REMERCIEMENTS [1]

J'exprime ma profonde gratitude au

Nous remercions, en premier lieu, notre dieu qui a bien voulu nous donner la force pour effectuer le présent travail.

En second lieu, nous tenons à adresser nos remerciements à notre encadreur **N. Ait ouali** pour son aide et ses conseils, en saluant en lui son savoir faire, sa compétence et ces connaissances dont il nous a fait en profiter.

M^{elle} **S.Rahmani**, Maitre assistant à l'université de Saida, qui ma fait l'honneur de bien vouloir présider le jury de ce mémoire.

R. Rouane, Maitre assistant à l'université de Saida, qui a bien voulu accepter de juger ce travail et de faire partie du jury.

1. Saida, 2013

Table des matières

Introduction

Le théorème de Moivre-Laplace établit un lien entre la loi binomiale avec paramètres n et p et la loi normale pour n qui tend vers l'infini. Son utilisé consiste surtout à estimer la fonction de répartition $F(x)$ de la loi binomiale par la fonction de répartition de la loi normale, qui est plus facilement repérable.

Les recherches sur ce théorème remontent aux travaux de F. Galton qui a inventé un dispositif ingénieux représenté ci-dessus pour simuler la tendance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ (représentée par un diagramme à bâtons), quand p est proche de 0.5, vers la loi normale (courbe de Gauss, dite courbe en cloche.)

C'est au 17ème et 18ème siècle, à 50 ans d'intervalle, que d'abord Abraham de Moivre, puis le marquis Simon de Laplace, introduisirent la reine des lois continues, la loi normale, encore appelée loi de Laplace-Gauss. Comme l'ont noté de nombreux auteurs, malgré la grande précocité de Gauss, il est peu probable qu'il ait contribué à cette découverte à l'âge de trois ans, mais cette loi a souvent été attribuée à Gauss, car il a prouvé en 1821 que le résultat de Moivre et de Laplace n'était qu'un cas particulier démontrant ainsi le caractère universelle de la loi normale.

L'apport de Moivre est fondamental en probabilités ; son ouvrage, Doctrine of chance, paru en 1718, est la plus importante publication dans ce domaine après les travaux de Pascal et Fermat, vers 1650 . De Moivre est le premier à s'intéresser à la convergence des variables aléatoires, en posant la problématique suivante : dans quelle mesure peut-on être sûr que lorsque l'on lance un grand nombre de fois un dé, la fréquence observée d'apparition du nombre "six" tend vers la probabilité théorique $\frac{1}{6}$, comment évaluer simplement la probabilité d'obtenir au cours de 1000 lancers de pièce, un nombre de pile compris entre

495 et 510 ? C'est une question essentielle à résoudre pour les problèmes de modélisation. De Moivre montre en particulier que la loi binomiale tend, en un certain sens, vers la loi normale , la fameuse loi "à la courbe en cloche".

Notre travail a comme but principal d'étudier le lien entre la loi binomiale et normale, à travers le théorème de Moivre-Laplace, qui nous permet de faire la transition du cas discret vers le cas continu.

Nous avons observé dans notre étude une approche méthodique dans laquelle nous avons jugé utile de diviser ce travail en trois chapitres :

Dans le premier chapitre des fondamentaux nous allons passer en revue quelques concepts et définitions essentiels sur la loi normale et la loi binomiale et les fonctions caractéristiques régissant ces lois.

En ce qui concerne le deuxième chapitre, on va aborder notre thème en présentant le théorème de Moivre-Laplace avec sa démonstration, puis une généralisation y sera établie pour étudier le cas général en définissant un autre théorème appelé le théorème central limite.

Le dernier chapitre consiste à une application du théorème de Moivre-Laplace en donnant un exemple, qui sera analysé en détails, arrivant à donner des conclusions pertinentes.

Chapitre 1

Les fondamentaux

Ce chapitre est consacré à donner quelques rappels sur des notions fondamentales tels que la loi Binomiale, la Loi normale générale, et la Loi normale centrée réduite et ces caractéristiques : la moyenne, la variance.., un point spécial est fait sur les fonctions caractéristiques à la fin de ce chapitre, vu leur large utilisation dans les démonstrations des théorèmes.

1.1 La loi normale centrée réduite

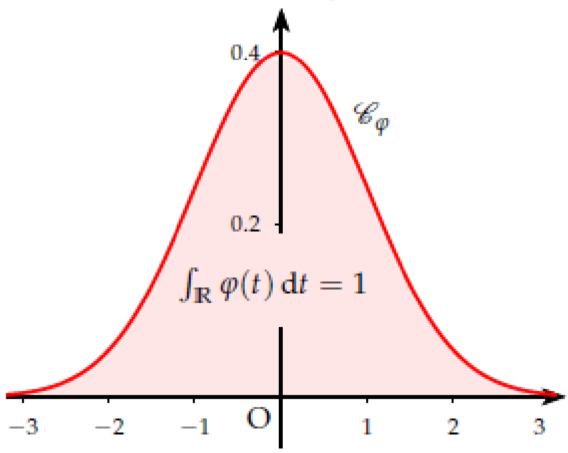
1.1.1 La densité de probabilité de Laplace-Gauss

Définition 1.1.1 *On appelle densité de probabilité de Laplace-Gauss, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

Remarque 1.1.1 *Cette fonction φ correspond bien à une densité de probabilité :*

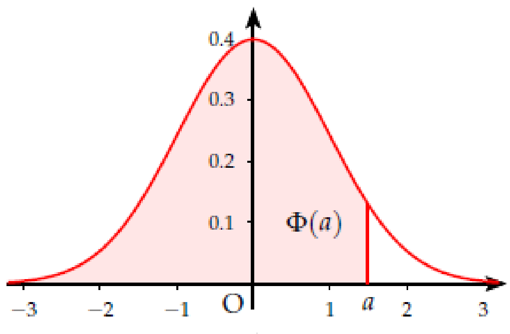
- φ est bien continue et positive sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions continues et la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$).
- Cette fonction est paire et admet en 0 un maximum : $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$.
- Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.
- La courbe $\mathscr{C}_\varphi$ est appelée courbe encloche ou courbe de Gauss. cloche ou courbe de Gauss.



1.1.2 Loi normale centrée réduite

Définition 1.1.2 *On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ. Sa fonction de répartition Φ est donc définie par :*

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$



Remarque 1.1.2 *Le nombre $\Phi(a)$ représente l'aire du domaine délimité par cette courbe en cloche l'axe des absisses et la droite $x = a$.*

Théorème 1.1.1 [3] *Si une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite alors pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, on a :*

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$P(X \geq a) = 1 - \Phi(a)$$

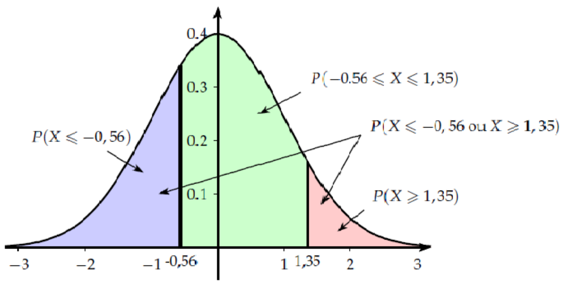
$$P(X \leq -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$$

Exemples 1.1.1 *Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite. A l'aide d'une table des valeurs de Φ, déterminer les probabilités suivantes :*

1. $P(X \geq 1.35)$.
2. $P(X \leq -0.56)$.
3. $P(-0.56 \leq X \leq 1.35)$.
4. $P(X \leq -0.56 \text{ ou } X \geq 1.35)$

On repère sur la table les valeurs : $\Phi(0.56) \simeq 0.7123$ et $\Phi(1.35) \simeq 0.9115$.

1. $P(X \geq 1.35) = 1 - P(X \leq 1.35) = 1 - \Phi(1.35) = 1 - 0.9115 = 0.0885$.
2. $P(X \leq -0.56) = \Phi(-0.56) = 1 - \Phi(0.56) = 1 - 0.7123 = 0.2877$.
3. $P(-0.56 \leq X \leq 1.35) = \Phi(1.35) - \Phi(-0.56) = 0.9115 - 0.2877 = 0.6238$.
4. $$\begin{aligned} P(X \leq -0.56 \text{ ou } X \geq 1.35) &= P(X \leq -0.56) + P(X \geq 1.35) \\ &= 0.2877 + 0.0885 = 0.3762 \end{aligned}$$



1.1.3 Espérance et variance

Théorème 1.1.2 [3] *Si une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite alors son espérance est nulle et sa variance est égale à 1*

Remarque 1.1.3 *C'est pour cette raison que cette loi normale est centrée (E(X) = 0) et réduite (V(X) = 1)*

1.1.4 Probabilité d'intervalle centré en 0

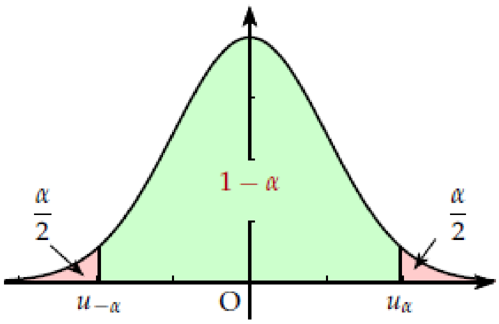
Théorème 1.1.3 *X est une variable aléatoire qui suit un loi normale centrée réduite. Soit* α *un réel de l'intervalle* $]0,1[$. *Il existe un unique réel strictement positif* u_α *tel que :*

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration 1.1.1 *On cherche un réel x strictement positif tel que :*

$$\begin{aligned}
P(-x \leq X \leq x) &= 1 - \alpha \\
\Phi(x) - \Phi(-x) &= 1 - \alpha \\
\Phi(x) - 1 + \Phi(x) &= 1 - \alpha \\
2\Phi(x) - 1 &= 1 - \alpha \\
\Phi(x) &= 1 - \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

■



On sait que la fonction Φ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus :

$$\lim_{x \to 0} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$$

et $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} < 1$.
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x = u_\alpha$ strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Exemples 1.1.2 *Il est bon de retenir les valeurs de $u_{0.05}$ et $u_{0.01}$,On obtient ainsi :*

$$P(-1.96 \leq X \leq 1.96) = 0.95$$

$$P(-2.58 \leq X \leq 2.58) = 0.99$$

1.2 Loi normale générale

1.2.1 Loi normale d'esperence μ et d'écart type σ

Définition 1.2.1 *Si une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$*

Propriété 1.2.1 *Si une variable aléatoire X suit un loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors son espérance vaut μ et sa variance vaut σ^2*

Démonstration 1.2.1 *De la linéarité de l'espérance, on en déduit :*

$$E(Z) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0 \text{ comme } E(Z) = 0 \text{ alors } E(X) = \mu$$

De plus, comme $V(ax) = a^2 V(X)$ on a :

$$V(Z) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) \text{ comme } V(Z) = 1 \text{ alors } V(X) = \sigma^2$$

■

Exemples 1.2.1 *Les températures de l'eau du mois de juillet, autour du lac Léman, suivent la loi normale d'espérance* $18,2°C$. *et d'écart-type* $3,6°C$.
Une personne part camper en juillet sur le pourtour du lac Léman. Que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau des plages dans les cas suivants :

1. *températures inférieures à* $16°C$.
2. *températures comprises entre* $20°C$ *et* $24,5°C$.
3. *températures supérieures à* $21°C$.

On appelle T la variable aléatoire associée aux températures et Z la variable aléatoire associée à la loi normale centrée réduite.

1. *On veut calculer :*$P(T \leq 16)$ *:*
   Avec un table, on revient à la variable X, on a alors :
   $T \leq 16 \Longleftrightarrow Z \leq \frac{16-18,2}{3,6} \Longleftrightarrow Z \leq -0,611.$
   On a alors : $\Phi(-0,611) = 1 - \Phi(0,611) = 1 - 0,729 = 0,271$
2. *On veut calculer :*$P(20 \leq T \leq 24,5)$ *:*
   Avec un table, on revient à la variable X, on a alors :
   $20 \leq T \leq 24,5 \Longleftrightarrow \frac{20-18,2}{3,6} \leq Z \leq \frac{24,5-18,2}{3,6} \Longleftrightarrow 0,5 \leq Z \leq 1,75$
   On a alors : $\Phi(1,75) - \Phi(0,5) = 0,960 - 0,692 = 0,268$
3. *On veut calculer : P(T > 21)*
   Avec un table, on revient à la variable X, on a alors :
   $T \geq 21 \Longleftrightarrow Z \geq \frac{21-18,2}{3,6} \Longleftrightarrow Z \geq 0,78$
   On a alors : $1 - \Phi(0,78) = 1 - 0,782 = 0,218$

1.3 Le processus de Bernoulli et la loi binomiale $\mathcal{B}$(n, p)

1.3.1 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

C'est la loi la plus simple que l'on puisse envisager puisqu'il n'y a que deux valeurs possibles, codées 1 et 0. On note p la probabilité associée à la valeur 1, p étant le paramètre de la loi (la probabilité 1-p associée à la valeur 0 est souvent notée q dans les ouvrages).

On écrit $X \rightsquigarrow B(p)$ et donc :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p) \Longleftrightarrow X \begin{cases} \text{Valeurs possibles} & 1 \quad 0 \\ \\ \text{probabilités} & p \quad q \end{cases}$$

On peut écrire la fonction de probabilité de la façon suivante :

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

On a $E(x) = p$ et $V(x) = p(1-p)$ puisque :

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 = p(1-p)$$

1.3.2 La loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Le processus consiste en une suite de répétitions de l'expérience aléatoire de Bernoulli, toutes ces répétitions successives étant indépendantes les unes des autres. La probabilité de succés à chaque répétition est p.

Définition 1.3.1 *On dit que la v.a. discrète X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$si sa fonction de probabilité est :*

$$p(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \qquad , x = 0, 1, 2, ..., n$$

Proposition 1.3.1 *Soit X_1,X_2,....,X_n une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi $\mathcal{B}(n,\ p)$.*

De cette proposition on déduit que la somme de deux v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$ est une v.a.de loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. En effet cette somme peut être considérée comme celle de $n_1 + n_2$ répétitions indépendantes du processus de Bernoulli avec probabilité p de succés.

Proposition 1.3.2 *soit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$,alors :*

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ V(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

Démonstration 1.3.1

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{n} xP(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} xC_n^x p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{xn(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)} p^x q^{n-x} \\
&= n\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (q)^{n-x} \\
&= np\sum_{x=1}^{n} C_{n-1}^{x-1} p^{x-1} q^{n-x} = np\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} p^{i} q^{n-(i+1)} \\
&= np(p-p+1)^n = np
\end{aligned}$$

Mieux : puisque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$*, il existe des variables aléatoires (réelles)* $X_1, X_2, ..., X_n$ *définies sur* Ω*, indépendantes, de loi de Bernoulli de même paramètre* p *telles que* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Par linéarité de l'espérance : $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$

De même :

$$V(X) = V(\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

Et comme $X_1, X_2, ..., X_n$ *sont indépendantes, on a* $\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$

■

1.3.3 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

Si X est une variable aléatoire, on appelle fonction caractéristique de X la fonction Ψ définie par :

$$\Psi_X(t) = E(e^{itX})$$

Si X a pour densité la fonction f sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\Psi_X(t) = \int_R f(x)e^{itx}dx$$

L'une des propriétés importantes des fonctions caractéristiques est leur "bonne compatibilité" avec l'indépendance, grâce au théorème suivant :

Théorème 1.3.1 [7] *Si X et Y sont indépendantes,* $\Psi_{X+Y} = \Psi_X.\Psi_Y$. *Plus généralement, si les* $X_i, (1 \leq i \leq n)$ *sont indépendantes,*

$$\Psi_{X_1+....+X_n} = \Psi_{X_1} \times ..... \times \Psi_{X_n}$$

Proposition 1.3.3 [7] *Si* Ψ_X *est la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle X :*

1. *soit* $Y = aX + b$ *une variable aléatoire réelle de fonction caractéristique* Ψ_Y *donnée par :*

$$\Psi_Y(t) = e^{itb}\Psi_X(at)$$

2. $\Psi_X(0)=1$
3. $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\Psi_X(t)| \leq 1$
4. Ψ_X *est continue sur* $\mathbb{R}$
5. *si* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathbb{E}(X^k) < +\infty$ *on a :*

$$\Psi_X(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{j!}(it)^j + o(t^k).$$

1.3.4 Fonctions caractéristiques des lois usuelles

* **Loi de Bernoulli** : $\Psi_X(t) = p\exp(it) + q$ avec $q = 1 - p$.
* **Loi de binomiale** : Comme X est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes, on trouve :

$$\Psi_X(t) = (p\exp(it) + q)^n$$

* **Loi de Laplace-Gauss** : Si U est la loi $LG(0,1)$:

$$\Psi_U(t) = \exp(-t^2/2)$$

1.3.5 Fonctions caractéristiques et convergence

L'intérêt des fonctions caractéristiques tient notamment au théorème suivant, qui relie la convergence en loi des variables à la convergence simple des fonctions caractéristiques.

1.3.6 Théorème de Paul-Lévy

Théorème 1.3.2 [4] *La suite de variable aléatoire (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire X si et seulement si pour tout t dans un voisinage de 0*

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_{X_n}(t) = \Psi_X(t)$$

ou Ψ_{X_n} est la fonction caracteristique de $X_n$et $\Psi_X$celle de X ce théréme permet donc d'etabilir la convergence en loi à partir de la convergence de la fonction caracteristique.

L'utilisation de ce théorème permet de prouver le théorème de moivre-Laplace et le théorème central-limite.

Chapitre 2

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Nous étudions dans ce chapitre une approximation utilisable lorsque np ne peut être considéré comme "petit". Le résultat théorique qui justifie cette approximation est le théorème de De Moivre-Laplace qui est lui même un cas particulier du théorème central limite. Ce dernier est, certainement le plus important théorème du calcul des probabilités. L'approximation qui nous intéresse fait intervenir une famille de fonctions appelées densités gaussiennes (ou normales) liées à la célèbre courbe en cloche de Gauss.

2.1 Le théorème de Moivre-Laplace TML

Ce théorème décrit rigoureusement le lien qui existe entre la loi binomiale et la loi normale.

Le paramètre p est fixé, l'entier n varie, les variables aléatoires X_n suivent les lois binomiales $\mathcal{B}$(n,p).
On utilise les variables aléatoires centrées et réduites correspondantes Z_n.

Théorème 2.1.1 *Soit p un nombre réel de l'intervalle* $]0, 1[$
Soit une suite de variables aléatoires (X_n) *où chaque variable aléatoire* X_n *suit la loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$.
On pose $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, *variable centrée et réduite associée à* X_n.

Alors, pour tous réels a et b tels que a<b ,on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-X^2}{2}} dx$$

Démonstration 2.1.1 *soit X_n une de variables binomiale n est p la fonction caractéristique de X_n est :*

$$\Psi_{X_n}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n$$

celle de $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$

$$\Psi_{Z_n}(t) = \left(pe^{\frac{it}{\sqrt{npq}}} + q\right)^n e^{-\frac{itnp}{\sqrt{npq}}}$$

Calculons le logarithme de cette fonction :

$$\begin{aligned} \ln \Psi_{Z_n}(t) &= \ln \left(pe^{\frac{it}{\sqrt{npq}}} + q\right)^n e^{-\frac{itnp}{\sqrt{npq}}} \\ &= n \ln[p(e^{\frac{it}{\sqrt{npq}}} - 1) + 1] - \frac{itnp}{\sqrt{npq}} \end{aligned}$$

On développe l'exeponentielle au second ordre vient :

$$\begin{aligned} \ln \Psi_{Z_n}(t) &\simeq n \left(\frac{pit}{\sqrt{npq}} - \frac{pt^2}{2npq} + \frac{p^2t^2}{2npq}\right) - \frac{itnp}{\sqrt{npq}} \\ &\simeq \frac{-t^2}{2q} + \frac{pt^2}{2q} \simeq \frac{t^2}{2q}(p-1) \simeq -\frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

On a démontré que

$$\begin{aligned} \ln \Psi_{Z_n}(t) &\simeq -\frac{t^2}{2} \\ \Psi_{Z_n}(t) &\simeq e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Qui est la fonction caractéristique de la loi normal centrée-réduite.

■

2.2 Le théorème central limite TCL

Le théorème central limite est un résultat sur la convergence en probabilités d'une suite de variables aléatoires. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne.

Théorème 2.2.1 *Soit $X_1, X_2, ...X_n$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, suivant la même loi D et indépendantes. Supposons que l'espérance μ et l'écart-type σ de D existent et soient finis($\sigma \neq 0$).*
Considérons la somme $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Alors l'espérance de S_n est $n\mu$ et son écart-type vaut $\sigma\sqrt{n}$.
De plus, pour parler de manière informelle, la loi de S_n tend vers la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ quand n tend vers l'infini.

Afin de clarifier cette idée de convergence, nous allons poser

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

de sorte que l'espérance et l'écart-type de Z_n valent respectivement 0 et 1 : la variable est ainsi dite centrée et réduite.
Alors la loi de Z_n converge vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque n tend vers l'infini (il s'agit de la convergence en loi). Cela signifie que si Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$, alors pour tout réel z :

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$$

ou, de façon équivalente :

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z) = \Phi(z)$$

où

$$\overline{X} = S_n/n = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$$

Démonstration 2.2.1 *Pour un théorème d'une telle importance en statistiques et en probabilité appliquée, il existe une démonstration particulièrement simple utilisant les fonctions caractéristiques. Pour une variable aléatoire Y d'espérance 0 et de variance 1, la fonction caractéristique de Y admet le développement limité :*

$$\Psi_Y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \qquad t \to 0$$

Si Y_i vaut $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$, il est facile de voir que la moyenne centrée réduite des observations X_1,X_2,......X_n est simplement :

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sqrt{n}}$$

D'après les propriétés élémentaires des fonctions caractéristiques, la fonction caractéristique de $Z_n$est

$$[\Psi_Y(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n = [1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})]^n \quad \to e^{-t^2/2} \text{ lorsque } \quad n \to +\infty$$

Mais cette limite est la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite N(0,1), d'où l'on déduit le théorème de la limite centrale grâce au théorème de continuité de Lévy, qui affirme que la convergence des fonctions caractéristiques implique la convergence en loi.

■

Chapitre 3

Application fondamentale

Dans ce chapitre nous allons mettre en évidence l'importance de ce théorème avec des applictions fondamentales ceci explique pourquoi cette loi surgit si souvent en statistique et probabilité.

3.1 Correction de continuité

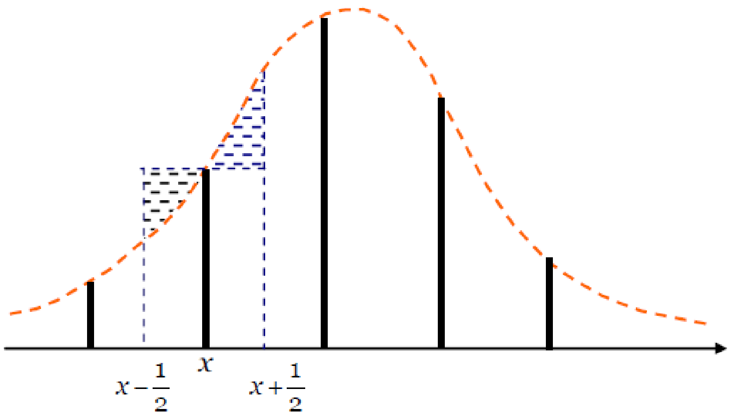
Lorsque n est assez grand, on peut donc approximer la loi binomiale par la loi de Gauss. On donne généralement comme condition np et nq $>$ 5.
Il convient cependant d'effectuer ce que l'on appelle la correction de continuité : la convergence de la loi binomiale vers la loi de Gauss se traduit par le fait que les extrémités des bâtons du diagramme de la binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ sont voisines de la courbe de densité de la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

On obtient donc une valeur approchée de $P(X = x)$ par la surface sous la courbe de densité comprise entre les droites d'abscisse $x - \frac{1}{2}$ et $x + \frac{1}{2}$.

$$P(X = x) = P\left(\frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} < U < \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

On aura alors :

$$P(X \leq x) = P\left(U < \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$



Exemples 3.1.1 *On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion* $p = 0,02$ *est défectueuse.*

1. *On contrôle un lot de 1000 pièces :*
   Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de pièces défectueuses parmi les 1000 pièces du lot. Quel est la loi de X ? Quelle est son espérance ? Son écart-type ?
2. *En utilisant une approximation, calculer* $P(18 \leq X \leq 22)$.

Correction

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1000, 0.02)$. Son espérance mathématique est 20 et son écart-type est $\sqrt{19.6}^2$.
2. $np = 20 > 5$ et $n(1-p) = 980 > 5$, il est donc possible d'approcher la loi de X par celle d'une loi normale de même espérance et écart-type que X, soit de $\mathcal{N}(20, 19.6)$

$$P(18 \leq X \leq 22) = P\left[\frac{17.5-20}{\sqrt{19.6}} \leq \frac{X-20}{\sqrt{19.6}} \leq \frac{22.5-20}{\sqrt{19.6}}\right] \backsimeq 0.428$$

   Un calcul direct avec les coefficients binomiaux aurait donné une probabilité égale approximativement à 0, 427.

Exemples 3.1.2 *Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}$(50, 1/2) . Les conditions d'approximations de la loi de X par une loi normale sont remplies, et l'on peut considérer que X suit à peu près la loi $\mathcal{N}$(25, 25/2).*
Évaluons alors de deux façons $\mathbb{P}(24 \leq X \leq 26)$

En valeur exacte avec la loi binomiale : $\mathbb{P}(X = 24) + \mathbb{P}(X = 25) + \mathbb{P}(X = 26) \simeq 0{,}3282$
En valeur approchée avec la loi normale : $\mathbb{P}(24 \leq X \leq 26) \simeq 0{,}2222$
La comparaison des deux valeurs 0,3282 et 0,2222 montre que l'approximation par la loi normale donne un résultat voisin da la valeur exacte.

L'approximation peut être amélioré en utilisant le facteur de correction "un demi". Donc de façon générale, l'approximation :

$$\mathbb{P}(23,5 \leq X \leq 26,5) \simeq 0,3286$$

Ce résultat est effectivement plus proche de la valeur exacte 0,3282 que celui obtenu sans l'utilisation du facteur correctif 0,2222.
Le rôle du facteur correctif est de permettre un meilleur passage d'une variable discrète (la variable binomiale) à une variable continue (la variable normale).

Exemples 3.1.3 *On lance 25 fois une pièce équilibrée et on appelle succès l'apparition de Pile. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de succès parmi les 25 lancers.*

3.2 Loi du nombre de succès

1. *Quelle est la loi de probabilité de X ? X suit la loi binomiale de paramètres n=25 et p=0.5.*

2. *Déterminer son espérance μ et son écart-type σ*

   $\mu = 25 \times 0.5 = 12.5$ *et* $\sigma = \sqrt{25 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2.5$

3. *Tabuler cette loi pour les valeurs entières comprises entre 0 et 25 (on donnera les valeurs à 10^{-4}près).*
   Pour k variant de 0 à 25,

   $$p(X = k) = C_{25}^{k} \times (\frac{1}{2})^{25}$$

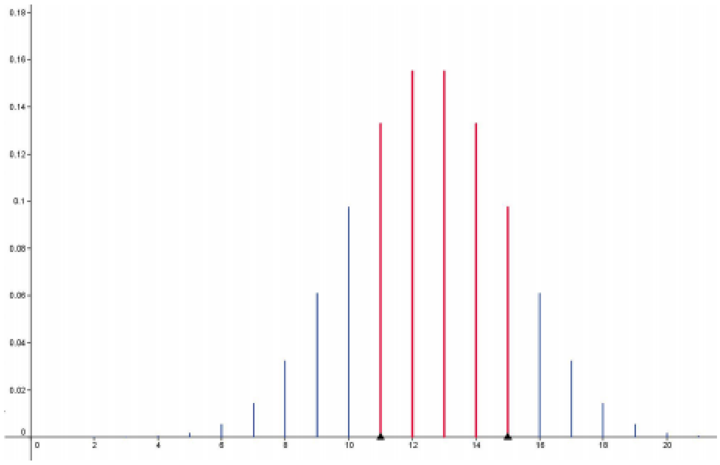
   D'ou :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=k)$	0	0	0	0,0001	0,0004	0,0016	0,0053	0,0143	0,0322

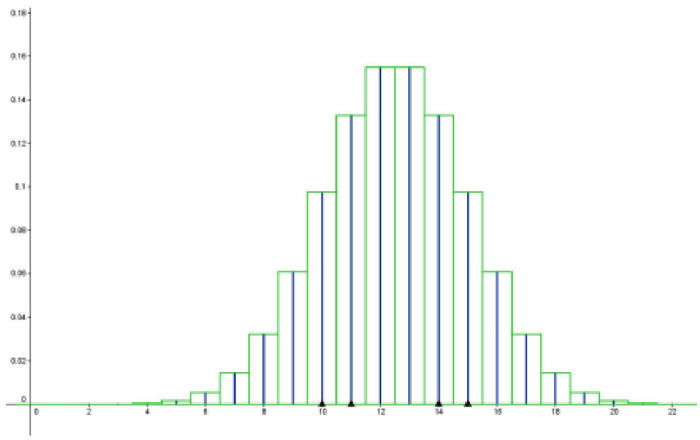
k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$P(X=k)$	0,0609	0,0974	0,1328	0,155	0,155	0,1328	0,0974	0,0609	0,0322

k	18	19	20	21	22	23	24	25
$P(X=k)$	0,0143	0,0053	0,0016	0,0004	0,0001	0	0	0

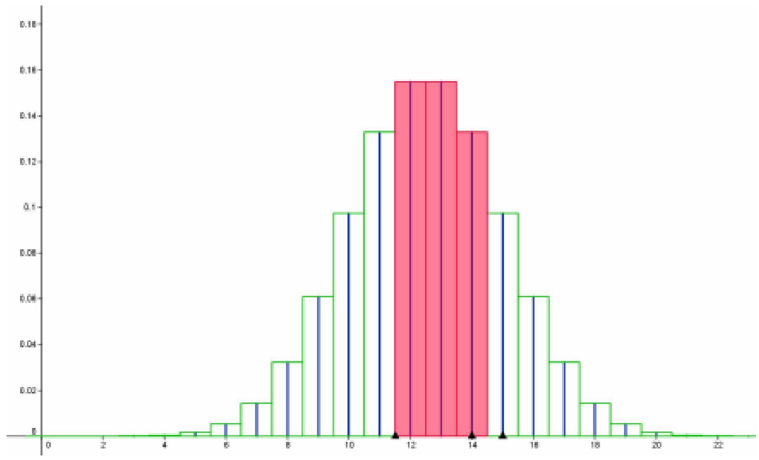
4. *Tracer le diagramme en bâtons représentant la loi de X (unité : 1cm sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,001 sur l'axe des ordonnées).*



5. *Remplacer le diagramme en bâtons par un histogramme en donnant à chaque bâton une épaisseur de 1 unité et en remplaçant chaque abscisse k par l'intervalle [k-0.5 ;k+0.5].*



6. *Quelle est l'aire totale de cet histogramme ?*
   L'aire totale de cet histogramme est 1. Elle correspond à la somme des probabilités de la loi binomiale.
   Hachurer la portion d'aire correspondant à la probabilité $P(11 < X < 15)$.



3.3 Changement de variable et ajustement par une fonction

On cherche une fonction continue dont la courbe s'ajuste au bord supérieur de l'histogramme.

1. *Changement de variable On pose $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.*
2. *Ajustement par une fonction*
   On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

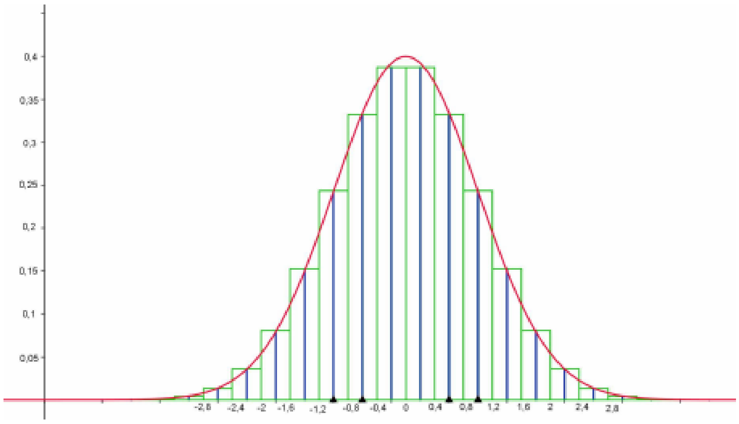
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-x^2}{2})$$

3. *Avec une calculatrice, tabuler cette fonction pour les valeurs comprises entre -3 et 3 avec un pas de 0,4.*

x	−3	−2,6	−2,2	−1,8	−1,4	−1	−0,6	−0,2
$f(x)$	0,0044	0,0315	0,0354	0,0789	0,1497	0,2419	0,3332	0,391

x	0,2	0,6	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3
$f(x)$	0,391	0,3332	0,2419	0,1497	0,0789	0,0354	0,0315	0,0044

4. *En utilisant la nouvelle graduation des deux axes, placer les points correspondant sur le graphique et tracer la courbe correspondantes. Que peut-on observer ?*



3.4 Calculs de probabilités

1. *Exprimer X en fonction de Z .*
   $Z = \frac{X-12.5}{2.5} \Leftrightarrow X = 2.5Z + 12.5$

2. *Prouver que $P(11 < X < 15) = P(11.5 < X < 14.5) = P(-0.4 < X < 0.8)$*
   $P(11 < X < 15) = P(11.5 < X < 14.5) = P(11.5 < 2.5Z + 12.5 < 14.5) = P(-0.4 < Z < 0.8)$.

3. *Exprimer, de façon approchée, cette probabilité par une intégrale de la fonction f (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).*

$$P(11 < X < 15) = P(-0.4 < Z < 0.8) = \int_{-0.4}^{0.8} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x^2}{2} dx$$

Conclusion

En conclusion, nous avons pu voir clairement l'intérêt de théorème Moivre Laplace Lorsqu'on étudie la loi binomiale sur un grand nombre d'expériences (n $>$ 50 par exemple) à condition que la probabilité de succès sur une expérience ne soit pas trop petite (p $>$ 0, 1), on peut approximer cette loi binomiale par une loi normale dont la représentation est une courbe en cloche ou courbe de Gauss.

Ce théorème a une signification importante car il permet le calcul des probabilités binomiales à partir de la table des probabilités de la loi normale.

On passe ainsi d'une distribution discrête à une distribution continue beaucoup plus souple.

Ce théorème présente un intérêt historique et, du fait de la simplicité de son énoncé, un intérêt pédagogique, qui préparent à l'introduction ultérieure du TCL.

Bibliographie

[1] `Michel Lejeune`, *Statistique la théorie et ses applications.* Springer-Verlag France, Paris, [2010].

[2] `N. Duceux`, *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.* [2012-2013].

[3] `PAUL MILAN`,*Lois de probabilité à densité Loi normale.* [18 avril 2013].

[4] `Charles Suquet`,*Introduction au calcul des probabilités.* [2012,2013].

[5] `D. Foata et A. Fuchs`,*Calcul des probabilités.* Dunod, [1998].

[6] `Gilbert Saporta`, *Probibilités analyse des données et statistique.* France, [2006].

[7] `Yadolah Dodge`, *Premiers pas en statistique.* Université de Neuchâtel, [2002].