2}}\phi_{\mathcal{X}}(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}\end{aligned}$$

On peut toujours choisir r sous la forme $r = C(\log n)^2$, où C est une constante

$$\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq An^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}}\phi_{\mathcal{X}}(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}$$

Grâce à l'inégalité de gauche en $(H'3)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) &\leq An^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{-\frac{(a+1)}{2}(\frac{3+a}{a+1}+\eta)}\\ &\leq An^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + An^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{-\frac{(a+1)}{2}(\frac{3+a}{a+1}+\eta)}\\ &\leq An^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + An^{-1-(\frac{1-a}{2}+\frac{a+1}{2}\eta)}\end{aligned}$$

pour ε suffisamment grand et $\nu > 0$ on aboutira,

$$\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq A'n^{-1-\nu} \tag{4.31}$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|\widehat{F}_D^{\mathcal{X}} - \mathbb{E}\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}| > \varepsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} A'n^{-1-\nu} < \infty$$

Ce qui montre (4.23) qui est la première partie du lemme (4.3.1)

En ce qui concerne (4.24) : en suivant la même démarche celle de la preuve (4.11), pour T_1 et T_3 le calcul reste le même. Cependant, pour T_2, on a,

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})$$

$$\leq \frac{A}{l_n} \max_{m_y\in m_1,\dots,m_{s_n}} \mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})$$

On a aussi

$$\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) = \frac{1}{n\mathbb{E}(K_1)} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{H_i(m_y)K_i - \mathbb{E}(H_i(m_y)K_i)}_{\Lambda_i^*}$$

Laquelle nécessite le calcul de $s_n^{'2}$ où

$$s_n^{'2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |cov(\Lambda_i^*, \Lambda_j^*)|$$

En utilisant la même méthode que dans s_n^2 de (4.27) et en prenant

$$m_n = \frac{1}{\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}$$

on montre que

$$s_n^{'2} = O(n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)) + O(n\phi_{\mathcal{X}}(h_K))$$

L'inégalité de Fuk-Nagaev sur la variable Λ_i^* entraîne pour $\delta > 0$ et $r > 1$,

$$\mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \delta) = \mathbb{P}(|\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i^*| > \delta n\mathbb{E}K_1)$$

$$\leq 4(1 + \frac{\delta^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1}{16 r s_n^{'2}})^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}(\frac{8r}{\delta n\mathbb{E}K_1})^{a+1}$$

Ainsi on arrive à

$$\mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq 4(1 + \frac{\delta^2 n^2 \mathbb{E}^2 K_1 \frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}{16 r s_n^2})^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}(\frac{8r}{\delta n \mathbb{E}K_1\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}})^{a+}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4(1 + \frac{\delta^2 n \log n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}{)} 16 r s_n^2)^{\frac{-r}{2}} + Anr^a \delta^{-(a+1)}(n\log n\phi_{\mathcal{X}}(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} \\
&\leq 4(1 + \frac{\delta^2 \log n}{16r})^{\frac{-r}{2}} + An^{\frac{1-(a+1)}{2}} r^a \delta^{-(a+1)}(\log n\phi_{\mathcal{X}}(h_K))^{\frac{-(a+1)}{2}} \\
&\leq A\exp^{\frac{-r}{2}\log(1+\frac{\delta^2 \log n}{16r})} + An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \delta^{-(a+1)}(\log n)^{\frac{-(a+1)}{2}} \phi_{\mathcal{X}}(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}
\end{aligned}$$

On peut toujours choisir r sous la forme $r = C(logn)^2$, où C est une constante. Ce qui donne

$$\mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq An^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} \phi_{\mathcal{X}}(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}$$

Grâce à l'inégalité de gauche en $(H'3)$

$$\mathbb{P}(|\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq An^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + A(\log n)^{2a-\frac{a+1}{2}} n^{1-\frac{(a+1)}{2}} n^{-\frac{(a+1)}{2}(\frac{4-a+3\beta}{a+1}+\eta)}$$

Donc,

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|\varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq Al_n^{-1}(n^{\frac{-\varepsilon^2}{32}} + n^{-1-\frac{a+1}{2}\eta})$$

On applique le corollaire (4.2.1), sous un choix convenable de ε, on montre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}}|\sup_{y\in\mathcal{S}} \widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^{\mathcal{X}}(m_y)|\varepsilon/3\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) < +\infty$$

En ce qui concerne (4.25) : en suivant la même démarche celle de la preuve (4.12), pour F_1 et F_3 le calcul reste le même. Cependant, pour F_2, on a,

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})$$

$$\leq \frac{A}{l_n} \max_{m_y \in m_1,\ldots,m_{s_n}} \mathbb{P}(|\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}})$$

On a aussi

$$\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) = \frac{1}{nh_H\mathbb{E}(K_1)} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{H_i^{(1)}(m_y)K_i - \mathbb{E}(H_i^{(1)}(m_y)K_i)}_{\Gamma_i^*}$$

on pose

$$s_n^{'2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |cov(\Gamma_i^*, \Gamma_j^*)|$$

En utilisant la même méthode que dans s_n^2 de (4.27) et en prenant

$$m_n = \frac{1}{h_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}$$

on montre que

$$s_n^{'2} = o(nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K))$$

d'après l'inégalité de Fuk-Nagaev, on a

$$\mathbb{P}(\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq A_1A_2$$

où

$$A_1 = Ae^{\frac{-r}{2}\log(1+\frac{\delta^2\log n}{16r})} \quad et \quad A_2 = An^{1-\frac{(a+1)}{2}} r^a \delta^{-(a+1)} (h_H \log n)^{\frac{-(a+1)}{2}} \phi_{\mathcal{X}}(h_K)^{\frac{-(a+1)}{2}}$$

On applique l'hypothèse $(H^{'}3)$ et un choix de $r = C(logn)^2$ et $l_n = n^{\frac{-3}{2}\beta - \frac{1}{2}}$ on montre qu'il existe $\nu > 0$ pour η assez grand, on a

$$l_n^{-1}(A_1 + A_2) \leq An^{-1-\nu}$$

d'après le corollaire (4.2.1), on en déduit

$$\mathbb{P}(\frac{1}{\widehat{F}_D^{\mathcal{X}}} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^{\mathcal{X}}(m_y)| > \delta\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{\mathcal{X}}(h_K)}}) \leq An^{-1-\nu}$$

■

Bibliographie

[1] Cox. D. R, Oakes *Analyse of Survival Data*, Chapman and Hall. London (1984)

[2] Cox. D. R, *Regression Models and Life Tables (with Discussion)* Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol. 74 p. 187-220.(1972).

[3] Dabo-Niang, S. ; Laksaci, A., *Estimation non paramétrique du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle, C. R. Math. Acad. Sci. Paris,*, $344, 49-52$. (2007)

[4] Estévez-pérez , G., *On convergence rates for quadratic error in kernel hazard estimation statist.probab.lett.* $57, 231, 241$. (2002)

[5] Estévez-Pérez, G. ; Quintela-del-Río, A. ; Vieu, P., *Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples. J. Statist. Plann. Inference.*, $104, 130$. (2002)

[6] Ezzahrioui, M. ; Ould-Saïd, E. *Asymptotic normality of the kernel estimators of the conditional mode for functional data, Preprint,* LMPA No 249, Aout 2005, Univ. du Littoral. (In revision).

[7] Ferraty, F. ; Vieu, P., *Modèle de régression pour variables aléatoires uni, multi et* ∞*-dimensionnées. Cours de DEA.*(2004)

[8] Ferraty, F. ; Laksaci, A. ; Vieu, P. *Functional times seies prediction via conditional mode estimation, C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340,(2005), $389 - 392$.

[9] Ferraty, F. ; Laksaci, A. ; Vieu, P. *Estimating some chacteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models, Statist. Inf. for Stoch. Proc.*, $9, 47 - 76$. (2006),

[10] Ferraty, F. ; Vieu, P., *Nonparametric functional data analysis, Theory and Practice. Springer-Verlag.*(2006)

[11] Kalbeisch. J. D, Prentice. R. L, *Estimation of the average hazard ratio. Biometrika* 68(1) :105-112 (1981)

[12] Kaplan. E. L, Meier. P, *Nonparametric Estimation from Incomplete Observations* Journal of the American Statistical Association,vol. 53 p.457-481. (1958).

[13] Klein. J. P, et Moeschberger. M. L, *Survival analysis : techniques for censored and truncated data.* Springer-Verlag (2003)

[14] Lecoutre, J. P. ; Ould-Said, E. *Estimation de la fonction de hasard pour un processus fortement mélangeant avec censure. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* $, 37, 59, 69$. (1993),

[15] Laksaci, A. *Erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle à variable explicative fonctionnelle. C. R. Math. Acad. Sci. Paris,*, $345, 149 - 154$. (2007),

[16] Masry, E., *Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processus, IEEE. Trans. Inform. Theory,* $32, 254 - 267$. (1986)

[17] Masry, E., *Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality. Stoch. Proc. and their Appl.,* $115, 155 - 177$. (2005)

[18] Quintela-del-Río, A., *Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions. Statist. Probab. Lett.*,76, 1117,(2006)1124.

[19] Rio, E., *Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblements dépendant (in french). Mathématiques* 8 *Applications, 31, Springer Verlag.*(2000)

[20] Roussas, G. *Hazard rate estimation under dependence conditions. J. Statist. Plann. Inference,* 22, 81, 93. (1989),

[21] Roussas, G. *Asymptotic normality of the kernel estimate under dependence conditions : application to hazard rate. J. Statist. Plann. Inference.* 25, 81, 104.(1990),

[22] Vieu, P., *Quadratic errors for nonparametric estimates under dependence. J. Multivariate Anal.,* 39, 324, 347 (1991)

.

[23] Watson, G. S. ; Leadbetter, M. R., *Hazard analysis, Sankhyia* 26, 101, 116. (1964)

[24] Youndjé, É. ; Sarda, P. ; Vieu, P., *Optimal smooth hazard estimates. Test,* 5, 379, 394. (1996)