République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.:2022

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Fatima ZOUAD [1]

Sous la direction de

Encadreur : M^r **Berrezoug HALIMI**

Pseudo symétrie du produit Tordu Double

Soutenue le 14/06/2022 devant le jury composé de

Bendjedid SAADLI	Maître de conférence Université de Saïda	Président
Berrezoug HALIMI	Maître de conférence Université de Saïda	Encadreur
Abderazak HALIMI	Maître de conférence Université de Saïda	Examinateur

1. e-mail : fatigul9832@gmail.com

Table des matières

Remerciement

Je tiens avant tout à remercier **Allah** pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

Je dois beaucoup à mon directeur de thèse **M. Berrezoug HALIMI** qui a su me faire profiter de sa science. Il m'a offert son temps et sa patience. Ses conseils, remarques et critiques ont toujours été une aide précieuse pour moi. J'ai beaucoup appris à son contact et eu grand plaisir à travailler avec lui. Il m'est très agréable de lui adresser mes vives remerciements et de lui témoigner ma sincère reconnaissance. Merci aussi pour toutes les fois où j'ai fait appel à lui pour une aide, scientifique ou autre, car il n'a jamais ni hésité, ni ménagé sa peine pour répondre à mes sollicitations.

Je tiens également à remercier **M.Bendjedid SAADLI** qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que **M.Abderazak HALIMI** pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de Mathématique qui m'ont aidé à m'améliorer durant mon cursus universitaire.

Enfin, merci à mes parents. Sans leurs sacrifices je ne serais pas devenu ce que je suis aujourd'hui.

Introduction

Le produit des variétés Riemanniennes est un moyen d'exhiber de nouvelles variétés Riemanniennes. Pour étudier les variétés à courbure négative et en utilisant la déformation homothétique d'une variété produit, Bishop et O'Neill ont introduit la notion du produit tordu en 1969 [18]. La définition de cette notion est actuellement donné par : Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et $f : M_1 \to \mathbb{R}^*$ une fonction différentiable positive sur M_1, le produit tordu de (M_1, g_1) et (M_2, g_2) est la variété produit $M_1 \times_f M_2$ munie de la métrique Riemannienne $\tilde{g} = \pi^* g_1 + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_2$, où π et σ sont les projections canoniques de $M_1 \times_f M_2$ sur M_1 et M_2 respectivement. La variété M_1 est dite la base de $M_1 \times_f M_2$ tandis que M_2 est dite la fibre. La fonction f est appelée la fonction de distorsion.
La variété Riemannienne produit tordu est une généralisation naturelle de la variété Riemannienne produit. Par exemple, la surface de révolution M obtenue par rotation d'une courbe (C) plane autour d'une droite L dans son plan est une variété produit tordu. Explicitement, si M est obtenu en faisant tourner une courbe plane (C) autour d'un axe L dans $\mathbb{R}^3$ et $f : (C) \to \mathbb{R}^+$ donne la distance à l'axe, alors $M = (C) \times_f S^1$.
Une variété Riemannienne M est dite localement symétrique si toutes ses réflexions γ_p^3 sont des isométries locales. E.Cartan a montré qu'une variété Riemannienne est localement symétrique si son tenseur de courbure de Riemann R est parallèle ($\nabla R = 0$). Une variété Riemannienne M est semi-symétrique si $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $R(X, Y).R = 0$ où $R(X, Y)$ agit comme dérivation. Chaque variété Riemannienne localement symétrique est semi- symétrique .Z.I.Szabó à classifié les variétés Riemanniennes semi-symétriques (voir [28] et [29]). Une variété Riemannienne M, de dimension $n \geqslant 3$ et

dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, s'il existe une fonction $L_R : M \to \mathbb{R}$ tel que $R(X,Y).R = L_R(X \wedge Y).R$ avec $(X \wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$ et $U_R = \{x \in M | R - \frac{\tau}{n(n-1)} G \neq 0 en x\}$ où τ est la courbure scalaire et $G(X,Y,Z,W) = g((Z \wedge W)Y, X)$. Il est clair que toute variété semi-symétrique est pseudo symétrique $(L_R = 0)$.
On traite ce travail de la manière suivante : le premier chapitre est un rappel des propriétés et définitions de bases des variétés Riemanniennes. Le second chapitre il est consacré à la notion de la variété Riemannienne produit. Nous rappelons les définitions et les propriétés en donnant quelques type de métriques Riemanniennes qu'on peut définir sur une variété produit, nous donnons aussi leurs connexions.
Le troisième chapitre traite de façon détaillée la notion de la pseudo symétrie une généralisation de la notion de symétrie et aussi les deux notions de Ricci pseudo symétrie et de la Weyl pseudo symétrie et leurs liens avec la pseudo symétrie.

Chapitre 1

Variétés Riemanniennes

Dans ce chapitre on rappel quelques propriétés et définitions des variétés Riemanniennes.Pour cela on uitilise les références suivantes [13],[1], [23] et [26].

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1.1. *Une variété topologique de dimension n est un espace de Hausdorff M tel que pour tout $p \in M$ il existe un voisinage ouvert $U \subset M$ avec $p \in U$, voisinage ouvert $U^{'} \subset \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme*

$$\varphi : U \to U'$$

Les couple (U, φ) sont appelés des cartes, U étant le domaine de la carte et φ l'application de coordonnées .

Définition 1.1.2. *Une variété différentiable est un couple $(M, \mathcal{A})$ où M est une variété topologique et $\mathcal{A}$ est un atlas différentiable de M.*

Définition 1.1.3. *Soient M une variété différentiable et D un ouvert de M. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point $p \in D$ s'il existe une carte (U, φ) de M avec $p \in U$ et $U \subset D$ tel que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ est différentiable. La fonction f est différentiable dans D si f est différentiable en p pour tout $p \in D$.*

Définition 1.1.4. *Soient M ,$M^{'}$ deux variétés différentiables et D un ouvert de M une application $f : D \to M^{'}$ est différentiable en p s'il existe une carte (U, φ) de M avec $p \in U \in D$ et une carte (V, ψ) de $M^{'}$ avec $f(U) \in V$ telle que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \tag{1.1}$$

est différentiable.L'application f est différentiable dans D si f est différentiable en p pour tout $p \in D$

Définition 1.1.5. *Soient M une variété différentiable avec $\alpha(0) = p$ et $\mathcal{D}$un ensemble des fonctions différentiables sur M à p.Le vecteur tangent de α au point p est la fonction $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, f \in \mathcal{D}$$

L'ensemble des vecteurs tangente en p est noté par T_pM, c'est un espace vectoriel.On appelle T_pM l'espace tangent de M en P.

Exemple 1.1.1. *Soit (U, φ) une carte de M^n,$p \in M$ et $\overline{p} = \varphi(p)$.Pour $i = 1, \ldots, n$ on définit un vecteur tangent $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \in T_pM$ en posant*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p[f] = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(\overline{p})}{\partial x_i}$$

Remarque 1.1.1. *Les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ forment une base de T_pM*

Définition 1.1.6. *Soit M une variété différentiable.On écrit*

$$\begin{aligned} TM &= \cup_{p \in M} T_pM \\ &= \{(p, \upsilon)/p \in M, \upsilon \in T_pM\} \\ &= \{\upsilon_p/p \in M, \upsilon_p \in T_pM\} \end{aligned}$$

On appelle TM le fibré tangent de M.

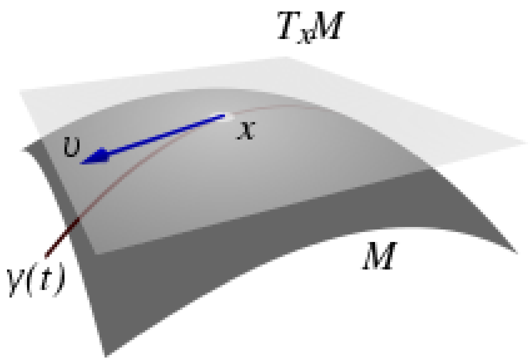


FIGURE 1.1 – Vecteur tangent

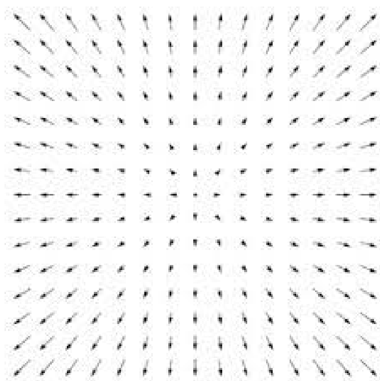


FIGURE 1.2 – Dessin d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

1.1.2 Champ de vecteurs

Définition 1.1.7. *Soit M une variété différentiable. L'application*

$$\begin{aligned} X: \quad & M \to TM \\ P \quad & \mapsto X(P) \end{aligned}$$

est appellée champ de vecteurs. On dit que X est différentiable dans le voisinage de p si et seulement si l'application $X : M \to TM$ est différentiable dans un voisinage de point p et on dit que X est différentiable sur M si et seulement si X est différentiable dans un voisinage de chaque point p. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté par $\mathfrak{X}(M)$.

Définition 1.1.8. *Soit M une variété différentiable.Le crochet de Lie noté [,]est défini par $[x, y] = XY - YX$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$[,]$ est bilinéaire et antisymétrique.*
2. *$[[X, Y]Z] + [[Y, Z]X] + [[Z, X]Y] = 0$ pour $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*

1.1.3 Immersion et plongement

Définition 1.1.9. *Soient $f : M \to N$ une application différentiable, $p \in M$ et $\alpha : I \to M$ une courbe telle que $\alpha(t_0) = p$ et $\alpha'(t_0) = v$ alors*

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}M$$

$$v \mapsto df_p(v)$$

est défini par $df_p(v) = (f \circ \alpha)'(t_0)$. On appelons df_p la différentielle de f au point p.

Définition 1.1.10. *Soient M et N deux variétés différentiables et $f : M \to N$ une application différentiable. On dit*

1. *f est une immersion si et seulement si df est injective.*
2. *f est un plongement si et seulement si f est une immersion et $f : M^n \to f(M)$ est un homéomorphisme.*
3. *M est une sous variété si et seulement si $M \subset N$ et l'application inclusion est un plongement.*

1.1.4 Tenseurs

Définition 1.1.11. – *Pour tout $x \in M$ nous définissons l'espace vectoriel*

$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM \otimes T_xM \otimes \ldots \otimes T_xM}_{pfois} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes T_x^*M \otimes \ldots \otimes T_x^*M}_{qfois}$$

– *Un élément $T \in T_x^{(p,q)}M$ est un tenseur de type (p, q) au- dessus de x. Dans une base associe à un système de coordonnées, (x^i) au voisinage de x, il s'écrit comme suit*

$$T|_x = T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(x) \otimes \ldots \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}(x) \otimes dx^{j_1}|_x \otimes dx^{j_2}|_x \otimes \ldots dx^{j_q}|_x$$

où, $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x)$ *sont des nombres réels.*

– *On note* $T^{(p,q)}M = \bigcup_{x\in M} T_x^{(p,q)}M$

Définition 1.1.12. *Un champ de tenseur de type* (p, q) *(ou un tenseur sur* M*) est une section de* $T^{(p,q)}M$*. L'ensemble des champs de tenseur de type* (p, q) *est noté par* $\mathfrak{T}^{(p,q)}M$*.*

Exemple 1.1.2.
1. *Une fonction sur une variété* M *est un tenseur de type (0,0)*
2. *Un champ de vecteurs* X *est un tenseur de type (1,0)*
3. *Une 1-forme différentielle* ω *sur une variété* M *est un tenseur de type (0,1)*

1.2 Variétés Riemannienne

1.2.1 Métrique Riemannienne

Définition 1.2.1. *Soit* M *une variété différentiable. Une métrique Riemannienne* g *sur* M *est un tenseur de type* $(0, 2)$ *; telle que pour tout* $X \in M$ *l'application* $g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une application bilinéaire ,symétrique et définie positive.*
Une variété différentiable avec une métrique Riemannienne est une variété Riemannienne

Remarque 1.2.1. *Dans un système de coordonnées locales. Les composantes de* g *sont* $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$

Exemple 1.2.1.
1. $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *est le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$ *(i.e* $g_0(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_i^j$*).*
2. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$ *munie de la métrique hyperbolique* g *définie par* $g(X, Y) = \frac{4}{(1-\|x\|)^2} g_0(X, Y)$*,* $X, Y \in T_x\mathbb{R}^n$*,* $x \in D^n$ *est une variété Riemannienne.*

1.2.2 Connexion

Connexion linéaire

Définition 1.2.2. *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

satisfait les conditions suivantes :

1. $\nabla_{fX+gY}(Z) = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

.

Où $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, g \in \mathcal{D}$.
On dit que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante de Y en direction de X

Définition 1.2.3. *Soit (U, φ) une carte sur la variété M de dimension n et $\{x_i\}$ les coordonnés associées pour les quelles on noté $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Les symboles de christoffel d'une connexion ∇ relativement aux coordonnées $\{x_i\}$ sont les fonctions $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{D}$ définie par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Lemme 1.2.2.1. *Localement, les symboles de Christoffel déterminent entrainement la connexion ∇. Plus précisément ,pour $X = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ on*

$$\nabla_X Y = \sum_k (\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k)) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Preuve. *Soit ∇ une connexion, on a :*

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (y_j \partial x_j) \\ &= y_j \nabla_X \partial x_j + X(y_j) \partial x_j \\ &= y_j x_i \Gamma_{ij}^k \partial x_k + X(y_k) \partial x_k \\ &= (X y_k + y_j x_i \Gamma_{ij}^k) \partial x_k \end{aligned}$$

Connexion Riemannienne

Définition 1.2.4. *Soit M une variété Riemannienne. On dit que la connexion ∇ est compatible avec la métrique g si et seulement si*

$$X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Définition 1.2.5. *Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire. On dit que ∇ est symétrique si*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{1.2}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Remarque 1.2.2. *Dans un système de coordonnées(U, φ), ∇ est symétrique implique*

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.3}$$

pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$
L'équation (1.4) est équivalent à la relation $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$pour tous i, j, k

Théorème 1.2.1. *Soit M une variété Riemannienne, il existe une unique connexion ∇ sur$M$ satisfait les conditions suivantes :*

1. *∇ est symétrique*
2. *∇ est compatible avec la métrique Riemannienne*

Dans ce cas, on appelle la connexion ***Levi-Civita***

Preuve Premièrement, on prouve que ∇ est unique.Supposons qu'elle est symétrique et compatible avec la métrique que, alors on a

$$X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Y_g(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$
$$Z_g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Additionner la première equation et la deuxième et soustraire la troisième équation dont on trouve

$$\begin{aligned} X_g(Y,Z) + Y_g(Z,X) - Z_g(X,Y) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) \\ &+ g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Comme ∇ est symétrique donc

$$X_g(Y,Z) + Y_g(Z,X) - Z_g(X,Y) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, [X,Z]) g(Z, \nabla_Y X) + g(X, [Y,Z])$$

Ce qui précède peut encore être réécrit comme

$$X_g(Y,Z) + Y_g(Z,X) - Z_g(X,Y) = 2g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, [X,Z]) g(Z, \nabla_Y X) + g(X, [Y,Z])$$

Donc

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \tfrac{1}{2}(X_g(Y,Z) + Y_g(Z,X) - Z_g(X,Y) \\ &- g(Y, [X,Z]) - g(X, [Y,Z]) - g(Z, [Y,X])) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ce qui implique l'unicité, aussi l'équation (1.5) prouve l'existence de∇

Proposition 1.2.1. *Soient M une variété différentiable, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ une variété Riemannienne avec la connexion de* ***Levi-Civita*** $\widetilde{\nabla}$ *, $f : M \to \widetilde{M}$ une immersion et X, Y deux champs de vecteurs sur M, alors*

$$\widetilde{\nabla}_X df(Y) - \widetilde{\nabla}_Y df(X) = df([X,Y]) \tag{1.5}$$

Proposition 1.2.2. *Dans un système de coordonnées locales ; les composantes Γ_{ij}^k de la connexion de* ***Levi-Civita****sont données par*

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right) \tag{1.6}$$

avec (g^{ij}) *est la matrice inverse de* (g_{ij})

Torsion d'une connexion

Définition 1.2.6. *La torsion d'une connexion est le tenseur de type(1,2) définit par* $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ *pour* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Définition 1.2.7. *Une connexion* ∇ *sur une* M *est dite sans torsion si* $T = 0$

1.2.3 Dérivée covariante d'un tenseur

Définition 1.2.8. *Soit* T *un tenseur d'ordre* r. *La dérivée covariante* ∇T *de* T *est un tenseur d'ordre* $(r+1)$ *donnée par* $\nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r)$, *pour tout* $Z \in \mathfrak{X}$. *La dérivée covariante* $\nabla_Z T$ *de* T *relativement à*Z *est un tenseur d'ordre* r *donnée par*

$$\nabla_Z T(Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, Z)$$

1.2.4 Dérivée covariante le long d'une courbe

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe dans M. Un champ de vecteurs V sur γ est une application de I vers le fibré tangent de M, TM, qui associe à chaque $t \in I$ un vecteur $V \in T_{\gamma(t)}$.
Soit $t \in I$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées local au point $\gamma(t)$. La dérivée covariante de V (avec $V_t = \sum_{k=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n}(\frac{dV^j}{dt}(t) + \sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dU^i}{dt}V^j(t))]\frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t))$, avec $\frac{d\gamma}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} U^i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(t)$ le vecteur tangent à γ au point t.
La dérivée covariante est la seule application linéaire sur les champs de vecteurs le long de une courbe γ vérifiant :

1. Pour tout fonction réel f sur I

$$\frac{D(fY)}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t)(Y) + f(t)\frac{DY}{dt}(t)$$

2. S'il existe un voisinage de t_0 tel que le champ de vecteur Y est restriction à γ d'un champ de vecteurs X défini sur un voisinage W de $\gamma(t_0)$ alors $\frac{DY}{dt}(t_0) = (\nabla_{\dot{\gamma(t_0)}} X)_{\gamma(t_0)}$ où $\dot{\gamma(t_0)} = \frac{d\gamma}{dt}(t_0)$

1.2.5 Transport parallèle

Définition 1.2.9. *Un champ de vecteurs X le long de γ est dit parallèle si sa dérivée covariante le long de γ est nulle c'est-à-dire*

$$\frac{DX}{dt}(t) = 0, \forall t \in I$$

Proposition 1.2.3. *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe, de classe C^1 dans M et $t_0 \in I$.Pour tout $\upsilon \in T_{\gamma(t_0)}M$, il existe un unique champ de vecteur X le long de γ tel que $X(t_0) = \upsilon$.*

Définition 1.2.10. *Le transport parallèle de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$ le long d'une courbe γ dans M est l'application linéaire P_t de $T_{\gamma(0)}$ vers $T_{\gamma(t)}$ qui associe à chaque $\upsilon \in T_{\gamma(0)}M$ le vecteur $X_\upsilon(t)$ où X_υ est le champ de vecteur parallèle le long de γ tel que $X_\upsilon(0) = 0$.*

1.3 Les courbures sur une variété Riemannienne

1.3.1 Courbure Riemannienne

Définition 1.3.1. *Le tenseur de la courbure de Riemannienne R d'une variété Riemannienne (M, g) est le tenseur, de type (1,3) définit par*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

où $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et ∇ est la connexion Riemannienne sur M.

Proposition 1.3.1. *Le tenseur de courbure R d'une variété Riemannienne a les propriétés suivantes :*

– *R est bilinéaire sur* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, *i.e,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1, gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

$f, g \in C^\infty(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$

– *Pour chaque* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *l'opérateur* $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *est linéaire, i.e,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

$f \in C^\infty(M), Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

Proposition 1.3.2. *1.* $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ *(La première l'identité de Bianchi)*

2. $(\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W = 0$*(La deuxième l'identité de Bianchi)*$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

On peut considère le tenseur de courbure de Riemannienne comme un tenseur de type (0,4) avec $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$

Proposition 1.3.3. *1.* $R(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) + R(X, Y, Z, T) = 0$

2. $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T)$

3. $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$

4. $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$

La courbure en coordonnées Soient $p \in M$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées au voisinage de p

Pour tout

$X = \sum_i u^i X_i$,$Y = \sum^j v^j X_j$,$Z = \sum_k w^k X_k$,avec $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, on a :

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R^l_{i,j,k} u^i v^j w^k X_l$$

tel que

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk},$$

et

$$g(R(X_i, X_j)X_k, X_s) = \sum_l R^l_{ijk} g_{ls} = R_{ijks}$$

La courbure sectionnelle

Définition 1.3.2. *Soient (M, g) une variété Riemannienne et π un plan engendré par v et w.La courbure sectionnelle de π est défini par*

$$K(p) = \frac{g(R(v,w)w, v)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}$$

Remarque 1.3.1. *La définition ci-dessus est indépendante du choix de la base du plan π*

1.3.2 Courbure de Ricci

Définition 1.3.3. *On appelle le tenseur de courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M^n, g) le tenseur S de type (0,2) donné par*

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= trace(Z \to R(Z,X)Y) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n g(R(X, e_i)e_i, Y) \end{aligned}$$

Pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ où (e_i) est une base orthonormée.

Le tenseur de courbure de Ricci est symétrique, en effet,

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \textstyle\sum_i^m g(R(e_i, X)Y, e_i) \\ &= g(R(Y, e_i)e_i, X) \\ &= g(R(e_i, Y)X, e_i) \\ &= S(Y, X) \end{aligned}$$

1.3.3 L'opérateur de Ricci

Définition 1.3.4. *L'opérateur de Ricci $\widetilde{S}$ d'une variété Riemannienne (M^n, g) est défini par $S(X, Y) = g(X, \widetilde{S}Y)$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

1.3.4 courbure scalaire

Définition 1.3.5. *On appelle courbure scalaire τ d'une variété Riemannienne M est définie par $\tau = trace(\tilde{S})$.*

Remarque 1.3.2. *La courbure scalaire peut être exprimer dans système des coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ en fonction des composantes du tenseur comme suit*

$$\tau = \sum_{i,j} g^{ij} S_{ij}$$

avec (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) et $S_{i,j} = S(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$

1.3.5 courbure de Weyl

Définition 1.3.6. *Le tenseur de courbure de Weyl, noté C, d'une variété Riemannienne M de dimension $n > 3$ est défini par :*

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2}(X \wedge_g \widetilde{S}Y + \widetilde{S}X \wedge_g Y - \frac{r}{n-1} X \wedge_g Y)Z$$

avec $(X \wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$.
Le tenseur de courbure de Weyl peut être vu comme un tenseur de type $(0, 4)$

$$C(X, Y, Z, W) = g(C(Z, W)Y, X)$$

Définition 1.3.7. *[18] Une variété Riemannienne M est dite conformément plate si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V de x telle que la métrique $e^{2f}g$ est plate sur V ; avec g la métrique Riemannienne de M et f une fonction réelle sur V.*
Une variété Riemannienne M de dimension n est conformément plate si est seulement si :

$(n \geqslant 4)$ *Le tenseur de courbure de Weyl est nul ([3] page* 60*).*

$(n = 3)$ *Le tenseur* $B = S - \frac{\tau}{4}g$ *est un tenseur de Codazzi i.e* $\nabla_X B(Y,Z) = \nabla_Y B(X,Z)$*, pour tout* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*([3] page* 435*)*

Chapitre 2

Variété Riemannienne produit

2.1 Variété Riemannienne produit

Définition 2.1.1. *Soient* $(M_1, \mathcal{A}_1)$, $(M_2, \mathcal{A}_2)$ *deux variétés de classe* C^∞, *munies de deux atlas* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *de dimensions* n_1, n_2 *respectivement. Alors le produit* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ *donné par*

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) | (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1, (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2\}$$

où

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \to \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)(x_1, x_2) \mapsto (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$$

est un atlas sur $M_1 \times M_2$ *de dimension* $n_1 + n_2$ *et de classe* C^∞.
La variété $(M_1 \times M_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ *est dite* ***variété produit*** *de* M_1 *et* M_2

Exemple 2.1.1. ***Variété Produit*** $M \times N$ *: Soient* M *et*N *deux variétés différentiables de dimension* m *et* n *et d'atlas* $(U_a, \phi_a), (V_b, \psi_b)$ *respectivement. Alors l'espace produit* $M \times N$ *est une variété de dimension* $m + n$ *dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme* $U_a \times V_b, \phi_a \psi_b$, *ou* $(\phi_a \times \psi_b)(p, q) = (\phi_a(p), \psi_b(q)) \in \mathbb{R}^{n+m}$

Proposition 2.1.1. – *Si M_1 et M_2 sont deux variétés de classe C^∞, alors les projections canoniques $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ et $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ sont de classe C^∞.*

– *Si M_1, M_2 et M_3 sont trois variétés, alors 'application $f : M_3 \to M_1 \times M_2$ est de classe C^∞ si et seulement si $\pi_1 \circ f$ et $\pi_2 \circ f$ sont dz classe $C^\infty.f = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$*

Proposition 2.1.2. *Soient M_1 et M_2 deux variétés, alors pour tout $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ on a :*

$$T_{(x_1,x_2)}M_1 \times M_2 \cong T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$$

Démonstration *: Soit π et σ les projections canoniques, alors l'application :*

$$\begin{aligned} T_{(x_1,x_2)}M_1 \times M_2 &\to T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2 \\ v &\mapsto (d_{(x_1,x_2)}\pi(v), d_{(x_1,x_2)}\sigma(v)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Proposition 2.1.3. *Soient X et Y deux champs de vecteurs sur la variété produit $M_1 \times M_2$, pour tout $f_1 \in C^\infty(M_1)$ et pour tout $f_1 \in C^\infty(M_1)$ on a*

$$\begin{cases} X(f_1 \circ \pi_1) &= Y(f_1 \circ \pi_1) \\ X(f_2 \circ \pi_2) &= Y(f_2 \circ \pi_2) \Rightarrow X = Y \end{cases}$$

Démonstration *: Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$(resp.à $\delta = (\delta_1, \delta_2)$) une courbe sur $M \times N$ associée à $X_{(x,y)} = (X_1(x), X_2(y)) \in T_xM_1 \times T_yM_2$ (resp.à $Y_{(x,y)} = (Y_1(x), Y_2(y)) \in T_xM_1 \times T_yM_2$)*

$$\begin{aligned} X_1(x)(f_1) &= \tfrac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(f_1 \circ \pi_1 \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= X_{(x,y)}(f_1 \circ \pi_1) \\ &= Y_{(x,y)}(f_1 \circ \pi_1) \\ &= \tfrac{d}{dt}(f_1 \circ \pi_1 \circ \delta)|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(f_1 \circ \delta_1)|_{t=0} \\ &= Y_1(x)(f_1) \end{aligned}$$

Pour tout $f_1 \in C^\infty(M_1)$, donc $X_1(x) = Y_1(x)$, on utilise les mêmes démarches (en

considérant π_2) pour démontrer que
$X_2(y) = Y_2(y)$, *d'où* $X_{(x,y)} = Y_{(x,y)}$ *pour tout* $(x, y) \in M_1 \times M_2$ *c'est-à-dire* $X = Y$

Proposition 2.1.4. *Soient M_1 et M_2 deux variétés différentiables, on a les propriétés suivantes :*

1. $(X_1, 0)(f_1 \circ \pi_1) = X_1(f_1) \circ \pi_1$ *et* $(X_1, 0)(f_2 \circ \pi_2) = 0$
2. $(0, X_2)(f_2 \circ \pi_2) = X_2(f_2) \circ \pi_2$ *et* $(0, X_2)(f_1 \circ \pi_1) = 0$
3. $[(X_1, 0), (Y_1, 0)] = ([X_1, Y_1], 0)$,$[(0, X_2), (0, Y_2)] = (0, [X_1, X_2])$ *et* $[(X_1, 0)] = 0$
4. $(f_1X_1, 0) = (f_1 \circ \pi_1)(X_1, 0)$ *et* $(0, f_2X_2) = (f_2 \circ \pi_2)(0, X_2)$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$,$X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, $f_1 \in C^\infty(M_1)$ *et* $f_2 \in C^\infty(M_2)$

Proposition 2.1.5. *Soient ω,η deux formes différentielle sur la variété produit $M_1 \times M_2$.Pour tout $X_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$,*

$$\begin{cases} \omega(X_1, 0) & = \eta(X_1, 0) \\ \omega(0, X_2) & = \eta(0, X_2) \Rightarrow \omega = \eta \end{cases}$$

Proposition 2.1.6. *Soient ∇, $\widetilde{\nabla}$ deux connexions linéaires sur $M \times N$. Pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$,*

$$\begin{cases} \nabla_{(X_1,0)}(Y_1, 0) & = \widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) \\ \nabla_{(X_1,0)}(0, X_2) & = \widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0, X_2) \\ \nabla_{(0,X_2)}(X_1, 0) & = \widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(X_1, 0) \\ \nabla_{(0,X_2)}(0, Y_2) & = \widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) \Rightarrow \nabla = \widetilde{\nabla} \end{cases}$$

Démonstration *: Si $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{1\le i\le m}$ et $\{\frac{\partial}{\partial y_a}\}_{1\le a\le n}$ sont des bases locales de champs de vecteurs relatives aux cartes $(U, \varphi) \in atl(M)$ et $(V, \psi) \in atl(N)$ respectivement, alors $\{(\frac{\partial}{\partial x_i}, 0), (0, \frac{\partial}{\partial y_a})\}_{1\le i\le m,1\le a\le n}$ est la base de champs de vecteurs sur $M \times N$ relative a la carte $(U \times V, \varphi, \psi)$.Pour*

$$A = \sum_{1\le i\le m,1\le a\le n} \{A_i(\frac{\partial}{\partial x_i}, 0) + A_{a+m}(0, \frac{\partial}{\partial y_a})\}$$

$$B = \sum_{1\le j\le m,1\le b\le n} \{B_j(\frac{\partial}{\partial y_j}, 0) + B_{b+m}(0, \frac{\partial}{\partial y_b})\}$$

avec A_i, A_{a+m}, B_j *et* $B_{b+m} \in C^\infty(M \times N)$, *où* $1 \leq i,\ j \leq m$ *et* $1 \leq a, b \leq n$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\nabla_A B \ &= \textstyle\sum_{1\leq i,j\leq m, 1\leq a,b\leq n}\{A_i[(\frac{\partial}{\partial x_i},0)(B_j)(\frac{\partial}{\partial x_j},0)\\
&+B_j\nabla_{(\frac{\partial}{\partial x_i},0)}(\frac{\partial}{\partial x_j},0)\\
&+(\frac{\partial}{\partial x_i},0)(B_{b+m})(0,\frac{\partial}{\partial y_b})\\
&+B_{b+m}\nabla_{(\frac{\partial}{\partial x_i},0)}(0,\frac{\partial}{\partial y_b})]\\
&+A_{a+m}[(0,\frac{\partial}{\partial y_a}(B_j)(\frac{\partial}{\partial x_j},0)\\
&+B_j\nabla_{(0,\frac{\partial}{\partial y_a})}(\frac{\partial}{\partial x_j},0)\\
&+(0,\frac{\partial}{\partial y_a})(B_{b+m})(0,\frac{\partial}{\partial y_b})\\
&+B_{b+m}\nabla_{(0,\frac{\partial}{\partial y_a})}(0,\frac{\partial}{\partial y_b})\}
\end{aligned}$$

Pour la proposition 2.1.6 on peut donner la proposition suivante :

Proposition 2.1.7. *Si* ∇^1 *et* ∇^2 *deux connexion linéaires sur* M_1 *et* M_2 *respectivement alors, suivant la proposition précédente il existe une unique connexion* ∇ *sur la variété produit* $M_1 \times M_2$ *telle que*

$$\begin{cases}
\nabla_{(X_1,0)}(Y_1,0) & = (\nabla^1_{X_1}Y_1,0)\\
\nabla_{(X_1,0)}(0,Y_2) & = (0,\nabla^2_{X_2}Y_2)\\
\nabla_{(X_1,0)}(0,X_1) & = \nabla_(0,X_2)(X_1,0) = 0
\end{cases}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ *et* $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$

Proposition 2.1.8. *Sous les mêmes hypothèses de la proposition précédente on a :*

$$\begin{cases}
T((X_1,0),(Y_1,0)) & = (T^1(X_1,Y_1),0)\\
T((0,X_2),(0,Y_2)) & = (0,T^2(X_2,Y_2))\\
T((X_1,0),(0,X_2)) & = 0
\end{cases}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ *et* $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$ *où* T, T^1, T^2 *désignent les tenseurs de torsion sur* $M_1 \times M_2$, M_1 *et* M_2 *respectivement.*

2.2 Métrique diagonale sur la variété produit

Proposition 2.2.1. *[16] Si* (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *sont variétés Riemanniennes de dimension* n_1 *et* n_2 *respectivement, alors le tenseur* $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ *est une métrique*

Riemannienne sur $M_1 \times M_2$ telle que

$$g((X_1,0),(Y_1,0)) = g_1(X_1,Y_1) \circ \pi_1$$

$$g((0,X_2),(0,Y_2)) = g_1(X_2,Y_2) \circ \pi_2$$

$$g((X_1,0),(0,X_2)) = 0$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$ il suffit de voir la matrice associé à g,

$$\begin{pmatrix} (g_{1ij}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & (g_{2ab}) \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.1. *La variété Riemannienne $(M_1 \times M_2, g)$ est dite variété Riemannienne produit*

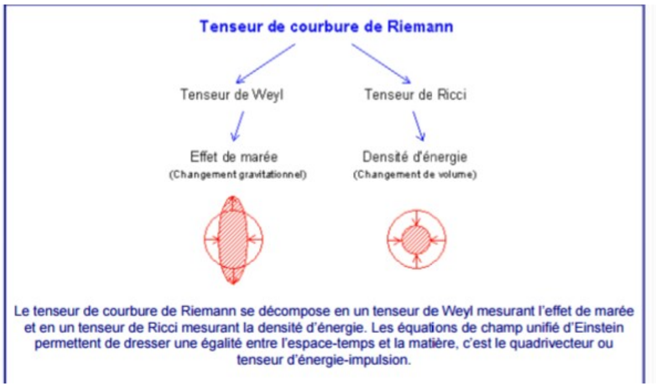
Proposition 2.2.2. *La connexion de $M_1 \times M_2$ associé à $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ est bien la connexion de la proposition (2.1.6).*

2.3 Tenseur de courbure Riemannienne et le tenseur de Ricci sur la variété produit

Proposition 2.3.1. *[16] Soit $(M_1 \times M_2, g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2)$ une variété Riemannienne produit avec son tenseur de courbure R. Si $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, alors*

$$\begin{cases} R((X_1,0),(Y_1,0))(Z_1,0) & = (R^1(X_1,Y_1)Z_1, 0) \\ R((0,X_2),(0,Y_2))(0,Z_2) & = (0, R^2(X_2,Y_2)Z_2) \\ R((X_1,0),(0,Y_2))(Z_1,0) & = R((X_1,0),(Y_1,0))(0,Z_2) = R((0,X_2),(0,Y_2))(Z_1,0) \\ R((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))(Z_1,Z_2) & = (R^1(X_1,Y_1)Z_1, R^2(X_2,Y_2)Z_2) \end{cases}$$

Proposition 2.3.2. *Soit $(M_1 \times M_2, g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2)$ une variété Riemannienne produit avec S son tenseur de Ricci. Si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$, alors*



$$\begin{cases} S((X_1,0),(Y_1,0)) & = S^1(X_1,Y_1)\circ\pi_1 \\ S((0,X_2),(0,Y_2)) & = S^1(X_2,Y_2)\circ\pi_2 \\ S((X_1,0),(Y_1,0)) & = 0 \end{cases}$$

Chapitre 3

Variété Riemannienne produit tordu

Le produit tordu $M \times_f N$ de deux variétés Riemannienne (M, g_M) et (N, g_N) est la variété produit $M \times N$ munie de la métrique $g = g_M + f^2 g_N$, où f est une fonction positive sur M, appelée fonction de distorsion.
Il est bien connu que la notion du produit tordu joue un rôle important dans le domaine de la géométrie différentielle et celui de la physique ([4]), par exemple le meilleur modèle relativiste de l'espace de sortie autour d'une étoile massive ou d'un trou noire est donné comme produit tordu de variétés adaptées ([4]).
Dans travail, on s'intéresse aux tenseurs de courbure, de courbure Riemannienne-Christoffel et de Ricci d'une variété Riemannienne produit, on utilise pour cela la notion de relèvement pour établir la relation entre ces tenseurs et ceux des variétés M et N.

3.1 Métrique Riemannienne du produit tordu

3.1.1 Métrique Riemannienne du produit tordu

Définition 3.1.1. *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemannienne de dimensions n_1 et n_2 respectivement, et f une fonction strictement positive sur M. Le produit tordu noté $M_1 \times_f M_2$ est définie comme étant la variété produit $M_1 \times M_2$ munie de la métrique $\widetilde{g}$.*

Le couple $(M_1 \times_f M_2, \widetilde{g})$ *s'appelle* ***variété Riemannienne produit tordu****et* f *s'appelle la fonction de distorsion au produit tordu*

3.2 Variété Produit Tordu

Définition 3.2.1. *Soient* (M, g) *et* (N, h) *deux variété Riemannienne de dimension* m *et* n *respectivement et* $f \in C^\infty(M)$ *une fonction strictement positive. La variété produit tordu* $M \times_{f^2} N$ *est définie comme étant la variété* $M \times N$ *munie de la métrique* G_{f^2} *telle que*

$$G_{f^2} = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \eta^* h$$

où $\pi : M \times N \to M$ *et* $\eta : M \times N \to N$ *désignent les projections canoniques.*
Si $X, Y \in H(M \times N)$ *on a*

$$G_{f^2}(X, Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y)) + (f \circ \pi)^2 h(d\eta(X), d\eta(Y))$$

Proposition 3.2.1. *[7],[17]Soient* (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *deux variétés Riemanniennes de dimensions* n_1 *et* n_2 *respectivement et* f *une fonction strictement positive sur* M_1*. On considère la variété produit* $M_1 \times M_2$ *avec ses projections canoniques* π_1 *et* π_2*, alors*

$$\widetilde{g} = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_2)^2 \pi_2^* g_2$$

est une métrique sur $M_1 \times M_2$*.(car : où* $\pi_i^*(g_i)$ *est le pullback de* g_i*. Via* π_i *pour* $i = 1, 2$*).*

Preuve

comme π_1 *et* π_2 *sont des applications de classe* C^∞*, et* $\pi_1^* g_1, \pi_2^* g_2 \in \mathfrak{T}_2^0(M_1 \times M_2)$*. Si* $u, v \in T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2$ *alors*

$$\widetilde{g}(u, v) = g_1(d\pi_1(u), d\pi_1(v)) + f^2(x_1) g_2(d\pi_2(u), d\pi_2(v))$$

donc $\widetilde{g}$ *est une symétrique.*
On montre que $\widetilde{g}$ *induit une forme bilinéaire non dégénérée sur* $T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2$*. Supposons* $\widetilde{g}(u, v) = 0$ *pour tout* $v \in T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2$*, en particutier pour tout* $v \in T_{(x_1,x_2)}\{x_1\} \times M_2$ *nous avons* $f^2(x_1) g_2(d\pi_2(u), d\pi_2(v)) = 0$ *et comme* f *strictement positive on obtient* $d\pi_2(u) = 0$*. De même on obtient* $d\pi_1(u) = 0$*, d'où* $u = 0$*.*

Exemple 3.2.1. *Le tore*

1. *Le tore est la variété produit* $S^1 \times S^1$ *avec* $g_u = \frac{4}{(1+u^2)u^2}du^2$ *une métrique Riemannienne sur la sphère unité* S^1 *alors* $\widetilde{g} = g_u + f^2 g_v$ *est une métrique Riemannienne tordu sur le tore* T^2*, où* f *une fonction de classe* C^∞ *sur* S^1*, strictement positive.*
2. *Le tore* T^3 *est variété produit* $S^1 \times S^1 \times S^1$ *alors, on peut définis deux métrique Riemannienne tordu* $\widetilde{g_1} = g_u + f_1^2(g_v + g_w)$ *et* $\widetilde{g_2} = (g_u + g_v) + f_2^2 g_w$ *où* f_1 *une fonction de classe* C^∞ *sur* S^1 *et* f_2 *une fonction de classe* C^∞ *sur* $S^1 \times S^1$*, strictement positive.*

Proposition 3.2.2. *Soient* $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ *deux variétés Riemanniennes et* $(M_1 \times_f M_2, \widetilde{g})$ *la variété produit tordu. Si* $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ *et* $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$*, On a*

1. $\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla^1_{X_1} Y_1, 0)$
2. $\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0, X_2) = \widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(X_1, 0) = X_1(lnf)(0, X_2)$
3. $\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) = (0, \nabla^2_{X_2} Y_2) - \frac{1}{2} g_2(X_2, Y_2)(gradf^2, 0)$

1. En utilisant la formule de Koszul

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = X\tilde{g}(Y, Z) + Y\tilde{g}(Z, X) - Z\tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}(Z, [X, Y]) + \tilde{g}(Y, [Z, X]) - \tilde{g}(X, [Y, Z])$$

pour tous $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2), Z = (Z_1, Z_2) \in \mathfrak{X}(M = M_1 \times_f M_2)$
On a

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0), (Z_1, 0)) &= (X_1, 0)\tilde{g}((Y_1, 0), (Z_1, 0)) + (Y_1, 0)\tilde{g}((Z_1, 0), (X_1, 0)) \\ &-(Z_1, 0)\tilde{g}((X_1, 0), (Y_1, 0)) + \tilde{g}((Z_1, 0), [(X_1, 0), (Y_1, 0)]) \\ &+\tilde{g}((Y_1, 0), [(Z_1, 0)(X_1, 0)]) - \tilde{g}((X_1, 0)[(Y_1, 0), (Z_1, 0)]) \\ &= X_1(g_1(Y_1, Z_1)) + Y_1(g_1(Z_1, X_1)) - Z_1(g_1(X_1, Y_1)) \\ &+g_1(Z_1, [X_1, Y_1]) \\ &+g_1(Y_1, [Z_1, X_1]) - g_1(X_1, [Y_1, Z_1]) \\ &= 2g_1(\nabla^1_{X_1} Y_1, Z_1) \\ &= 2\tilde{g}((\nabla^1_{X_1} Y_1, 0), (Z_1, 0)) \end{aligned}$$

pour tout $Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ de même on a

$$g(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0),(0,Z_2)) = 0$$

pour tout $Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, d'où

$$\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y,0) = (\nabla^1_{X_1}Y_1,0)$$

2.
$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2),(0,Z_2)) &= (X_1,0)\tilde{g}((0,Y_2),(0,Z_2)) + (0,Y_2)\tilde{g}((0,Z_2),(X_1,0)) \\
&-(0,Z_2)\tilde{g}((X_1,0),(0,Y_2)) + \tilde{g}((0,Z_2),[(X_1,0),(0,Y_2)]) \\
&+\tilde{g}((0,Y_2),[(0,Z_2)(X_1,0)]) - \tilde{g}((X_1,0)[(0,Y_2),(0,Z_2)]) \\
&= 2fX_1(f)g_2(Y_2,Z_2) \\
&= 2f^2g_2(\tfrac{X_1(f)}{f}Y_2,Z_2) \\
&= 2f^2g_2(X_1(lnf)Y_2,Z_2) \\
&= 2\tilde{g}((0,X_1(lnf)Y_2,(0,Z_2)
\end{aligned}$$

d'où,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2),(0,Z_2)) = X_1(lnf)\tilde{g}((0,Y_2),(0,Z_2))$$

pour tout $Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.
Si $Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ alors :

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2),(Z_1,0)) &= (X_1,0)\tilde{g}((0,Y_2),(Z_1,0)) \\
&-\tilde{g}((0,Y_2),\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Z_1),0)) \\
&= -\tilde{g}((0,Y_2),(\tilde{\nabla}_{X_1}Z_1,0)) = 0
\end{aligned}$$

comme $[(X_1,0),(0,Y_2)] = 0$ on déduit

$$\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2) = \tilde{\nabla}_{(0,Y_2)}(X_1,0) = X_1(lnf)(0,Y_2)$$

3. En utilisant la formule de Koszul et remarquons que pour tout $Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, on a

$$(0,Z_2)(f) = 0$$

on obtient :

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{0,(X_2)}(0,Y_2),(0,Z_2)) = \tilde{g}((0,\nabla^2_{X_2}Y_2),(0,Z_2))$$

et

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(Z_1,0)) &= (0,X_2)g((0,Y_2),(Z_1,0)) \\ &-(Z_1,0) - g((0,Y_2),\nabla_{(0,X_2)}(Z_1,0)) \\ &= Z_1(lnf)g((0,X_2),(0,Y_2)) \\ &-f^2Z_1(lnf)g_2(X_2,Y_2) \\ &= -\tfrac{1}{2}g(gradf^2,Z_1)g_2(X_2,Y_2) \\ &= -\tfrac{1}{2}g_2(X_2,Y_2)\tilde{g}((gradf^2,0),(Z_1,0)) \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2) = (0,\nabla^2_{X_2}Y_2) - \frac{1}{2}g_2(X_2,Y_2)(gradf^2,0)$$

3.2.1 Tenseur de courbure Riemannienne et de Ricci du produit tordu

Proposition 3.2.3. *Soit $\widetilde{M} = M_1 \times_f M_2$ une variété produit tordu et $\widetilde{R}$ son tenseur de courbure. Si $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$, et $X_2, Y_2, Z_1 \in \mathfrak{X}(M_2)$, alors*

1. $\widetilde{R}((X_1,0),(Y_1,0))(Z_1,0) = (R^1(X_1,Y_1)Z_1,0)$
2. $\widetilde{R}((0,X_2),(Y_1,0))(Z_1,0) = -\frac{1}{f}g_1(\nabla^1_{Y_1},gradf,Z_1)(0,X_2)$
3. $\widetilde{R}((X_1,0),(Y_1,0))(0,Z_2) = R((0,X_2),(0,Y_2))(Z_1,0) = 0$
4. $\widetilde{R}((X_1,0),(0,Y_2))(0,Z_2) = R((X_1,0),(0,Z_2))(0,Y_2) = -fg_2(Y_2,Z_2)(\nabla^1_{X_1}gradf,0)$
5. $\widetilde{R}((0,X_2),(0,Y_2))(0,Z_2) = (0,R^2(X_2,Y_2)Z_2) - |gradf|^2((0,X_2\wedge_2 Y_2)Z_2)$
   avec $(X\wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$

Preuve La preuve découle directement de la définition du tenseur de courbure et la proposition(3.1.2)

Proposition 3.2.4. *Soit $M_1 \times_1 M_2$ une variété produit tordu et $\widetilde{S}$ sa courbure de Ricci. Pour tout $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ ona*

1. $\widetilde{S}((X_1,0),(Y_1,0)) = S^1(X_1,Y_1) - \frac{n^2}{f}g_1(\nabla^1_{X_1}gradf,Y_1)$

2. $\widetilde{S}((X_1,0),(0,Y_2)) = 0$

3. $\widetilde{S}((0,X_2),(0,Y_2)) = S^1(X_2,Y_2) - g_2(X_2,Y_2)(f\Delta^1(f) + (n_2-1)|gradf|^2)$

où $\Delta^1(f)$ est le Laplacian de la fonction f sur M_1

Preuve La preuve est simple on utilisant la proposition (3.1.3), et la définition de la courbure de Ricci avec la base orthonormée $\{E_i, \frac{1}{f}F_k\}$

Exemple 3.2.2. *Le cône sur une variété.*
Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension n. La variété Riemannienne produit tordu $(\widetilde{M} = M \times_r \mathbb{R}^+, \widetilde{g} = r^2 g + dr^2)$ est dite cône sur une variété. Alors, la dérivée covariante $\widetilde{\nabla}$ de la connexion de Levi-Civita de $\widetilde{g}$ satisfait les formules suivantes ([48],p206)
$\widetilde{\nabla}_{\partial r}\partial r = 0$, $\widetilde{\nabla}_{\partial r}X = \widetilde{\nabla}_X \partial r = \frac{1}{r}X$, $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - rg(X,Y)\partial r$ *(notation $\partial r = \frac{\partial}{\partial r}$)*
$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. *Les composantes non nulles du tenseur de courbure $\widetilde{R}$ et le tenseur de Ricci $\widetilde{S}$ sont*

- $\widetilde{R}(\partial r, X)\partial r = \widetilde{R}(\partial r, X)Y = \widetilde{R}(X,Y)\partial r = 0$
- $\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - (X \wedge Y)Z$

1. $\widetilde{S}(\partial r, \partial r) = 0$
2. $\widetilde{S}(X,Y) = S(X,Y) - (n-2)g(X,Y)$

3.3 Autres métriques Riemanniennes sur la variété produit

Dans cette section nous donnons quelques types de métrique Riemannienne qu'on peut défini sur une variété produit et nous donnons aussi sans démonstration les connexions de Levi-Civita associées à ces métriques.

3.3.1 Métrique tordu généralisée

Définition 3.3.1. *Soient* (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *deux variétés Riemanniennes et* f *une fonction strictement positive sur* $M_1 \times M_2$*. La métrique tordu généralisée* $\widetilde{g}$ *sur* $M_1 \times_f M_2$ *est définie par*

$$\widetilde{g} = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2$$

où $\pi_1 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \to x_1 \in M_1$ *et* $\pi_2 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \to x_2 \in M_2$ *sont les projections canoniques.*
Pour tous champs de vecteurs X, Y *sur* $M_1 \times M_2$*, on a*

$$\widetilde{g}(X, Y) = g_1(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)) + f^2 g_2(d\pi_2(X), d\pi_2(Y))$$

Proposition 3.3.1. *[21] Soient* (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *deux variétés Riemanniennes et* $(M_1 \times_f M_2, \widetilde{g})$ *la variété produit tordu. Si* $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ *et* $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$*, on a*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(lnf)(0, Y_2) + Y(lnf)(0, X_2) - \frac{1}{2} g_2(X_2, Y_2)(grad_1 f^2, \frac{1}{f^2} grad_2 f^2)$$

où $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2)$ *et* $\nabla_X Y = (\nabla^1_{X_1} Y_1, \nabla^2_{X_2} Y_2)$

3.3.2 Métrique tordu doublée

Définition 3.3.2. *Soient* (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *deux variétés Riemanniennes et* f_1, f_2 *deux fonctions strictement positives sur* M_1 *et* M_2*. La métrique tordu doublée* $\widetilde{g}$ *sur* ${M_1}_{f_1} \times_{f_2} M_2$ *est définie par*

$$\widetilde{g} = (f_2 \circ \pi_2)^2 \pi_1^* g_1 + (f_1 \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2$$

où $\pi_1 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \to x_1 \in M_1$ *et* $\pi_2 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \to x_2 \in M_2$ *sont les projections canoniques.*
Pour tous champs de vecteurs X, Y *sur* $M_1 \times M_2$*, on a*

$$\widetilde{g}(X, Y) = f_2^2 g_1(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)) + f_1^2 g_2(d\pi_2(X), d\pi_2(Y))$$

Proposition 3.3.2. *[5] Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et $(M_{1h} \times_f M_2, \widetilde{g})$ la variété produit tordu double. Si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, on a*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2f_1^2} X_1(f_1^2(0, Y_2) + \frac{1}{2f_1^2} Y_1(f_1^2(0, X_2) + \frac{1}{2f_2^2} X_2(f_2^2(Y_1, 0)$$

$$+\frac{1}{2f_2^2} Y_2(f_2^2(X_1, 0) - \frac{1}{2} g_1(X_1, Y_1)(grad_1 f^2, 0) - \frac{1}{2} g_2(X_2, Y_2)(0, grad_2 f^2)$$

où $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2)$ et $\nabla_X Y = (\nabla^1_{X_1} Y_1, \nabla^2_{X_2} Y_2)$

3.3.3 Métrique tordu doublée généralisée

Définition 3.3.3. *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et f_1, f_2 deux fonctions positives sur $M_1 \times M_2$ respectivement. La métrique tordu doublée $\widetilde{g}$ sur $M_{1f_1} \times_{f_2} M_2$ est définie par*

$$\widetilde{g} = (f_2 \circ \pi_2)^2 \pi_1^* g_1 + (f_1 \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2$$

où $\pi_1 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \to x_1 \in M_1$ et $\pi_2 : (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \to x_2 \in M_2$ sont les projections canoniques.
Pour tous champs de vecteurs X, Y sur $M_1 \times M_2$, on a

$$\widetilde{g}(X, Y) = f_2^2 g_1(d\pi_1(X), d\pi_1(Y)) + f_1^2 g_2(d\pi_2(X), d\pi_2(Y))$$

Proposition 3.3.3. *[8] Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes et $(M_{1h} \times_{f_1} M_2, \widetilde{g})$ la variété produit tordu double généralisée. Si $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ et $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, on a*

$\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) =$

$$(\nabla^1_{X_1} Y_1 + X_1(lnf_2)Y_1 + Y_1(lnf_2)X_1 - g_1(X_1, Y_1)grad_1(lnf_2), -\frac{f_2^2}{f_1^2} g_1(X_1, Y_1)grad_2(lnf_2))$$

$\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) =$

$$(-\frac{f_1^2}{f_2^2} g_2(X_2, Y_2)grad_1(lnf_1)\nabla^2_{X_2} Y_2 + X_2(lnf_1)Y_2 + (lnf_1)X_2 - g_2(X_2, Y_2)grad_2(lnf_1))$$

$\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2) = (Y_2(f_2)X_1, X_1(f_1)Y_2)$

$\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(Y_1,0) = (X_2(f_2)Y_1, Y_1(f_1)X_2)$

où $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2)$ *et* $\nabla_X Y = (\nabla^1_{X_1} Y_1, \nabla^2_{X_2} Y_2)$

Chapitre 4

La pseudo symétrie au sens de Deszcz

4.1 variétés localement symétriques

Les transport parallèle de deux vecteurs linéairement indépendants le long d'une courbe nous donne à chaque point de cette courbe deux vecteurs linéairement indépendants.Ainsi on peut définir le transport parallèle d'un plan le long d'une courbe, en fixons une base de plan de départ, et prenons son transport parallèle le plan engendré par les transport parallèle des vecteurs de la base. Levy [11] étudié la courbure sectionnelle d'un plan et de son transport parallèle le long des courbes du flot d'un champ de vecteurs X

Théorème 4.1.1. *(Levy) La condition nécessaire et suffisante pour que la courbure*

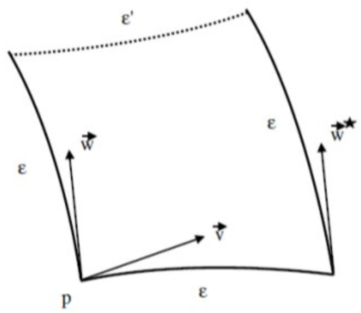


FIGURE 4.1 – Le carré de Levi-Civita

sectionnelle de tout plan π reste constante le long des courbes du flot d'un champ de vecteurs X quand ce plan π est transporté parallèlement le long des courbes du flot, est que $\nabla_X R = 0$. E. Cartan [9] a montré que les variétés Riemanniennes avec un tenseur de Riemann parallèle ($\nabla R = 0$) sont les espaces dite localement symétrique, c'est-à-dire les espaces qui ont la propriétés suivante : tout les réflexions γ_p(γ_p inverse les géodésiques passant par p) sont des isométries locales

Définition 4.1.1. *Une variété M Riemannienne avec un tenseur de Riemann parallèle ($\nabla R = 0$) est dite localement symétrique.*

4.2 variétés semi-symétriques

Le tenseur $R.R$ de type (0,6) est défini par

$$\begin{aligned}(R.R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= (R(X,Y).R)(X_1,X_2,X_3,X_4)\\ &= -R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - R(X_1,R(X,Y)X_2,X_3,X_4)\\ &-R(X_1,X_2,R(X,Y)X_3,X_4) - R(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4)\end{aligned}$$

Définition 4.2.1. *Une variété Riemannienne (M,g) est dite semi-symétrique si* $R.R = 0$

4.3 variétés pseudo symétriques

Probablement le plus simple (0,6)-tenseur de M, admettant les mêmes propriétés algébriques que $R.R$ est tenseur de Tachibana $Q(g,R)$, défini par

$$\begin{aligned}Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= ((X\wedge Y).R)(X_1,X_2,X_3,X_4)\\ &= -R((X\wedge Y)X_1,X_2,X_3,X_4)\\ &-R(X_1,(X\wedge Y)X_2,X_3,X_4)\\ &-R(X_1,X_2,(X\wedge Y)X_3,X_4)\\ &-R(X_1,X_2,X_3,(X\wedge Y)X_4)\end{aligned}$$

Proposition 4.3.1. *Une variété Riemannienne M est à courbure constante si et seulement si $Q(g,R) = 0$.*

Définition 4.3.1. *[24],[2] Soit M une variété Riemannienne de dimension $n \geqslant 3$ qui n'est pas à courbure constante et notons U_R l'ensemble des points où le tenseur de Tachibana $Q(g,R)$ est non nul c'est-à-dire $U_R = \{x \in M | Q(g,R) \neq 0\}$. Alors en $p \in U_R$ un plan $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w} \subset T_pM$ est dit à courbure-dépendance avec le plan $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ si $Q(g,R)(\vec{v},\vec{w},\vec{w},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) \neq 0$.*

Définition 4.3.2. *[24],[2] Pour $p \in U_R$, soient les deux plans $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$, tangent à M en p, à courbure-dépendance. Alors la courbure sectionnelle de Deszcz $L(p;\pi;\bar{\pi})$ du plan π respectivement à $\bar{\pi}$ est défini par*

$$L(p;\pi;\bar{\pi}) = \frac{(R.R)(\vec{v},\vec{w},\vec{w},\vec{v};\vec{x},\vec{y})}{Q(g,R)(\vec{v},\vec{w},\vec{w},\vec{v};\vec{x},\vec{y})}$$

Remarque 4.3.1. *Cette définition est indépendante du choix de la base de π et $\bar{\pi}$.*

Théorème 4.3.1. *[24] Une variété Riemannienne M de dimension $n \geqslant 3$ est pseudo symétrique, au sens de Deszcz, si et seulement si en tout point $p \in U_R$ les courbures sectionnelles de Deszcz sont les même ; c'est-à-dire pour tout les plans tangent, en p ,π,$\bar{\pi}$ en courbure-dépendance $L(p,\pi,\bar{\pi}) = L_R(p)$ pour une certain fonction $L_R : U_R \to \mathbb{R}$.*

Corollaire 4.3.1. *Les variétés semi-symétriques sont caractérisées par la nullité de la courbure sectionnelle de Deszcz.*

Définition 4.3.3. *Une variété Riemannienne M, de dimension $n \geqslant 3$ est dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, en un point $p \in U_R$ s'il existe un scalaire L_R tel que, en p, $R.R = L_R Q(g,R)$.*
Une variété Riemannienne M, de dimension $n \geqslant 3$, est dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, si elle est pseudo symétrique en tout ses points, c'est-à-dire s'il existe une fonction $L_R : M \to \mathbb{R}$ tel que $R.R = L_R Q(g,R)$.

4.4 Ricci pseudo symétrique et Weyl pseudo symétrique

Définition 4.4.1. *Soit T un tenseur de type $(0, r)$ sur M. Les deux tenseur $R.T$ et $Q(g, T)$ de type $(0, r+2)$ sont définis par :*

$$\begin{aligned}(R.T)(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y) &= (R(X,Y).T)(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y)\\ &= -T(R(X,Y))X_1, X_2, \ldots, X_k - \ldots -\\ &T(X_1, X_2, \ldots, R(X,Y)X_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(g,T)(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y) &= ((X \wedge_g Y).T)(X_1, X_2, \ldots, X_k)\\ &= -T((X \wedge_g Y)X_1, X_2, \ldots, , X_k)\\ &-T(X_1, X_2, \ldots, (X \wedge_g Y)X_k)\end{aligned}$$

Définition 4.4.2. *Une variété Riemannienne M est dite Ricci semi-symétrique si $R.S = 0$. Elle est dite Weyl semi-symétrique si $R.C = 0$*

Définition 4.4.3. *Une variété Riemannienne M est dite Ricci pseudo-symétrique s'il existe une fonction L_S sur $L_S = \{x \in M/S - \frac{r}{n}g \neq 0 en x\}$ telle que $R.S = L_S Q(g, S)$ sur $U_S$et elle est dite Weyl pseudo symétrique s'il existe une fonction $L_C$sur $U_C = \{x \in M/C \neq 0 en x\}$ telle que $R.C = L_C Q(g, C)$ sur U_C*

Remarque 4.4.1. – *On $U_S \subset U_R$. De plus tout variété pseudo symétrique est Ricci pseudo symétrique. Mais l'inverse n'est pas, en général, vrai. Par exemple ([15] page 40) tout produit tordu $M_1 \times_F M_2$ d'une variété de dimension un $(M_1, \bar{g})$ et une variété d'Einstein non pseudo symétrique $(M_2, \bar{g})$, de dimension $n \geqslant 3$, est une variété non pseudo symétrique et Ricci pseudo symétrique. Pour plus d'exemples voir [19].*

- *Tout variété Weyl semi-symétrique est Weyl pseudo symétrique. L'inverse n'est pas vrai ([15]page 41,[20],[19]).*
- *Toute variété pseudo symétrique est Weyl pseudo symétrique*

4.5 Ricci pseudo symétrie du produit tordu double

Définition 4.5.1. *([10],p3) Soient (B, g_B) et (F_i, g_{F_i}) des variétés pseudo Riemanniennes de dimension m et n_i respectivement et $b_i : B \to]0, \infty[$ des fonctions strictement positives et de classe C^∞ dans B pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. On considère la variété produit $M = B \times F_1 \times \ldots \times F_m$ avec ses projections π et σ_i, alors $g = g_B \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$ définie par :*

$$g = \pi^*(g_B) \oplus (b_1 \circ \pi)^2 \sigma_1^*(gF_1) \oplus \ldots \oplus (b_m \circ \pi)^2 \sigma_m^*(gF_m)$$

est une métrique sur $B \times F_1 \times \ldots \times F_m$ chaque fonction $b_i : B \to]0, \infty[$ est dite fonction de torsion et chaque variété (F_i, g_{F_i}) est dite variété fibre pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. La variété (B, g_B) est dite variété base du produit tordu multiple.

Proposition 4.5.1. *([10],p3) Soit $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ une variété pseudo Riemannienne produit tordu multiple munie de la métrique $g = g_B \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$ soient $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ et $V \in \mathfrak{L}(F_i)$, $W \in \mathfrak{L}(F_j)$. Alors*

1. $\nabla_X Y = \nabla^B_X Y$
2. $\nabla_X V = \nabla_V X = (\frac{Xb_i}{b_i} V$
3. $\nabla_V W = 0$ *si* $i \neq j$
4. $\nabla_V W = \nabla^{F_i}_V W - \frac{g(V,W)}{b_i} Grad(b_i)$ *si* $i = j$

Proposition 4.5.2. *([10],p4) Soit $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ une variété pseudo Riemannienne produit tordu multiple munie de la métrique $g = g_B \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$ soient $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ et $V \in \mathfrak{L}(F_i)$, $W \in \mathfrak{L}(F_j)$ et $U \in \mathfrak{L}(F_k)$. Alors*

1. $R(X, Y)Z = R^B(X, Y)Z$
2. $R(V, X)Y = \frac{H^{b_i}(X,Y)}{b_i} V$
3. $R(X, V)W = R(V, W)X = R(V, X)W = 0$ *si* $i \neq j$
4. $R(V, W)X = 0$ *si* $i = j$

5. $R(X,Y)V = 0$
6. $R(V,W)U = 0$ *si* $i = j$ *et* $i, j \neq k$
7. $R(U,V)W = -g(V,W)\frac{g_B(grad_B(b_i), grad_B(b_k))}{b_i b_k}U$ *si* $i = j$ *et* $i, j \neq k$
8. $R(X,V)W = \frac{g(V,W)}{b_i}\nabla_X^B(grad_B(b_i))$ *si* $i = j$
9. $R(V,W)U = R^{F_i}(V,W)U - \frac{\|grad_B(b_i)\|_B^2}{b_i^2}\{g(V,U)W - g(W,U)V\}$ *si* $i, j = k$

Proposition 4.5.3. *([10],p4) Soit* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ *une variété pseudo Riemannienne produit tordu multiple munie de la métrique* $g = g_B \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$ *soient* $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $V \in \mathfrak{L}(F_i)$, $W \in \mathfrak{L}(F_k)$. *Alors*

1. $Ric(X,Y) = Ric^B(X,Y) - \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{b_i H_B^{b_i}}(X,Y)$
2. $Ric(X,V) = 0$
3. $Ric(V,W) = 0$ *si* $i \neq j$
4. $Ric(V,W) = Ric^{F_i}(V,W) - (\frac{\Delta^B(b_i)}{b_i} + (s_i - 1)\frac{\|grad^B(b_i)\|_B^2}{b_i^2}$
   $\sum_{k=1,k\neq i}^m s_k \frac{g_B(b_i)\|_B^2}{b_i^2} + \sum_{k=1,k\neq i}^m s_k$
   $\frac{g_B(grad^B(b_i), grad^B(b_k))}{b_i b_k})g(V,W)$ *si* $i = j$

4.6 La symétrie des espaces produit tordu multiple

Cette section fait l'objet principal de notre travail, on étudie les tenseurs $R.S$ et $Q(g,S)$ sur une variété produit tordu multiple et on explicite quelques résultats conçernant les conséquences géométriques, dans ce cas :Ricci pseudo-symétrie

Proposition 4.6.1. *Soit* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ *le produit tordu multiple de métrique* $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1} \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$. *Soient* $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Z, W \in \mathfrak{L}(M)$. *Alors*

1. $(R.S)(Z,W;X,Y) = \{(R_B,S_B) - \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{b_i}(R_B.H_B^{b_i})\}(Z,W;X,Y)$ *si* $Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $W \in \mathfrak{L}(B)$
2. $(R.S)(Z,W;X,Y) = 0$ *si* $Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $W \notin \mathfrak{L}(B)$
3. $(R.S)(Z,W;X,Y) = 0$ *si* $Z \notin \mathfrak{L}(B)$ *et* $W \in \mathfrak{L}(B)$
4. $(R.S)(Z,W;X,Y) = 0$ *si* $Z \notin \mathfrak{L}(B)$ *et* $W \notin \mathfrak{L}(B)$

Démonstration.La démonstration découle directement des proposition 4.5.1 et 4.5.2.

1.
$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -S(R(X,Y)Z,W) - S(Z,R(X,Y)W)\\ &= -S(R_B(X,Y)Z,W) - S(Z,R_B(X,Y)W)\\ &= -\{S_B(R_B(X,Y)Z,W) - \textstyle\sum_{i=1}^{m} H_B^{b_i}(R_B(X,Y)Z,W)\}\\ &= -\{S_B(Z,R_B(X,Y)W) - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{b_i} H_B^{b_i}(Z,R_B(X,Y)W)\}\\ &= -S_B(R_B(X,Y)Z,W) - S_B(Z,R_B(X,Y)W)\\ &\quad - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{b_i}\{H_B^{b_i}(R_B(X,Y)Z,W) - H_B^{b_i}(Z,R_B(X,Y)W)\}\end{aligned}$$

$$(R.S)(Z,W;X,Y) = (R_B,S_B)(Z,W;X,Y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{b_i}(R_B.H_B^{b_i})(Z,W;X,Y) \tag{4.1}$$

2.
$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -S(R(X,Y)Z,W) - S(Z,R(X,Y)W)\\ &= -S(R_B(X,Y)Z,W) - S(Z,0)\\ &= -S(R_B(X,Y)Z,W)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{(R.S)(Z,W ;X,Y)=0}}$$

3.
$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -S(R(X,Y)Z,W) - S(Z,R(X,Y)W)\\ &= -S(0,W) - S(Z,R_B(X,Y)W)\\ &= -S(Z,R_B(X,Y)W)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{(R.S)(Z,W ;X,Y)=0}}$$

4.
$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -S(R(X,Y)Z,W) - S(Z,R(X,Y)W)\\ &= -S(0,W) - S(Z,0)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{(R.S)(Z,W ;X,Y)=0}}$$

Proposition 4.6.2. *Soit $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ le produit tordu multiple de métrique $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1} \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$. Soient $X, Y \in \mathfrak{L}(F_i), i \in \{1, \ldots, m\}$ et $Z, W \in \mathfrak{L}(M)$. Alors*

1. $(R.S)(Z,W;X,Y) = 0$ *si* $Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $W \in \mathfrak{L}(B)$

2. $\begin{cases}(R.S)(Z,W;X,Y) = 0 & si Z \in \mathfrak{L}(B) et W \in \mathfrak{L}(F_i)\\ (R.S)(Z,W;X,Y) = 0 & si Z \in \mathfrak{L}(B) et W \in \mathfrak{L}(F_j), i \neq j\end{cases}$

3. $\begin{cases}(R.S)(Z,W;X,Y) = 0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_i) et W \in \mathfrak{L}(B)\\ (R.S)(Z,W;X,Y) = 0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_j) et W \in \mathfrak{L}(B)\end{cases}$

4. $\begin{cases}(R.S) = (R_{F_i}.S_{F_i}) - \|Grad_B(b_i)\|_B^2 Q(g_{F_i}, S_{F_i}) & si Z, W \in \mathfrak{L}(F_i)\\ (R.S)(Z,W;X,Y) = 0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_i), W \in \mathfrak{L}(F_j), i \neq j\\ (R.S)(Z,W;X,Y) = 0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_j) et W \in \mathfrak{L}(F_i), i \neq j\\ (R.S)(Z,W;X,Y) = 0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_j) et W \in \mathfrak{L}(F_j)\end{cases}$

Proposition 4.6.3. *Soit $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ le produit tordu multiple de métrique $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1} \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$. Soient $X \in \mathfrak{L}(F_i), Y \in \mathfrak{L}(F_j)$ avec $i \neq j$ et $Z, W \in \mathfrak{L}(M)$. Alors*

1. $(R.S)(Z,W;X,Y) = 0$ *si* $Z \in \mathfrak{L}(B), W \in \mathfrak{L}(B)$
2. $(R.S)(Z,W;X,Y) = 0$ *si* $Z \in \mathfrak{L}(B), W \notin \mathfrak{L}(B)$
3. $(R.S)(Z,W;X,Y) = 0$ *si* $Z \notin \mathfrak{L}(B), W \in \mathfrak{L}(B)$

$$4.\ \begin{cases} (R.S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z \notin \mathfrak{L}(F_i), W \in \mathfrak{L}(F_i) \\ (R.S)(Z,W;X,Y)\neq 0 & si Z \notin \mathfrak{L}(F_i), W \in \mathfrak{L}(F_j) \\ (R.S)(Z,W;X,Y)\neq 0 & si Z \notin \mathfrak{L}(F_j), W \in \mathfrak{L}(F_i) \\ (R.S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z \notin \mathfrak{L}(F_j), W \in \mathfrak{L}(F_j) \end{cases}$$

Proposition 4.6.4. *Soit* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ *le produit tordu multiple de métrique* $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1} \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$*. Soient* $X \in \mathfrak{L}(B), Y \in \mathfrak{L}(F_i)$ *avec* $i \in \{1,\ldots,m\}$ *et* $Z, W \in \mathfrak{L}(M)$*. Alors*

1. $(R.S)(Z,W;X,Y)=0$ *si* $Z \in \mathfrak{L}(B), W \in \mathfrak{L}(B)$

$$2.\ \begin{cases} (R.S)(Z,W;X,Y)\neq 0 & si Z \in \mathfrak{L}(B), W \in \mathfrak{L}(B) \\ (R.S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_i), W \in \mathfrak{L}(F_j), i\neq j \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} (R.S)(Z,W;X,Y)\neq 0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_i), W \in \mathfrak{L}(B) \\ (R.S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_j), W \in \mathfrak{L}(B) \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} (R.S)(Z,W;X,Y)\neq 0 & si Z, W \in \mathfrak{L}(F_i) \\ (R.S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_i), W \in \mathfrak{L}(F_j), i\neq j \\ (R.S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_j), W \in \mathfrak{L}(F_i), i\neq j \\ (R.S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z \in \mathfrak{L}(F_j), W \in \mathfrak{L}(F_j) \end{cases}$$

Proposition 4.6.5. *Soit* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ *le produit tordu multiple de métrique* $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1} \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$*. Soient* $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Z, W \in \mathfrak{L}(M)$*. Alors*

1. $Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $W \in \mathfrak{L}(B)$

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = Q(g_B,S_B)(Z,W;X,Y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{b_i} Q(g_B, H_B^{b_i})(Z,W;X,Y)$$

2. $Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0$ *si* $Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $W \notin \mathfrak{L}(B)$

3. $Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0$ *si* $Z\notin\mathfrak{L}(B)$ *et* $W\in\mathfrak{L}(B)$
4. $Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0$ *si* $Z\notin\mathfrak{L}(B)$ *et* $W\notin\mathfrak{L}(B)$

Proposition 4.6.6. *Soit* $M=B\times_{b_1}F_1\times\ldots\times_{b_m}F_m$ *le produit tordu multiple de métrique* $g=g_B\oplus b_1^2g_{F_1}\oplus\ldots\oplus b_m^2g_{F_m}$. *Soient* $X,Y\in\mathfrak{L}(F_i)$, $i\in\{1,\ldots,m\}$ *et* $Z,W\in\mathfrak{L}(M)$. *Alors*

1. $Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0$ *si* $Z\in\mathfrak{L}(B)$ *et* $W\in\mathfrak{L}(B)$

2. $$\begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(B) et W\in\mathfrak{L}(F_i)\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(B) et W\in\mathfrak{L}(F_j)\end{cases}$$

3. $$\begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(F_i) et W\in\mathfrak{L}(B)\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(F_j) et W\in\mathfrak{L}(B)\end{cases}$$

4. $$\begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=b_i^2Q(g_{F_i},S_{F_i})(Z,W;X,Y) & si Z\in\mathfrak{L}(F_i) et W\in\mathfrak{L}(F_i)\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(F_i) et W\in\mathfrak{L}(F_j), i\neq j\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(F_j) et W\in\mathfrak{L}(F_i), i\neq j\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(F_j) et W\in\mathfrak{L}(F_j)\end{cases}$$

Proposition 4.6.7. *Soit* $M=B\times_{b_1}F_1\times\ldots\times_{b_m}F_m$ *le produit tordu multiple de métrique* $g=g_B\oplus b_1^2g_{F_1}\oplus\ldots\oplus b_m^2g_{F_m}$. *Soient* $X\in\mathfrak{L}(F_i)$, $Y\in\mathfrak{L}(F_j)$ *avec* $i\neq j$ *et* $Z,W\in\mathfrak{L}(M)$. *Alors*

1. $Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0$ $Z\in\mathfrak{L}(B)$ *et* $Z\in\mathfrak{L}(B)$

2. $$\begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(B) et W\in\mathfrak{L}(F_i)\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(B) et W\in\mathfrak{L}(F_j)\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(B) et W\in\mathfrak{L}(F_k)\end{cases}$$

3. $$\begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(F_i) et W\in\mathfrak{L}(B)\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(F_j) et W\in\mathfrak{L}(B)\\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & si Z\in\mathfrak{L}(F_k) et W\in\mathfrak{L}(B)\end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & siZ\in\mathfrak{L}(F_i)etW\in\mathfrak{L}(F_i) \\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=-g(Z,X)S(Y,W)+g(W,Y)S(Z,X) & siZ\in\mathfrak{L}(F_i)etW\in\mathfrak{L}(F_j) \\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=g(Z,Y)S(X,W)-g(W,X)S(Z,Y) & siZ\in\mathfrak{L}(F_j)etW\in\mathfrak{L}(F_i) \\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & siZ\in\mathfrak{L}(F_j)etW\in\mathfrak{L}(F_j) \end{cases}$$

Proposition 4.6.8. *Soit $M=B\times_{b_1}F_1\times\ldots\times_{b_m}F_m$ le produit tordu multiple de métrique $g=g_B\oplus b_1^2g_{F_1}\oplus\ldots\oplus b_m^2g_{F_m}$. Soient $X\in\mathfrak{L}(B)$, $Y\in\mathfrak{L}(F_i)$ avec $i\in\{1,\ldots,m\}$ et $Z,W\in\mathfrak{L}(M)$. Alors*

1. $Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0\ Z\in\mathfrak{L}(B)$ *et* $Z\in\mathfrak{L}(B)$

$$2.\ \begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=-g(Z,X)S(Y,W)+g(W,Y)S(Z,X) & siZ\in\mathfrak{L}(B)etW\in\mathfrak{L}(F_i) \\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & siZ\in\mathfrak{L}(B)etW\in\mathfrak{L}(F_j), \\ & i\neq j \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=g(Z,Y)S(X,W)-g(W,X)S(Z,Y) & siZ\in\mathfrak{L}(F_i)etW\in\mathfrak{L}(B) \\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & siZ\in\mathfrak{L}(F_j)etW\in\mathfrak{L}(B) \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & siZ,W\in\mathfrak{L}(F_i) \\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & siZ\in\mathfrak{L}(F_i)etW\in\mathfrak{L}(F_j), i\neq j \\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & siZ\in\mathfrak{L}(F_j)etW\in\mathfrak{L}(F_i), i\neq j \\ Q(g,S)(Z,W;X,Y)=0 & siZ\in\mathfrak{L}(F_j)etW\in\mathfrak{L}(F_j) \end{cases}$$

Proposition 4.6.9. *Soit $M=B\times_{b_1}F_1\times\ldots\times_{b_m}F_m$ le produit tordu multiple de métrique $g=g_B\oplus b_1^2g_{F_1}\oplus\ldots\oplus b_m^2g_{F_m}$. Soient $X,Y,Z,W\in\mathfrak{L}(M)$. Alors*

1.

$$(R.S)(Z,W;X,Y)=(R_{F_i},S_{F_i})(Z,W;X,Y)-\|Grad_B(b_i)\|_B^2Q(g_{F_i},S_{F_i})(Z,W;X,Y) \tag{4.2}$$

si $X,Y,Z,W\in\mathfrak{L}(F_I)$

2.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -g(X,Z)\tfrac{g_B(Grad_B(b_i),Grad_B(b_j))}{b_ib_j}S(Y,W)\\ &\quad -g(Y,W)\tfrac{g_B(Grad_B(b_i),Grad_B(b_j))}{b_ib_j}S(Z,X)\end{aligned} \tag{4.3}$$

si $X, Z \in \mathfrak{L}(F_i)$ *et* $Y, W \in \mathfrak{L}(F_j)$

3.

$$(R.S)(Z,W;X,Y) = -\frac{H_B^{b_i}(X,Z)}{b_i}S(Y,W) - \frac{g(Y,W)}{b_i}S(Z,\nabla_X^B(Grad_B(b_i))) \tag{4.4}$$

si $X, Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Y, W \in \mathfrak{L}(F_i)$

4.

$$(R.S)(Z,W;X,Y) = -\frac{g(Y,Z)}{b_i}S(Grad_B(b_i),W) - \frac{g(Y,W)}{b_i}S(Z,\nabla_X^B(Grad_B(b_i))) \tag{4.5}$$

si $X \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Y, Z, W \in \mathfrak{L}(F_i)$

Proposition 4.6.10. *Soit* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \ldots \times_{b_m} F_m$ *le produit tordu multiple de métrique* $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1} \oplus \ldots \oplus b_m^2 g_{F_m}$. *Soient* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(M)$. *Alors*

1.

$$\begin{aligned}Q(g,S)(Z,W;X,Y) &= Q(g_B,S_B)(Z,W;X,Y)\\ &\quad -\textstyle\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{b_i}Q(g_B,H_B^{b_i})(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.6}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(B)$

2.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = b_i^2 Q(g_{F_i},S_{F_i})(Z,W;X,Y) \tag{4.7}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(F_i)$

3.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = -g(Z,X)S(Y,W) - g(W,Y)S(Z,X) \tag{4.8}$$

si $X, Z \in \mathfrak{L}(F_i)$ *et* $Y, W \in \mathfrak{L}(F_j)$, $i \neq j$

4.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = -g(Z,X)S(Y,W) - g(W,Y)S(Z,X) \tag{4.9}$$

si $X, Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Y, W \in \mathfrak{L}(F_i)$

Exemple 4.6.1. *Si* $M = B \times_{b_1} F_1$ *est un produit tordu simple muni de la métrique* $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1}$. *Alors*

1.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= (R_B, S_B)(Z,W;X,Y) \\ &-\tfrac{s_1}{b_1}(R_B.H_B^{b_1})(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.10}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(B)$

2.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= (R_{F_1}, S_{F_1})(Z,W;X,Y) \\ &-\|Grad_B(b_1)\|_B^2 - Q(g_{F_1}, S_{F_1})(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.11}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(F_1)$

1.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -\tfrac{H_B^{b_1}(X,Z)}{b_1} S(Y,W) \\ &-\tfrac{g(Y,W)}{b_1} S(Z, \nabla_X^B(Grad_B(b_1)))\end{aligned} \tag{4.12}$$

si $X, Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Y, W \in \mathfrak{L}(F_1$

2.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -\tfrac{g(Y,Z)}{b_1} S(Grad_B(b_1), W) \\ &-\tfrac{g(Y,W)}{b_1} S(Z, \nabla_X^B(Grad_B(b_1)))\end{aligned} \tag{4.13}$$

si $X \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Z, Y, W \in \mathfrak{L}(F_1)$

3.

$$\begin{aligned} Q(g,S)(Z,W;X,Y) &= Q(g_B,S_B)(Z,W;X,Y) \\ &-\tfrac{s_1}{b_1}Q(g_B,H_B^{b_1})(Z,W;X,Y) \end{aligned} \tag{4.14}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(B)$

4.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = b_1^2 Q(g_{F_1},S_{F_1})(Z,W;X,Y) \tag{4.15}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(F_1)$

5.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = -g(Z,X)S(Y,W) - g(W,Y)S(Z,X) \tag{4.16}$$

si $X, Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Y, W \in \mathfrak{L}(F_1)$

Exemple 4.6.2. *Si* $M = B \times_{b_1} F_1 \times_{b_2} F_2$ *est un produit tordu double muni de la métrique* $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1} \oplus b_2^2 g_{F_2}$. *Alors*

1.

$$\begin{aligned} (R.S)(Z,W;X,Y) &= \{(R_B.S_B) - \tfrac{s_1}{b_1} \\ &(R_B.H_B^{b_1}) - \tfrac{s_2}{b_2}(R_B.H_B^{b2})\}(Z,W;X,Y) \end{aligned} \tag{4.17}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(B)$

2.

$$\begin{aligned} (R.S)(Z,W;X,Y) &= (R_{F_1}.S_{F_1})(Z,W;X,Y) \\ &-\|Grad_B(b_1)\|_B^2 Q(g_{F_1},S_{F_1})(Z,W;X,Y) \end{aligned} \tag{4.18}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(F_1)$

3.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= (R_{F_2}.S_{F_2})(Z,W;X,Y)\\ &-\|Grad_B(b_2)\|_B^2 Q(g_{F_2},S_{F_2})(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.19}$$

si $X,Y,Z,W \in \mathfrak{L}(F_1)$

4.

$$\begin{aligned}&(R.S)(Z,W;X,Y) = \tfrac{g_B(Grad(b_1),Grad(b_2))}{b_1 b_2}\\ &\{g(Y,W)S(Z,X) - g(X,Z)S(Y,W)\}\end{aligned} \tag{4.20}$$

si $X,Z \in \mathfrak{L}(F_1) et Y,W \in \mathfrak{L}(F_2)$

5.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -\tfrac{H_B^{b_1}(X,Z)}{b_1}S(Y,W)\\ &-\tfrac{g(Y,W)}{b_1}S(Z,\nabla_X Grad(b_1))\end{aligned} \tag{4.21}$$

si $X,Z \in \mathfrak{L}(B) et Y,W \in \mathfrak{L}(F_1)$

6.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -\tfrac{H_B^{b_2}(X,Z)}{b_2}S(Y,W)\\ &-\tfrac{g(Y,W)}{b_2}S(Z,\nabla_X Grad(b_2))\end{aligned} \tag{4.22}$$

si $X,Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Y,W \in \mathfrak{L}(F_2)$

7.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -\tfrac{g(Y,Z)}{b_1}S(\nabla_X Grad(b_1),W)\\ &-\tfrac{g(Y,W)}{b_1}S(Z,\nabla_X Grad(b_1))\end{aligned} \tag{4.23}$$

si $X \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Z,Y,W \in \mathfrak{L}(F_1)$

8.

$$\begin{aligned}(R.S)(Z,W;X,Y) &= -\tfrac{g(Y,Z)}{b_2}S(\nabla_X Grad(b_2),W)\\ &-\tfrac{g(Y,W)}{b_2}S(Z,\nabla_X Grad(b_2))\end{aligned} \tag{4.24}$$

si $X \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Z,Y,W \in \mathfrak{L}(F_2)$

9.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) \begin{aligned}[t] &= \{Q(g_B,S_B) - \tfrac{s_1}{b_1} \\ &Q(g_B,H_B^{b_1}) - \tfrac{s_2}{b_2}Q(g_B,H_B^{b_2})\}(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.25}$$

si $X,Y,Z,W \in \mathfrak{L}(B)$

10.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = b_1^2 Q(g_{F_1},S_{F_1})(Z,W;X,Y) \tag{4.26}$$

si $X,Y,Z,W \in \mathfrak{L}(F_1)$

11.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = b_2^2 Q(g_{F_2},S_{F_2})(Z,W;X,Y) \tag{4.27}$$

si $X,Y,Z,W \in \mathfrak{L}(F_2)$

12.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = -g(Z,X)S(Y,W) + g(W,Y)S(Z,X) \tag{4.28}$$

si $X,Z \in \mathfrak{L}(F_1) et Y,W \in \mathfrak{L}(F_2)$, $i \neq j$

13.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = -g(Z,X)S(Y,W) - g(W,Y)S(Z,X) \tag{4.29}$$

si $X,Z \in \mathfrak{L}(B) et Y,W \in \mathfrak{L}(F_1)$

14.

$$Q(g,S)(Z,W;X,Y) = -g(Z,X)S(Y,W) + g(W,Y)S(Z,X) \tag{4.30}$$

si $X,Z \in \mathfrak{L}(B) et Y,W \in \mathfrak{L}(F_2)$

Proposition 4.6.11. *Soit* $M = B \times_{b_1} F_1$ *le produit tordu simple muni de la métrique* $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1}$*. L'espace tordu* M *est Ricci pseudo-symétrique si seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1.

$$\begin{aligned}\{(R_B.S_B)-LQ(g_B,S_B)\}(Z,W;X,Y) &= \tfrac{s_1}{b_1}\{(R_B.H_B^{b_1})\\ &-LQ(g_B,H_B^{b1})\}(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.31}$$

si $X,Y,Z,W\in\mathfrak{L}(B)$

2.

$$\begin{aligned}(R_{F_1}.S_{F_1})(Z,W;X,Y) &= \{Lb_1^2+\|Grad_B(b_1)\|_B^2\}\\ &Q(g_{F_1},S_{F_1})(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.32}$$

si $X,Y,Z,W\in\mathfrak{L}(F_1)$

3.

$$\begin{aligned}\{-\tfrac{H_B^{b_1}(X,Z)}{b_1}+Lg(Z,X)\}S(Y,W) &= g(W,Y)\\ &\{\tfrac{1}{b_1}S(Z,\nabla_X Grad(b_1))+LS(Z,X)\}\end{aligned} \tag{4.33}$$

si $X,Z\in\mathfrak{L}(B)$ *et* $Y,W\in\mathfrak{L}(F_1)$

Proposition 4.6.12. *Soit* $M=B\times_{b_1}F_1$ *le produit tordu double muni de la métrique* $g=g_B\oplus b_1^2g_{F_1}\oplus b_2^2g_{F_2}$. *L'espace tordu* M *est Ricci pseudo-symétrique si seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1.

$$\begin{aligned}\{(R_B.S_B)-LQ(g_B,S_B)\}(Z,W;X,Y) &= \tfrac{s_1}{b_1}\\ &\{(R_B.H_B^{b_1})\\ &-LQ(g_B,H_B^{b1})\}(Z,W;X,Y)\\ &+\tfrac{s_2}{b_2}\{(R_B.H_B^{b_2})\\ &-LQ(g_B,H_B^{b2})\}(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.34}$$

si $X,Y,Z,W\in\mathfrak{L}(B)$

2.
$$\begin{aligned}(R_{F_1}.S_{F_1})(Z,W;X,Y) &= \{Lb_1^2 + \|Grad_B(b_1)\|_B^2\} \\ &Q(g_{F_1}, S_{F_1})(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.35}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(F_1)$

3.
$$\begin{aligned}(R_{F_1}.S_{F_1})(Z,W;X,Y) &= \{Lb_2^2 + \|Grad_B(b_2)\|_B^2\} \\ &Q(g_{F_2}, S_{F_2})(Z,W;X,Y)\end{aligned} \tag{4.36}$$

si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{L}(F_2)$

4.
$$\begin{aligned}\{-\tfrac{H_B^{b_1}(X,Z)}{b_1} + Lg(Z,X)\}S(Y,W) &= g(W,Y) \\ &\{\tfrac{1}{b_1}S(Z,\nabla_X Grad(b_1)) + LS(Z,X)\}\end{aligned} \tag{4.37}$$

si $X, Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Y, W \in \mathfrak{L}(F_1)$

5.
$$\begin{aligned}\{-\tfrac{H_B^{b_2}(X,Z)}{b_2} + Lg(Z,X)\}S(Y,W) &= g(W,Y) \\ &\{\tfrac{2}{b_2}S(Z,\nabla_X Grad(b_2)) + LS(Z,X)\}\end{aligned} \tag{4.38}$$

si $X, Z \in \mathfrak{L}(B)$ *et* $Y, W \in \mathfrak{L}(F_2)$

Conclusion et perspective

Dans ce mémoire nous avons exhiber des conditions de pseudo symétrie d'une variété produit tordu double.

Dans le futur on cherche la possibilité d'étendre d'étude de la pseudo symétrie à d'autres variétés tordu en utilisant d'autres techniques de calculs.

Bibliographie

[1] A.Hasni, Les geometries de Thurston et la pseudo symétrie d'aprés P.Deszcz, Université Abou Bakr Bakaid, Tlemcen, Algeria,2004.

[2] A.Hasni, Les Geometries de Thurston et la pseudo symétrie d'aprés R.Deszcz, Université Abou Bakaid, Tlemcen, Algeria., 2014.

[3] Arthur.L.Besse, Einstein manifolds, Springer 2008.

[4] B.Y.Chen,Geometry of warped products as Riemanniann submanifolds and related problems, Soochow J.Math.28(2002),125-156.

[5] B.Ünal, Doubly warped products, Dif. Geom. and its Application, 15(2001),253-263

[6] B.Jahanara, Symmetries in Riemannian geometry, Ph.D Thesis, Katholieke Universiteit Leuven,2008 ;

[7] Chen, B.Y., Geometry of submanifolds and its applications, science University of Tokyo,1981

[8] D.E.Blair, J.A.Oubiña, Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds, Publ. Mat.34(1),199-207(1990).

[9] E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris,1963.

[10] Fernando Dobarro and Blent nal : Curvature of multiply warped products, Journal of Geometry and Physics 55(2005),75-106.

[11] H. Levy, Tensors determined by hypersurface in Riemannian space, Trans.Am.Math.Sco ; 28 (1926),671-694.

[12] J.A.Schouten, Die direkte Analysis zur neuren Relativitätstheorie, Die direkte Analysis zur neueren Relativit atstheorie, Verhan. Konink. Akad.Wet. Amsterdam, 12 (1918), no.6, 1-95.

[13] M.P.do Carmo, Riemannian Geometry, Boston, MA : Birkhauser, 1993

[14] M.Belkhelfa, R.Deszcz and L.Verstraelen, Symmetry Properties of 3-dimentional D'Atri Spaces, Kyungpook Math. J 24(2006), 367-276.

[15] M.Belkhelfa, Differential geometry of semi-Riemannian manifolds and submanifolds, Ph.D Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2001 ;

[16] M, Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne Et L'analyse Harmonique sur les variétés (Master-Doctorat) centre Universitaire de Relizane (2013).

[17] Ponge R., Reckziegel, H., Twisted products is pseudo-Riemannian geometry, Geom. Dedicata 48(1993),15-25.

[18] R.L.Bishopet B.ONeill, Manifolds of negative curvature, Trans.A.M.S, 145(1969),1-49.

[19] R.Deszcz, On pseudo-symmetric spaces, Bull. Soc.Math.Belg,44(1992),1-34.

[20] R.Deszcz and W.Grycak, On manifolds satisfying some curvature conditions, Colloq.Math., 57(1989),89-92.

[21] R.Ponge, et H. Reckziegel, Twisted products in pseudo-Riemannian geometry. Geom.Dedicata 48(1)(1993), 1525.

[22] R.Deszcz, Examples of four-dimensional Riemannian manifolds satisfying some pseudosymmetriy curvature conditions, Geometry and Topology of Submanifolds, II, World Scientific, Singapore, (1990), 134-143.

[23] S.Kobayashi and K.Nomizu, Foundation of differenial geometry, Vol. l, lnterscience Publishers 1963.

[24] S.Haesen, L. Verstraelen, Properties of scalar curvature invariant depending on two planes, manuscripta math ; 122 (2007),59-72.

[25] T.J.Willmore, Riemannian Geometry, Oxford University press, 2002 ;

[26] T.J.Willmore, Riemannian geometry, The Claredon Pess New York, Oxford : clarendon press 1993.

[27] T.Levi-Civita Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniann, Rend. Cir.Mat. Palermo 42 (1917), 173-205.

[28] Z.ISzabó, 1Structure theoremes on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y).R = 0$, I.The local Version, J.Diff.Geom. 17(1982), 531-582.

[29] Z.I.Szabó. Structure theoremson Riemannian spaces satisfying.$R(X,Y).R = 0$ but not $\nabla R = 0$, Thohoku Math.J.,24(1972),105-108.