

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université de Saida - Dr Moulay Tahar.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Mlle. **Benmansour Norelhouda**¹

Sous la direction de

Pr. F. Hathout

Thème :

Structures magnétiques dans la variété $Sol3$

Soutenue le 12/06/2022 devant le jury composé de

MCA. H.M. Dida	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
Pr. F. Hathout	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
MCB A. Halimi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examinateur

Année univ. : 2021/2022

1. e-mail : benmansournorelhouda97@gmail.com

1

Remerciement

Je remercia dieu de je avoire accordé des connaissances de la science et de je avoir aidé à réaliser ce travail.

Au terme de ce modeste travail je tende à remercier chaleureusement mon encadreur: Pr. F. HATHOUT qui a très volontiers accepté d'être le directeur a ce mémoire sa grande connaissance dans le domaine ainsi que son expérience ai joué un role important dans la conception de ce travail.

je tiens tout particulièrement à remerciers le chef de departement: L. YAHIAOUI, et à l'équipe pédagogique de département Mathématiques.

A ma famille pour son soutien ainsi que son réconfortet pour m'avoire entouré durant ces cinq ans.

Nous tenons aussi à exprimer nos gratitudes reconnaissance à tous les membres de jury d'avoir accepté et d'évaluer notre travail. Enfin on remercie toutes personnes qui ont contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

1

Dédicaces

tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tout simplement que je dédie cette mémoire à:

A mes parents: BEN OUIS HANIA, et MEHAIDI

Qui m'ont toujours encouragé et soutenu durant toutes mes années d'études

Qui m'ont appris que rien n'est impossible... Merci pour votre amour, vos sacrifices, votre tendresse et votre confiance totale. Aucune dédicace ne pourrait exprimer la profondeur des sentiments que j'éprouve pour vous.

A mes oncles et mes tantes surtout mon deuxième père TAYBE et ma deuxième maman ALILAT AWALI.

A ma grand-mère RAZIKA.

A mes sœurs: SARA, HIND, RACHIDA, KHADIDJA, FATIMA, IKRAM et HAYET.

A mes frères: TAYEB, ABD ALLAH, MOHAMED, NASRO, OUSSAMA, MASSOUDE, AMER.

A mes cousins: FADILA, ZAHRA, KARIMA, AICHA, SOUMIA, FATNA, ZAHIA, MAAMER et ALI.

A l'esprit de mes tantes: KHADEM, MBARKA.

A mes chères amies: KHAIRA, FATIHA, SETTI, ZOHRA, YASMEN.

A TOUS les membres de ma promotion.

Table des matières

0.1	Introduction	3
1	Notions basiques sur les variétés	5
1.1	Variétés différentiables	5
1.1.1	Variétés Différentiables	5
1.1.2	Espace tangent et espace cotangent	6
1.1.3	Fibrés tangent et cotangent	7
1.1.4	Connexions	8
1.1.5	Géodesiques	9
1.2	Variétés Riemanniennes	9
1.2.1	Métriques Riemmaniennes	9
1.2.2	Connexion de Levi-Civita	11
1.3	Vecteurs de Killing	11
1.4	Surface d'une variété	11
1.4.1	Surface d'une variété	11
1.4.2	Espace tangent d'une surface	11
2	Géométrie du groupe $Sol(3)$	13
2.1	Groupe $Sol(3)$	13
2.2	Connexion de Levi-Civita	14
2.3	Vecteurs de Killing dans $SoL(3, \mathbb{R})$	16
3	Surfaces flux et fonctions flux scalaire accordées aux vecteurs magnetiques de Killing sur $SoL3$	18

3.1 Surfaces flux et fonctions flux scalaire accordées aux vecteurs magnetiques de Killing	18
3.2 Surfaces K_1-flux de $SoL3$	20
3.2.1 Fonction K_1-flux scalaire de $SoL3$	25
3.3 Surfaces K_2-flux de $SoL3$	26
3.3.1 Fonction K_2-flux scalaire de $SoL3$	30
3.4 Surfaces K_3-flux de $SoL3$	32
3.4.1 Fonction K_3-flux scalaire de $SoL3$	35

0.1 Introduction

Le flux trouve naturellement sa place en mécanique des fluides, dans ce domaine les flux sont systématiquement des débits, c'est-à-dire qu'ils représentent une quantité qui traverse une surface, une section, par unité de temps (débits massique et volumique, etc.). Il est aussi utilisé dans le domaine des transferts thermiques où l'on peut aisément s'imaginer la chaleur comme un fluide qui traverse diverses couches successives. En mathématiques et plus particulièrement en géométrie, une surface M d'une variété différentiable (N, g) , est une surface flux d'un champ vectoriel W lorsque

$$g(W, n) = \langle W, n \rangle = 0 \quad (1)$$

par tout en M , où n est le vecteur normal à M .

Si de plus, la variété riemannienne (N, g) est soumise à une force de Lorentz i.e. muni d'un champ magnétique F défini par

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y) \mid \forall X, Y \in \chi(M)$$

où Φ est un tenseur (1,1) associé au champ F lié a un vecteur W par

$$\Phi(X) = W \times X \mid X \in \chi(M)$$

W est dit un vecteur magnétique associé au champ magnétique F et la surface M est dite surface flux associée au vecteur magnétique W (voir [1],[2]). Dans ce cas, le champ magnétique ne traverse la surface M nulle part, c'est-à-dire que le flux magnétique traversant M est nul. On peut alors définir une fonction flux scalaire f telle que sa valeur soit constante sur la surface M , et on a

$$g(W, \nabla f) = \langle W, \nabla f \rangle = 0$$

D'autre part, Wilhelm Karl Joseph Killing (10 mai 1847 – 11 février 1923) est un mathématicien allemand connu pour ses nombreuses contributions aux théories des algèbres de Lie, des groupes de Lie..., l'un de ces travaux qui prend son non la notion de vecteurs de Killing. Un vecteur de Killing, ou champ de Killing, est un champ de vecteur sur une variété Riemannienne qui conserve la métrique de cette variété. Lorsque W est de plus un vecteur de Killing, on le

note par un vecteur magnétique de Killing.

Ainsi des que W est un vecteur de Killing, M et f sont appelés surface flux et fonction flux scalaire accordées au vecteur magnétique de Killing W respectivement. (voir [3] et [6])

Le but de ce Mémoire est d'étudier et de déterminer les Surfaces flux et fonctions flux scalaire correspondentes aux vecteurs de killing sur le groupe $\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R})$ (voir [4], [2]) défini par

$$\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right) \right\},$$

qu'il se compose en trois chapitre :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions de base sur les variétés (variété différentiable et variété Riemannienne), vecteurs de Killing et surfaces paramétrées dans un variété de $\dim 3$.

Le deuxième chapitre se concentre sur la géométrie du groupe $\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R})$ et la connexion de Levi-civite ainsi que les vecteurs de Killing.

Finalement le troisième et le dernier chapitre, on détermine Surfaces flux et fonctions flux scalaire accordées aux vecteurs de Killing dans le groupe $\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R})$ et on donne leurs représentations graphiques en utilisant le logiciel 'Wolfram Mathematica' dans l'espace Euclidien de dimension 3.

Chapitre 1

Notions basiques sur les variétés

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Variétés Différentiables

Soit M un espace topologique séparé non vide.

Définition 1.1 *On dit que M est une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point p de M possède un voisinage ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^n i.e: il existe une application bijective*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$$

tel que φ et son inverse φ^{-1} sont continue.

Un point p de U est repéré par les coordonnées (p_1, \dots, p_n) dans \mathbb{R}^n de son image réciproque $\varphi^{-1}(p)$. Alors, on dit que U est un ouvert de coordonnées locales de M au voisinage de p . La paire (U, φ) est appelée carte locale et $(p_1, \dots, p_n) = \varphi^{-1}(p)$ seront les coordonnées locales de p .

Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telle que l'intersection U et V soit non vide alors un point $p \in U \cap V$ est repéré par ses coordonnées (p_1, \dots, p_n) dans U et ses coordonnées (p'_1, \dots, p'_n) dans V . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \psi^{-1}(U \cap V) & & \end{array}$$

est commutatif alors on a

$$(p'_1, \dots, p'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(p_1, \dots, p_n)$$

où l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée changement de coordonnées de la carte (U, φ) vers la carte (V, ψ) .

On appelle atlas définissant M la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et pour chaque $i \in I$, d'un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$; cet objet sera noté $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$.

Définition 1.2 *On dira que M est une variété différentiable si elle est une variété topologique et l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \varphi$ est de classe C^∞ .*

1.1.2 Espace tangent et espace cotangent

Soit M une variété différentielle de dimension n . On note $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^1 sur M .

Définition 1.3 *L'ensemble $C^\infty(M)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} est une algèbre associative et commutative avec le produit usuel*

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

où $f, g \in C^\infty(M)$ et $x \in M$.

Définition 1.4 *Un vecteur tangent en un point $p \in M$ est l'application $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, pour tous $f, g \in C^\infty(M)$, on a*

$$- v \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire : } v(af + bg) = av(f) + bv(g),$$

$$- v \text{ satisfait la règle de Leibnitz : } v(f.g)(p) = v(f).g(p) + f(p).v(g).$$

L'ensemble de vecteurs tangents au point p de M est noté par T_pM , et on l'appelle l'espace tangent en $p \in M$, c'est un espace vectoriel de dimension n ($\dim M$).

On peut voir l'espace tangent par la définition suivante.

Définition 1.5 *On définit l'espace tangent à M en un de ses points comme l'ensemble des vecteurs tangents à une courbe tracée dans M . Un vecteur v de \mathbb{R}^n est dit tangent à M en un*

point x de M s'il existe une courbe paramétrée de classe C^1

$$\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

définie sur un voisinage de 0, telle que

$$\gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = v$$

L'espace tangent en tout point p d'un ouvert U de \mathbb{R}^n est $T_pU = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.6 Comme T_pM est un espace vectoriel, il est possible de considérer son dual, que nous noterons T_p^*M . Cet espace est appelé l'espace cotangent à M en p . Il est un espace vectoriel de même dimension que T_pM .

Localement, au dessus d'un ouvert U , d'une carte locale (U, φ) , $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}$ est une base de T_pM pour tout $p \in U$. Notons $\{dx_i|_p\}$ sa base duale, on a alors :

$$\langle dx_i|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \rangle = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_j^i$$

1.1.3 Fibrés tangent et cotangent

Définition 1.7 On appelle fibré tangent à M , que l'on désigne par TM , l'ensemble de tous les vecteurs tangents de M en ses points, c'est donc la réunion de tous les espaces tangents T_pM en ses divers points :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$$

C'est une famille d'espaces vectoriels paramétrisés par M . On peut le munir d'une projection $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, v) = p$.

Le fibré TM est une variété différentiable de dimension $2n$. L'application $\pi : (p; u) \in TM \rightarrow p \in M$ est différentiable.

On appelle *section* C^∞ de TM ou *champ de vecteurs* sur M toute application différentiable $X : TM \rightarrow M$ telle que $\pi \circ X = id_M$. Le champ de vecteurs X en tout point $p \in M$ est un vecteur $X(p)$ tangent à M en p de façon à ce que la variation de $X(p)$ (en fonction de p) soit différentiable.

L'ensemble $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur M .

Définition 1.8 *On définit le fibré cotangent par*

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

C'est une variété différentiable de dimension $2n$. Une section de classe C^∞ $\alpha : M \rightarrow T^*M$ de ce fibré, est appelée une 1-forme différentielle sur M .

1.1.4 Connexions

Définition 1.9 *Soit M une variété différentiable. Une connexion linéaire sur M est une application*

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

telle que

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

vérifiant les propriétés :

1. $\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$ -linéaire par rapport à X :

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad f, g \in C^\infty(M)$$

2. $\nabla_X Y$ est \mathbb{R} -linéaire par rapport à Y :

$$\nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

3. vérifie la règle de Leibniz :

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y, \quad f \in C^\infty(M)$$

$\nabla_X Y$ est appelée la dérivée covariante de Y dans la direction de X .

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

Définition 1.10 *Soient ∇ une connexion sur M et (U, ϕ) une carte sur M de coordonnées*

locales (x_1, x_2, \dots, x_n) . On définit les fonctions différentiables $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

appelée les symboles de Christoffel. En générale,

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ est la dérivée covariante associé à la connexion linéaire ∇ .

Définition 1.11 Soit ∇ une connexion sur une variété différentiable M . Le tenseur de torsion de ∇ est une application

$$T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

tel que

$$T : (X, Y) \mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

1.1.5 Géodesiques

Définition 1.12 Une courbe γ dans une variété différentiable M muni d'une connexion linéaire ∇ est dite géodésique si

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

1.2 Variétés Riemanniennes

1.2.1 Métriques Riemanniennes

Soit M une variété différentiable de dimension n .

Définition 1.13 Une métrique Riemannienne notée g est une application définie par

$$\begin{aligned} g & : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M), \\ (X, Y) & \mapsto g(X, Y) \end{aligned}$$

telle que g est

1. Symétrique $g(X, Y) = g(Y, X)$,
 2. Non dégénérée $g(X, X) = 0 \implies X = 0$,
 3. Définie positive $g(X, X) \geq 0$,
- pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.14 Une variété différentiable M muni d'une métrique Riemannienne g est dite variété Riemannienne notée (M, g) .

Une métrique Riemannienne g sur M définit sur chaque espace tangent un produit scalaire donnée par

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_p = g(u, v) \mid u, v \in T_p M$$

Définition 1.15 La norme d'un vecteur v de $T_p M$ est

$$|v| = \sqrt{g(v, v)}$$

L'angle entre deux vecteurs u et v de $T_p M$ est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ telle que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| |v|}$$

Définition 1.16 La longueur d'une courbe C^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est définie par

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

La longueur d'une courbe est invariante par reparamétrage régulier. La distance entre $x, y \in M$ est définie par

$$d(x, y) = \inf L(\gamma)$$

Une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est paramétrée par la longueur d'arc ou unitaire si

$$|\gamma'| = 1$$

1.2.2 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.17 Soit (M, g) une variété Riemannienne. Une connexion linéaire ∇ est dite de Levi-Civita si

1. ∇ est symétrique si le tenseur de torsion est nul i.e. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
2. ∇ est compatible avec g i.e. $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.

Théorème 1.18 Une variété Riemannienne (M, g) admet une et une seule connexion de Levi-Civita.

1.3 Vecteurs de Killing

Définition 1.19 Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le champ de vecteur V sur M est appelé un champ de vecteur de Killing s'il satisfait l'équation de Killing

$$g(\nabla_Y V, Z) + g(\nabla_Z V, Y) = 0, \forall Y, Z \in \Gamma(TM) \quad (1.1)$$

1.4 Surface d'une variété

1.4.1 Surface d'une variété

Définition 1.20 Une surface S de M est différentiable si pour un voisinage de tous point p de S il existe une paramétrisation

$$\begin{aligned} X & : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset M \\ (s, t) & \rightarrow (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \end{aligned}$$

où les fonctions x, y et z sont différentiables.

1.4.2 Espace tangent d'une surface

Définition 1.21 Soit S une surface d'une variété M de dim 3 paramétrisé par $X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ et (e_1, e_2, e_3) sa base canonique.

On définit les vecteurs tangents à S par

$$X_s(s, t) = x_s(s, t)e_1 + y_s(s, t)e_2 + z_s(s, t)e_3$$

$$X_t(s, t) = x_t(s, t)e_1 + y_t(s, t)e_2 + z_t(s, t)e_3$$

Définition 1.22 Le plan passant par un point P d'une surface régulière différentiable S de M qui est parallèle aux vecteurs $\vec{X}_s(p)$ et $\vec{X}_t(p)$ est appelé le plan tangent à la surface S à P .

Définition 1.23 Le vecteur normal à la surface au point p sera noté $n(p)$ (pour simplifier on le note seulement par $n(p)$) et supposée être un vecteur unitaire $|n(p)| = 1$. En particulier, Le vecteur normal peut être identifié avec le vecteur $\frac{X_s \times X_t}{|X_s \times X_t|}$ et on a

$$n = \frac{X_s \times X_t}{|X_s \times X_t|}$$

Chapitre 2

Géométrie du groupe $Sol(3)$

2.1 Groupe $Sol(3)$

Soit le groupe spécial linéaire réel défini par

$$SoL(3, \mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On présente la métrique riemannienne sur $SoL3$ par la définition suivante.

Définition 2.1 *On définit la métrique invariante à gauche sur le groupe $SoL3$ par*

$$g_{SoL(3, \mathbb{R})} = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2$$

et de matrice représentative

$$g_{SoL(3, \mathbb{R})} = \langle , \rangle : \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

La norme d'un vecteur tangent X à $SoL(3, \mathbb{R})$ est donné par

$$|X| = \langle X, X \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.2 La famille de vecteur $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ de $\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R})$ donnée par

$$e_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.2)$$

forme une base orthonormée de $\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R})$ et de base duale associée donnée par

$$\omega^1 = e^z dx, \quad \omega^2 = e^{-z} dy, \quad \omega^3 = dz$$

Preuve. On montre que que $|e_1| = 1$, alors

$$\begin{aligned} |e_1|^2 &= g_{\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R})} \left(\begin{pmatrix} e^{-z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-z} \\ 0 \\ -0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

de la même manière, on montre que $|e_2| = |e_3| = 1$ et l'orthogonalité, donc

$$\begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 1 & \text{si } i = j \\ \langle e_i, e_j \rangle = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

tels que $i, j = 1, 2, 3$. ■

2.2 Connexion de Levi-Civita

Pour calculer la connexion de Levi-Civita associée à la métrique de $\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R})$, on aura besoin du lemme suivant ;

Lemme 2.3 Le crochet de Lie de la base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ est donné par

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 0, \quad [e_1, e_3] = e_1 \quad \text{et} \quad [e_2, e_3] = -e_2 \\ [e_i, e_i] &= 0 \quad \forall i, j = \overline{1,3} \end{aligned}$$

Preuve. Les crochets de lie se calculent directement on utilisons la Proposition [2.2](#)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= e_1 e_2 - e_2 e_1 \\
&= \left(e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(e^z \frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(e^z \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

la preuve est la même pour les crochets $[e_1, e_3]$ et $[e_2, e_3]$. ■

D'où la proposition suivante.

Proposition 2.4 *La connexion de Lévi-civita ∇ de $SoL(3, \mathbb{R})$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= -e_3, & \nabla_{e_1} e_2 &= 0, & \nabla_{e_1} e_3 &= e_1, \\
\nabla_{e_2} e_1 &= 0, & \nabla_{e_2} e_2 &= e_3, & \nabla_{e_2} e_3 &= -e_2, \\
\nabla_{e_3} e_1 &= 0, & \nabla_{e_3} e_2 &= 0, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Preuve. On utilisons la formule de Kosul suivante

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \},$$

On va faire le calcul pour $\nabla_{e_2} e_2$ seulement.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_2, [e_2, e_1] \rangle + \langle e_2, [e_2, e_1] \rangle + \langle e_1, [e_2, e_2] \rangle \} = 0, \\
\langle \nabla_{e_1} e_2, e_2 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_2, [e_2, e_2] \rangle + \langle e_2, [e_2, e_2] \rangle + \langle e_2, [e_2, e_2] \rangle \} = 0, \\
\langle \nabla_{e_1} e_2, e_3 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_2, [e_2, e_3] \rangle + \langle e_2, [e_2, e_3] \rangle + \langle e_3, [e_2, e_2] \rangle \} = 1,
\end{aligned}$$

Alors

$$\nabla_{e_2} e_2 = e_3.$$

De la même manière on calcul les autres connexions. ■

2.3 Vecteurs de Killing dans $SoL(3, \mathbb{R})$

Supposons que le champ vectoriel de Killing ait la forme suivantes

$$K = a(x, y, z)e_1 + b(x, y, z)e_2 + c(x, y, z)e_3$$

En substituant K dans la relation Eq. (1.1) et en prenant $Y = e_i, Z = e_j$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on aura 9 équations

$$g(\nabla_{e_i} K, e_j) + g(\nabla_{e_j} K, e_i) = 0 \quad (2.3)$$

et puisque la métrique est symétrique le nombre d'équations se réduit à 6 équations. Pour $i = j = 1$, on a d'après la Proposition 2.4

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} K &= \nabla_{e_1} a e_1 + \nabla_{e_1} b e_2 + \nabla_{e_1} c e_3 \\ &= e_1(a)e_1 - a e_3 + e_1(b)e_2 + e_1(c)e_3 + c e_1 \\ &= (e_1(a) + c)e_1 + (e_1(b))e_2 + (e_1(c) - a)e_3 \\ &= \left(e^{-z} \frac{\partial a}{\partial x} + c\right) e_1 + \left(e^{-z} \frac{\partial b}{\partial x}\right) e_2 + \left(e^{-z} \frac{\partial c}{\partial x}\right) e_3 \end{aligned}$$

d'où

$$g(\nabla_{e_1} K, e_1) + g(\nabla_{e_1} K, e_1) = 2\left(e^{-z} \frac{\partial a}{\partial x} + c\right) = 0$$

de meme on obtient par l'Eq (2.3) le système d'équations différentielles (S) suivant

$$S : \begin{cases} e^{-z} \frac{\partial a}{\partial x} + c = 0 \\ e^z \frac{\partial b}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} c = 0 \\ e^{-z} \frac{\partial b}{\partial x} + e^z \frac{\partial a}{\partial y} + c = 0 \\ e^{-z} \frac{\partial c}{\partial x} - a + \frac{\partial a}{\partial z} = 0 \\ e^z \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

le système (S) devient

$$S : \begin{cases} e^{-z} \frac{\partial a}{\partial x} + c = 0 \\ b = b(x, z) \\ c = c(x, y) \\ e^{-z} \frac{\partial b}{\partial x} + e^z \frac{\partial a}{\partial y} + c = 0 \\ e^{-z} \frac{\partial c}{\partial x} - a + \frac{\partial a}{\partial z} = 0 \\ e^z \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On remarque que les solutions de (S) sont les champs de vecteurs de Killing dans $\mathbb{S}oL(3, \mathbb{R})$ sont donnés en base canonique par

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad K_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad K_3 = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.4)$$

les champs de vecteurs de Killing donnés dans la base (e_1, e_2, e_3) sont

$$K_1 = e^z e_1, \quad K_2 = e^{-z} e_2, \quad K_3 = x e^z e_1 - y e^{-z} e_2 - e_3,$$

Chapitre 3

Surfaces flux et fonctions flux scalaire accordées aux vecteurs magnetiques de Killing sur $SoL3$

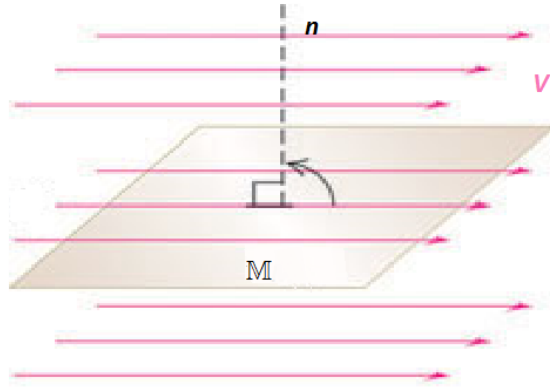
3.1 Surfaces flux et fonctions flux scalaire accordées aux vecteurs magnetiques de Killing

Définition 3.1 Soit M une surface différentiable dans une variété riemannienne (N, g) et \mathbf{n} son champ de vecteurs normal. On dit que M est une surface flux accordé au champ de vecteurs V sur (N, g) si

$$g(V, \mathbf{n}) = 0$$

partout sur M .

De plus, si V est un champ magnétique (voir [1] pour la définition des vecteurs magnétique) de Killing alors on dit que M est une surfaces flux accordés aux vecteurs magnetiques de Killing V . (voir Figure 3.1)



Surface flux \mathbb{M} pour un champs de vecteur linéaire V dans (\mathbb{R}^3, g_{euc})

Pour la suite des sous-section, pour simplifier, on note une surface flux M d'un champ vectoriel V par surface K -flux et si de plus V est un vecteur magnétique de Killing, on note M par surface K -flux magnétique.

Lemme 3.2 Soit f une fonction scalaire dans (N, g) , alors on a

$$\begin{aligned}\nabla f &= f_x \partial x + f_y \partial y + f_z \partial z \\ &= e^z f_x e_1 + e^{-z} f_y e_2 + f_z e_3\end{aligned}$$

Définition 3.3 Soit f une fonction sur (N, g) . Alors f est appelée une fonction flux scalaire correspondant au champ vectoriel magnétique K si sa valeur est constante sur la surface M de N , et

$$g(K, \nabla f) = 0$$

On note f par fonction K -flux scalaire .

On utilise par la suite les notations suivantes.

Notation 3.4 Soient $x(s, t)$, $y(s, t)$ et $z(s, t)$ trois fonctions dans \mathbb{R}^3 , on note par les fonctions $\psi_{1,2,3}(s, t) = c_{1,2,3}$ ($c_{1,2,3}$ sont des constantes), solutions des équations différentielles ordinaires suivantes

$$\frac{ds}{x_s} = -\frac{dt}{x_t}, \quad \frac{ds}{y_s} = -\frac{dt}{y_t} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{z_s} = -\frac{dt}{z_t}$$

respectivement.

Ici on présente une proposition pour résoudre les equations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1.

Proposition 3.5 Soient P et Q deux fonctions réelles telles que

$$P(s, t)\partial_s h(s, t) + Q(s, t)\partial_t h(s, t) = 0$$

Alors

1. Si $P \equiv 0$ (resp $Q \equiv 0$) alors $h(s, t) = h(s)$ (resp. $h(s, t) = h(t)$).
2. Si P et Q sont des fonctions non nulles on a

$$h(s, t) = \varphi(\psi(s, t))$$

telle que ψ est la solution de l'EDP $\frac{ds}{P} = -\frac{dt}{Q}$, et φ fonction réelle arbitraire.

Dans la suite, Nous utiliseront le logiciel informatique "Wolfram Mathematica" pour présenter les figures des surfaces dans l'espace Euclidien $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, g_{euc})$.

3.2 Surfaces K_1 -flux de Sol3

Dans cette sous-section, nous considérons les courbes magnétiques de Killing qui correspondent au champ de vecteur de Killing $K_1 = \partial_x$ donné par l'Eq. (2.4).

Soient M une surface dans Sol3 et $X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ sa paramétrisation. Les vecteurs tangents $X_s = \frac{\partial X}{\partial s}$ et $X_t = \frac{\partial X}{\partial t}$ sont décrits par

$$\begin{aligned} X_s &= x_s \partial x + y_s \partial y + z_s \partial z = e^z x_s e_1 + e^{-z} y_s e_2 + z_s e_3 \\ X_t &= x_t \partial x + y_t \partial y + z_t \partial z = e^z x_t e_1 + e^{-z} y_t e_2 + z_t e_3 \end{aligned}$$

Le vecteur normal \mathbf{n} a la surface M suivant la base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ est

$$\mathbf{n} = \frac{x_s \times x_t}{|x_s \times x_t|} = \frac{1}{|x_s \times x_t|} \times \begin{pmatrix} (y_s z_t - y_t z_s) e^{-z} \\ (x_t z_s - x_s z_t) e^z \\ x_s y_t - x_t y_s \end{pmatrix}$$

Maintenant, nous avons le théorème.

Théorème 3.6 *Soient M une surface dans Sol3 et $X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ son paramétrage. Alors M est une surface K_1 -flux magnétique si et seulement si*

$$y_s z_t - y_t z_s = 0 \quad (3.1)$$

Preuve. C'est une conséquence directe en utilisant le produit scalaire suivant la base orthonormée $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ définie dans la définition 3.1 du vecteur normal \mathbf{n} donné par l'Eq. (3.1) et le vecteur de Killing K_1 i.e.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}, K_1 \rangle &= \frac{1}{|x_s \times x_t|} \langle x_s \times x_t, K_1 \rangle = 0 \\ &= \frac{1}{|x_s \times x_t|} \langle (y_s z_t - y_t z_s) e^{-z}, K_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

donc

$$y_s z_t - y_t z_s = 0$$

■

Proposition 3.7 *Toutes les surfaces K_1 -flux dans Sol3 sont paramétrées par*

1. $X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), \varphi_1(\psi_2(s, t)))$,
2. $X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(\psi_3(s, t)), z(s, t))$,
3. $X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(s), \varphi_2(s))$
4. $X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$

où x, z, y et $\varphi_{1,2}$ sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} , et ψ est une fonction lisse arbitraire dans \mathbb{R} .

Preuve. Le paramétrage $X(s, t)$ est une solution générale de l'EDP linéaire du premier ordre

$$y_s z_t - y_t z_s = 0$$

1. Soit z une fonction arbitraire dans \mathbb{R}^2 , alors l'Eq. (3.1) devienne

$$A y_s - B y_t = 0$$

telle que

$$A = z_t \text{ et } B = z_s$$

par la Proposition 3.5, on a edo suivante

$$\frac{dt}{A} - \frac{ds}{B} = 0$$

et sa solution

$$\psi_3(s, t) = c \text{ constante}$$

d'où la solution de l'EDP linéaire Eq. (3.1) est

$$y(s, t) = \varphi(\psi_3(s, t))$$

ainsi la paramétrisation de la surface M est

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi(\psi_3(s, t)), z(s, t))$$

De la même manière, on montre que

$$X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), \varphi(\psi_2(s, t)))$$

2. On pose $y_t = 0$ i.e. $y(s, t) = \varphi_1(s) \neq 0$, donc

$$y_s z_t - y_t z_s = y_s z_t = z_t = 0$$

alors

$$z(s, t) = \varphi_2(s)$$

donc

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(s), \varphi_2(s))$$

de la même manière, on montre que

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

■

Exemple 3.8 1. Soit $y(s, t) = s \cos t$, d'après la Proposition 3.7, on a

$$\frac{ds}{\cos t} = -\frac{dt}{s \sin t}$$

sa solution est

$$s^2 + t^2 = c \text{ constante}$$

et

$$\psi_2(s, t) = s^2 - \ln 2(1 - \cos 2t) = c \text{ constante}$$

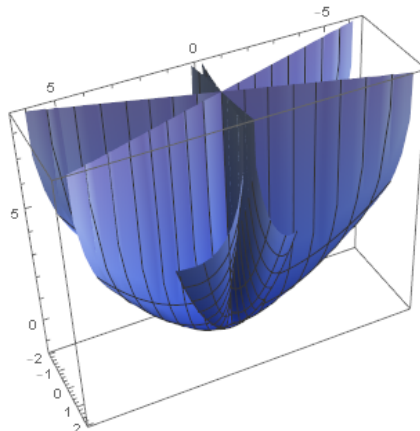
par conséquent, la solution générale de l'équation est

$$X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), \varphi(\psi_2(s, t)))$$

alors la surface M paramétrée par

$$X(s, t) = (x(s, t), s \cos t, \varphi(s^2 - \ln 2(1 - \cos 2t)))$$

est la surface K_1 -flux de Sol3, où φ et x sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 respectivement. (voir Figure 3.8)



Surface M , K_1 -flux de Sol3

2. Soit $z(s, t) = e^{st}$, de même, en utilisant la Proposition [3.7](#), on a

$$\frac{ds}{te^{st}} = \frac{-dt}{se^{st}}$$

sa solution est

$$s^2 + t^2 = c \text{ constante}$$

et

$$\psi_3(s, t) = s^2 + t^2 = c \text{ constante}$$

donc la solution générale de l'équation est

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi(\psi_3(s, t)), e^{st})$$

alors la surface \mathbb{M} paramétrée par

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi(s^2 + t^2), e^{st})$$

est la surface K_1 -flux dans Sol_3 , où φ et z sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 respectivement.

3. Soit $z(s, t) = e^{s+t}$ on a

$$\frac{ds}{e^{s+t}} = \frac{-dt}{e^{s+t}}$$

sa solution est

$$s + t = c \text{ constante}$$

et

$$\psi_3(s, t) = s + t = c \text{ constante}$$

donc la solution générale de l'équation est

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi(\psi_3(s, t)), e^{s+t})$$

alors la surface \mathbb{M} paramétrée par

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi(s + t), e^{s+t})$$

est la surface K_1 -flux dans Sol3, où φ et z sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 respectivement.

3.2.1 Fonction K_1 -flux scalaire de Sol3

Maintenant, nous pouvons présenter le théorème suivant.

Théorème 3.9 Soit \mathbb{M} une surface K_1 -flux magnétique dans Sol3. Alors la fonction f donnée par

$$f(x, y, z) = f(y, z)$$

et constante sur \mathbb{M} , est une fonction K_1 -flux scalaire sur \mathbb{M} .

Preuve. En utilisant la Définition 3.3 et le Lemme 3.2, On a

$$\begin{aligned} g(K_1, \nabla f) &= 0 \\ \langle (e_1, 0, 0), \nabla f \rangle &= 0 \end{aligned}$$

alors

$$g(K_1, \nabla f) = e^{2z} f_x = 0$$

donc $f_x = 0$, en résolvant l'EDP du premier ordre, on obtient

$$f(x, y, z) = f(y, z)$$

(i.e. f est une fonction arbitraire qui ne dépend que de y et z), alors la fonction f flux scalaire de Killing K_1 elle doit être également constante sur \mathbb{M} . ■

Exemple 3.10 En utilisant l'exemple 3.8, nous avons la surface K_1 -flux magnétique et paramétrée par

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi(s + t), e^{s+t}) = (\cos st, \sqrt{e^{s+t}}, e^{s+t})$$

La fonction f flux scalaire de Killing K_1 , du théorème 3.9, est de la forme

$$f(x, y, z) = f(y, z)$$

et doit être constant sur \mathbb{M} , (i.e. $f(X(s, t)) \equiv C$ une constante).

Soit

$$f(X(s, t)) = f(y, z) = y^2 - z + a \quad , a \in \mathbb{R}$$

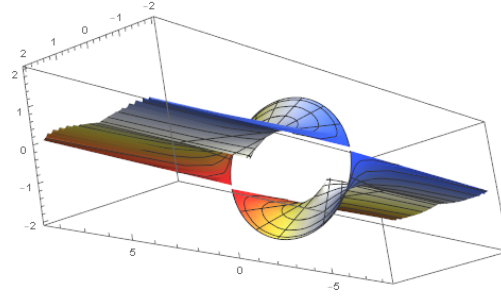
on obtient

$$f(X(s, t)) = a \text{ une constante}$$

alors f est la fonction scalaire K_1 -flux à la surface \mathbb{M} paramétrée par

$$X(s, t) = (\cos st, \sqrt{e^{s+t}}, e^{s+t})$$

donné dans le figure [3.10](#)



Surface \mathbb{M} , K_1 -flux magnétique.

3.3 Surfaces K_2 -flux de $SoL3$

Dans cette partie, par analogie avec la précédente, on considère les courbes magnétiques de Killing qui correspondent au champ de vecteur de Killing $K_2 = \partial_y$ donné par l'Eq. [\(2.4\)](#).

Dans ce cas, on a

Théorème 3.11 Soient \mathbb{M} une surface dans $SoL3$ et $X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ son paramétrage. Alors \mathbb{M} est une surface K_1 -flux magnétique si et seulement si

$$x_s z_t - x_t z_s = 0$$

Preuve. De la même manière que la preuve K_2 , on a

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}, K_2 \rangle &= \frac{1}{|x_s \times x_t|} \langle x_s \times x_t, K_2 \rangle = 0 \\ &= \frac{1}{|x_s \times x_t|} \langle (x_t z_s - x_s z_t) e^z, K_2 \rangle = 0\end{aligned}$$

donc

$$x_s z_t - x_t z_s = 0 \tag{3.2}$$

■

Proposition 3.12 *Toutes les surfaces K_2 -flux dans Sol3 sont paramétrées par*

1. $X(s, t) = (\varphi(\psi_3(s, t)), y(s, t), z(s, t)),$
2. $X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), \varphi(\psi_1(s, t))),$
3. $X(s, t) = (\varphi_1(s), y(s, t), \varphi_2(s))$
4. $X(s, t) = (\varphi_1(t), y(s, t), \varphi_2(t))$

où x, y, z et $\varphi_{1,2}$ sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} , et ψ est une fonction lisse arbitraire dans \mathbb{R}

Preuve. Le paramétrage $X(s, t)$ est une solution générale de l'EDP linéaire du premier ordre

$$x_s z_t - x_t z_s = 0$$

1. Soit x une fonction arbitraire dans \mathbb{R}^2 , alors l'Eq. (3.2) devienne

$$A z_s - B z_t = 0$$

telle que

$$A = x_t \text{ et } B = x_s$$

par la Proposition 3.5, on a l'EDO suivante

$$\frac{dt}{A} - \frac{ds}{B} = 0$$

et sa solution

$$\psi_1(s, t) = c \text{ constante}$$

d'où la solution de l'EDP linéaire Eq. (3.2) est

$$z(s, t) = \varphi(\psi_1(s, t))$$

ainsi la paramétrisation de la surface \mathbb{M} est

$$X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), \varphi(\psi_1(s, t)))$$

De la même manière, on montre que

$$X(s, t) = (\varphi(\psi_3(s, t)), y(s, t), z(s, t))$$

2. On pose $z_t = 0$ i.e. $z(s, t) = \varphi_1(s) \neq 0$, donc

$$x_s z_t - x_t z_s = x_t z_s = x_t = 0$$

alors

$$x(s, t) = \varphi_2(s)$$

donc

$$X(s, t) = (\varphi_2(s), y(s, t), \varphi_1(s))$$

de la même manière, on montre que

$$X(s, t) = (\varphi_1(t), y(s, t), \varphi_2(t))$$

■

Exemple 3.13 1. Soit $x(s, t) = \sin(s + t)$, d'après la Proposition (3.12), on a

$$\frac{ds}{\cos(s + t)} = -\frac{dt}{\cos(s + t)}$$

sa solution est

$$s + t = c \text{ constante}$$

et

$$\psi_1(s, t) = s + t = c \text{ constante}$$

par conséquent, la solution générale de l'équation

$$X(s, t) = (\sin(s + t), y(s, t), \varphi(\psi_1(s, t)))$$

alors la surface \mathbb{M} paramétrée par

$$X(s, t) = (\sin(s + t), y(s, t), \varphi(s + t))$$

est la surface K_2 -flux dans Sol3 , où φ et x sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 respectivement.

2. Soit $z(s, t) = (1 + \cos t) \sin s$, de même, en utilisant la Proposition [3.12](#), on a

$$\frac{ds}{\sin t \sin s} = \frac{dt}{(1 + \cos t) \cos s}$$

sa solution est

$$\ln |\sin s| - \ln |(1 - \cos t)| = c \Rightarrow \ln \frac{(1 - \cos t)}{\sin s} = c \text{ constante}$$

et

$$\psi_3(s, t) = \ln \frac{(1 - \cos t)}{\sin s} = c \text{ constante}$$

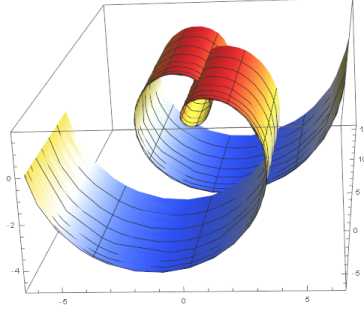
donc la solution générale de l'équation est

$$X(s, t) = (\varphi(\psi_3(s, t)), y(s, t), (1 + \cos t) \sin s)$$

alors la surface \mathbb{M} paramétrée par

$$X(s, t) = \left(\varphi \left(\ln \frac{(1 - \cos t)}{\sin s} \right), y(s, t), (1 + \cos t) \sin s \right)$$

est la surface K_2 -flux dans Sol_3 , où φ et z sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 respectivement. (voir Figure 3.13)



Surface \mathbb{M} , K_2 -flux dans Sol_3

3.3.1 Fonction K_2 -flux scalaire de Sol_3

Théorème 3.14 Soit \mathbb{M} une surface K_2 -flux magnétique dans Sol_3 . Alors la fonction f donnée par

$$f(x, y, z) = f(x, z)$$

et constante sur \mathbb{M} , est une fonction K_2 -flux scalaire sur \mathbb{M} .

Preuve. En utilisant la Définition 3.3 et le Lemme 3.2, nous avons

$$\begin{aligned} g(K_2, \nabla f) &= 0 \\ \langle (0, e_2, 0), \nabla f \rangle &= 0 \end{aligned}$$

alors

$$g(K_2, \nabla f) = e^{-2z} f_y = 0$$

donc $f_y = 0$ en résolvant l'EDP du premier ordre, on obtient

$$f(x, y, z) = f(x, z)$$

(i.e. f est une fonction arbitraire qui ne dépend que de x et z), alors la fonction f flux scalaire de Killing K_2 elle doit être également constante sur \mathbb{M} . ■

Exemple 3.15 En utilisant l'exemple 3.13, nous avons la surface \mathbb{M} , K_2 -flux magnétique et

paramétrée par

$$X(s, t) = (\sin(s + t), y(s, t), \varphi(s + t)) = (\sin(s + t), \cos(s^2 + t^2), \sin(s + t))$$

La fonction f flux scalaire de Killing K_2 , du théorème [3.14](#), est de la forme

$$f(x, y, z) = f(x, z)$$

et doit être constant sur \mathbb{M} , (i.e. $f(X(s, t)) \equiv C$ une constante).

Soit

$$f(X(s, t)) = f(x, z) = \arcsin x - \sin z + a \quad , a \in \mathbb{R}$$

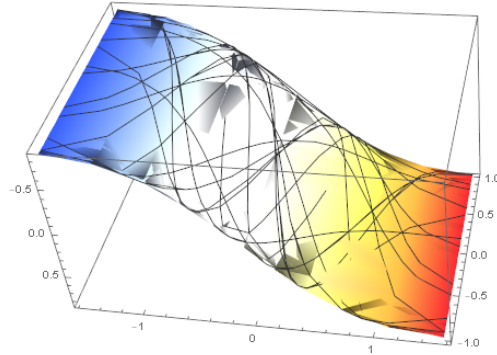
on obtient

$$f(X(s, t)) = a \quad \text{une constante}$$

alors f est la fonction scalaire K_2 -flux à la surface \mathbb{M} paramétrée par

$$X(s, t) = (\sin(s + t), \cos(s^2 + t^2), \arcsin(s + t))$$

donné dans le figure [3.15](#)



Surface \mathbb{M}_1 , K_2 -flux magnetique.

3.4 Surfaces K_3 -flux de Sol_3

Dans cette partie, par analogie avec les précédentes, on considère les surfaces magnétiques de Killing qui correspondent au champ de vecteur de Killing

$$K_3 = x\partial_x - y\partial_y - \partial_z$$

donné par l'Eq. (2.4). Dans ce cas, on a ;

Théorème 3.16 *Soient \mathbb{M} une surface dans Sol_3 et $X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ son paramétrage. Alors \mathbb{M} est une surface K_3 -flux magnétique si et seulement si*

$$\begin{cases} x_s y_t - x_t y_s = 0 \\ x_s z_t - x_t z_s = 0 \\ y_s z_t - y_t z_s = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Preuve. C'est une conséquence directe en utilisant le produit scalaire dans la base orthonormée $(e_i)_{i=1,3}$ définie dans la Définition 3.1 du vecteur normal \mathbf{n} donné par l'Eq. (3.3) et le vecteur de Killing K_3 .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}, K_3 \rangle &= \frac{1}{|x_s \times x_t|} \langle x_s \times x_t, K_3 \rangle = 0 \\ &= \frac{1}{|x_s \times x_t|} \left\langle \begin{pmatrix} (y_s z_t - y_t z_s) e^{-z} \\ (x_t z_s - x_s z_t) e^z \\ x_s y_t - x_t y_s \end{pmatrix}, K_3 \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} x_s y_t - x_t y_s = 0 \\ x_s z_t - x_t z_s = 0 \\ y_s z_t - y_t z_s = 0 \end{cases}$$

■

Proposition 3.17 *Dans cette section, il y a 64 équations pour les surfaces K_3 -flux dans Sol_3 ,*

qui sont réduites à ce qui suit :

1. $X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(\psi_1(s, t)), \varphi_2(\psi_1(s, t))),$
2. $X(s, t) = (\varphi_1(\psi_2(s, t)), y(s, t), \varphi_2(\psi_2(s, t))),$
3. $X(s, t) = (\varphi_1(\psi_3(s, t)), \varphi_2(\psi_3(s, t)), z(s, t))$

où x, z, y et $\varphi_{1,2}$ sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} , et ψ est une fonction lisse arbitraire dans \mathbb{R} , respectivement, les fonctions réelles $\bar{\psi}_{1,3}(u, v)$ sont des fonctions données dans la Notation 3.4 et nous supposons $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)} \neq 0$

Preuve. Le paramétrage $X(s, t)$ est une solution générale de l'EDP linéaire du premier ordre

$$S : \begin{cases} x_s y_t - x_t y_s = 0 \\ x_s z_t - x_t z_s = 0 \\ y_t z_s - y_s z_t = 0 \end{cases}$$

disparaître, en utilisant la Notation 3.4 et la Propositions 2.2 la solution des équations $S_{1,2}$ par et en prenant :

1. $x(s, t) = x(s)$ (i.e. $x_t = 0$) est $y(s, t) = y(s)$ et $z(s, t) = z(s)$ (i.e. $y_t = z_t = 0$) et la solution générale de (S) est réduite à une équation paramétrique de courbe

$$X(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

par conséquent, il n'y a pas de surface K_3 -flux magnétique de killing, dans ce cas (similaire le résultat est obtenu lorsque $x(s, t) = x(t)$).

2. $x_s, x_t \neq 0$ est

$$y(s, t) = \varphi_1(\psi_1(s, t)) \quad \text{et} \quad z(s, t) = \varphi_2(\psi_1(s, t))$$

où $\varphi_{1,2}$ sont des fonctions lisses arbitraires dans \mathbb{R} . Le système (S) tient si l'équation $(S)_3$ tient c'est-à-dire

$$\varphi_1(\psi_1(s, t))_t \varphi_2(\psi_1(s, t))_s - \varphi_1(\psi_1(s, t))_s \varphi_2(\psi_1(s, t))_t = 0$$

la dernière équation est toujours satisfait lorsque

$$\frac{\partial}{\partial(s, t)} \psi_{1,2} \neq 0$$

ce qui est toujours vrai dans ce cas.

Par conséquent, les équations paramétriques de \mathbb{M} sont représentées comme suit

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(\psi_1(s, t)), \varphi_2(\psi_1(s, t)))$$

De la même manière, nous obtenons les assertions 2 et 3 lorsque nous supposons que y et z sont respectivement des fonctions arbitraires. ■

Exemple 3.18 1. Soit $y(s, t) = st^2$, d'après la Proposition [3.17](#), on a

$$\frac{ds}{t^2} = -\frac{dt}{2st}$$

sa solution est

$$2s^2 + t^2 = c \text{ constante}$$

et

$$\psi_1(s, t) = s^2 + t^2 = c \text{ constante}$$

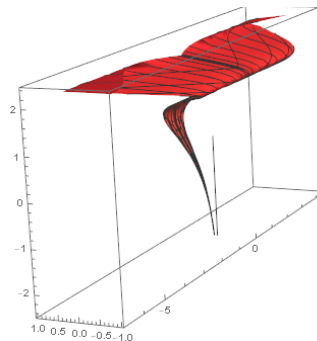
donc la solution générale de l'équation est

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(\psi_1(s, t)), \varphi_2(\psi_1(s, t)))$$

alors la surface \mathbb{M} paramétrée par

$$X(s, t) = (st^2, \varphi_1(2s^2 + t^2), \varphi_2(2s^2 + t^2))$$

est K_3 -flux dans Sol3. (voir Figure [3.18](#))



Surface \mathbb{M} , K_3 -flux dans Sol3

3.4.1 Fonction K_3 -flux scalaire de $SoL3$

Pour les fonctions K_3 -flux Scalaires magnétiques , nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.19 *Soit \mathbb{M} une surface K_3 -flux magnétiques dans $Sol3$. Alors la fonction f donnée par*

$$f(x, y, z) = \Psi(2 \ln x + e^{2z}, 2 \ln y - e^{-2z})$$

et constante sur \mathbb{M} , est une fonction K_3 -flux scalaire scalaire sur \mathbb{M} .

Preuve. En utilisant la Définition [3.3](#) et le Lemme [3.2](#), nous avons

$$\begin{aligned} g(K_3, \nabla f) &= 0 \\ \langle (0, 0, e_3), \nabla f \rangle &= 0 \end{aligned}$$

alors

$$g(K_3, \nabla f) = xe^{2z} f_x - ye^{-2z} f_y - f_z = 0$$

en résolvant l'EDP de premier ordre linéaire , nous obtenons

$$f(x, y, z) = \Psi(2 \ln x + e^{2z}, 2 \ln y - e^{-2z})$$

La fonction f flux scalaire magnétique et constante sur \mathbb{M} , où Ψ est une fonction arbitraire. ■

Exemple 3.20 *En utilisant l'exemple [3.18](#) , nous avons la surface K_3 -flux magnetique et paramétrée par*

$$X(s, t) = (x(s, t), \varphi_1(\psi_1(s, t)), \varphi_2(\psi_1(s, t))) = (st^2, \varphi_1(2s^2 + t^2), \varphi_2(2s^2 + t^2))$$

La fonction f flux scalaire de Killing K_3 , du théorème [3.19](#), est de la forme

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \Psi(2 \ln x + e^{2z}, 2 \ln y - e^{-2z}) \\ &= \Psi(2 \ln(st^2) + e^{2\varphi_2(2s^2+t^2)}, 2 \ln(\varphi_1(2s^2 + t^2)) - e^{-2\varphi_2(2s^2+t^2)}) \end{aligned}$$

et constante sur \mathbb{M} , En choisissant

$$\Psi(u, v) = v, \quad \varphi_1(u) = e^{\frac{u}{2}} \text{ et } \varphi_2(u) = -\frac{1}{2} \ln u$$

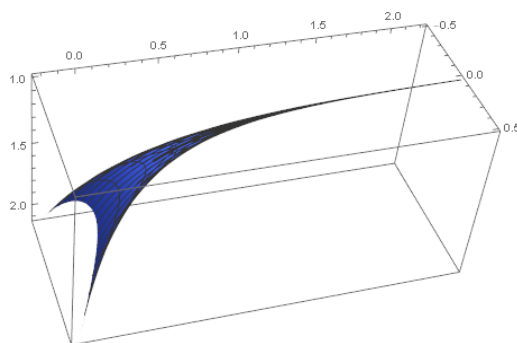
nous obtenons

$$f(x, y, z) = 2 \ln x + e^{2z} \text{ et } f(X(s, t)) = \Psi(0)$$

alors f est constante sur \mathbb{M} paramétrée par

$$X(s, t) = (st^2, \exp(s^2 + \frac{t^2}{2}), -\frac{1}{2} \ln(2s^2 + t^2))$$

(voir Figure [3.20](#))



Surface \mathbb{M} , K_3 -flux magnétique.

Bibliographie

- [1] M. Barros, A. Romero. Magnetic vortices, EPL 77 (2007), 34002.
- [2] Z. Erjavec, J. Inoguchi. Magnetic curves in Sol3, J. of Nonlinear Math. Phy., 25(2)(2018), 198-210. doi : 10.1080/14029251.2018.1452670
- [3] Z. Ozdemir , I. Gok, Y. Yayli, F.N. Ekmekci. Killing magnetic flux surfaces in Euclidean 3-space, Honam Math. J. 41(2), (2019), 329-342. doi.org/10.5831/HMJ.2019.41.2.329
- [4] M. Troyanov. L'horizon de SOL. Expo. Math. 16, 441–479 (1998)
- [5] A. Walter. Strauss. Partial differential equations : An introduction, ISBN 0-471-57364-7 (Wiley). The Mathematical Gazette, 77(479), Lord, N. (1993), 286-287. doi :10.2307/3619758
by
- [6] http://fusionwiki.ciemat.es/wiki/Flux_surface