



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université de Saida - Dr Moulay Tahar.  
Faculté des Sciences.  
Département de Mathématiques.



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : ASSPA

par

chamcedine zaoui<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Dr. M.KADI**

**Thème :**

## **Systeme de files d'attente avec dérobage adaptative**

Soutenue le 14/06/2022 devant le jury composé de

<b>Dr. N.AIT OUALI</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
<b>Dr. M.KADI</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
<b>Dr. L.YAHIAOUI</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examineur

Année univ. : 2021/2022

---

1. e-mail : chamcedinezaoui@gmail.com

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Processus stochastiques</b>	<b>8</b>
1.1	Introduction . . . . .	8
1.2	Définitions et propriétés de base . . . . .	8
1.3	Processus de comptage . . . . .	9
1.3.1	Processus à accroissements indépendants . . . . .	9
1.4	Processus de Poisson . . . . .	10
1.4.1	Loi de Poisson et loi exponentielle . . . . .	10
1.5	Processus de renouvellement . . . . .	14
1.6	Processus de naissance et de mort . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Système de files d'attente classiques</b>	<b>16</b>
2.1	Introduction . . . . .	16
2.2	File d'attente simple . . . . .	16
2.3	Notations et symboles . . . . .	17
2.3.1	Processus d'arrivé . . . . .	17
2.3.2	Processus de service . . . . .	17
2.3.3	Structure et discipline de la file . . . . .	18
2.3.4	Capacité de la file . . . . .	18
2.4	Notation de Kendall . . . . .	19
2.5	Loi de Little . . . . .	20
2.6	Différents types de files d'attente . . . . .	21
2.7	Mesure de performance d'une file d'attente . . . . .	21
2.8	Quelque Modèles de files d'attente . . . . .	22
2.8.1	Modèle de files d'attente $M/M/1$ . . . . .	22
2.8.2	Modèle de files d'attente $M/M/1/K$ . . . . .	24
2.8.3	Modèle de files d'attente $M/M/s$ . . . . .	26
2.8.4	Modèle de files d'attente $M/M/\infty$ . . . . .	29

---

<b>3</b>	<b>Systèmes de file d'attente avec dérobade adaptative</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Files d'attente $M/M/1$ avec dérobade . . . . .	32
3.3	Files d'attente $M/M/1$ avec dérobade adaptative . . . . .	33
3.3.1	Description du modèle . . . . .	33
3.3.2	Cas (i) : dérobade avec probabilité constante : . . . . .	35
3.3.3	Cas (ii) : dérobade adaptatif . . . . .	35
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

# Remerciement

Avant toute chose, je tiens à remercier Dieu le tout puissant.

Je tiens d'exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur de mémoire et mon professeur Monsieur : KADI Mokhtar de m'avoir encadré orienté aidé et conseillé, et aussi pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordé, sans oublier ses efforts fournis pendant cette période.

Je le remercie profondément pour sa disponibilité, ses orientations et ses remarques fructueuses. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mes sincères remerciements et ma gratitude vont aussi à **Dr. N.AIT OUALI**, d'avoir accepté à présider le jury de mon mémoire.

Je souhaite également remercier **Dr. L.YAHIAOUI**.

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents qui m'ont aidé pour arriver à ce que je suis aujourd'hui.

A mes frères MOHAMED et Khaled à qui je souhaite une longue vie pleine de bonheur et réussite.

A tous mes amis et mes camarades.

A tous mes chers profeseurs durant toutes mes années d'études.

# Introduction générale

Les évolutions récentes de l'environnement technologique dues à l'accroissement des besoins liés à l'industrialisation font des modèles de files d'attente l'un des outils indispensables dans la modélisation mathématique. En effet, une grande classe de modèles mathématiques provient de la théorie de files d'attente dont les bases présentées dans les ouvrages de L.Kleinrock s'ouvrent à de nombreuses applications. Depuis la première étude probabiliste réalisée en 1917 par l'ingénieur Danois Erlang pour modéliser le central téléphonique de Copenhague, la modélisation et l'évaluation des performances des systèmes complexes par les modèles de files d'attente n'ont cessé d'être un domaine de recherche d'un intérêt croissant. Quoique bon nombre de formules magnifiques furent élaborées et suggérées comme étant des solutions analytiques de certains types de problèmes, les travaux effectués dans le domaine des files d'attente restent jusque là limités en raison de l'inexploitabilité pratique de la plupart des résultats connus. La théorie est assez développée pour l'étude d'une file simple.

ce mémoire est composé de trois chapitres :

**Dans le premier chapitre**, nous présentons les notions de bases de l'étude des systèmes de files d'attente, à savoir les processus stochastiques :

- Processus de comptage,
- processus de renouvellement,
- processus de Poisson,
- processus de naissance et de mort.

**Dans le deuxième chapitre**, nous introduisons la terminologie de la théorie des files d'attente. Certaines définitions et notations qui sont nécessaires dans l'étude des systèmes de files d'attente comme (Notation de Kendall, la loi de Little,...etc ) sont notamment données. Ensuite nous étudions quelques modèles de files d'attente (  $M/M/1$ ,  $M/M/1/k$ ,  $M/M/s$ ,  $M/M/\infty$  ) et l'évaluation de leurs paramètres de performance.

**Dans le troisième chapitre** nous présentons une étude de certains modèles d'attente avec clients impatientes. Nous traitons le cas de files d'attente  $M/M/1$  avec dérobade, et files d'attente  $M/M/1$  avec dérobade adaptative.

# Chapitre 1

## Processus stochastiques

### 1.1 Introduction

Un processus stochastique est une suite de variable aléatoire indexée par  $\mathbb{T}$  à valeur dans un ensemble  $\mathbb{X}$  qui permet de décrire un phénomène aléatoire en fonction du temps. Dans ce chapitre on va présenter plusieurs processus stochastiques utiles pour modéliser des file d'attente. Parmi ces processus : le processus de Poisson qui est très important dans les phénomènes de comptage puis le processus de renouvellement, le troisième celui de naissance et mort qui permet de modéliser une évaluation populaire au cours du temps et on termine par le processus de comptage.

### 1.2 Définitions et propriétés de base

**Définition 1.2.1.** *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires  $X(t)_{t \in \mathbb{T}}$  ou chaque variable aléatoire  $X(t)$  est indexée par le paramètre  $t \in \mathbb{T}$ , si  $T$  est un ensemble de  $\mathbb{R}_+$ , alors  $t$  signifie temps.*

*Généralement  $X(t)$  représente l'état du processus stochastique au temps  $t$  [30].*

- Si  $\mathbb{T}$  est dans  $[0; \infty)$  alors le processus stochastique est dit un processus à temps continu.
- Si  $\mathbb{T}$  est dénombrable, i.e.  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$  alors nous disons que  $X(t)_{t \in \mathbb{T}}$  est un processus à temps discret.

*Avec  $X(t)$  représente l'état du processus stochastique au temps  $t$ .*

**Remarque 1.2.1.** *l'ensemble  $\mathbb{T}$  est muni d'une relation d'ordre  $\leq$ , qui de plus est totale : étant donné  $(s, t) \in \mathbb{T}^2$  on a  $s \leq t$  ou  $t \leq s$ . On peut aussi considérer des processus sur un horizon de temps fini*

- dans le cas discret, on considère  $\mathbb{T} = \{0, \dots, N\}$ , pour un certain instant final  $N$

— dans le cas continu, on pose  $\mathbb{T} = [0, T]$ .

## 1.3 Processus de comptage

### Définition 1.3.1. (*processus de comptage*)

Soit  $N(t)$  un processus stochastique est si  $N(t)$  représente le nombre total des événements qui sont arrivés avant l'instant  $t$ , on dit que  $N(t)$  est un processus de comptage discret à temps continu. Tout processus de comptage vérifie les propriétés suivantes :

1. le nombre  $N(t)$  est à valeurs entières positives, Pour tout  $t \geq 0$ ,
2. la fonction  $t \mapsto N(t)$  est croissante,
3. la différence  $N(t) - N(s)$  représente le nombre d'évènement se produisant dans l'intervalle de temps  $]s, t]$ , pour tout couple  $(s, t)$  ( $0 < s < t$ ), le processus des temps d'inter-arrivées  $\{W_n, n \in N_0\}$  ou  $\forall n \in N_0$  la variable aléatoire  $W_n$  est le temps d'attente entre les  $(n - 1)$  ième,  $n$  ième occurrences, [29] est un processus peut être associé au processus des temps d'occurrence c.à.d :

$$W_n = T_n - T_{n-1}$$

avec  $T_n$  est le temps d'arrivé du  $n$  ième client.

**Démonstration :** on a  $W_n = T_n - T_{n-1}$

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + \dots + W_n &= T_1 - T_0 + T_2 - T_1 + T_3 - T_2 + \dots + T_{n-1} - T_{n-2} + T_n - T_{n-1} \\ &= T_0 + T_n \\ &= T_n \quad \text{car } T_0 = 0 \end{aligned}$$

### 1.3.1 Processus à accroissements indépendants

#### Définition 1.3.2. (*processus à accroissements indépendants*)

un processus stochastique est dit un processus à accroissements indépendants s'il vérifie la propriété :

—  $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0, N_{t+s} - N_t$  est indépendante de  $N_u, \forall u \leq t$

Un processus à accroissements stationnaires est un processus stochastique qui vérifie la propriété :

— La loi de  $N_{t+s} - N_s$  ne dépend pas de  $u \forall u \leq t$

## 1.4 Processus de Poisson

Le processus de Poisson sert à modéliser l'occurrence d'évènements successifs. Chaque évènement est tel que dans un intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$  avec  $\Delta t$  petit

Il peut servir à modéliser par exemple :

- les appels téléphoniques arrivant dans une centrale,
- les temps d'arrivée de clients à une caisse,
- passage d'un autobus,
- arrivée d'un client à un guichet. [17]

### Définition 1.4.1. (*processus de Poisson*)

Un processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$  tel que  $N_0 = 0$  est dit processus de Poisson si

- \*  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est stationnaire,
- \*  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un processus à accroissements indépendants stationnaire ,
- \* il existe  $\lambda > 0$  tel que, pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $N_t$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ . [13]

### 1.4.1 Loi de Poisson et loi exponentielle

#### Définition 1.4.2. (*loi de Poisson*)

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\mu > 0$  si la probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

avec  $\mu$  le paramètre de la loi

#### Propriété 1.4.1.1. Soit $X$ une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$

- \* La fonction génératrice des moments est

$$\varphi(t) = \mathbb{E} [e^{tX}] = e^{\mu(e^t-1)}$$

- \* La moyenne et la variance sont

$$\mathbb{E}[X] = \mu \quad \text{Var}(X) = \mu$$

preuve :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \\ &= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^k}{k!} \\ &= e^{-\mu} e^{\mu e^t} \end{aligned}$$

calculons les dérivées de la fonction génératrice

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \mu e^t e^{\mu(e^t-1)} \\ \varphi''(t) &= (1 + \mu e^t) \mu e^{\mu(e^t-1)}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \varphi'(0) = \mu \\ \text{Var}(X) &= \varphi''(0) - \mathbb{E}[X]^2 = \mu\end{aligned}$$

**Définition 1.4.3. (loi exponentielle)**

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi de exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  à valeurs positives de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$$

**Propriété 1.4.1.2.** La loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est notée  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

- Sa fonction de répartition est : 
$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

- Sa fonction génératrice des moments est : 
$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \infty & \text{si } t \geq \lambda \\ \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{si } t < \lambda \end{cases}$$

- Sa moyenne et sa variance sont  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$      $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

**preuve**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$

\*  $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 0$  si  $t < 0$  car  $X$  est une variable positive et si  $t \geq 0$  on a

$$\begin{aligned}F(t) &= \int_0^t f_X(x) dx \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

\* Sa fonction génératrice des moments vérifie

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \mathbb{E} [e^{tX}] \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{tx} e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)x} dx \\
&= \left[ \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

\* D'où le résultat. Calculons les dérivées de la fonction génératrice, on a

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \quad \varphi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

d'où

$$\mathbb{E}[X] = \varphi'(0) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \varphi''(0) - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

#### 1.4.1.1 Relation entre les distributions Exponentielle et Poisson

On a la densité de la loi exponentielle  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  Supposons  $\tau$  est exponentielle d'une espérance  $\frac{1}{\lambda}$  avec  $n$  est de Poisson de moyenne  $\mu$  on a :

$$\begin{aligned}
P(\tau > t) &= 1 - F(t) \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= P(n = 0 \text{ en } t) \\
&= P(0, t)
\end{aligned}$$

on note  $P(n, t)$  la probabilité d'avoir  $n$  unité dans le temps  $t$ .

$$P(0, t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(1, t) = \int_{\tau=0}^t P(0, \tau) f(1 - \tau) d\tau = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$P(2, t) = \int_{\tau=0}^t P(1, \tau) f(1 - \tau) d\tau = (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} / 2!$$

.

.

.

$$P(n, t) = \int_{\tau=0}^t P(n-1, \tau) f(1 - \tau) d\tau = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!$$

### 1.4.1.2 Propriété sans mémoire de la distribution exponentielle

Une variable aléatoire  $X$  est dite sans mémoire (ou sans usure) si :

$$\forall x, y \geq 0$$

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x)$$

Si  $X$  modélise la durée de vie d'un individu  $A$ , la propriété que  $X$  est sans mémoire exprime que  $A$  ne vieillit pas

si  $A$  a vécu  $y$  années, la probabilité pour qu'il vive encore  $x$  années est la même que la probabilité pour qu'un individu similaire à  $A$  qui vient de naître vive lui aussi  $x$  années.

On prouve qu'une variable aléatoire  $X$  positive absolument continue est sans mémoire si elle suit une loi exponentielle.

### 1.4.1.3 L'utilisation de la loi de poisson et exponentielle

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure : la probabilité que le phénomène dure au moins  $s + t$  heures sachant qu'il a déjà duré  $t$  heures sera la même que la probabilité de durer  $s$  heures à partir de sa mise en fonction initiale. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant  $t$  heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps  $t$ .

Un domaine privilégié de la loi exponentielle est le domaine de la radioactivité . Chaque atome radioactif possède une durée de vie qui suit une loi exponentielle. Le paramètre  $\lambda$  s'appelle alors la constante de désintégration.

- La durée de vie moyenne  $\frac{1}{\lambda}$  s'appelle le temps caractéristique.
- La loi des grands nombres permet de dire que la concentration d'atomes radioactifs va suivre la même loi. La médiane  $\frac{\ln(2)}{\lambda}$  correspond au temps  $T$  nécessaire pour que la population passe à 1/2 de sa population initiale et s'appelle la demi-vie ou période.

En théorie des probabilités et en statistiques, la loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne ou espérance connue, et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent.

Le domaine d'application de la loi de Poisson a été longtemps limité à celui des événements rares comme les suicides d'enfants, les arrivées de bateaux dans un port ou les accidents dus aux coups de pied de cheval dans les armées .

Mais depuis quelques décennies son champ d'application s'est considérablement élargi. Actuellement, on l'utilise beaucoup dans les télécommunications (pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné), la biologie (mutations dans l'expérience de Luria et Delbrück, nombre de potentiels d'actions émis par un neurone en neurosciences), la météorologie, la finance pour modéliser la probabilité de défaut d'un crédit, le Yield Management (American Airlines, Lufthansa pour estimer la demande de passagers), etc.

## 1.5 Processus de renouvellement

Les processus de Poisson et de renouvellement sont des processus aléatoires de comptage à temps continu qui conviennent la description des phénomènes dont les occurrences surviennent en des temps successifs aléatoires. Ils sont utiles à la modélisation des files d'attente apparaissant à l'entrée de services et dans les réseaux de communication, et permettent de résoudre des problèmes de maintenance.

### Définition 1.5.1. (*processus de renouvellement*)

*processus de renouvellement est un processus de comptage pour le quel les temps entre deux arrivés consécutives sont des variables aléatoires i.i.d. s'appelle processus de renouvellement. Les temps de renouvellement (ou les temps de la n-ième arrivée) sont :*

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_i, n = 0, 1, 2, \dots$$

avec  $a_i, i = 1, 2, \dots$  est le temps entre deux arrivées consecutives, on voit que le nombre d'arrivées avant le temps  $t$  est  $N_t$ , i.e. le processus

$$(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = \sup_k \{k : A_k \leq t\}$$

est un processus de comptage.

## 1.6 Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort sont des cas particuliers de processus de Markov en temps continu où les transitions d'état sont de deux types seulement : les «naissances» où l'état passe de  $n$  à  $n+1$  et les morts où l'état passe de  $n$  à  $n-1$ . Ces processus ont de nombreuses applications en dynamique des populations et dans la théorie des files

d'attente.

On va modéliser ce processus de telle façon que :

- Le processus est spécifié par les taux de naissance  $(\lambda_n)_{n=0\dots\infty}$  et les taux de mortalité  $(\mu_n)_{n=0\dots\infty}$ .
- Il existe une transition vers un état voisin, soit par l'arrivée ou le départ d'un client d'un client (naissance ou mort) On suppose que  $\mu_0 = 0$ .

Si  $\pi_n(t)$  est la probabilité de trouver le système dans l'état  $n$  avec  $(n = 0, 1, 2, \dots)$  à l'instant  $t$ , alors l'équation de Kolmogorov s'écrit, pour  $n > 0$

$$\pi_n(t + dt) = (1 - (\lambda_n + \mu_n) dt) \pi_n(t) + \mu_{n+1} \pi_{n+1}(t) dt + \lambda_{n-1} \pi_{n-1}(t) dt + o(dt)$$

On va tendre  $dt$  vers 0, pour  $n > 0$  :

$$\frac{d}{dt} \pi_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n) \pi_n(t) + \mu_{n+1} \pi_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} \pi_{n-1}(t)$$

on obtient pour  $n = 0$  .

$$\frac{d}{dt} \pi_0(t) = -\lambda_0 \pi_0(t) + \mu_1 \pi_1(t).$$

Un cas particulier du processus de naissance et de mort c'est Le processus de Poisson avec  $\mu_n = 0$  et  $\lambda_n = \lambda$  dans ce cas on trouve pas un régime stationnaire [8].

les équations différentielles s'écrivent alors :

$$\pi_0(t) = e^{-\lambda t} \quad \frac{d}{dt} \pi_0(t) = -\lambda_0 \pi_0(t), \quad \frac{d}{dt} \pi_n(t) = -\lambda (\pi_n(t) - \pi_{n-1}(t))$$

la solution est  $\pi_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

# Chapitre 2

## Systeme de files d'attente classiques

### 2.1 Introduction

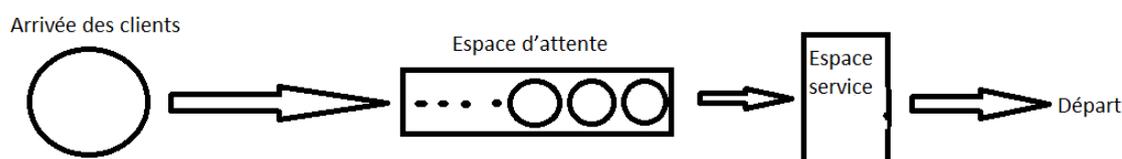
Les files d'attente ont été intégrés dans la modélisation des systèmes informatiques et aux réseaux de communication. Cette intégration dans ces domaines et d'autres a permis une évolution de cette théorie surtout dans l'évaluation des paramètres de performances. Actuellement ce sont les applications dans le domaine de l'analyse de performance des réseaux (téléphone mobile, Internet, multimédia, . . . ) qui suscitent le plus de travaux. L'étude d'un système de files d'attente consiste à calculer ces paramètres de performance afin d'évaluer son rendement, et améliorer son fonctionnement (minimiser le temps d'attente et le temps d'inactivité de l'installation).

### 2.2 File d'attente simple

Une file d'attente simple (ou station) est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. Les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station.[7]

Afin de spécifier complètement une file simple, on doit caractériser :

- le processus d'arrivée des clients,
- le temps de service,
- la structure et la discipline de service de la file d'attente.



le système de file d'attente.

## 2.3 Notations et symboles

$\lambda$  : le nombre moyen d'arrivées ; (taux d'arrivée).

$\frac{1}{\lambda}$  : temps moyen séparant deux arrivées consécutives.

$\mu$  : le nombre moyen de clients servis (taux de service).

$\frac{1}{\mu}$  : la durée moyenne de service (un client).

$\bar{N} = \mathbb{E}(N)$  : nombre moyen de clients dans le système.

$\bar{N}_S$  : nombre moyen de clients en train d'être servis.

$\bar{N}_Q$  : nombre moyen de clients dans la file d'attente.  $N_Q, N_S$  et  $N$  sont les v.a correspondantes.

$\bar{T}$  : temps moyen qu'un client passe dans le système.

$\bar{T}_S$  : temps moyen de service.

$\bar{T}_Q$  : temps moyen d'attente d'un client dans la file.  $T_Q, T_S$  et  $T$  sont les v.a. correspondantes. [4]

### 2.3.1 Processus d'arrivé

L'arrivée des clients à la station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$ .

Si  $A_n$  désigne la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du  $n^{\text{ième}}$  client dans le système, on aura ainsi :  $A_0 = 0$  et  $A_n = \inf \{t; N_t = n\}$ .

Si  $T_n$  désigne la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du  $(n-1)^{\text{ième}}$  et du  $n^{\text{ième}}$  client [21], on a alors :

$$T_n = A_n - A_{n-1}.$$

### 2.3.2 Processus de service

Considérons tout d'abord une file d'attente à serveur unique. On note  $D_n$  la variable aléatoire mesurant l'instant de départ du  $n^{\text{ième}}$  client du système et  $Y_n$  la variable aléatoire mesurant le temps de service du  $n^{\text{ième}}$  client (le temps séparant le début et la fin du

service). Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, [23] mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut en effet qu'un client qui quitte la station laisse celle-ci vide. Le serveur est alors inoccupé jusqu'à l'arrivée du prochain client.

### 2.3.3 Structure et discipline de la file

#### 2.3.3.1 Nombre de serveurs :

Une station peut disposer de plusieurs serveurs en parallèle. Soit  $C$  le nombre de serveurs.

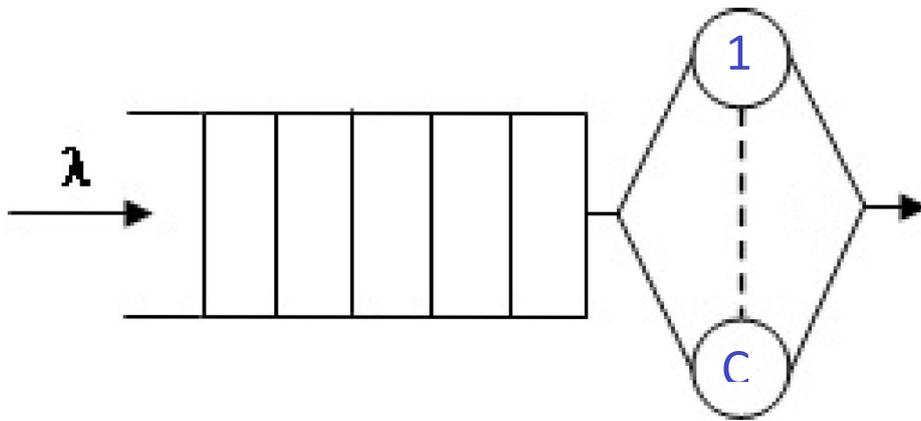


FIGURE 2.1 – file d'attente avec un seul espace d'attente et  $C$  serveur.

Dès qu'un client arrive à la station, soit il y a un serveur libre, le client entre instantanément en service, soit tous les serveurs sont occupés et le client se place dans la file en attente de libération d'un des serveurs. Mais en suppose à la plupart du temps que les serveurs sont identiques et indépendants les uns des autres. Une station particulière est la station IS (infinité servers) dans la quelle le nombre de serveurs est infini. Donc cette station ne comporte pas de file d'attente.

### 2.3.4 Capacité de la file

La capacité de la file d'attente à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit  $N$  la capacité de la file, une file à capacité illimitée vérifie  $N = \infty$ .

## 2.4 Notation de Kendall

La notation suivante, appelée la notation de Kendall [10], est largement utilisée pour classer les différents systèmes de files d'attente :

$$T/Y/C/H/m/Z$$

1.  $T$  : indique le processus d'arrivée des clients. Les codes utilisés sont :
  - $M$  ( Markov ) : inter-arrivées des clients sont indépendamment, identiquement distribuées selon une loi exponentielle. Il correspond à un processus de Poisson ponctuel (propriété sans mémoire),
  - $D$  ( Répartition déterministe ) : les temps inter-arrivées des clients ou les temps de service sont constants et toujours les mêmes,
  - $GI$  ( général indépendant ) : Les inter-arrivées des clients ont une distribution générale ( il n'y a aucune hypothèse sur la distribution mais les interarrivées sont indépendantes et identiquement distribuées),
  - $G$  ( général ) : Inter-arrivées de clients ont une distribution générale et peuvent être dépendantes,
  - $E_k$  : Ce symbole désigne un processus où les intervalles de temps entre deux arrivées successives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi d'Erlang d'ordre  $k$ .
2.  $Y$  : décrit la distribution des temps de service d'un client. les codes sont les mêmes que  $A$ ,
3.  $C$  : nombre de serveurs,
4.  $H$  : capacité de la file (c'est le nombre de places dans le système en d'autre terme c'est le nombre maximal de clients permis dans le système y compris ceux en service),
5.  $m$  : population des usagers,
6.  $z$  : discipline de service ( c'est la façon dont les clients sont ordonnés pour être servi.

### Discipline de service :

- FIFO (first in, first out) ou FCFS (first come first served) : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que dans la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui,
- LIFO (last in, first out) ou LCFS (last come, first served). Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité (retiré

de la pile). A nouveau, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file monoserveur

- SIRO (Served In Random Order), les clients sont servis aléatoirement.
- PNP (Priority service), les clients sont servis selon leur priorité. Tous les clients de la plus haute priorité sont servis premiers, puis les clients de priorité inférieure sont servis, et ainsi de suite.
- PS ( Processor Sharing ), les clients sont servis de manière égale. La capacité du système est partagée entre les clients.

**Remarque :** Dans sa version courte, seuls les trois premiers symboles A/Y/C sont utilisés. dans un tel cas, on suppose que la file est régie par une discipline FIFO et que le nombre de places d'attente ainsi que celui des clients susceptibles d'accéder au système sont illimités.

## 2.5 Loi de Little

La loi de Little est une relation très générale qui s'applique à une grande classe de systèmes. Elle ne concerne que le régime permanent du système. Aucune hypothèse sur les variables aléatoires qui caractérisent le système (temps d'inter-arrivées, temps de service,...etc). La seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable. Le débit du système est alors indifféremment soit le débit d'entrée, soit le débit de sortie :

$$d_s = d_e = d.$$

La loi de Little s'exprime telle que dans la propriété suivante.

**Théorème 2.5.1. (Formule de Little) :** *Le nombre moyen de clients , le temps moyen passé dans le système et le débit moyen d'un système stable en régime permanent se relient de la façon suivante :*

$$\bar{N} = \lambda_e \bar{T}$$

pour une file (M/M/1)  $\lambda_e = \lambda$ . On a vu que la loi de Little nous dit qu'il existe une relation entre le nombre moyen de clients dans la file d'attente (en attente ou en service) et le temps moyen total de séjour d'un client dans la file d'attente (temps d'attente + temps de service)

**Remarque 2.5.1.** *La loi de Little s'applique à tous les modèles de file d'attente rencontrés en pratique (pas seulement à la file M/M/1).*

## 2.6 Différents types de files d'attente

Les figures suivantes représentent les différents systèmes de files d'attente selon l'espace d'attente et l'espace de service :

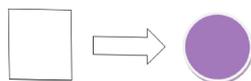


FIGURE 2.2 – file d'attente avec un seul espace d'attente et un seul serveur.

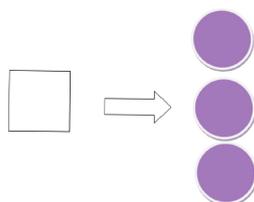


FIGURE 2.3 – file d'attente avec un seul espace d'attente et plusieurs serveurs.

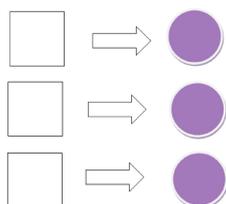


FIGURE 2.4 – file d'attente avec plusieurs espaces d'attente et plusieurs serveurs.

## 2.7 Mesure de performance d'une file d'attente

Le but d'étudier une file d'attente ou un réseau de files d'attente c'est d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données, et les mesures les plus fréquemment, de manière générale : si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté  $\lambda$ , est inférieur au nombre moyen de clients pouvant être servis par unité de temps alors la file est stable. Si chaque serveur peut traiter clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est  $c$ , une file est stable si et seulement si

$$\lambda < c\mu \Leftrightarrow \rho = \lambda/c\mu < 1$$

où,  $\rho$  est appelé l'intensité du trafic.

## 2.8 Quelques Modèles de files d'attente

### 2.8.1 Modèle de files d'attente $M/M/1$

la file d'attente  $M/M/1$  est un modèle caractérisé par des arrivées suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , temps de service exponentiel de paramètre  $\mu$  et un seul serveur. Les clients arrivent à la station selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , si le serveur est vide le client est pris en charge immédiatement sinon il rejoint la file d'attente (de capacité illimitée et discipline FIFO), les temps des inter-arrivées sont indépendants. Ces clients reçoivent le service selon une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$ . Ces temps de service sont également supposés indépendants [22]. En outre, toutes les variables aléatoires concernées sont censés être indépendants les uns des autres. Les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Cette file est un cas particulier du processus de naissance et de mort

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \forall n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

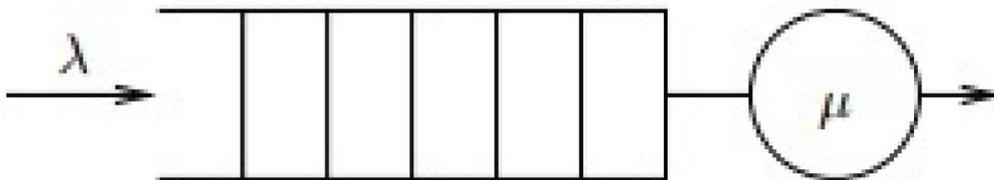


FIGURE 2.5 – La file d'attente  $M/M/1$

Les probabilités d'état  $\pi_n(t) = \mathbb{P}[N(t) = n]$  peuvent être calculées par les équations différentielles de Kolmogorov ci-dessous, connaissant les conditions initiales du processus.

$$\pi'_n(t) = -(\lambda + \mu)\pi_n(t) + \lambda\pi_{n-1}(t) + \mu\pi_{n+1}(t)$$

$$\text{et } \pi_0(t) = \lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t)$$

Sous l'hypothèse que  $\lambda < \mu$  (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service).  
On a :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Les probabilités d'état pour un régime stationnaire du processus est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi_n &= \pi_0 \rho^n \\ \pi_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho \end{aligned}$$

donc

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\pi_n = \{\pi_n\}_{n \geq 0}$  est appelé distribution stationnaire, elle suit une loi géométrique. (la probabilité stationnaire d'avoir  $n$  clients dans la file).

#### Caractéristiques du système :

— Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \mathbb{E}(N) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n \\ &= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n \end{aligned}$$

d'où :

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

— Nombre moyen de clients en train d'être servis :

$$\bar{N}_S = 1 - \pi_0 = \rho \tag{2.1}$$

— Le nombre moyen de clients dans la file :

$$\begin{aligned} \bar{N}_Q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)\pi_n \\ &= \frac{\rho^2}{1 - \rho} \end{aligned}$$

**Temps moyen de séjour  $\bar{T}$**  : Le temps moyen de séjour  $\bar{T}$  se calcule en utilisant la loi de Little :

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \bar{N}/\lambda \\ &= \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda}\end{aligned}$$

**Proposition :**

Soit  $0 < \lambda < \mu$  Dans le système  $M/M/1$  la variable aléatoire  $T$  égale à la durée de séjour des clients dans le système en régime stationnaire suit une loi exponentielle de paramètre :  $\mu(1 - \rho) = \mu - \lambda$

— **Temps moyen de service**

$$\bar{T}_S = 1/\mu \quad (2.2)$$

— **Démonstration : Temps moyen d'attente**[12]

$$\begin{aligned}\bar{T}_Q &= \bar{T} - \bar{T}_S \\ &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}\end{aligned}$$

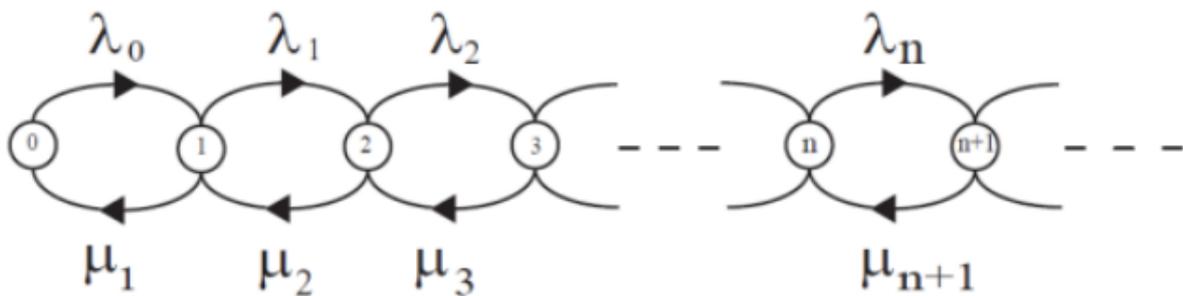


FIGURE 2.6 – Diagramme de transition de la file d'attente  $M/M/1$

## 2.8.2 Modèle de files d'attente $M/M/1/K$

Soit  $K$  la capacité de la file d'attente : c'est le nombre maximal de clients qui peuvent être présents dans le système, soit en attente, soit en service. Quand un client arrive alors qu'il y a déjà  $K$  clients présents dans le système, il est perdu. Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/1/K$ . L'espace d'états  $E$  est maintenant infini :  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  La

capacité de la file étant limitée, même si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que ce que le serveur de la file est capable de traiter, dès que celle-ci est pleine, les clients qui se présentent sont rejetés [26]. Le nombre de clients dans la file ne peut donc jamais tendre à l'infini. De plus, dès qu'un client est autorisé à entrer, il sortira un jour et son temps de séjour dans la file est fini, puisqu'il correspond au temps de service de tous les clients devant lui et que ce nombre est limité par  $K$ . Sur un temps très long, le débit de sortie sera donc bien égal au débit d'entrée, ce qui correspond bien à la stabilité inconditionnelle du système.

On définit le processus de naissance et de mort qui modélise ce type de file d'attente par :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } n < K; \\ 0, & \text{si } n > K; \end{cases}$$

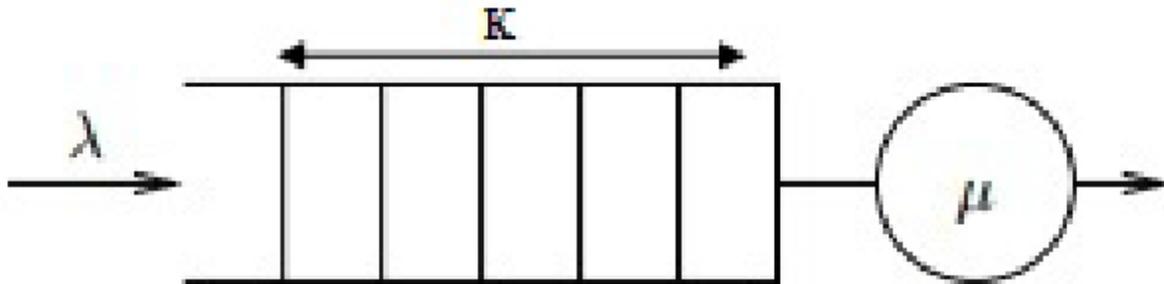


FIGURE 2.7 – La file  $M/M/1/K$

L'intégration de l'équation récurrente permettant de calculer  $\pi_n$  se fait alors comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_n &= \pi_0 \rho^n \quad \text{pour } n \leq K \\ \pi_n &= 0 \quad \text{pour } n > K \end{aligned}$$

et

$$\pi_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{n=0}^K \rho^n} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}, & \text{si } \lambda \neq \mu; \\ \frac{1}{K+1} & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

— Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \sum_{n=0}^K n\pi_n \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}\end{aligned}$$

Lorsque  $K$  tend vers l'infini et  $\rho < 1$ , c'est le cas de la file  $M/M/1$  :

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

— Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\begin{aligned}\bar{N}_Q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n \\ &= \bar{N} - (1 - \pi_0)\end{aligned}$$

à partir de la loi de Little on obtien le temps moyen qu'un client passe dans le système  $\bar{T}$  et le temps moyen d'attente dans la file  $\bar{T}_Q$

— Temps moyen qu'un client passe dans le système :

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} \quad (2.3)$$

— Temps moyen d'attente

$$\bar{T}_Q = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda} \quad (2.4)$$

### 2.8.3 Modèle de files d'attente $M/M/s$

On considère un système identique à la file  $M/M/1$  excepté qu'il comporte  $s$  serveurs identiques et indépendants les uns des autres. On conserve les hypothèses :

— Le processus d'arrivée des clients poissonien de taux  $\lambda$

— Le temps de service exponentiel de taux  $\mu$

Ce système est connu sous le nom de la file  $M/M/s$ . L'espace d'états  $E$  est, comme pour la  $M/M/1$  infini :  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  La file d'attente est de capacité infini. Si l'un des serveurs est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce serveur. Dans le cas contraire, le client prend sa place dans une file d'attente commune pour tous les serveurs. Lorsqu'un serveur se libère, le client en tête de la file occupe ce serveur. Par conséquent, la discipline d'attente est FIFO.

Le processus de naissance et de mort modélisant ce type de file d'attente est alors défini de la façon suivante :

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{pour } i = 1, 2, \dots, s - 1 ; \\ s\mu, & \text{pour } n \geq s ; \end{cases}$$

La condition de stabilité de ce modèle est :  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$

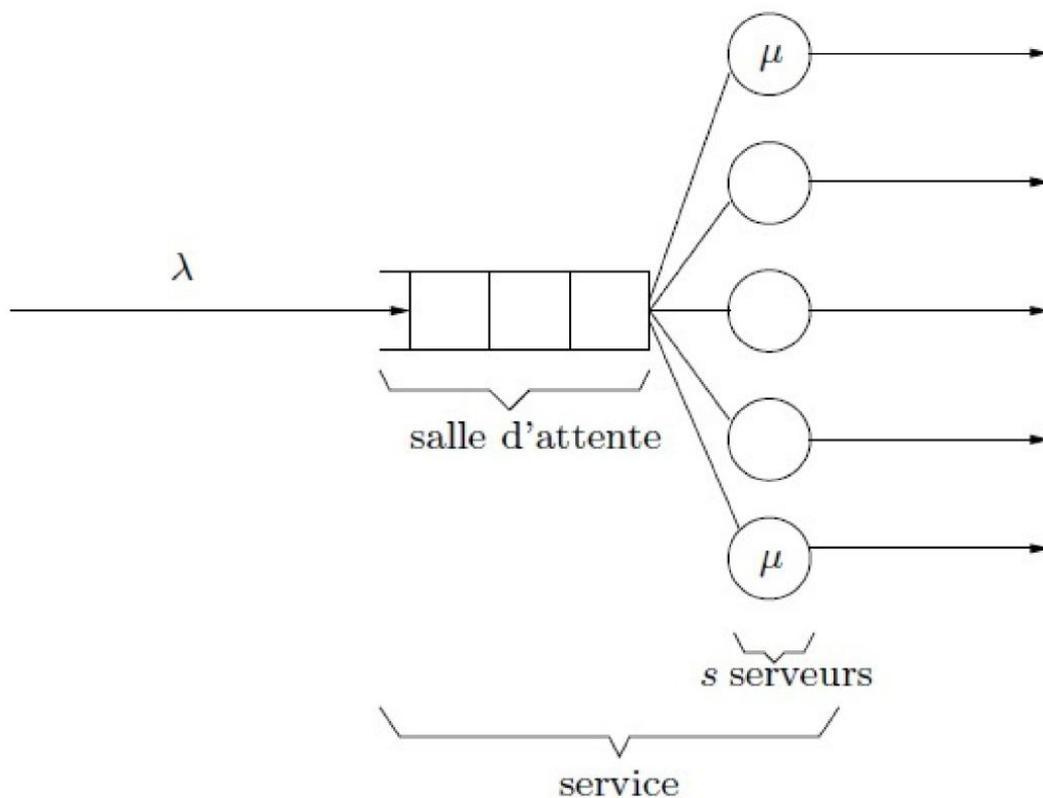


FIGURE 2.8 – Représentation schématique d'une file  $M/M/s$

D'après le diagramme et l'analyse du système en régime stationnaire, à l'aide de la procédure des équations de Chapman Kolmogorov on obtien les equation équations suivantes :

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$$

$$(\lambda + n\mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} \quad 1 \leq n < s$$

$$(\lambda + s\mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + s\mu\pi_{n+1} \quad n \geq s$$

avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

La résolution du système ci-dessus présente la distribution stationnaire suivante :

$$\begin{aligned} \bar{N}_Q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n \\ &= \bar{N} - (1 - \pi_0) \\ \pi_n &= \frac{\rho^n}{s!s^{n-s}}\pi_0, \quad n \geq s \end{aligned} \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \rho^{n-s} \right]^{-1} \\ \rho &= \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

et Cette dernière existe si :  $\lambda < s\mu$

A partir de la distribution stationnaire du processus  $\{N(t), t \geq 0\}$ , on peut calculer les caractéristiques du système. En effet,

**Temps moyen de séjour  $\bar{T}$  :** Le temps moyen de séjour d'un client est composé du temps moyen dans la file d'attente, et le temps moyen de service. Il suffit alors d'appliquer la loi de Little.

$$\bar{T} = \bar{T}_q + \bar{T}_s = \frac{\bar{N}_q}{d} + \frac{1}{\mu} + \frac{\bar{N}_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

Il reste alors à calculer le nombre moyen de clients en attente dans la file,  $\bar{N}_q$  :

$$\begin{aligned} \bar{N}_q &= \sum_{n=s}^{+\infty} (n-s)\pi_n \\ &= \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} \pi_0. \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du temps moyen de séjour

$$\bar{T} = \frac{\rho^s}{\mu(s-1)!(s-\rho)}\pi_0 + \frac{1}{\mu}$$

**Le nombre moyen de clients dans le système :**

$$\bar{N} = \rho + \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}\pi_0 \quad (2.6)$$

### 2.8.4 Modèle de files d'attente $M/M/\infty$

Pour ce modèle de file d'attente, le système est composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il est immédiatement servi (c'est le cas où il n'y a pas d'attente). Dans cette file les clients arrivent à des instants  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  formant un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et les temps de service sont exponentiels de taux  $\mu$ . Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/\infty$ . Comme cela a été fait pour la file  $M/M/C$ , on peut facilement démontrer que le taux de transition d'un état  $n$  quelconque vers l'état  $n-1$  est égal à  $n\mu$  et correspond au taux de sortie d'un des  $n$  clients en service [?]. De même, le taux de transition d'un état  $n$  vers l'état  $n+1$  est égal à  $\lambda$  et correspond au taux d'arrivée d'un client. donc c'est un processus de naissance et de mort avec :

$$\pi_{n-1} = \pi_n n \mu \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{soit } \pi_n = \frac{\rho}{n} \pi_{n-1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{où } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

les probabilités en fonction de  $\pi_n$ .

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

La condition de normalisation nous donne alors immédiatement  $\pi_0$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}} = e^{-\rho}$$

On obtient finalement

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

car la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}$  converge pour toutes valeurs de  $\rho$  (donc de  $\lambda$  et de  $\mu$ ), ce qui est cohérent avec la stabilité inconditionnelle de la file.

**Nombre moyen de clients  $\bar{N}$  :**

$$\bar{N} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi_n = e^{-\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} = e^{-\rho} \rho e^{\rho} = \rho$$

**Temps moyen de séjour  $\bar{T}$  :** utilisant la loi de Little :

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda_e} = \frac{1}{\mu}$$

# Chapitre 3

## Systemes de file d'attente avec dérobade adaptative

### 3.1 Introduction

Dans divers domaines, les clients dérobades, découragés soit par la qualité de service soit par la longueur de la file d'attente, sont devenus le but de plusieurs études. Ces systèmes qui contiennent des clients dérobade ont fait des pertes considérables à l'économie de plusieurs firmes [3].

Les files d'attente avec dérobade, peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. Plusieurs mathématiciens se sont intéressés par l'étude de ces modèles, tels que :

- Haight (1957) [15] est le premier qui a étudié le modèle d'attente  $M/M/1$  avec dérobade .
- Rubin et Robson (1990) [11] ont considéré un type spécial de système de file d'attente consistant en une entrée Poisson de clients, dont certains sont perdus en raison d'un refus et d'un seul serveur travaillant un poste de durée prédéterminée, fournissant un service dont la durée peut varier d'un client à l'autre.
- Abou-El-Ata et Hariri(1992) [2] ont considéré le modèle  $M/M/c/N$  avec dérobade.
- Santhakumaran et Thangaraj(2000) [28] Modèle de file d'attente  $M/M/1$  pour la longueur de la file d'attente aux durée d'arrivées et obtention du résultat pour la distribution stationnaire, la moyenne et la variance de la longueur de la file d'attente.
- O. Garnett, A. Mandelbaum, et M. Reiman (2002) [27] a donné l'étude sur la conception d'un centre d'appels avec des clients impatientes.
- Kangzhou Wang, Na Li, et Zhibin Jiang(2010) [19] Système de file d'attente avec des clients impatientes. (un article de synthèse), les systèmes de file d'attente avec des clients impatientes sont étudiés conformément à divers dimensions, les comporte-

ments impatientes (réticence et reniement) et leurs différentes règles proposées dans la littérature ont été étudiés. Solutions analytiques, des solutions numériques et une modélisation par simulation de la file d'attente avec des clients impatientes ont été étudiées.

- Kumar et Sharma(2012) [22] ont étudié le modèle de file d'attente  $M/M/1/N$  avec retention des clients abandons et dérobad.

## 3.2 Files d'attente $M/M/1$ avec dérobad

### Le Modèle $M/M/1$ avec dérobad

Les systèmes de files d'attente avec dérobad sont des modèles largement utilisés dans des problèmes de la vie réelle tels que les centrales d'appels téléphoniques, les urgences des hôpitaux .... À son arrivée au système, le client découragé par la longueur de la file d'attente par exemple, décide de ne pas joindre la file d'attente, c'est le cas du dérobad. Cette dérobad a poussé beaucoup de mathématiciens à l'étude de ce phénomène afin de trouver des solutions [6].

**Description du modèle :** Supposons qu'un client qui arrive à un système et trouve  $n$  clients devant lui, entre avec la probabilité  $b_n$  ou part avec la probabilité  $q_n = 1 - b_n$ . Si la longueur de la file d'attente décourage les clients, alors  $b_n$  serait une fonction décroissante de  $n$  [15].

**Cas particulier :** s'il y a une salle d'attente de capacité  $C$ , nous pourrions supposer que :

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{pour } n < C; \\ 0, & \text{pour } n \geq C; \end{cases}$$

indiquant que, une fois la salle d'attente est remplie, les clients n'ont plus la possibilité d'entrer dans le système.

Soit  $N(t)$  le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ , et le processus d'arrivée des clients dans le système est Poissonnien de taux  $\lambda$  et le service est exponentiel de taux  $\mu$ . Un client qui arrive de l'extérieur et trouve  $n$  clients dans le système devant lui entre avec la probabilité  $b_n$  alors le processus de naissance appropriés est :

$$\lambda_n = \lambda b_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tel que

$$b_n = \frac{1}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ainsi

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(d'après Chapman Kolmogorov)[19].

puis en utilisant la condition de normalisation, nous obtenons

$$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

• Nombre moyen de clients dans le système  $L$  :

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{(n-1)!} = e^{-\rho} \rho e^{\rho} = \rho$$

• Temps moyen de séjour  $W$  :

$$W = \frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})}$$

### 3.3 Files d'attente $M/M/1$ avec dérobade adaptative

#### 3.3.1 Description du modèle

la fonction de distribution de probabilité des temps inter-arrivée  $T_n$  est

$$a(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x > 0.$$

et la fonction de distribution de probabilité des temps de service  $S_n$  est

$$b(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad \mu > 0, \quad x > 0.$$

L'intensité du trafic

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Soit  $N(t)$  le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$  et

$$\pi_n(t) = \mathbb{P}[N(t) = n].$$

En supposant maintenant la probabilité en régime permanent et en écrivant

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_n(t)$$

on a

$$\pi_n'(t) = -(\lambda + \mu)\pi_n(t) + \lambda(1 - q_n)\pi_n(t) + \lambda q_{n-1}\pi_{n-1}(t) + \mu\pi_{n+1}(t)$$

$$\text{et } \pi_0(t) = -\lambda\pi_0(t) + \lambda(1 - q_0)\pi_0(t) + \mu\pi_1(t).$$

A l'état stable

$$\pi_{n+1} = (1 + \rho)\pi_n - \rho(1 - q_n)\pi_n - \rho q_{n-1}\pi_{n-1}$$

$$\text{et } \pi_1 = \rho\pi_0 - \rho(1 - q_0)\pi_0.$$

En supposant maintenant  $r_n = q_n\pi_n$

on a

$$\pi_1 = \rho r_0$$

$$\text{et } \pi_{n+1} = \pi_n + \rho r_n - \rho r_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Multipliant maintenant la première équation par  $z^0$ , seconde par  $z^1$ , troisième par  $z^2$  etc et en sommant pour tout  $n$  nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n z^n + \rho \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n - \rho \sum_{n=0}^{\infty} r_{n-1} z^n$$

c'est à dire

$$z^{-1} [P(z) - \pi_0] = [P(z) - \pi_0] + \rho R(z) - \rho z R(z)$$

où

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n, R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n$$

d'où

$$P(z) = \pi_0 + \rho z R(z). \quad (3.1)$$

nous avons

$$\lim_{z \rightarrow 1} P(z) = 1 = \pi_0 + \rho \sum_{n=0}^{\infty} r_n \implies \pi_0 = 1 - \rho \sum_{n=0}^{\infty} r_n$$

$$E(N) = \rho \sum_{n=0}^{\infty} (1 + n) r_n$$

$$V(N) = \rho \sum_{n=0}^{\infty} r_n - \rho^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} r_n \right)^2 + 3\rho \sum_{n=0}^{\infty} n r_n - \rho^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} n r_n \right)^2$$

$$+ \rho \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) r_n - 2\rho^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} r_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} n r_n \right).$$

Nous obtenons maintenant une distribution stationnaire du nombre de clients dans le système pour les différents modèles dérobade aléatoires.

### 3.3.2 Cas (i) : dérobadé avec probabilité constante :

nous considérons le modèle de file d'attente dans lequel les clients qui arrivent dérobadent avec une probabilité constante :

$$1 - a,$$

c'est-à-dire que nous prenons  $q_n = a$ ,

si  $n > 0$  et  $q_0 = 1$ .

Ensuite nous avons  $r_n = a\pi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  et  $r_0 = \pi_0$  qui donne en utilisant l'équation

$$(3.1) \quad P(z) = \pi_0 + \rho z R(z)$$

En comparant les coefficients de  $z^n$  on obtient la distribution du nombre de clients dans le système

$$\pi_n = \rho(a\rho)^{n-1}\pi_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$$\pi_0 = \frac{1 - a\rho}{1 + \rho(1 - a)} \quad (3.3)$$

La taille moyenne de la file d'attente dans le système est donnée par :

$$L = \frac{\rho(1 - a\rho) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(a\rho)^n}{1 + \rho(1 - a)}. \quad (3.4)$$

Soit  $\lambda_n$  le taux d'arrivée dans le système avec dérobadé quand il y a  $n$  clients dans le système.

Donc on a

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } n = 0; \\ a\lambda, & \text{si } 0 < n \leq \infty. \end{cases}$$

D'où le taux d'arrivée moyen  $\lambda$  est

$$\lambda\pi_0 + a\lambda(1 - \pi_0).$$

Donc par la formule de Little nous aurons le temps d'attente moyen dans le système comme :

$$W = \frac{\rho(1 - a\rho) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(a\rho)^n}{\lambda[(1 - a\rho)(1 - a) - a(1 + \rho(1 - a))]} \quad (3.5)$$

### 3.3.3 Cas (ii) : dérobadé adaptatif

On obtient maintenant une distribution stationnaire du nombre de clients dans le système pour le modèle dérobadé aléatoire basé sur la taille du système ici la fonction de probabilité dérobadé

$$q_n = a^n, \quad 0 < a < 1$$

$a$  est appelé le paramètre de dérobage.

Ensuite nous avons

$$r_n = \pi_n a^n \text{ et } R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \pi_n = P(az)$$

qui donne en utilisant l'équation (3.1). En comparant les coefficients de  $z^n$  on obtient la distribution du nombre de clients dans le système

$$\pi_n = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \rho^n \pi_0, \quad n > 0 \quad (3.6)$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \rho^n}, \quad (3.7)$$

La taille moyen du système est

$$L = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n a^{\frac{n(n-1)}{2}} \rho^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \rho^n}. \quad (3.8)$$

Dans ce modèle de files d'attente avec dérobage le taux d'arrivée  $\lambda_n$ , lorsqu'il y a  $n$  clients dans le système est  $\lambda_n = a^n \lambda$ ,  $0 \leq n < \infty$ .

Ensuite, le taux d'arrivée moyen  $\lambda^*$  est  $\lambda^* = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a^n \pi_n$ .

Donc par la formule de Little nous avons le temps d'attente moyen dans le système est

$$W = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n a^{\frac{n(n-1)}{2}} \rho^n}{\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \rho^n} \quad (3.9)$$

La distribution de probabilité stationnaire pour diverses valeurs de l'intensité du trafic et le paramètre dérobage sont tabulés ci-dessous suivi des diagrammes de probabilité.

**Remarque 3.3.1.** *On peut observer que les résultats pour certaines modèles de files d'attente peuvent être déduits du modèle dérobage aléatoire considéré dans ce chapitre.*

**Par exemple,** pour le modèle de file d'attente  $M/M/1/N$ , on prend la fonction de probabilité de dérobage  $q_n$  comme suit :

$$q_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n < N; \\ 0, & \text{si } n \geq N; \end{cases}$$

Tableau 5.1 : [5] Distribution de probabilité stationnaire du modèle avec une probabilité dérobage constante avec  $\rho = 0.8$

$\rho = 0.8$	$a = 0.9$	$a = 0.8$	$a = 0.6$	$a = 0.4$
p <sub>0</sub>	0.259	0.310	0.394	0.459
p <sub>1</sub>	0.207	0.248	0.315	0.368
p <sub>2</sub>	0.149	0.159	0.151	0.118
p <sub>3</sub>	0.108	0.102	0.073	0.038
p <sub>4</sub>	0.077	0.065	0.035	0.012
p <sub>5</sub>	0.056	0.042	0.017	0.004
p <sub>6</sub>	0.040	0.027	0.008	0.001
p <sub>7</sub>	0.029	0.017	0.004	0.0004
p <sub>8</sub>	0.021	0.011	0.002	0.000
p <sub>9</sub>	0.015	0.007	0.001	0.000
p <sub>10</sub>	0.011	0.004	0.000	0.000

Tableau 5.2 : Distribution de probabilité stationnaire du modèle avec une probabilité dérobage constante avec  $\rho = 0.9$

$\rho = 0.9$	$a = 0.9$	$a = 0.8$	$a = 0.6$	$a = 0.4$
p <sub>0</sub>	0.174	0.237	0.338	0.416
p <sub>1</sub>	0.157	0.214	0.304	0.374
p <sub>2</sub>	0.127	0.154	0.164	0.135
p <sub>3</sub>	0.103	0.111	0.089	0.048
p <sub>4</sub>	0.083	0.080	0.048	0.017
p <sub>5</sub>	0.068	0.057	0.026	0.006
p <sub>6</sub>	0.055	0.041	0.014	0.002
p <sub>7</sub>	0.044	0.030	0.008	0.001
p <sub>8</sub>	0.036	0.021	0.004	0.000
p <sub>9</sub>	0.029	0.015	0.002	0.000
p <sub>10</sub>	0.024	0.011	0.001	0.000
p <sub>11</sub>	0.019	0.008	0.001	0.000
p <sub>12</sub>	0.015	0.006	0.000	0.000

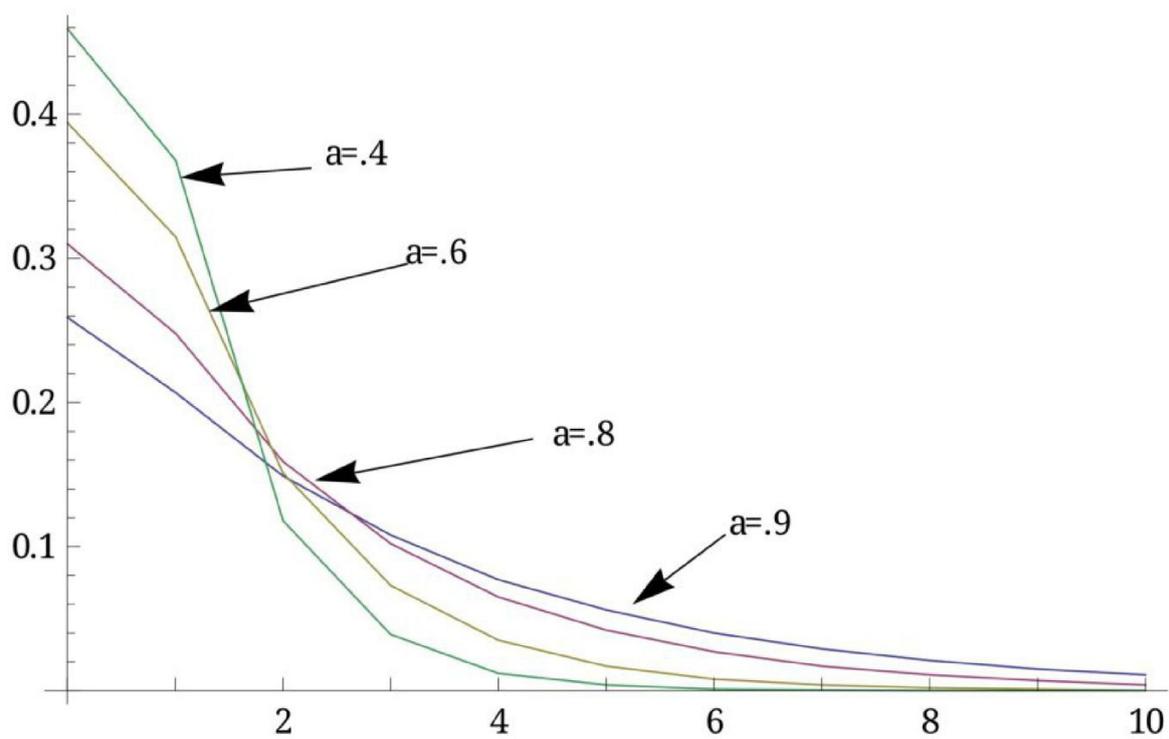


FIGURE 3.1 – Distribution de probabilité stationnaire du modèle avec une probabilité dérobadé constante avec  $\rho = 0.8$ .

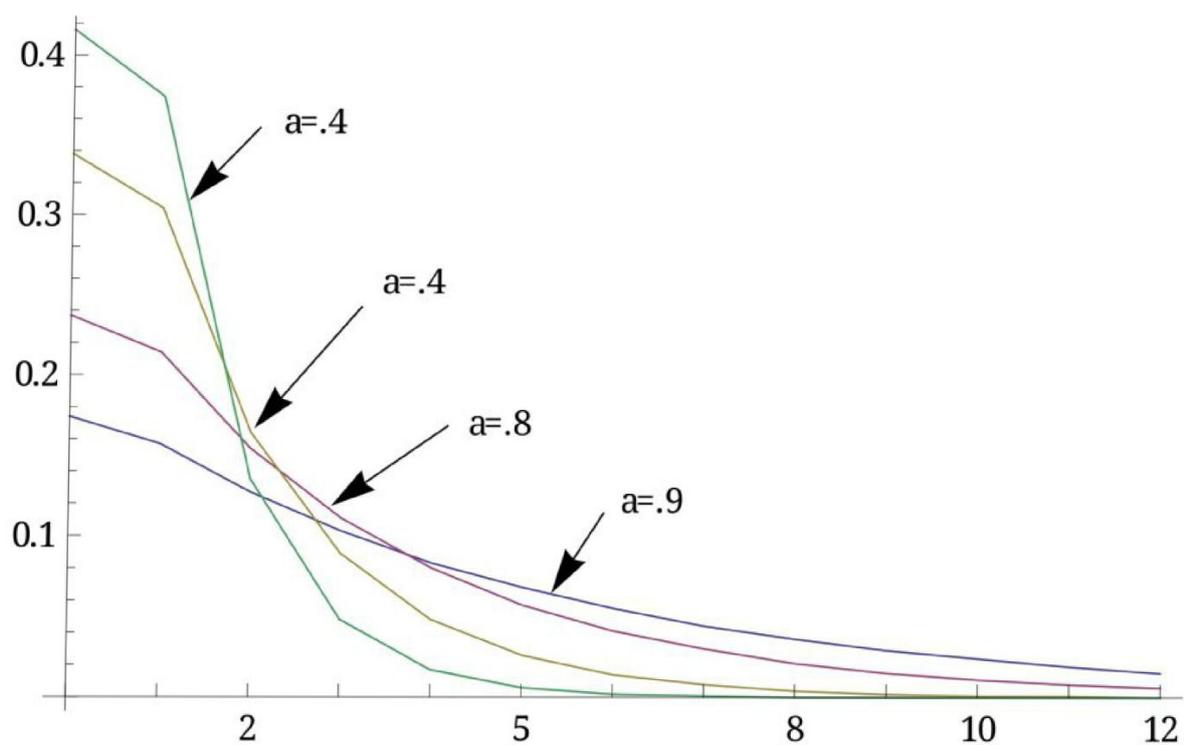


FIGURE 3.2 – Distribution de probabilité stationnaire du modèle avec une probabilité dérobage constante avec  $\rho = 0.9$ .

Tableau 5.3 : Distribution de probabilité stationnaire du modèle avec probabilité dérobadé adaptative avec  $\rho = 0.8$ 

$\rho = 0.8$	$a = 0.9$	$a = 0.8$	$a = 0.6$	$a = 0.4$
p <sub>0</sub>	0.315	0.367	0.432	0.478
p <sub>1</sub>	0.252	0.293	0.345	0.383
p <sub>2</sub>	0.182	0.188	0.166	0.122
p <sub>3</sub>	0.118	0.096	0.048	0.016
p <sub>4</sub>	0.069	0.039	0.008	0.001
p <sub>5</sub>	0.037	0.013	0.001	0.000
p <sub>6</sub>	0.017	0.003	0.000	0.000
p <sub>7</sub>	0.006	0.001	0.000	0.000
p <sub>8</sub>	0.003	0.000	0.000	0.000
p <sub>9</sub>	0.001	0.000	0.000	0.000

Tableau 5.4 : Distribution de probabilité stationnaire du modèle avec probabilité dérobadé adaptative avec  $\rho = 0.9$ 

$\rho = 0.9$	$a = 0.9$	$a = 0.8$	$a = 0.6$	$a = 0.4$
p <sub>0</sub>	0.256	0.314	0.388	0.440
p <sub>1</sub>	0.230	0.283	0.349	0.396
p <sub>2</sub>	0.186	0.204	0.189	0.143
p <sub>3</sub>	0.136	0.117	0.061	0.020
p <sub>4</sub>	0.089	0.054	0.012	0.001
p <sub>5</sub>	0.053	0.021	0.001	0.000
p <sub>6</sub>	0.028	0.006	0.000	0.000
p <sub>7</sub>	0.013	0.001	0.000	0.000
p <sub>8</sub>	0.006	0.000	0.000	0.000
p <sub>9</sub>	0.002	0.000	0.000	0.000
p <sub>10</sub>	0.001	0.000	0.000	0.000

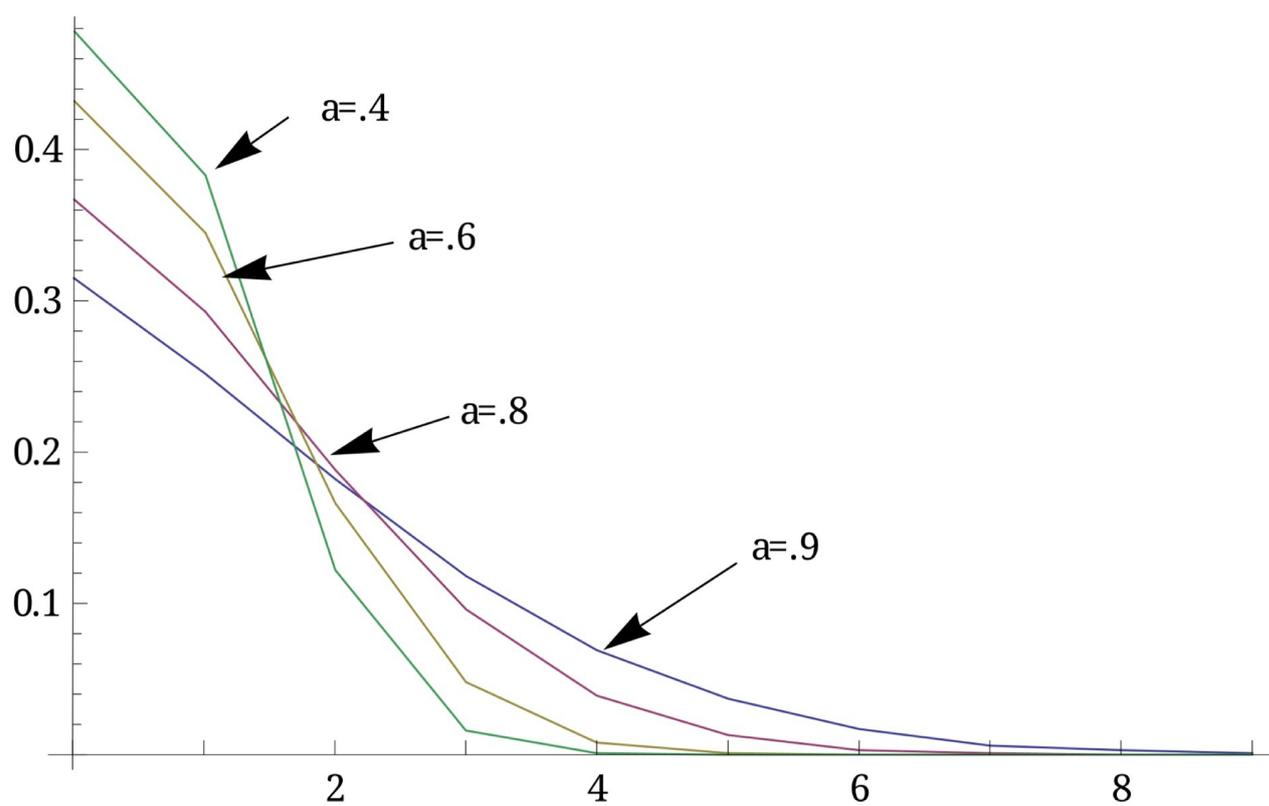


FIGURE 3.3 – Distribution de probabilité stationnaire du modèle avec probabilité dérobade adaptative avec  $\rho = 0.8$ .

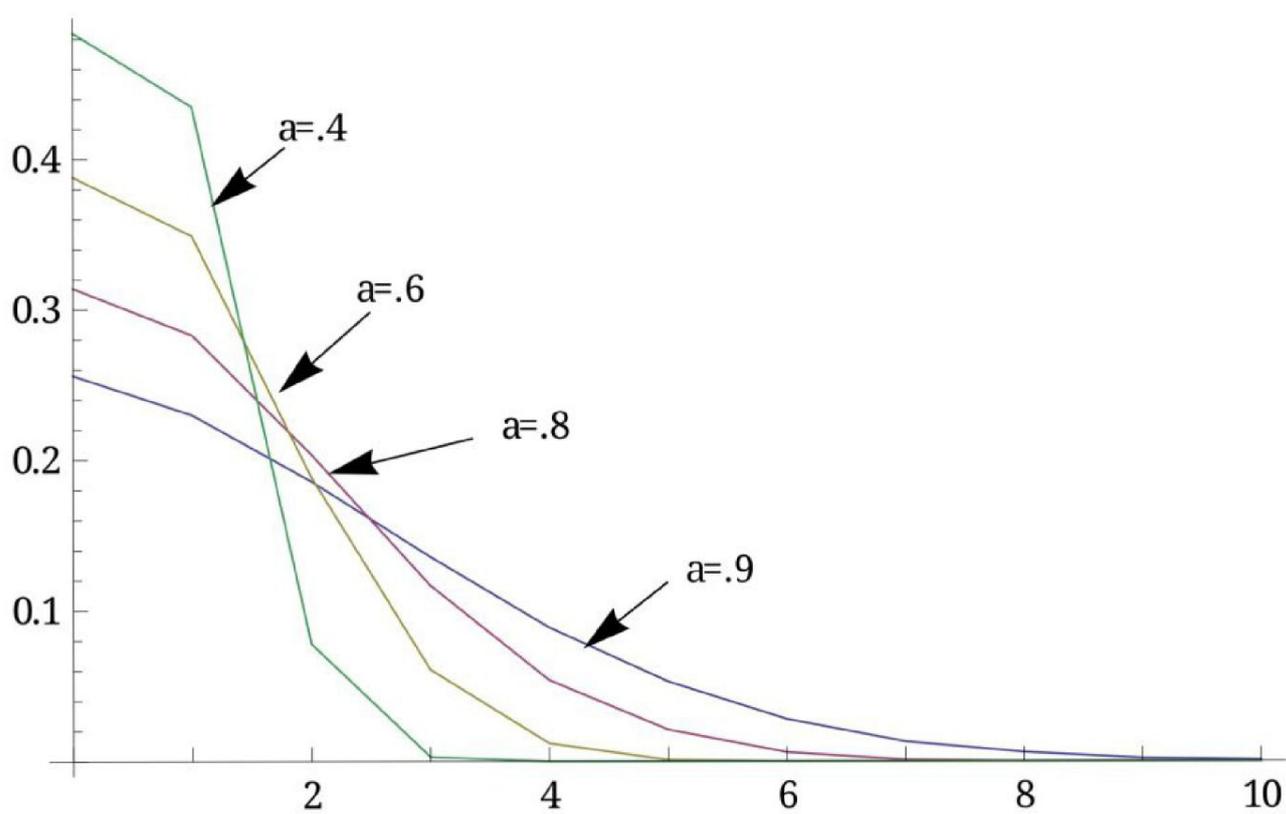


FIGURE 3.4 – Distribution de probabilité stationnaire du modèle avec probabilité dérobage adaptative avec  $\rho = 0.9$ .

# Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés aux systèmes de files d'attente avec dérobage.

Le premier chapitre était un rappel des Processus stochastiques qui sont un outil incontournable dans l'analyse dans différents systèmes dynamiques ( réseaux de files d'attente, systèmes de communication et informatiques, biologiques, économiques ... etc).

Dans le deuxième chapitre, nous avons introduit les notions de base de la théorie des files d'attente. Ensuite nous avons traité certains modèles de files d'attente classiques. Le troisième chapitre a été consacré à l'étude modèles d'attente avec dérobage adaptative, on a choisi le cas de files d'attente  $M/M/1$  avec dérobage adaptative

# Bibliographie

- [1] A. Gomez, and M.F. Ramalhoto. On the waiting time distribution and the busy period of a retrial queue with constant retrial rate. *Stochastic Modelling and Applications*, 3, 37-47, (2000).
- [2] Abou El-Ata, M. O. and Hariri, A. M. A. The  $M/M/c/N$  queue with balking and reneging. *Computers and Operations Research*. 19 (1992), No. 13 713-716.
- [3] Ancker, Jr., C. J. and Gafarian, A. V. Some queuing problems with balking and reneging : I. *Operations Research*. 11 (1963), No. 1, 88-100.
- [4] Anisimov, V. V., Zakusilo, O. K., and Donchenko, V. S. 1987. *Elements of Queueing Theory and Asymptotic System Analysis*. Vishcha Shkola, Kiev (in Russian).
- [5] chapitre5 , *Markovian Queueing Models with Adaptive Random Balking*.
- [6] Chapel HILL , *Service Systems With Balking On Queueing Time*, page67,2007.
- [7] Cheprasov, V. P. 1985. *Elements of Queueing Theory*. Kazan Aviation Institute (in Russian).
- [8] Claudie Chabriac, *Processus stochastiques et modélisation*. (2012-2013).
- [9] Claudie Hasseforder CHABRIAC , *Eléments de Théorie des files d'attente*, page05, Janvier 2008.
- [10] Claudie Hasseforder CHABRIAC , *Eléments de Théorie des files d'attente*, page05, Janvier 2008.
- [11] Douglas S. Robson , *A single server queue with random arrivals and balking : Confidence interval estimation* 7, pages 283 ?306 (1990)Cite this article 78 Accesses 17 Citations.
- [12] Frédéric Sur, *Programmation dynamique, chaînes de Markov, files d'attente*.école des Mines de Nancy (2013)-(2014).
- [13] G. Rubino, *Processus Stochastiques* , Février 2006.
- [14] Gross.D,and C.M,Harris,*Fundamentals of Queueing Theory* ,Willey,New york,1975 1984.

- 
- [15] Haight, F. A., Queuing with balking, I, *Biometrika*, 44, 360-369. (1957)
- [16] , J. Lubacz and J. Roberts, A new approach to the single-server repeated attempt
- [17] Jean Louis Poss, Probabilité et statistique version 2.1 Mai 2003 p74
- [18] Kangzhou Wang, Na Li, and Zhibin Jiang. Queueing system with impatient customers : A review.
- [19] Kangzhou Wang. Na Li, and Zhibin Jiang. Queueing system with impatient customers : A review. In 2010 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics and Informatics (SOLI), pages 82-87, 2010.
- [20] Kashyap, B. R. K., and Chaudhry, M. L. 1988. An Introduction to Queueing Theory. Aarkay, Calcutta, India.
- [21] Khintchine, A. Y 1969. Mathematical Methods in the Theory of Queueing. Second edition, Hafner Publishing Company, New York (First edition : Griffin, London, 1960 ; Russian original : 1955). 859-866.
- [22] Kumar, R. and Sharma, S.K. An  $M/M/1/N$  Queueing Model with Retention
- [23] M.Petito, Introduction à la modélisation des réseaux, page21, 26 Octobre 2010.
- [24] , F. A., Mahdy S. El-Paoumy and Hossam A. Nabwey, The Poissonian Queue with Balking Function, Reneging and two Heterogeneous Servers. *International Journal of Basic Applied Sciences IJBAS-IJENS*. 11 (2011), No. 6, 149-152.
- [25] Newell, G. F. 1982. Applications of Queueing Theory. Second edition, Chapman and Hall, London (First edition : 1971)
- [26] Newell, G. F. 1982. Applications of Queueing Theory. Second edition, Chapman and Hall, London (First edition : 1971).
- [27] O. Garnett, A. Mandelbaum, and M. Reiman. Designing a call center with impatient customers.
- [28] Santhakumaran, A. and Thangaraj, V. A Single Server Queue with Impatient and Feedback Customers, *Information and Management Science*. 11, No. 3, 71-79. (2000).
- [29] Yves Caumel, Probabilités et processus stochastiques. Springer. Verlag France,(2011).
- [30] Zakhar Kabluchko, Stochastic Processes (Stochastik II), University of Ulm Institute of Stochastics, (2013-2014).