

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université de Saida - Dr Moulay Tahar.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, statistique des processus et
applications.

par

Asma Azizi¹

Sous la direction de

Dr. L. Bousmaha

Thème :

Un modèle stochastique pour un système proie prédateur

Soutenue le 16/06/2022 devant le jury composé de

Pr. S. Rahmani	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
Dr. L. Bousmaha	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
Dr. S. Idrissi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examineur

Année univ.: 2021/2022

1. e-mail : asmaazizi245@gmail.com

Remerciements

*J'adresse en premier lieu mon louange à **ALLAH** mon **DIEU** le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

J'exprime mon profond remerciement à ma directrice de mémoire, « Dr. L. Bousmaha », pour l'aide qu'elle m'a apportée, pour sa patience et la disponibilité dont elle a fait preuve à mon égard et de son œil critique qui je à été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

J'espère que mon effort et mon résultat a été à la mesure de s'attente.

*Je tiens également à remercier les membres du jury **Pr. S. Rahmani, Dr. S. Idrissi** qui ont bien voulu accepter de porter leur jugement sur ce modeste travail que je souhaite à la mesure de leur satisfaction.*

Je tiens à remercier très sincèrement l'ensemble des membres du laboratoire LMSSA très spécialement :Pr. A. Kandouci, Dr. F. Mokhtari, Dr. F. Benziadi, Dr. R. Rouane, Pr. S. Rahmani.

Mon remerciement s'étend aussi à l'administration et à tous mes professeurs qui m'ont enseigné et qui, par leur compétence, m'ont soutenu dans la poursuite de nos études et qui ont contribué à ce couronnement.

Bien sûr, je n'oublie pas ceux qui ont travaillé le plus dur pour me voir ici, ceux qui ont sacrifié leurs rêves pour que mon rêve se réalise, ceux qui méritent l'amour, le respect et tous les remerciements et mon gratitude : mes parents.

Table des matières

1 Généralités sur les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles stochastiques	8
1.1 Systèmes déterministes	8
1.1.1 Étude d'une équation différentielle ordinaire	8
1.1.1.1 Définition, existence de solutions	8
1.1.1.2 Points d'équilibre, stabilité locale et portrait de phase	9
1.1.2 Deux équations différentielles ordinaires	14
1.1.2.1 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre	15
1.1.2.2 Système linéaire de deux équations différentielles ordinaires	17
1.1.2.3 Solutions d'un système linéaire en dimension 2	19
1.1.2.4 Typologie des systèmes planaires linéaires	26
1.1.2.5 Stabilité asymptotique, stabilité neutre, stabilité structurelle	29
1.2 Systèmes stochastiques	32
1.2.1 Le mouvement Brownien	33
1.2.2 Solutions aux EDSs linéaires	38
1.2.3 Existence et unicité des solutions fortes	42
1.2.4 Solutions faibles aux EDSs	43
1.2.5 Construction de solutions faibles	45
2 Le modèle ratio-dépendant d'Arditi-Ginzburg	51
2.1 Présentation du modèle	51
2.2 Étude du modèle	52
2.2.1 Bornitude et positivité	52
2.2.2 Points d'équilibre du modèle	53

2.2.3	Stabilité locale en dehors de l'origine	55
2.3	A propos de l'origine	57
3	Analyse qualitative d'un système stochastique proie prédateur de ratio dépendant	63
3.1	Présentation du modèle :	63
3.1.1	Points d'équilibre du modèle	64
3.2	Existence, unicité et la bornitude de la solution positive	67
3.3	Le comportement à long terme du système	73
3.3.1	Persistance	74
3.3.2	Extinction	84
3.3.3	Exemple	88
	Bibliographie	95

Introduction générale

La relation dynamique entre les prédateurs et leurs proies a longtemps été et continuera d'être l'un des thèmes dominants en écologie en raison de son existence et de son importance universelles [17]. Les modèles classiques sont pour la plupart des variantes du modèle Lotka (un physicien chimiste)-Volterra (un mathématicien) qui est le produit de la chimie, de la physique et des mathématiques. Inévitablement, les modèles traditionnels ont été remis en question par plusieurs biologistes (voir, par exemple, [1, 2, 19]) sur la base du fait que les réponses fonctionnelles et numériques sur des échelles de temps écologiques typiques devraient dépendre des densités des prédateurs et des proies (très probablement et simplement de leur ratio), en particulier lorsque les prédateurs doivent rechercher de la nourriture (et donc partager ou concourir pour la nourriture). Une telle réponse fonctionnelle est appelée une fonction de réponse de ratio dépendante et ces hypothèses ont été fortement étayées par de nombreuses expériences et observations de terrain et de laboratoire [1, 2, 3, 4, 20].

Le modèle classique des systèmes proie prédateur peut être écrit sous sa forme classique par un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires du premier ordre comme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xF(x, k) - yp(x), \\ \frac{dy}{dt} = y(-d + q(x)). \end{cases}$$

Ce modèle a reçu de nombreuses attentions de la part des mathématiciens ainsi que des écologistes, où $x = x(t)$ et $y = y(t)$ représentent respectivement les densités de population des espèces de proies et de prédateurs. La fonction $F(x, k)$ dénote le taux de croissance spécifique dépendant de la densité des proies en l'absence de prédateur et $k > 0$ est la capacité de charge de la proie. Dans l'équation de croissance des prédateurs, $d > 0$ est le taux de mortalité naturelle du prédateur. Les prédateurs consomment leur proie avec une

réponse fonctionnelle $p(x)$ et sa contribution à la croissance du prédateur $q(x)$.

La relation entre $p(x)$ et $q(x)$ est donnée par

$$q(x) = fp(x), \quad (2)$$

où " f " est l'efficacité de conversion et satisfait la condition $0 < f < 1$. La réponse fonctionnelle $p(x)$ et sa contribution à la la croissance des prédateurs $q(x) = fp(x)$ est le seul lien entre la dynamique proie-prédateur [1]. Nous allons considérer la forme logistique de la fonction de croissance des proies en l'absence de prédateur comme

$$F(x, k) = a \left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad (3)$$

où ' a ' est le taux de croissance intrinsèque et ' k ' est la capacité de charge environnementale, les deux sont des constantes positives. Dans la dynamique des populations proie prédateur, la réponse fonctionnelle $p(x)$ fait référence au changement de densité des proies. Un bon nombre de littérature ont déjà apparus pour les interactions proie prédateur où les modèles sont basés sur la réponse fonctionnel des modèles dépendant des proies [3,4,6,7]. Dans la plupart des cas, $p(x)$ est donné par $p(x) = \frac{ax}{b+x}$ (Holling type-II), $p(x) = \frac{ax^2}{b+x^2}$ (Holling type-III), $p(x) = \frac{ax^2}{b+x+cx^2}$ (Holling type-IV), $p(x) = \frac{ax^\theta}{b+x^\theta}$, $\theta > 0$, ou une forme équivalente [8]. Selon Berryman [12], ce type de modèles avec une réponse fonctionnelle dépendante des proies est incapable de satisfaire le minimum propriété biologique que « lorsque les ressources sont faibles par rapport à la densité de population, le prédateur par habitant le taux de croissance devrait diminuer avec sa densité ». Cela est dû au fait que les taux de croissance par habitant des prédateurs sont une fonction de la densité des proies uniquement, qui est indépendante de la densité des prédateurs. Pour surmonter cette situation, Arditi et Ginzburg [1] ont suggéré une réponse fonctionnelle de ratio-dépendant, où la réponse fonctionnelle peut être approximée par une fonction du rapport proie/prédateur, ce qui nous conduit à la réponse fonctionnelle de ratio-dépendant du $p(\frac{x}{y})$. Mon travail sera basée sur un modèle

proie-prédateur de ratio dépendant de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp \left(\frac{x}{y}\right), \\ \frac{dy}{dt} = \left(fp \left(\frac{x}{y}\right) - d\right) y. \end{cases}$$

Mon mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base qui sont essentielles à l'étude des systèmes dynamiques déterministes et stochastiques.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le comportement qualitative du modèle proie-prédateur de ratio-dépendant d'Arditi-Ginzburg.

Le troisième chapitre consiste à l'analyse qualitative d'un système stochastique proie prédateur de ratio dépendant. Dans la première section, nous considérons le système (3.3) qui hérite des propriétés similaires au système déterministe, et des propriétés qui n'est pas. Dans la deuxième section, nous montrons que le système (3.3) admet une unique solution positive $(x(t), y(t))$, pour toute valeur initiale $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$ en utilisant la formule d'Itô et le théorème de comparaison des équations stochastiques. En outre, nous constatons également que la population de proie et la population de prédateur du système (3.3) sont bornés en moyenne. Finalement, un exemple est présenté pour confirmer ces résultats.

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats nécessaires utilisés pour l'étude des systèmes dynamiques déterministes et stochastiques.

1.1 Systèmes déterministes

1.1.1 Étude d'une équation différentielle ordinaire

1.1.1.1 Définition, existence de solutions

Définition 1.1. [7] *Équation différentielle du premier ordre :*

Soit t une variable réelle et $x(t)$ une fonction dérivable de t à valeur réelle, où t dans notre cas est le temps. Une équation différentielle du premier ordre s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (1.1)$$

Si la fonction f dépend du temps l'équation (1.1) est dite non autonome.

Au contraire, on dit que l'équation est autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) est du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée d'ordre 1 de la variable x . On dit que l'équation est linéaire si la fonction f est du premier degré par rapport à la variable x . Sinon, on dit qu'elle est non linéaire.

Une solution $x(t, x_0)$ de l'équation différentielle est une fonction du temps qui vérifie l'équation différentielle. On peut penser à un point mobile dont l'abscisse x change avec le temps. Une solution particulière dépend de la condition initiale x_0 , c'est-à-dire de la valeur de la variable à un instant initial t_0 :

$$x_0 = x(t_0).$$

Lorsque la fonction $\frac{df}{dx}$ est continue sur un certain intervalle de $I \subset \mathbb{R}$ de la variable x , il y a existence et unicité de la solution pour toute condition initiale $x_0 \in I$. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 1.1. [7] *On considère une équation différentielle donnée par l'équation (1.2) où la fonction f est définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Si la fonction f est dérivable et de dérivée continue sur I , alors pour tout $x_0 \in I$, il existe T un réel positif et une fonction x définie sur $[-T, T] \times \{x_0\}$ telle que $x(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle pour tout $t \in [-T, T]$. De plus, la solution est unique, c'est-à-dire que si y est également une solution de l'équation différentielle, alors $x(t, x_0) = y(t, y_0)$ pour tout $t \in [-T, T]$.*

On appelle différentielle de la fonction $f(x)$ la variation de cette fonction pour une variation infinitésimale dx de la variable x . La différentielle est notée df et est définie par l'expression suivante :

$$df = \frac{df}{dx} dx.$$

Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 1.2. [7] *On considère une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La différentielle de la fonction f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout x associe $\frac{df}{dx}(x)$. La notation dx représente l'application qui à tout x associe 1, $dx(x) = 1$.*

1.1.1.2 Points d'équilibre, stabilité locale et portrait de phase

En général on ne sait pas résoudre l'équation différentielle (1.2). On fait alors une étude qualitative de ses solutions. Cette étude commence par la recherche des points d'équilibre

(encore appelés singularités, points stationnaires, points fixes, ou simplement équilibres) de l'équation différentielle. En un point d'équilibre, la vitesse s'annule :

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Les points d'équilibres que nous notons x^* , vérifient donc l'équation suivante :

$$f(x^*) = 0.$$

Une équation différentielle peut admettre un point d'équilibre, plusieurs points d'équilibre, ou aucun. Dans le cas où l'équation admet plusieurs points d'équilibre il est utile de les noter avec un indice, $x_i^*, i \in [1, N]$, avec N le nombre d'équilibres.

L'étape suivante consiste à déterminer si un point d'équilibre est localement stable. Pour cela, on considère un point $x(t)$ voisin d'un équilibre x^* . Définissons une nouvelle variable locale, $u(t) = x(t) - x^*$. La variable $u(t)$ est égale à zéro lorsque $x(t) = x^*$. Nous allons maintenant rechercher l'équation différentielle qui gouverne la variable $u(t)$ quand la variable $u(t)$ reste petite, c'est-à-dire que $x(t)$ reste au voisinage de x^* . Nous avons :

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x),$$

car x^* est une constante. Comme la variable $x(t)$ reste dans le voisinage de l'équilibre x^* , nous développons la fonction $f(x)$ en série de Taylor au premier ordre au voisinage de x^* :

$$\frac{du}{dt} = f(x^*) + \frac{df}{dx}(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*).$$

En utilisant la définition de l'équilibre, nous avons $f(x^*) = 0$, ce qui finalement nous donne :

$$\frac{du}{dt} = \lambda^* u + o(u),$$

avec $\lambda^* = \frac{df}{dx}(x^*)$. Si on néglige le terme $o(u)$, l'équation différentielle ci-dessus admet la solution suivante :

$$u(t) = u(0) \exp(\lambda^* t).$$

La stabilité du point d'équilibre est donc donnée par le signe de λ^* .

- si $\lambda^* < 0$, $u(t)$ tend vers 0 lorsque le temps tend vers $+\infty$ et par conséquent $x(t)$ tend vers x^* . On dit que l'équilibre est stable. Toute solution correspondant à une condition initiale prise dans le voisinage de l'équilibre donne lieu à un retour vers cet équilibre.
- si $\lambda^* > 0$, $u(t)$ tend vers $\pm\infty$, selon le signe de $u(0)$, et par conséquent $x(t)$ s'éloigne de part et d'autre de x^* . On dit que l'équilibre est instable. Toute condition initiale prise dans le voisinage de l'équilibre conduit à une solution qui ne retourne pas à l'équilibre mais qui au contraire s'en éloigne.
- si $\lambda^* = 0$, la linéarisation n'apporte pas d'information sur la dynamique locale et il est nécessaire de considérer les termes d'ordre supérieur à 1 dans le développement en série de Taylor de la fonction $f(x)$ au voisinage de x^* .

Remarque 1.1. Il faut bien noter que la stabilité dont nous venons de parler est locale, c'est-à-dire que notre critère ne s'applique qu'au voisinage de l'équilibre x^* , puisque nous avons négligé des termes qui ne sont petits qu'au voisinage de le point d'équilibre.



FIGURE 1.1: (a) Portrait de phase d'un équilibre stable. (b) Portrait de phase d'un équilibre instable.

La figure 1.1 présente les portraits de phase, c'est-à-dire la représentation sur l'axe x du point d'équilibre et de l'évolution des trajectoires dans son voisinage. Les flèches indiquent le signe de la dérivée $\frac{dx}{dt} = f(x)$, tournées vers les x positifs si $x(t)$ augmente avec le temps et vers les x négatifs si $x(t)$ diminue avec le temps. Par conséquent, les flèches sont dirigées vers l'équilibre de part et d'autre lorsque celui-ci est stable, figure 1.1a, ce qui signifie que toute trajectoire avec une condition initiale prise dans le voisinage de l'équilibre y retourne. Au contraire, elles sont dirigées vers l'extérieur de l'équilibre s'il est instable, figure 1.1b.



FIGURE 1.2: (a) Portrait de phase d'un shunt positif. (b) Portrait de phase d'un shunt négatif.

Rappel sur le développement d'une fonction $f(x)$ de Taylor au voisinage d'un point \bar{x} :

Le développement de Taylor d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point \bar{x} est donné par l'expression suivante :

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots \\ + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(\bar{x})(x - \bar{x})^n + o((x - \bar{x})^n),$$

où $o((x - \bar{x})^n)$ est appelé « petit o » de $(x - \bar{x})^n$, et est une fonction qui tend vers 0 plus vite que $(x - \bar{x})^n$ lorsque $x \rightarrow \bar{x}$. On peut aussi écrire :

$$o((x - \bar{x})^n) = (x - \bar{x})^n \varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow \bar{x}$. L'approximation du premier ordre consiste à tronquer la série à partir du terme de second degré.

Le cas $\lambda^* = 0$ mérite d'être traité à part. En effet, dans ce cas, le point d'équilibre peut être stable, instable ou encore conduire à deux nouveaux portraits de phase représentés sur la figure 1.2 et appelés respectivement shunt positif (resp. négatif), si la vitesse est positive (resp. négative) de part et d'autre du point d'équilibre. Ces deux types d'équilibres sont également appelés équilibres semi-stables (terminologie qui s'étendra dans le cas de plusieurs variables).

Lorsque $\lambda^* = 0$, il est nécessaire de prendre en compte les termes d'ordre supérieur du développement limité au voisinage du point d'équilibre. Lorsque le premier terme s'annule, le développement à l'ordre deux est suivant :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(x^*)u^2 + o(u^2).$$

La nature du point d'équilibre est donnée par le signe de la dérivée seconde $\frac{d^2 f}{dx^2}(x^*)$, un shunt positif si elle est positive et un shunt négatif si elle est négative. Si le terme d'ordre deux est également nul, il faut considérer le terme d'ordre trois, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3}(x^*)u^3 + o(u^3).$$

Dans ce cas, il est évident que si la dérivée d'ordre trois est positive, le point est localement instable et stable si elle est négative. Et ainsi de suite, en recherchant la première dérivée d'ordre n non nulle, il est possible de connaître la nature de la stabilité locale du point d'équilibre.

Définition 1.3. [7] *Un équilibre x^* de l'équation différentielle (1.2) est dit hyperbolique si $\frac{df}{dx}(x^*)$ est non nul.*

Les équilibres hyperboliques ont cette particularité qu'on peut comprendre le comportement local de l'équation différentielle seulement au moyen de la dérivée de f en x^* .

D'un point de vue pratique, il peut aussi être intéressant de tracer le graphe de la fonction $f(x)$. En effet, l'équation (1.2) montre que les points d'équilibre de l'équation différentielle correspondent aux zéros de la fonction f , et que le signe de la fonction $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) permet de savoir si la fonction $x(t)$ solution de l'équation différentielle décroît (resp. croît) avec le temps. De cette manière, on obtient des informations globales et pas seulement locales sur la dynamique de cette fonction.

Des équations différentielles différentes peuvent avoir des comportements dynamiques qualitativement équivalents. On peut ainsi penser à regrouper les équations différentielles en des groupes possédant des dynamiques de même nature.

Définition 1.4. [7] *Équivalence qualitative :*

Deux équations différentielles ordinaires sont dites qualitativement équivalentes si elles possèdent les mêmes portraits de phase, c'est-à-dire le même nombre de points d'équilibre avec les mêmes propriétés de stabilité et se trouvant rangés dans le même ordre.

1.1.2 Deux équations différentielles ordinaires

La forme générale d'un système de deux équations différentielles ordinaires autonomes est la suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{1.3}$$

où nous utilisons la notation simplifiée de la dérivée de la variable x en fonction du temps avec un point au-dessus de celle-ci, soit $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Le système est défini par les fonctions f et g qui sont en général des fonctions non linéaires des variables x et y . On peut penser à un point mobile sur un plan dont les coordonnées dépendent du temps, $(x(t), y(t))$. La vitesse du point mobile est par définition égale au vecteur de composantes $(\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y))$. Par conséquent, les équations (1.3) définissent les composantes du vecteur vitesse en tout point du plan. À partir d'une condition initiale (x_0, y_0) définie par la position du point mobile à un instant initial de référence t_0 , c'est-à-dire $x_0 = x(t_0)$ et $y_0 = y(t_0)$, le point mobile va se déplacer sur le plan. L'ensemble des positions occupées successivement au cours du temps à partir de la condition initiale constitue une trajectoire particulière. L'ensemble des trajectoires constitue le portrait de phase.

Le système (1.3) définit un vecteur vitesse de manière unique en chaque point du plan. Une conséquence importante est donc que deux trajectoires ne peuvent jamais se couper en un point du plan, sauf en un équilibre. En effet, si deux trajectoires se coupaient transversalement, nous aurions deux vitesses différentes en un même point (x, y) , ce qui serait contraire à l'unicité de la vitesse en chaque point. Ce résultat est en réalité la conséquence du théorème de Cauchy d'existence et d'unicité des solutions d'un système différentiel autonome pour lequel on fixe les conditions initiales (x_0, y_0) . Il s'énonce comme suit.

Théorème 1.2. [7] *Considérons un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel le système différentiel (1.3) est défini et sur lequel les fonctions f et g sont dérivables et de dérivées continues. On suppose que le point (x_0, y_0) appartient à l'ouvert U . Il existe un nombre réel T strictement positif tel que le système (1.3) avec $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ admet une solution $(x(t), y(t))$ unique pour tout $t \in [-T, T]$.*

En d'autres termes, si un point de l'espace de phase n'est pas un équilibre, sa trajectoire est une courbe unique localement (et donc globalement). Les trajectoires ne peuvent donc pas se croiser dans l'espace des phases.

1.1.2.1 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre

La démarche pour l'étude d'un système de deux équations différentielles est en partie la même que celle utilisée pour une seule équation. La première étape consiste à rechercher les équilibres et à déterminer leur propriété de stabilité locale. Un point d'équilibre (x^*, y^*) du système (1.3) est un point où la vitesse est nulle. Un point d'équilibre est donc défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= 0, \\ g(x^*, y^*) &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Un système d'équations différentielles ordinaires peut admettre aucun, un, ou plusieurs points d'équilibre qu'il est dans ce dernier cas nécessaire d'indicer, (x_i^*, y_i^*) , avec $i \in [1, N]$ et N le nombre de points d'équilibre. Pour avoir des informations sur la stabilité locale d'un point d'équilibre, on procède à la linéarisation du système au voisinage de chaque point d'équilibre. Soient $(u(t), v(t))$ les coordonnées locales au voisinage d'un point d'équilibre donné (x^*, y^*) :

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) - x^*, \\ v(t) &= y(t) - y^*. \end{aligned}$$

Si les variables locales $u(t)$ et $v(t)$ tendent vers 0, alors la trajectoire tend vers l'équilibre (x^*, y^*) . Pour linéariser, comme dans le cas d'une seule équation, on recherche le système d'équations qui gouverne les variables (u, v) en faisant une approximation du premier ordre

au voisinage du point d'équilibre :

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} = f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \dots, \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x, y) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

En utilisant les relations définissant le point d'équilibre, c'est-à-dire $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, après substitution des coordonnées locales dans les équations (1.5) et en négligeant les termes d'ordre supérieurs à 1 dans le développement de Taylor, nous obtenons le système linéarisé suivant :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v, \\ \dot{v} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v, \end{aligned} \quad (1.6)$$

qu'il est possible de réécrire sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

La matrice précédente des dérivées partielles que nous notons A s'appelle **la matrice Jacobienne** :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

où a_{ij} est le coefficient (i, j) de la matrice Jacobienne de l'équation (1.8). Le modèle linéaire s'obtient donc en calculant la Jacobienne au point d'équilibre du système :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

avec la notation $a_{ij}^* = a_{ij}(x^*, y^*)$. Le modèle linéaire (1.9) est aussi appelé la partie linéaire du système (1.3) au voisinage d'un équilibre. Ce modèle est un modèle plus simple que le système non linéaire dont il est issu car il est linéaire. Cependant, ce n'est qu'une approximation du système (1.3) au premier ordre qui n'a de sens que dans un voisinage immédiat d'un point d'équilibre de ce système.

Rappel sur les développements limités en dimension deux :

Soit une fonction de deux variables $f(x, y)$. Le développement limité de la fonction $f(x, y)$ au voisinage d'un point (\bar{x}, \bar{y}) à l'ordre n est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \bar{y}) \\ & + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - \bar{x})^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - \bar{y})^2 \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \bar{y}) \right)^n + \dots, \end{aligned}$$

où nous utilisons la notation symbolique du produit en puissance. Dans cette notation, le terme de puissance $(p, n - p)$ correspond à la dérivée n ième suivante $\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$. Toutes les dérivées sont calculées au point (\bar{x}, \bar{y}) .

1.1.2.2 Système linéaire de deux équations différentielles ordinaires

Dans la section précédente, nous avons obtenu un modèle linéaire en faisant une approximation au premier ordre dans un voisinage d'un équilibre du système non linéaire. Il est maintenant nécessaire de rechercher les solutions d'un système linéaire en dimension deux. La forme générale d'un système linéaire de deux équations différentielles ordinaires est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

ou encore,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où $A = [a_{ij}]$ est une matrice à coefficients constants. Dans le cas de la linéarisation au voisinage d'un équilibre, la matrice A est la matrice Jacobienne calculée à cet équilibre.

Tout d'abord, il est facile de voir qu'un système de deux équations différentielles ordinaires est équivalent à une équation différentielle ordinaire du second ordre. En effet, en dérivant la première équation par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{x} = a_{11}\dot{x} + a_{12}\dot{y} = a_{11}\dot{x} + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y). \quad (1.10)$$

De la première équation du système linéaire (1.1.2.2), il vient :

$$y = \frac{1}{a_{12}}(\dot{x} - a_{11}x).$$

Après substitution dans l'équation (1.10), nous obtenons une équation linéaire du second ordre de la variable x :

$$\ddot{x} - (a_{11} + a_{12})\dot{x} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = 0,$$

que nous pouvons réécrire en fonction de la trace ($tr A = a_{11} + a_{22}$) et du déterminant ($\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$) de la matrice A :

$$\ddot{x} - tr A \dot{x} + \det A x = 0.$$

Le résultat inverse est valable, c'est-à-dire qu'une équation du second ordre peut être transformée en un système de deux équations différentielles du premier ordre. Soit une équation du second ordre :

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Cette équation peut être écrite sous la forme d'un système de deux équations différentielles

du premier ordre en posant $\dot{x} = y$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \ddot{x} = -by - cx.\end{aligned}$$

Il est souvent utile de passer d'une forme à l'autre. Nous allons maintenant utiliser les formes de Jordan des matrices de dimension deux pour trouver les solutions du système linéaire (1.1.2.2).

1.1.2.3 Solutions d'un système linéaire en dimension 2

Soit un système linéaire de deux équations différentielles ordinaires du type :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Soit $A = [a_{ij}]$ la matrice des coefficients constants du système linéaire. Nous allons rechercher la solution de ce système pour une condition initiale donnée :

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0.\end{aligned}$$

La méthode que nous allons utiliser comporte plusieurs étapes :

- 1) effectuer un changement de base afin de mettre la matrice sous sa forme de Jordan ;
- 2) résoudre le système dans la nouvelle base ;
- 3) revenir dans la base de départ.

Il existe plusieurs formes de Jordan en fonction du signe du discriminant de l'équation caractéristique. Nous allons donc distinguer ces différents cas.

- a) Cas de deux valeurs propres réelles distinctes

Dans la base de départ, le système s'écrit sous la forme (1.11). Dans le cas de cette section, le discriminant de l'équation caractéristique associée à la matrice A est positif et cette matrice admet donc deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 . Rappelons les formules

qui permettent d'effectuer le changement de la base de départ (x, y) vers la base de Jordan (u, v) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où P est la matrice utilisée pour mettre la matrice A sous sa forme de Jordan. Rappelons que dans ce cas la matrice P comporte sur sa première colonne le vecteur propre m_1 associé à la première valeur propre λ_1 et sur sa seconde colonne le vecteur propre m_2 associé à la seconde valeur propre λ_2 , et qu'on a :

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base, le système s'écrit sous la forme simple suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

où les deux équations sont découplées :

$$\dot{u} = \lambda_1 u,$$

$$\dot{v} = \lambda_2 v.$$

La solution évidente de ce système est :

$$u(t) = \gamma \exp(\lambda_1 t),$$

$$v(t) = \delta \exp(\lambda_2 t),$$

où γ et δ sont des constantes d'intégration. La solution du système dans la base de

départ s'obtient par retour dans la base d'origine :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \exp(\lambda_1 t) \\ \delta \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}.$$

Après développement on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma m_{11} \exp(\lambda_1 t) + \delta m_{12} \exp(\lambda_2 t), \\ y(t) &= \gamma m_{21} \exp(\lambda_1 t) + \delta m_{22} \exp(\lambda_2 t), \end{aligned}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) + \delta \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} \exp(\lambda_2 t).$$

Les constantes γ et δ sont déterminées par les conditions initiales.

b) Cas d'une valeur propre réelle double

Avec le changement de base approprié, la matrice peut être mise sous forme de Jordan.

Dans cette nouvelle base, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, rappelons que la matrice de passage comporte sur sa première colonne le vecteur propre m_0 associé à la valeur propre double λ_0 et sur sa seconde colonne un vecteur m linéairement indépendant :

$$P = \begin{pmatrix} m_{10} & m_1 \\ m_{20} & m_2 \end{pmatrix}.$$

La seconde équation du système linéaire est découplée de la première :

$$\dot{v} = \lambda_0 v,$$

et peut être résolue facilement :

$$v(t) = \delta \exp(\lambda_0 t),$$

où δ est une constante d'intégration. La substitution de cette solution dans la première équation conduit à une équation du premier ordre avec second membre suivante :

$$\dot{u} = \lambda_0 u + v,$$

ou encore :

$$\dot{u} - \lambda_0 u = \delta \exp(\lambda_0 t).$$

La solution de cette équation est :

$$u(t) = (\delta t + \gamma) \exp(\lambda_0 t),$$

où γ est une constante d'intégration. La solution du système initial s'obtient en revenant dans la base de départ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{10} & m_1 \\ m_{20} & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta t + \gamma) \exp(\lambda_0 t) \\ \delta \exp(\lambda_0 t) \end{pmatrix}.$$

Après développement on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(\lambda_0 t)(\gamma m_{10} + \delta m_1 + \delta m_{10} t), \\ y(t) &= \exp(\lambda_0 t)(\gamma m_{20} + \delta m_2 + \delta m_{20} t). \end{aligned}$$

Les constantes γ et δ sont déterminées par les conditions initiales.

c) Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées

Avec le changement de base approprié, la matrice A peut être mise sous forme de Jordan. Dans cette nouvelle base, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, la matrice A admet deux valeurs propres complexes et conjuguées ($\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$) et que la matrice de passage comporte sur sa première colonne le vecteur b associé à la partie imaginaire et sur sa seconde colonne le vecteur a correspondant à la partie réelle des vecteurs propres conjugués $m_{1,2} = a \pm ib$:

$$P = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha u - \beta v, \\ \dot{v} &= \beta u + \alpha v. \end{aligned}$$

Afin de résoudre ce système, nous allons effectuer un changement de coordonnées. Celui-ci peut se faire de deux manières, qui sont d'un point de vue théorique équivalentes, mais dont la mise en œuvre pratique diffère un peu. La première approche n'utilise que des nombres réels mais nécessite un peu plus de calculs que la seconde qui s'appuie sur l'utilisation des nombres complexes. La première méthode consiste à passer des coordonnées rectangulaires (u, v) aux coordonnées polaires (r, θ) . On a :

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \tag{1.12}$$

$$\tan \theta = \frac{v}{u},$$

et aussi :

$$u = r \cos \theta,$$

$$v = r \sin \theta.$$

Effectuons le passage en coordonnées polaires, en recherchant l'équation gouvernant le rayon vecteur. En mettant l'équation (1.12) au carré puis en la dérivant il vient :

$$r\dot{r} = u\dot{u} + v\dot{v} = u(\alpha u - \beta v) + v(\beta u + \alpha v) = \alpha(u^2 + v^2) = \alpha r^2.$$

De la même manière, recherchons l'équation gouvernant l'angle θ :

$$\frac{d(\tan \theta)}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{u\dot{v} - v\dot{u}}{u^2} = \frac{u(\beta u + \alpha v) - v(\alpha u - \beta v)}{u^2} = \frac{\beta(u^2 + v^2)}{u^2}.$$

Dans le système de coordonnées polaires, le système s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r, \\ \dot{\theta} &= \beta,\end{aligned}$$

dont les solutions sont évidentes :

$$\begin{aligned}r(t) &= \gamma \exp(\alpha t), \\ \theta(t) &= \beta t + \delta,\end{aligned}$$

où γ et δ sont des constantes d'intégration. Les solutions $(u(t), v(t))$ dans la base de Jordan sont donc :

$$\begin{aligned}u(t) &= r(t) \cos \theta(t) = \gamma \exp(\alpha t) \cos(\beta t + \delta), \\ v(t) &= r(t) \sin \theta(t) = \gamma \exp(\alpha t) \sin(\beta t + \delta).\end{aligned}$$

La solution du système initial s'obtient, comme dans les autres cas, en revenant dans la base de départ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \gamma \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta t + \delta) \\ \sin(\beta t + \delta) \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}x(t) &= \gamma \exp(\alpha t)(b_1 \cos(\beta t + \delta) + a_1 \sin(\beta t + \delta)), \\ y(t) &= \gamma \exp(\alpha t)(b_2 \cos(\beta t + \delta) + a_2 \sin(\beta t + \delta)).\end{aligned}$$

Les constantes γ et δ sont déterminées par les conditions initiales. En fait, ces constantes

sont données par :

$$\begin{aligned}r(0) &= \gamma, \\ \theta(0) &= \delta.\end{aligned}$$

Dans le cas général, cela nécessite encore un peu de calcul pour relier les constantes γ et δ aux conditions initiales x_0 et y_0 .

La seconde approche consiste, à la place du changement de coordonnées polaires explicite dans \mathbb{R}^2 , à poser :

$$z(t) = u(t) + iv(t)$$

Il en découle :

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{u} + i\dot{v} &= \alpha(u + iv) + \beta(-v + iu) \\ &= \alpha z + i\beta z = \lambda_1 z\end{aligned}$$

Il s'agit alors d'une équation différentielle à variables séparables comme nous en avons vues en début de chapitre. Sa solution générale s'écrit :

$$z(t) = Ce^{\lambda_1 t}$$

où C est une constante d'intégration, complexe ici, $C = z(0) = u(0) + iv(0)$. D'autre part, $e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$. La solution réelle $(u(t), v(t))$ du système linéaire dans la base de Jordan est donc directement obtenue en prenant les parties réelles et imaginaires respectivement de z . On obtient :

$$\begin{aligned}u(t) &= e^{\alpha t} (u(0) \cos(\beta t) - v(0) \sin(\beta t)) \\ v(t) &= e^{\alpha t} (u(0) \sin(\beta t) + v(0) \cos(\beta t))\end{aligned}$$

Comme précédemment, les solutions exprimées dans la base initiale, $(x(t), y(t))$ sont obtenues en multipliant le vecteur $(u(t), v(t))$ par la matrice de passage P .

1.1.2.4 Typologie des systèmes planaires linéaires

Rappelons que nous limitons notre étude au cas où $\det A \neq 0$. Dans la sous-section précédente, nous avons présenté les solutions d'un système de deux équations linéaires couplées :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

avec $A = [a_{ij}]$ qui est une matrice à coefficients constants. Nous avons distingué trois cas qui dépendent des valeurs propres de cette matrice :

- 1) les valeurs propres sont réelles et distinctes ;
- 2) il existe une valeur propre double et réelle ;
- 3) les valeurs propres sont complexes conjuguées.

Il est usuel de présenter ces différents types de solutions dans le plan de la trace et du déterminant de la matrice ($tr A, \det A$). Pour distinguer les trois cas, on a l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + tr A \lambda + \det A = 0.$$

Rappelons que pour une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, la somme des racines est égale à $-\frac{b}{a}$ et le produit des racines à $\frac{c}{a}$. En conséquence, si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres racines de l'équation caractéristique, nous avons les relations suivantes :

$$tr A = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2.$$

Les trois cas précédents dépendent du signe du discriminant :

$$\Delta = (tr A)^2 - 4 \det A.$$

Tout d'abord, le cas 2) correspond à $\Delta = 0$, ou encore $\det A = \frac{1}{4}(tr A)^2$, ce qui détermine dans le plan ($tr A, \det A$) une parabole passant par l'origine et dont les axes sont tournés vers le haut.

Le cas 1) correspond à $\Delta > 0$, c'est-à-dire aux points du plan $(trA, detA)$ situés au-dessous de cette parabole.

Enfin, le cas 3) correspond à $\Delta < 0$, et donc aux points se trouvant au-dessus de la parabole.

Nous allons maintenant examiner ces trois cas plus en détail.

a) Cas de deux valeurs propres réelles distinctes

Rappelons que dans ce cas la matrice A peut se mettre sous la forme de Jordan :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Les solutions dans la base de Jordan sont les suivantes :

$$u(t) = \gamma \exp(\lambda_1 t),$$

$$v(t) = \delta \exp(\lambda_2 t),$$

et ainsi l'allure des trajectoires va dépendre du signe des valeurs propres.

Trois cas peuvent être distingués :

- 1) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Il s'agit d'un nœud instable. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, les solutions $u(t)$ et $v(t)$ tendent aussi vers l'infini. Toutes les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre $(0, 0)$ qui est par conséquent instable. Dans le plan $(trA, detA)$, les nœuds instables se trouvent au dessous de la parabole dans le demi plan supérieur $det A > 0$, et dans la partie $trA > 0$, car le produit et la somme des valeurs propres sont positifs.
- 2) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Il s'agit d'un nœud stable. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, les solutions $u(t)$ et $v(t)$ tendent vers 0.
- 3) λ_1 et $\lambda_2 < 0$ sont de signes contraires, il s'agit d'un point selle ou point col. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, une des solutions tend aussi vers $\pm\infty$, et l'autre tend vers 0. Le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable..

b) Cas d'une valeur propre réelle double

Dans ce cas, la matrice peut se mettre sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Deux cas sont à distinguer :

- 1) $\lambda_0 > 0$: il s'agit d'un noeud instable dégénéré, $\text{tr}A > 0$.
- 2) $\lambda_0 < 0$: il s'agit d'un noeud stable dégénéré, $\text{tr}A < 0$.

c) Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées

Dans ce cas, la matrice peut se mettre sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Rappelons que les valeurs propres de la matrice A sont alors $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ et que dans la base de Jordan et dans le système de coordonnées polaires le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r, \\ \dot{\theta} &= \beta, \end{aligned}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} r(t) &= \gamma \exp(\alpha t), \\ \theta(t) &= \beta t + \delta. \end{aligned}$$

La trajectoire résulte donc de la combinaison de deux mouvements, un mouvement de rotation autour du point d'équilibre à vitesse angulaire constante β et un mouvement d'approche ou d'éloignement du point d'équilibre selon une fonction exponentielle du temps avec un facteur α . Trois cas peuvent être distingués :

- . $\alpha > 0$, il s'agit d'un foyer instable.
- . $\alpha = 0$, les deux valeurs propres sont imaginaires pures, il s'agit d'un centre.

. $\alpha < 0$, il s'agit d'un foyer stable.

1.1.2.5 Stabilité asymptotique, stabilité neutre, stabilité structurelle

Soit le système de deux équations différentielles ordinaires couplées suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Soit un point d'équilibre (x^*, y^*) de ce système. La linéarisation du système au voisinage de cet équilibre conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v, \\ \dot{v} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v,\end{aligned}$$

où $(u(t), v(t))$ sont les coordonnées locales au voisinage du point d'équilibre, $u(t) = x(t) - x^*$ et $v(t) = y(t) - y^*$.

Le système s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

qui est la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre.

En résumé de l'étude précédente nous pouvons constater que les cas de stabilité locale sont déterminés par deux conditions :

$$\begin{aligned}\det A &> 0, \\ \operatorname{tr} A &< 0.\end{aligned}$$

Dans ces conditions toute trajectoire issue d'une condition initiale prise dans le voisinage du point d'équilibre va retourner au point d'équilibre (nœud ou foyer stable). La

définition rigoureuse de la stabilité est la suivante.

Définition 1.5. [7] *Stabilité d'un point d'équilibre :*

Un point d'équilibre (x^, y^*) d'un système du type (1.13) est dit stable si pour tout voisinage V de (x^*, y^*) , il existe un voisinage $U \subseteq V$ tel que toute trajectoire pénétrant dans U reste dans V pour tout t suivant.*

Dans le cas où l'équilibre est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable. Pour distinguer entre les différents types de stabilité, on définit **la stabilité asymptotique** lorsque la limite de la trajectoire est le point d'équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$. Lorsqu'un équilibre est stable mais pas asymptotiquement stable, on parle de **stabilité neutre**, c'est-à-dire lorsque la trajectoire reste dans le voisinage du point d'équilibre sans tendre vers cet équilibre lorsque $t \rightarrow \infty$. Un point est dit instable lorsqu'il n'est pas stable. Par conséquent, les foyers et les nœuds instables ou encore les points selle sont instables.

Une notion importante concerne la stabilité structurelle d'un système. Il faut noter que les notions de stabilité précédentes concernent des équilibres alors que la notion de stabilité structurelle concerne un système. Pour préciser les choses, considérons une petite perturbation d'un système exhibant un centre à l'origine. Rappelons que la matrice correspondant à un centre s'écrit sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

puisque'il s'agit du cas de deux valeurs propres complexes imaginaires pures $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Considérons une petite perturbation du centre par une matrice diagonale B_ε :

$$B_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon \ll 1$ est un paramètre aussi petit que l'on veut. La perturbation du centre peut

se faire en additionnant la matrice B_ε à la matrice A :

$$A + B_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\beta \\ \beta & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i\beta$ ce qui ne correspond plus à un centre mais à un foyer stable ou instable selon le signe du petit paramètre ε . On voit donc que la perturbation que l'on a effectuée sur le centre par un terme B_ε aussi petit que l'on veut, c'est-à-dire pour un choix arbitraire de ε aussi petit qu'il soit, détruit le centre et induit un foyer. On dit que le système différentiel qui admet le centre n'est pas **structurellement stable**. Au contraire, une perturbation suffisamment petite d'un foyer conserve le foyer. Les systèmes linéaires planaires qui vérifient $\det A \neq 0$ et $\text{trace}(A) \neq 0$ sont structurellement stables. Ceux qui correspondent à $\det A = 0$ ne sont pas structurellement stables. En effet, il faut d'abord noter que la trace et le déterminant d'une matrice dépendent continument de ses coefficients. Donc si une matrice a un déterminant nul, on peut trouver une petite perturbation aussi faible qu'on veut qui rende le déterminant strictement positif ou strictement négatif. Cela implique qu'on obtiendra un point selle ou un nœud ou un foyer pour l'équilibre en $(0,0)$ pour des systèmes aussi proche qu'on veut du système initial.

Définition 1.6. [7] *On dit qu'un équilibre est hyperbolique si la matrice Jacobienne à cet équilibre possède des valeurs propres de partie réelle non nulle.*

Cette définition étend celle d'équilibre hyperbolique vue dans la section précédente et est généralisable à plus de deux équations. On a le résultat suivant.

Théorème 1.3. [7] *Soit un système différentiel défini sur un ouvert U par le système (1.13) avec f et g différentiables et de dérivées partielles continues sur U . On suppose que ce système n'admet qu'un équilibre dans U et que cet équilibre est hyperbolique. Alors le système est structurellement stable.*

Lorsque le modèle linéarisé est structurellement instable, c'est-à-dire, en vertu du théorème précédent, que l'origine n'est pas un équilibre hyperbolique, il est évidemment

nécessaire de prendre en compte les termes non linéaires pour connaître la vraie dynamique au voisinage du point d'équilibre. La stabilité structurelle est une notion très importante et se généralise à tout système dynamique. La stabilité structurelle signifie grossièrement que la dynamique est robuste et est conservée pour des perturbations suffisamment petites.

Lemme 1.1. [29] *Pour un système différentiel, une composante $x(t)$ est dite permanente s'il existe $0 < \alpha < \beta < +\infty$, tels que pour toute condition initiale $x(0) > 0$, on a :*

$$\alpha \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \beta.$$

Un système est permanent si toutes ses composantes sont permanentes.

1.2 Systèmes stochastiques

Les équations différentielles sont utilisées pour décrire l'évolution d'un système. Équations différentielles stochastiques (EDSs) apparaissent lorsqu'un bruit aléatoire est introduit dans des équations différentielles ordinaires (EDOs). Dans cette section, nous définissons deux concepts de solutions d'EDSs, la solution forte et la solution faible.

Avant de donner une définition rigoureuse des EDSs, nous montrons comment ils se présentent comme une EDOs perturbées aléatoirement et donnons une interprétation physique.

Les équations différentielles stochastiques apparaissent, par exemple, lorsque les coefficients d'équations ordinaires sont perturbés par du bruit blanc.

Bruit blanc et SDEs

Le processus de bruit blanc $\xi(t)$ est formellement défini comme la dérivée du mouvement Brownien,

$$\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt} = B'(t). \quad (1.14)$$

Il n'existe pas en tant que fonction de t au sens habituel, puisqu'un mouvement Brownien est nul part différentiable.

Si $\sigma(x, t)$ est l'intensité du bruit au point x au temps t , alors il est convenu que $\int_0^T \sigma(X(t), t)\xi(t)dt = \int_0^T \sigma(X(t), t)B'(t)dt = \int_0^T \sigma(X(t), t)dB(t)$, où l'intégrale est l'intégrale d'Itô.

1.2.1 Le mouvement Brownien

Nous pouvons à présent définir le processus le plus important en calcul stochastique, c'est le **mouvement Brownien** appelé aussi processus de Wiener.

Définition 1.7. *Un processus $\mathbf{B} : (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est appelé **mouvement Brownien** si :*

- 1) $\mathbf{B}_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s. ;
- 2) $\forall 0 \leq s \leq t$, la v.a $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s ;
- 3) $\forall 0 \leq s \leq t$, $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Autrement dit, le processus \mathbf{B} part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Exemple 1.1. Modèle Black-Scholes-Merton pour la croissance avec un taux de rendement incertain.

$x(t)$ est la valeur de \$1 après le temps t , investi sur un compte d'épargne. Par la définition de d'intérêt composé, il satisfait l'EDO $dx(t)/x(t) = rdt$, ou $dx(t)/dt = rx(t)$, (r est appelé le taux d'intérêt). Si le taux est incertain, on considère qu'il est perturbé par bruit, $r + \xi(t)$, et on obtient l'EDS suivante

$$\frac{dX(t)}{dt} = (r + \sigma\xi(t))X(t),$$

$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dB(t).$$

Le cas $\sigma = 0$ correspond à l'absence de bruit, on retrouve l'équation déterministe. La solution de l'équation déterministe est facilement obtenue en séparant les variables comme suit $x(t) = e^{rt}$. La solution de l'EDS ci-dessus est donnée par un mouvement

Brownien géométrique, comme on peut le vérifier par la formule d'Itô (voir Exemple 1.2)

$$X(t) = e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma B(t)}. \quad (1.15)$$

Processus d'Itô

Définition 1.8. *Un processus Itô a la forme*

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.16)$$

où $y(0)$ est \mathcal{F}_0 -mesurable, les processus $\mu(t)$ et $\sigma(t)$ sont \mathcal{F}_t -adaptés, tel que $\int_0^T \mu(s)dt < \infty$ et $\int_0^T \sigma^2(t)dt < \infty$. On dit que le processus $Y(t)$ a un différentiel stochastique sur $[0, T]$

$$dy(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.17)$$

Nous soulignons qu'une représentation (1.17) n'a de sens qu'au travers de (1.16), et aucune autre. Notons que les processus μ et σ dans (1.16) peuvent (et dépendent souvent) de $y(t)$ ou $B(t)$ aussi, ou même de tout le chemin passé de $B(s)$, $s \leq t$; par exemple ils peuvent dépendre du maximum du mouvement brownien $\max_{s \leq t} B(s)$.

Formule d'Itô pour les processus Itô

Théorème 1.4. *Soit $X(t)$ une différentielle stochastique pour $0 \leq t \leq T$*

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.18)$$

Si $f(x)$ est deux fois continûment différentiable (fonction \mathcal{C}^2), alors le différentiel stochastique du processus $y(t) = f(X(t))$ existe et est donné par

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))d[X, X](t) \\ &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)dt \\ &= (f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)dt) + f'(X(t))\sigma(t)dBt \end{aligned} \quad (1.19)$$

La signification de ce qui précède est

$$f(X(t)) - f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s))\sigma^2(s)ds \quad (1.20)$$

où la première intégrale est une intégrale Itô par rapport à la différentielle stochastique. L'existence des intégrales dans la formule 1.20 est assurée par les arguments suivant le Théorème 4.13. La preuve suit également les mêmes idées que le Théorème 4.13, et est omise.

Équations différentielles stochastiques

Soit $B(t)$, $t \geq 0$, un processus de mouvement brownien. Une équation de la forme

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \quad (1.21)$$

où les fonctions $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ sont données et $X(t)$ est le processus inconnu, est appelée une équation différentielle stochastique(EDS) dérivée par un mouvement Brownien. Les fonctions $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ sont appelées les coefficients.

Définition 1.9. Un processus $X(t)$ est appelé une solution forte de l'EDS (1.21) si pour tout $t > 0$ les intégrales $\int_0^t \mu(X(s), s)ds$ et $\int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s)$ existent, avec la seconde étant une intégrale d'Itô, et

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s)ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s). \quad (1.22)$$

Remarque 1.2.

1. Une solution forte est une certaine fonction (fonctionnelle) $F(t, (B(s), s \leq t))$ du mouvement brownien donné $B(t)$.
2. Lorsque $\sigma = 0$, l'EDS devient une équation différentielle ordinaire (EDO)
3. Une autre interprétation de (1.21), appelée solution faible, est une solution en qui sera donnée plus tard.

Les équations de la forme (1.21) sont appelées EDSs de type diffusion. Plus générale-

ment EDSs ont la forme

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad (1.23)$$

où $\mu(t)$ et $\sigma(t)$ peuvent dépendre de t et de tout le passé des processus $X(t)$ et $B(t)$ ($X(s), B(s), s \leq t$), c'est-à-dire $\mu(t) = \mu((X(s), s \leq t), t)$, $\sigma(t) = \sigma((X(s), s \leq t), t)$. La seule restriction sur $\mu(t)$ et $\sigma(t)$ est qu'ils doivent être des processus adaptés, avec des intégrales respectives définies. Bien que de nombreux résultats (tels que les résultats d'existence et d'unicité) peuvent être formulés pour des EDSs généraux, nous nous concentrons ici sur les EDSs de type diffusion.

Les deux exemples suivants démontrent comment trouver une solution forte en utilisant la formule d'Itô et l'intégration par parties.

Exemple 1.2. Considérons l'EDS

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X(0) = 1. \quad (1.24)$$

Prenons $f(x) = \ln x$, alors $f'(x) = 1/x$ et $f''(x) = -1/x^2$.

$$\begin{aligned} d(\ln X(t)) &= \frac{1}{X(t)}dX(t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X^2(t)} \right) \sigma^2 X^2(t)dt \\ &= \frac{1}{X(t)} \left(\mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t) \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB(t) \end{aligned}$$

De sorte que $Y(t) = \ln X(t)$ satisfasse

$$dY(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB(t).$$

Sa représentation intégrale donne

$$Y(t) = Y(0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t),$$

et

$$X(t) = X(0)e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B(t)}. \quad (1.25)$$

Exemple 1.3. (Équation de Langevin et processus d'Ornstein-Uhlenbeck)

Considérons l'EDS

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dB(t), \quad (1.26)$$

où α et σ sont des constantes non négatives.

Notez que dans le cas $\sigma = 0$, la solution de l'EDO est $x_0 e^{-\alpha t}$, ou en d'autres termes $x(t)e^{\alpha t}$ est une constante. Pour résoudre l'EDS, on considère le processus $Y(t) = X(t)e^{\alpha t}$. Utilisez la différentielle de la règle du produit, et notez que la covariance de $e^{\alpha t}$ avec $X(t)$ est nulle, puisqu'il s'agit d'une fonction différentiable ($d(e^{\alpha t})dX(t) = \alpha e^{\alpha t} dt dX(t) = 0$), nous avons $dY(t) = e^{\alpha t} dX(t) + \alpha e^{\alpha t} X(t) dt$. En utilisant la EDS pour $dX(t)$, nous obtenons $dY(t) = \sigma e^{\alpha t} dB(t)$. Ceci donne $Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB(s)$. Maintenant la solution pour $X(t)$ est

$$X(t) = e^{-\alpha t} \left(X(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB(s) \right). \quad (1.27)$$

Le processus $X(t)$ dans (1.26) est connu comme le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Nous pouvons également trouver la dépendance fonctionnelle de la solution sur les trajectoires du Brownien. En effectuant une intégration par parties, nous trouvons la fonction donnant la solution forte

$$X(t) = F(t, (B(s), 0 \leq s \leq t)) = e^{-\alpha t} X(0) + \sigma B(t) - \sigma \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} B(s) ds.$$

Une équation plus générale est

$$dX(t) = (\beta - \alpha X(t))dt + \sigma dB(t), \quad (1.28)$$

avec la solution

$$X(t) = \frac{\beta}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left(X(0) - \frac{\beta}{\alpha} + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB(s) \right). \quad (1.29)$$

En utilisant la formule d'Itô, il est facile de vérifier que (1.29) est bien une solution.

Exemple 1.4. Considérons l'EDS $dX(t) = B(t)dB(t)$.

Clairement, $X(t) = X(0) + \int_0^t B(s)dB(s)$, et en utilisant l'intégration par parties (ou

la formule d'Itô), on obtient

$$X(t) = X(0) + \frac{1}{2}(B^2(t) - t).$$

Remarque 1.3. Si une solution forte existe, alors par définition elle est adaptée à la filtration du mouvement brownien donné, et en tant que telle, il est intuitivement qu'elle est une fonction du trajectoire $(B(s), s \leq t)$. Les résultats de Yamada et Watanabe (1971), et de Kallenberg (1996) affirment que si les conditions du le théorème d'existence et d'unicité sont satisfaites, alors il existe une fonction F telle que la solution forte est donnée par $X(t) = F(t, (B(s), s \leq t))$. On ne sait pas beaucoup de détails sur F en général. Souvent, il n'est pas facile de trouver cette fonction même pour les intégrales d'Itô $X(t) = \int_0^t f(B(s))dB(s)$, par exemple $X(t) = \int_0^t |B(s)|^{\frac{1}{2}}dB(s)$. Pour une représentation des intégrales d'Itô comme fonctions des trajectoires du mouvement Brownien.

Seules certaines classes d'EDSs admettent une solution de forme fermée. Lorsqu'une solution fermée est difficile à trouver, un résultat d'existence et d'unicité est important, car sans cela, on ne sait pas exactement ce que signifie l'équation. Lorsque la solution existe et est unique, des méthodes numériques peuvent être utilisées pour la calculer. De même que les équations différentielles ordinaires, les EDSs linéaires peuvent être résolues de manière explicite.

1.2.2 Solutions aux EDSs linéaires

Les EDSs linéaires forment une classe d'EDSs qui peuvent être résolus explicitement. Considérons l'EDS linéaire général en une dimension

$$dX(t) = (\alpha(t) + \beta(t)X(t))dt + (\gamma(t) + \delta(t)X(t))dB(t), \quad (1.30)$$

où les fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des processus adaptés donnés, et sont des fonctions continues de t . Les exemples considérés dans la section précédente sont des cas particuliers de EDSs linéaires.

EDSs stochastiques exponentiels

Considérons la recherche de solutions dans le cas où $\alpha(t) = 0$ et $\gamma(t) = 0$. La EDS devient

$$dU(t) = \beta(t)U(t)dt + \delta(t)U(t)dB(t). \quad (1.31)$$

Cette EDS est de la forme

$$dU(t) = U(t)dY(t), \quad (1.32)$$

où le processus Itô $Y(t)$ est défini par

$$dY(t) = \beta(t)dt + \delta(t)dB(t).$$

L'EDS (1.31) est l'exponentielle stochastique de Y . L'exponentielle stochastique de Y , est donnée par

$$\begin{aligned} U(t) &= \mathcal{E}(Y)(t) \\ &= U(0) \exp\left(Y(t) - Y(0) - \frac{1}{2}[Y, Y](t)\right) \\ &= U(0) \exp\left(\int_0^t \beta(s)ds + \int_0^t \delta(s)dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \delta^2(s)ds\right) \\ &= U(0) \exp\left(\int_0^t \left(\beta(s) - \frac{1}{2}\delta^2(s)\right) ds + \int_0^t \delta(s)dB(s)\right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

où $[Y, Y](t)$ est obtenu à partir des calculs $d[Y, Y](t) = dY(t)dY(t) = \delta^2(t)dt$.

EDSs linéaires généraux

Pour trouver une solution de l'équation (1.30) dans le cas général, il faut chercher une solution de la forme

$$X(t) = U(t)V(t), \quad (1.34)$$

où

$$dU(t) = \beta(t)U(t)dt + \delta(t)U(t)dB(t), \quad (1.35)$$

et

$$dV(t) = a(t)dt + b(t)dB(t). \quad (1.36)$$

Définissons $U(0) = 1$ et $V(0) = X(0)$. On note que U est donné par (1.33). En prenant la différentielle du produit, il est facile de voir que nous pouvons choisir des coefficients $a(t)$ et $b(t)$ de manière à ce que la relation $X(t) = U(t)V(t)$. Les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ désirés s'avèrent satisfaire les équations suivantes

$$b(t)U(t) = \gamma(t), \text{ et } a(t)U(t) = \alpha(t) - \delta(t)\gamma(t). \quad (1.37)$$

En utilisant l'expression pour $U(t)$, on détermine ensuite $a(t)$ et $b(t)$. On obtient ainsi $V(t)$ est obtenu, et $X(t)$ est égal à

$$X(t) = U(t) \left(X(0) + \int_0^t \frac{\alpha(s) - \delta(s)\gamma(s)}{U(s)} ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{U(s)} dB(s) \right). \quad (1.38)$$

EDS de type Langevin

Soit $X(t)$ satisfait

$$dX(t) = a(t)X(t)dt + dB(t), \quad (1.39)$$

où $a(t)$ est un processus continu et adapté donné. Lorsque $a(t) = -\alpha$, l'équation est l'équation de Langevin, Exemple (1.3).

Nous résolvons l'EDS de deux manières : en utilisant la formule (1.38), et directement, de la même manière que pour l'EDS de Langevin.

$\beta(t) = a(t)$, $\gamma(t) = 1$, et $\alpha(t) = \delta(t) = 0$.

Pour trouver $U(t)$, nous devons résoudre $dU(t) = a(t)U(t)dt$, ce qui donne $U(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$. Ainsi, d'après (1.38)

$$X(t) = e^{\int_0^t a(s)ds} \left(X(0) + \int_0^t e^{-\int_0^u a(s)ds} dB(u) \right).$$

Considérons le processus $e^{-\int_0^t a(s)ds} X(t)$ et utilisons l'intégration par parties. Le processus $e^{-\int_0^t a(s)ds}$ est continu et de variation finie. Il a donc une covariation nulle avec $X(t)$, donc

$$\begin{aligned} d \left(e^{-\int_0^t a(s)ds} X(t) \right) &= e^{-\int_0^t a(s)ds} dX(t) - a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} X(t)dt \\ &= e^{-\int_0^t a(s)ds} dB(t). \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$e^{-\int_0^t a(s)ds} X(t) = X(0) + \int_0^t e^{-\int_0^u a(s)ds} dB(u),$$

finalement

$$X(t) = X(0)e^{\int_0^t a(s)ds} + e^{\int_0^t a(s)ds} \int_0^t e^{-\int_0^u a(s)ds} dB(u). \quad (1.40)$$

Pont Brownien

Le pont Brownien, ou mouvement Brownien épinglé, est une solution à l'EDS suivante

$$dX(t) = \frac{b - X(t)}{T - t} dt + dB(t), \text{ pour } 0 \leq t < T, X(0) = a. \quad (1.41)$$

Ce processus est un mouvement brownien transformé avec des valeurs fixes à chaque extrémité de l'intervalle $[0, T]$, $X(0) = a$ et $X(T) = b$. L'EDS ci-dessus est une EDS linéaire, avec

$$\alpha(t) = -\frac{1}{T-t}, \beta(t) = \frac{b}{T-t}, \gamma(t) = 1, \text{ et } \delta(t) = 0.$$

En identifiant $U(t)$ et $V(t)$ dans (1.38), on obtient

$$X(t) = a \left(1 - \frac{t}{T}\right) + b \frac{t}{T} + (T-t) \int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s), \text{ pour } 0 \leq t < T. \quad (1.42)$$

Puisque la fonction sous l'intégrale d'Itô est déterministe, et pour tout $t < T$, $\int_0^t ds/(T-s)^2 < \infty$, le processus $\int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s)$ est une martingale, de plus, il est Gaussien. Ainsi $X(t)$, sur $[0, T]$ est un processus Gaussien avec valeur initiale $X(0) = a$. La valeur à T , qui est $X(T) = b$, est déterminée par la continuité, voir l'Exemple 1.5 ci-dessous.

Ainsi un Pont Brownien est un processus Gaussien continu sur $[0, T]$ avec une fonction moyenne $a(1-t/T) + bt/T$ et une fonction de covariance $Cov(X(t), X(s)) = \min(s, t) - st/T$.

Exemple 1.5. Nous montrons que $\lim_{t \uparrow T} (T-t) \int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s) = 0$ presque sûrement (p.s.).

En utilisant l'intégration par parties, (qui est la même que la formule standard en raison de la covariation nulle entre le terme déterministe et le mouvement Brownien), pour tout $t < T$

$$\int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s) = B(t)/(T-t) - \int_0^t \frac{B(s)}{(T-s)^2} ds,$$

et

$$(T-t) \int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s) = B(t) - (T-t) \int_0^t \frac{B(s)}{(T-s)^2} ds. \quad (1.43)$$

C'est un exercice de calcul (par changement de variable $u = 1/(t-s)$, ou en considérant les intégrales $\int_0^{T-\delta}$ et $\int_{T-\delta}^t$ pour voir que pour toute fonction continue $g(s)$,

$$\lim_{t \uparrow T} (T-t) \int_0^t \frac{g(s)}{(T-s)^2} ds = g(T).$$

En appliquant ceci avec $g(s) = B(s)$, on montre que la limite dans (1.43) est nulle.

1.2.3 Existence et unicité des solutions fortes

Soit $X(t)$ satisfait

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t). \quad (1.44)$$

Théorème 1.5. [31] (*Existence et unicité*) *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

1. *Les coefficients sont **Localement Lipschitz** en x uniformément en t , c'est-à-dire, pour tout T et N , il existe une constante K ne dépendant que de T et N telle que pour tout $|x|, |y| \leq N$ et tout $0 \leq t \leq T$*

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| < K|x - y|, \quad (1.45)$$

2. *Les coefficients satisfont la **condition de croissance linéaire***

$$|\mu(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq K(1 + |x|) \quad (1.46)$$

3. *$X(0)$ est indépendant de $(B(t), 0 \leq t \leq T)$, et $EX^2(0) < \infty$.*

Alors il existe une solution forte unique $X(t)$ de l'EDS (1.44). $X(t)$ a des trajectoires

continues, de plus

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} X^2(t)\right) < C(1 + E(X^2(0))), \quad (1.47)$$

où la constante C ne dépend que de K et de T .

La preuve d'existence s'effectue par approximations successives, de manière similaire à celle des équations différentielles ordinaires (itérations de Picard). En utilisant le lemme de Gronwall, que la condition de Lipschitz implique l'unicité.

La condition de Lipschitz (1.45) est vraie si, par exemple, les dérivées partielles $\frac{\partial \mu}{\partial x}(t, x)$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x)$ sont bornées pour $|x|, |y| \leq N$ et tous les $0 \leq t \leq T$, ce qui est en tout est vrai si les dérivées sont continues.

Des conditions moins strictes pour des solutions fortes

Le résultat suivant est spécifique aux EDS unidimensionnels. Il est donné pour le cas de coefficients indépendants du temps. Un résultat similaire est valable pour les coefficients dépendants du temps.

Théorème 1.6. [31] (*Yamada-Watanabe*) *Supposons que $\mu(x)$ satisfait la condition de Lipschitz et $\sigma(x)$ satisfait une condition de Hölder d'ordre α , $\alpha \geq 1/2$, c'est-à-dire qu'il existe une constante K telle que*

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| < K|x - y|^\alpha. \quad (1.48)$$

Alors la solution forte existe et est unique.

1.2.4 Solutions faibles aux EDSs

Le concept de solutions faibles nous permet de donner un sens à une EDS lorsque des solutions fortes n'existent pas. Les solutions faibles sont des solutions en distribution, elles peuvent être réalisées (définies) sur un autre espace de probabilité et existent sous des conditions moins strictes sur les coefficients de l'EDS.

Définition 1.10. *S'il existe un espace de probabilité avec une filtration, un mouvement Brownien $\hat{B}(t)$ et un processus $\hat{X}(t)$ adapté à cette filtration, tels que : $\hat{X}(0)$ a une*

distribution donnée, pour tout t les intégrales ci-dessous sont définies, et $\hat{X}(t)$ satisfait à

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(0) + \int_0^t \mu(\hat{X}(u), u) du + \int_0^t \sigma(\hat{X}(u), u) d\hat{B}(u), \quad (1.49)$$

alors $\hat{X}(t)$ est appelé une solution faible à l'EDS

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t). \quad (1.50)$$

Définition 1.11. [31] Une solution faible est dite unique si chaque fois que $X(t)$ et $X'(t)$ sont deux solutions (peut-être sur des espaces de probabilité différents) telles que les distributions de $X(0)$ et $X'(0)$ sont les mêmes, alors toutes les distributions de dimension finie de $X(t)$ et $X'(t)$ sont les mêmes.

Par définition, une solution forte est aussi une solution faible. L'unicité de la solution forte (unicité de trajectoires) implique l'unicité de la solution faible, (un résultat de Yamada et Watanabe(1971)). Dans l'exemple suivant, une solution forte n'existe pas, mais une solution faible existe et elle est unique.

Exemple 1.6. (EDS de Tanaka)

$$dX(t) = \text{sign}(X(t))dB(t), \quad (1.51)$$

où

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Puisque $\sigma(x) = \text{sign}(x)$ est discontinu, il n'est pas Lipschitz, et les conditions pour l'existence forte échouent. Il peut être démontré qu'une solution forte à l'EDS de Tanaka n'existe pas, par exemple, Gihman et Skorohod (1982), Rogers et Williams (1990). Nous montrons que le mouvement Brownien est l'unique solution faible de l'EDS de Tanaka. Soit $X(t)$ un mouvement Brownien quelconque. Considérons le processus

$$Y(t) = \int_0^t \frac{1}{\text{sign}(X(s))} dX(s) = \int_0^t \text{sign}(X(s)) dX(s).$$

$\text{sign}(X(t))$ est adapté, $\int_0^T (\text{sign}(X(t)))^2 dt = T < \infty$, et $Y(t)$ est bien défini et est une

martingale continue.

$$[Y, Y](t) = \int_0^t \text{sign}^2(X(s)) d[X, X](s) = \int_0^t ds = t.$$

Par le théorème de Levy (qui sera démontré plus tard), $Y(t)$ est un mouvement Brownien, appelé $\hat{B}(t)$,

$$\hat{B}(t) = \int_0^t \frac{dX(s)}{\text{sign}(X(s))}.$$

Réécrire la dernière égalité dans la notation différentielle pour obtenir l'EDS de Tanaka. Le théorème de caractérisation de Levy implique également que toute solution faible est un mouvement Brownien.

Exemple 1.7. (EDS de Girsanov) L'équation

$$dX(t) = |X(t)|^r dB(t), \quad (1.52)$$

$r > 0, t \geq 0$, a une solution forte $X(t) \equiv 0$. Pour $r \geq 1/2$, c'est la seule solution forte par le Théorème 1.6. Il n'y a donc pas de solution faible autre que zéro. Pour $0 < r < 1/2$ l'EDS a une infinité de solutions faibles. Il n'y a donc pas d'unicité forte dans ce cas, sinon il n'y aurait qu'une seule solution faible. Comparons cela à la non-unicité de la solution de l'équation $dx(t) = 2\sqrt{|x(t)|}dt$, qui a pour solutions $x(t) = 0$ et $x(t) = t^2$.

1.2.5 Construction de solutions faibles

Dans cette section nous donnons des résultats sur l'existence et l'unicité de solutions faibles aux EDSs. La construction de solutions faibles nécessite des connaissances plus avancées.

Théorème 1.7. [31] *Si pour chaque $t > 0$, les fonctions $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ sont bornées et continues, alors l'EDS (1.50) a au moins une solution faible commençant à l'instant s au point x , pour tous s et x . Si en plus leurs dérivées partielles par rapport à x jusqu'à l'ordre deux sont également bornées et continues, alors l'EDS (1.50) a une solution faible unique commençant au temps s au point x . De plus, cette solution possède la propriété de Markov forte.*

Théorème 1.8. [31] Si $\sigma(x, t)$ est positif et continu et que pour tout $T > 0$ il y a K_T tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|\mu(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq K_T(1 + |x|) \quad (1.53)$$

alors il existe une solution faible unique de l'EDS (1.50) commençant en tout point $x \in \mathbb{R}$ à tout instant $s \geq 0$, de plus elle possède la propriété de Markov forte.

Espace canonique pour les diffusions

Les solutions aux EDSs ou aux diffusions peuvent être réalisées dans l'espace de probabilité des fonctions continues. Nous indiquons : comment définir la probabilité sur cet espace au moyen d'une fonction de transition, comment trouver la fonction de transition à partir d'une EDS donnée et comment vérifier que le processus construit satisfait bien l'EDS donnée.

Espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$

Les solutions faibles peuvent être construites sur l'espace canonique $\Omega = C([0, \infty))$ de fonctions continues de $[0, \infty)$ à \mathbb{R} . La σ algèbre de Borel sur Ω est celui généré par les ensembles ouverts. Les ensembles ouverts sont définis à l'aide d'une métrique, par exemple, une boule ouverte de rayon ϵ centrée sur ω est l'ensemble $D_\epsilon(\omega) = \{\omega' : d(\omega, \omega') < \epsilon\}$. La distance entre deux fonctions continues ω_1 et ω_2 est prise comme suit

$$d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup_{0 \leq t \leq n} |\omega_1(t) - \omega_2(t)|}{1 + \sup_{0 \leq t \leq n} |\omega_1(t) - \omega_2(t)|}.$$

La convergence des éléments de Ω dans cette métrique est la convergence uniforme des fonctions sur des intervalles fermés bornés $[0, T]$. Les diffusions sur un intervalle fini $[0, T]$ peuvent être réalisées sur l'espace $C([0, T])$ avec la métrique

$$d(\omega_1, \omega_2) = \sup_{0 \leq t \leq T} |\omega_1(t) - \omega_2(t)|.$$

Le processus canonique $X(t)$ est défini par $X(t, \omega) = \omega(t)$, $0 \leq t < \infty$. Il est connu que la σ algèbre de Borel \mathcal{F} sur $C([0, \infty))$ est donné par $\sigma(X(t), 0 \leq t < \infty)$. La filtration est définie par les σ algèbre $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s), 0 \leq s \leq t)$.

Mesure de probabilité

Nous décrivons la construction de mesures de probabilité à partir d'une fonction de transition donnée $P(y, t, x, s)$. En particulier, cette construction donne la mesure de Wiener qui correspond au processus de mouvement Brownien.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé et $s \geq 0$, une probabilité $P = P_{x,s}$ sur (Ω, \mathcal{F}) peut être construite en utilisant les propriétés

1. $P(X(u) = x, 0 \leq u \leq s) = 1$.
2. $P(X(t_2) \in B | \mathcal{F}_{t_1}) = P(B, t_2, X(t_1), t_1)$.

La deuxième propriété affirme que pour tout ensemble Borel $A, B \subset \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} P_{t_1, t_2}(A \times B) &:= P(X(t_1) \in A, X(t_2) \in B) \\ &= E(P(X(t_2) \in B | \mathcal{F}_{t_1}) I(X(t_1) \in A)) \\ &= E(P(B, t_2, X(t_1), t_1) I((X(t_1) \in A))) \\ &= \int_A \int_B P(dy_2, t_2, y_1, t_1) P_{t_1}(dy_1), \end{aligned}$$

où $P_{t_1}(C) = P(X(t_1) \in C)$. Ceci s'étend aux ensembles cylindres n -dimensionnels $\{\omega \in \Omega : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in J_n\}$, où $J_n \subset \mathbb{R}^n$, par

$$P_{t_1, \dots, t_{n+1}}(J_{n+1}) = \int_{J_{n+1}} P(dy_{n+1}, t_{n+1}, y_n, t_n) P_{t_1, \dots, t_n}(dy_1 \times \dots \times dy_n).$$

Ces probabilités donnent les distributions de dimension finie $P((\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in J_n)$. La consistance de ces probabilités est une conséquence de l'équation de Chapman-Kolmogorov pour la fonction de transition. Ainsi par le théorème d'extension de Kolmogorov, P peut être étendue de manière unique à \mathcal{F} . Cette mesure de probabilité $P = P_{x,s}$ correspond au processus de Markov commencé en x au temps s , dénoté précédemment par $X_s^x(t)$. Ainsi, toute fonction de transition définit une probabilité de sorte

que le processus canonique est un processus de Markov. Nous avons décrit en particulier une construction de la mesure de Wiener, ou mouvement Brownien.

Fonction de transition

Sous des conditions appropriées sur les coefficients $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$, $P(y, t, x, s)$ est déterminée à partir d'une équation différentielle partielle (EDP),

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x, s) + L_s u(x, s) = 0, \quad (1.54)$$

appelé l'EDP rétrograde, impliquant un opérateur différentiel du second ordre L_s ,

$$L_s f(x, s) = (L_s f)(x, s) = \frac{1}{2} \sigma^2(x, s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, s) + \mu(x, s) \frac{\partial f}{\partial x}(x, s). \quad (1.55)$$

Il découle de la propriété clé de la fonction de transition, que

$$f(X(t)) - \int_s^t (L_u f)(X(u)) du \quad (1.56)$$

est une martingale sous $P_{x,s}$ par rapport à \mathcal{F}_t pour $t \geq s$, pour toute fonction f deux fois continûment différentiable disparaissant à l'extérieur d'un intervalle fini (à support compact), $f \in C_K^2(\mathbb{R})$.

L'EDS sur l'espace canonique est satisfaite

Des concepts supplémentaires (celui des martingales locales et de leurs intégrales) sont nécessaires pour prouver rigoureusement cette affirmation. L'idée principale est la suivante. Supposons que (1.56) pour les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$ (bien qu'elles n'aient pas un support compact, elles peuvent être approximées par des fonctions C_K^2 sur tout intervalle fini). En appliquant (1.56) à la fonction linéaire, nous obtenons que

$$Y(t) = X(t) - \int_s^t \mu(X(u), u) du \quad (1.57)$$

est une martingale. En appliquant (1.56) à la fonction quadratique, nous obtenons que

$$X^2(t) - \int_s^t (\sigma^2(X(u), u) + 2\mu(X(u), u)X(u))du \quad (1.58)$$

est une martingale. Par la propriété de caractérisation de la variation quadratique pour les martingales continues, $Y^2(t) - [Y, Y](t)$ est une martingale, et il s'ensuit des relations ci-dessus que $[Y, Y](t) = \int_s^t \sigma^2(X(u), u)du$. On peut définir le processus intégral d'Itô $B(t) = \int_s^t dY(u)/\sigma(X(u), u)$. D'après les propriétés des intégrales stochastiques, il s'ensuit que $B(t)$ est une martingale locale continue avec $[B, B](t) = t$. Ainsi, par le théorème de Levy, $B(t)$ est un mouvement Brownien. En mettant tout ce qui précède et en utilisant la notation différentielle, on obtient l'EDS demandé.

Solutions faibles et le problème de Martingale

En prenant la relation (1.56), on a défini une solution faible de l'EDS

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t) \quad (1.59)$$

comme une solution d'un problème de Martingale.

Définition 1.12. [31] *Le problème de martingale pour les coefficients, ou l'opérateur L_s , est le suivant. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, et $s > 0$, trouver une mesure de probabilité $P_{x,s}$ sur Ω , \mathcal{F} telle que*

1. $P_{x,s}(X(u) = x, 0 \leq u \leq s) = 1$,
2. *Pour toute fonction f deux fois continuellement différentiable et disparaissant à l'extérieur d'un intervalle fini, le processus suivant est une martingale sous $P_{x,s}$ par rapport à \mathcal{F}_t*

$$f(X(t)) - \int_s^t (L_u f)(X(u))du. \quad (1.60)$$

Dans le cas où il existe exactement une solution au problème de martingale, on dit que le problème de martingale est bien posé.

Exemple 1.8. Le mouvement Brownien $B(t)$ est une solution au problème de martingale pour l'opérateur de Laplace $L = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$, c'est-à-dire, pour une fonction f for a

twice continuously differentiable function f vanishing outside a finite interval

$$f(B(t)) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(B(s)) ds$$

est une martingale. Puisque le mouvement Brownien existe et est déterminé par sa distribution de façon unique, le problème de martingale pour L est bien posé.

Comme il existe deux définitions des solutions faibles : la définition 1.10 et la définition 1.12, nous montrons qu'elles sont les mêmes.

Théorème 1.9. *Les solutions faibles au sens de la définition 1.10 et au sens de la définition 1.12 sont équivalentes.*

Théorème de comparaison

Ce théorème permet de comparer presque sûrement deux EDS uni-dimensionnelles, et s'avère souvent extrêmement utile en pratique. La preuve, qui utilise des arguments semblables à ceux de l'unicité trajectorielle vus précédemment, peut être trouvée dans [28].

Théorème 1.10. [5] *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien réel, b_1, b_2 et σ trois fonctions globalement lipschitziennes, $x_1 \geq x_2$ deux réels. On considère les deux EDS*

$$X_t^i = x_i + \int_0^t b_i(X_s^i) ds + \int_0^t \sigma(X_s^i) dB_s$$

Pour $i = 1, 2$. Supposons que $b_1(x) \geq b_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $X_t^1 \geq X_t^2$ p.s. pour tout $t \geq 0$.

Chapitre 2

Le modèle ratio-dépendant d'Arditi-Ginzburg

2.1 Présentation du modèle

Le modèle classique des systèmes prédateur-proie peut être écrit sous sa forme classique par un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires du premier ordre comme [1] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x)x - p(x, y)y \\ \frac{dy}{dt} = fp(x, y)y - dy. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ici, $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement les densités de population de la proie et du prédateur à l'instant t . Nous utilisons donc la forme logistique pour la fonction de croissance ϕ de la proie :

$$F(x) = a \left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

La forme générale d'un modèle proie-prédateur ratio-dépendant est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x)x - p\left(\frac{x}{y}\right)y \\ \frac{dy}{dt} = fp\left(\frac{x}{y}\right)y - dy \end{cases} \quad (2.2)$$

et la fonction ratio-dépendante d'Arditi-Ginzburg pour la réponse fonctionnelle p .
Ainsi,

$$p\left(\frac{x}{y}\right) := \frac{\frac{cx}{y}}{1 + ch\frac{x}{y}} = \frac{cx}{y + chx} =: \bar{p}(x, y), \quad \forall x, y \in]0, +\infty[. \quad (2.3)$$

où

a : le taux de croissance propre (intrinsèque) de la proie

d : le taux de mortalité des prédateurs.

f : le taux de conversion de la biomasse de proie en biomasse de prédateur.

h : le temps de traitement.

k : la capacité de charge

c : le taux d'attaque total.

Notons que p n'est définie que pour $y > 0$. Dans le cas de $y = 0$ et $x > 0$ nous pouvons, selon (2.3) définir $\bar{p}(x, 0) = \frac{1}{h}$ (i.e. $\lim_{y \rightarrow +\infty} p\left(\frac{x}{y}\right)$, $\frac{x}{y} \rightarrow +\infty$).

Le modèle proie-prédateur ratio-dépendant d'Arditi-Ginzburg est donc le suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a\left(1 - \frac{x}{k}\right)x - \frac{cx}{y + chx}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{fcx}{y + chx}y - dy \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2 Étude du modèle

2.2.1 Bornitude et positivité

Proposition 2.1. *Les solutions du modèle (2.4) sont positives et bornées.*

Démonstration. Les axes du modèle (2.4) sont invariants d'où la positivité des solutions.

Calculons la dérivée

$$\frac{d}{dt}\left(x + \frac{1}{f}y\right) = ax - \frac{a}{k}x^2 - \frac{d}{f}y$$

Soit $j, l > 0$ tels que $\frac{(a+j)^2 k}{4a} < l$ (pour n'importe quel j , une telle constante l peut être trouvée)

$$\begin{aligned} \frac{(a+j)^2 k}{4a} < l &\Leftrightarrow (a+j)^2 - 4\frac{a}{k}l < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{a}{k}x^2 - x(a+j) + l \quad \forall x \end{aligned} \quad (2.5)$$

En utilise la formule (2.5) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(x + \frac{1}{f}y \right) &< -jx - \frac{d}{f}y + l \\ &< -d \left(x + \frac{1}{f}y \right) + l \end{aligned}$$

avec $D := \min(j, d)$.

On peut conclure que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \left(x(t) + \frac{1}{f}y(t) \right) < \frac{l}{D}$.

Ainsi, puisque $x(t)$ et $y(t)$ sont positives, elles sont aussi bornées. \square

2.2.2 Points d'équilibre du modèle

Les isoclines nulles du système (2.4) sont :

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = \frac{ach(k-x)x}{k(c-a) + ax} \text{ si } x \neq x_L \\ y = 0 \text{ ou } y = \frac{c(f-dh)}{d}x \end{cases}$$

avec $x_L = k \left(1 - \frac{c}{a} \right)$.

Les points $\mathcal{A} = (k, 0)$ et $\mathcal{B} = (x^*, y^*)$ sont des points d'équilibre avec $x^* = k \left(1 - \frac{c(f-dh)}{fa} \right)$

et $y^* = \frac{c(f-dh)}{d}x^*$. La composante x^* est positive pour $c < \frac{fa}{f-dh}$, ce qui implique que $f-dh > 0$ et donc la composante y^* est positive.

Ainsi, \mathcal{B} existe si :

$$\begin{cases} c < \frac{fa}{f-dh} \\ f-dh > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Notons que l'origine \mathcal{O} est un point d'équilibre. En effet, posons :

$$\begin{cases} F_1(x, y) := a \left(1 - \frac{x}{k}\right) x - \frac{cx}{y + chx} y \\ F_2(x, y) := \frac{fcx}{y + chx} y - dy \end{cases}$$

Calculons la limite de F_1 et F_2 lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F_1(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} a \left(1 - \frac{x}{k}\right) x - \frac{cxy}{y + chx} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} a \left(1 - \frac{x}{k}\right) x - \frac{cxy}{xy \left(\frac{1}{x} + \frac{ch}{y}\right)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} a \left(1 - \frac{x}{k}\right) x - \frac{c}{\frac{1}{x} + \frac{ch}{y}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même on montre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F_2(x, y) = 0$. D'où le modèle (2.4) admet au plus trois points d'équilibre :

$$\mathcal{O} = (0, 0), \quad \mathcal{A} = (k, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (x^*, y^*)$$

La figure 2.1 présente les graphes des isoclines du modèle (2.4). L'isocline du prédateur est une droite oblique passant par l'origine. L'isocline de la proie est une hyperbole si $c < a$, et par conséquent l'équilibre intérieur existe toujours dans ce cas de figure 1.1a. Si $c > a$ l'isocline de la proie est une parabole. Donc l'équilibre intérieur existe dans le cas où la pente de la tangente à l'origine de l'isocline de la proie est plus grande que celle de l'isocline du prédateur.

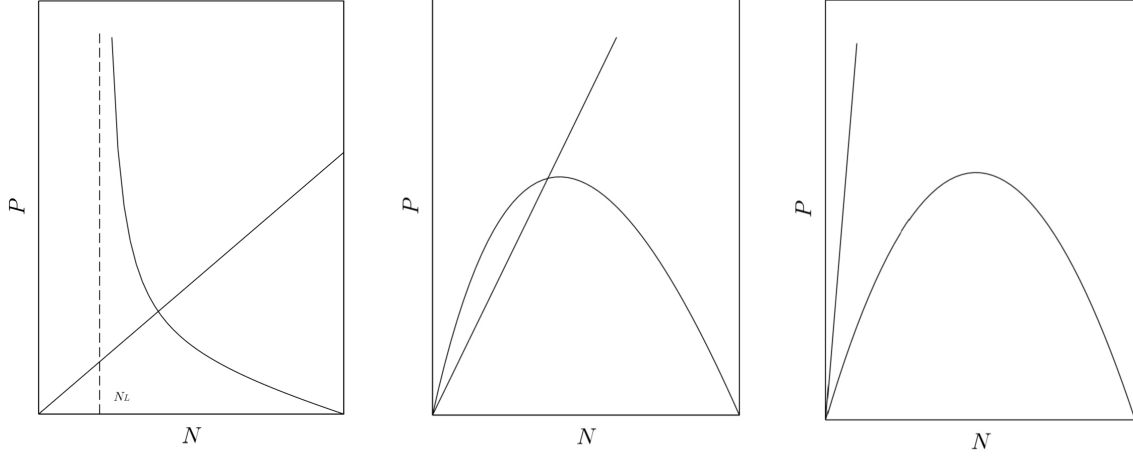


FIGURE 2.1: Isoclines du modèle ratio-dépendant. (a) si $c < a$, l'isocline de la proie a une asymptote verticale en x_L ; (b) si $c > a$, l'équilibre intérieur existe; (c) si $c > a$, l'équilibre intérieur n'existe pas.

2.2.3 Stabilité locale en dehors de l'origine

La matrice jacobienne est donnée par :

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} a \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{c}{y + chx} y - a \frac{x}{k} + \frac{c^2 h x y}{(y + chx)^2} & -\frac{c^2 h x^2}{(y + chx)^2} \\ \frac{f c y^2}{(y + chx)^2} & \frac{f c x}{y + chx} - d - \frac{f c x y}{(y + chx)^2} \end{pmatrix}$$

Pour le point \mathcal{A} nous avons :

$$\mathcal{J}(k, 0) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{1}{h} \\ 0 & \frac{f}{h} - d \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont : $\lambda_1 = -a$ qui est toujours strictement négative, et $\lambda_2 = \frac{f}{h} - d$, qui change de signe en fonction des valeurs des paramètres.

1. si $f - dh > 0$ alors $\lambda_2 > 0$ et l'équilibre \mathcal{A} est un point-selle pour (2.4).
2. si $f - dh < 0$ alors $\lambda_2 < 0$ et l'équilibre \mathcal{A} est un noeud stable pour (2.4).

Remarquons que si l'équilibre intérieur existe alors le point \mathcal{A} est toujours un point selle, d'après (2.6).

Pour le point d'équilibre intérieur \mathcal{B} , sachant que :

$$\begin{cases} a \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{c}{y^* + chx^*} y^* = 0 \\ \frac{fcx^*}{y^* + chx^*} - d = 0 \end{cases}$$

nous avons

$$\mathcal{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -a \frac{x^*}{k} + \frac{c^2 h x^* y^*}{(y^* + chx^*)^2} & -\frac{c^2 h x^{*2}}{(y^* + chx^*)^2} \\ \frac{fcy^{*2}}{(y^* + chx^*)^2} & -\frac{fcx^* y^*}{(y^* + chx^*)^2} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est

$$\det \mathcal{J}(x^*, y^*) = \frac{fcax^{*2}y^*}{k(y^* + chx^*)^2}.$$

Il est clair qu'il est strictement positif.

La trace vaut :

$$\begin{aligned} tr \mathcal{J}(x^*, y^*) &= -a \frac{x^*}{k} + \frac{c^2 h x^* y^*}{(y^* + chx^*)^2} - \frac{fcx^{*2}}{(y^* + chx^*)^2} \\ &= -a \frac{x^*}{k} + \frac{cx^* y^*}{(y^* + chx^*)^2} (ch - f) \\ &= - \left[\frac{fa - c(f - dh)}{f} + \frac{d(f - dh)(f - ch)}{f^2} \right] \\ &= -\frac{1}{f^2} (f^2(a + d - c) + d^2 h(ch - f)). \end{aligned}$$

Conditions	résultats
$c < \frac{fa}{f-dh}$ et $f-dh > 0$	L'équilibre intérieur \mathcal{B} existe.
$f-dh > 0$	L'équilibre \mathcal{A} est un point-selle.
$f-dh < 0$	L'équilibre \mathcal{A} est localement asymptotiquement stable(l.a.s) (nœud).
$c < \frac{f^2(a+d) - fd^2h}{f^2 - d^2h}$	Le point \mathcal{B} est l.a.s.
$c > \frac{f^2(a+d) - fd^2h}{f^2 - d^2h}$	Le point d'équilibre \mathcal{B} est instable.

TABLE 2.1: Conditions d'existence et de stabilité des points d'équilibre du système (2.4) en dehors l'origine.

2.3 A propos de l'origine

Dans cette partie nous étudions le comportement au voisinage de l'origine du modèle ratio-dépendant. Jost [27] affirme que le modèle ratio-dépendant n'a pas de comportement dynamique pathologique sur les axes et à l'origine, contrairement aux énoncés de certains auteurs [27]. Il propose le changement de variables suivant pour diminuer le nombre de paramètres :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{chx}{fk}, & \hat{y} &= \frac{chy}{f^2k}, & r &= \frac{ah}{f} \\ q &= \frac{dh}{f}, & s &= \frac{ch}{f} & \text{et} & \hat{t} = \frac{ft}{h} \end{aligned}$$

Le système (2.3) devient :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = r \left(1 - \frac{\hat{x}}{s} \right) \hat{x} - \frac{s\hat{x}}{\hat{y} + s\hat{x}} \hat{y} \\ \frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{s\hat{x}}{\hat{y} + s\hat{x}} \hat{y} - q\hat{y} \end{cases} \quad (2.7)$$

avec conditions initiales $\hat{x}(0) = x_0, \hat{y}(0) = y_0$. Nous omettrons l'accent circonflexe sur les variables dans le reste du travail.

Le système (2.7) admet au plus trois points d'équilibre : $\mathcal{O} = (0,0), \mathcal{A} = (s,0)$ et

l'équilibre non trivial $\mathcal{B} = (x^*, y^*)$ avec

$$x^* = \frac{s(r + (q - 1)s)}{r}$$

$$y^* = \frac{s(1 - q)}{q}x^*$$

correspondant aux points d'équilibre \mathcal{O} , \mathcal{A} et \mathcal{B} du modèle (2.3). Pour les conditions d'existence et de stabilité locale des points d'équilibre du modèle (2.7) autres que l'origine, voir tableau 2.2. Remarquons qu'à l'équilibre $\mathcal{O} = (0, 0)$, la matrice jacobienne ne peut pas se calculer directement à cause du ratio $\frac{x}{y}$. Pour comprendre le comportement au voisinage de ce point, nous effectuons deux 'éclatements' le long des axes en examinant les systèmes transformés $\left(\frac{x}{y}, y\right)$ et $\left(x, \frac{y}{x}\right)$.

Conditions	résultats
$s < \frac{r}{a - q}$ et $q < 1$	L'équilibre intérieur \mathcal{B} existe.
$q < 1$	L'équilibre \mathcal{A} est un point-selle.
$q > 1$	L'équilibre \mathcal{A} est localement asymptotiquement stable (nœud).
$s < \frac{q - q^2 + r}{1 - q^2}$	Le point \mathcal{B} est localement asymptotiquement stable
$s > \frac{q - q^2 + r}{1 - q^2}$	Le point d'équilibre \mathcal{B} est instable.

TABLE 2.2: Conditions d'existence et de stabilité des points d'équilibre correspondant au système (2.7)

Notre but n'est pas d'étudier les systèmes transformés $\left(\frac{x}{y}, y\right)$ et $\left(x, \frac{y}{x}\right)$ systématiquement, mais seulement le comportement des points d'équilibre sur les axes $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{x}$.

Soit $L := \frac{x}{y}$. Alors le système (2.7) se transforme en

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = L \left(r + q - \frac{r}{s}Ly \right) - s \frac{L(1 + L)}{1 + sL} \\ \frac{dy}{dt} = \left(s \frac{L}{1 + sL} - q \right) y \end{cases} \quad (2.8)$$

Il existe deux points d'équilibre sur l'axe des L :

$$E_0 = (0, 0), \quad \text{et} \quad E_1 = \left(\frac{s - q - r}{s(q + r - 1)}, 0 \right)$$

E_1 existe si

$$\begin{cases} s < q + r \\ q + r < 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} s > q + r \\ q + r > 1 \end{cases}$$

Il peut exister en fait un autre équilibre non trivial correspondant à \mathcal{B} mais on ne s'y intéresse pas. On notera aussi que l'équilibre \mathcal{A} de (2.7) est renvoyé à l'infini dans ce cas.

La matrice jacobienne en E_0 est :

$$\begin{pmatrix} r + q - s & 0 \\ s & -q \end{pmatrix}$$

1. L'équilibre E_0 est un point-selle pour $s < q + r$.
2. L'équilibre E_0 est localement asymptotiquement stable (nœud attractif) pour $s > q + r$.

Proposition 2.2. *L'équilibre E_1 est instable lorsque l'équilibre non trivial du système (2.7) existe.*

Démonstration. La matrice jacobienne en E_1 est :

$$\begin{pmatrix} \frac{sq + r - s + q + sr - (r + q)^2}{s - 1} & -\frac{r(s - q - r)^2}{s^3(q + r - 1)^2} \\ 0 & \frac{s(1 - q) - r}{s - 1} \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{sq + r - s + q + sr - (r + q)^2}{s - 1} \\ \lambda_2 = \frac{s(1 - q) - r}{s - 1} \end{cases}$$

1. Soit $s < 1$. Si l'équilibre non trivial du système (2.7) existe i.e. $\left(s < \frac{r}{1-q}\right)$ alors $\lambda_2 > 0$, donc l'équilibre E_1 est instable.
2. Soit $s > 1$. La valeur propre λ_2 sera négative. L'existence de l'équilibre intérieur assure dans ce cas que

$$r + q > 1.$$

La positivité de la première coordonnée de E_1 implique alors que

$$s > q + r. \tag{2.9}$$

D'où

$$\lambda_1 = \frac{1}{s-1}(s(q-1) + (q+r) - (r+q)^2 + sr)$$

En utilise la formule (2.9) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> \frac{1}{s-1}((q+r)(q-1+1-r-q) + sr) \\ &= \frac{1}{s-1}(r(s - (q+r))) \stackrel{(2.9)}{>} 0 \end{aligned}$$

E_1 est donc instable (point-selle).

□

Soit à présent la transformation $M = \frac{y}{x}$; le système (2.7) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(r - \frac{rx}{s} - \frac{sM}{s+M} \right) \\ \frac{dM}{dt} = \frac{M(s(rx - (q+r-1)s) + M(rx + s(s-q-r)))}{s(s+M)} \end{cases} \tag{2.10}$$

Le système (2.10) admet au plus quatre points d'équilibre $E_0^* = (0, 0)$, $E_1^* = \left(0, \frac{s(q+r-1)}{s-q-r}\right)$, $E_2^* = (s, 0)$ correspondant à \mathcal{A} de (2.7) et éventuellement un autre point d'équilibre intérieur correspondant à \mathcal{B} de (2.7).

Donc les points d'équilibre E_0^* et E_1^* sont sur l'axe M .

La matrice jacobienne en E_0^* est :

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 - q - r \end{pmatrix}$$

1. Le point E_0^* est un point-selle si $r + q > 1$.
2. Le point E_0^* est noeud instable si $r + q < 1$.

Donc, dans ce cas l'origine est toujours instable.

La matrice jacobienne en E_1^* est donné par

$$\begin{pmatrix} \frac{s(1-q) - r}{s-1} & 0 \\ \frac{r s(q+r-1)}{s} & \frac{sq + r - s + q + sr - (r+q)^2}{s-1} \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{s(1-q) - r}{s-1} \\ \lambda_2 = \frac{sq + r - s + q + sr - (r+q)^2}{s-1} \end{cases}$$

L'équilibre E_1^* est instable lorsque le point d'équilibre du système (2.7) existe (voir la démonstration de la Proposition 2.3).

On peut conclure pour le système (x, y) que pour $s < r + q$ l'origine $(0, 0)$ se comporte comme un point-selle.

Pour $s > r + q$ nous avons vu que le système (2.8) a un équilibre attractif en son origine. Interprété dans le plan de variables x et y , ceci signifie que l'origine peut être atteinte par une trajectoire pour laquelle $x(t)$ tend plus vite vers 0 que $y(t)$. Les figures 2.2 et 2.3 expliquent par exemple comment interpréter le comportement des solutions du système de départ (x, y) au voisinage de l'origine à l'aide des systèmes (L, y) et (x, M) .

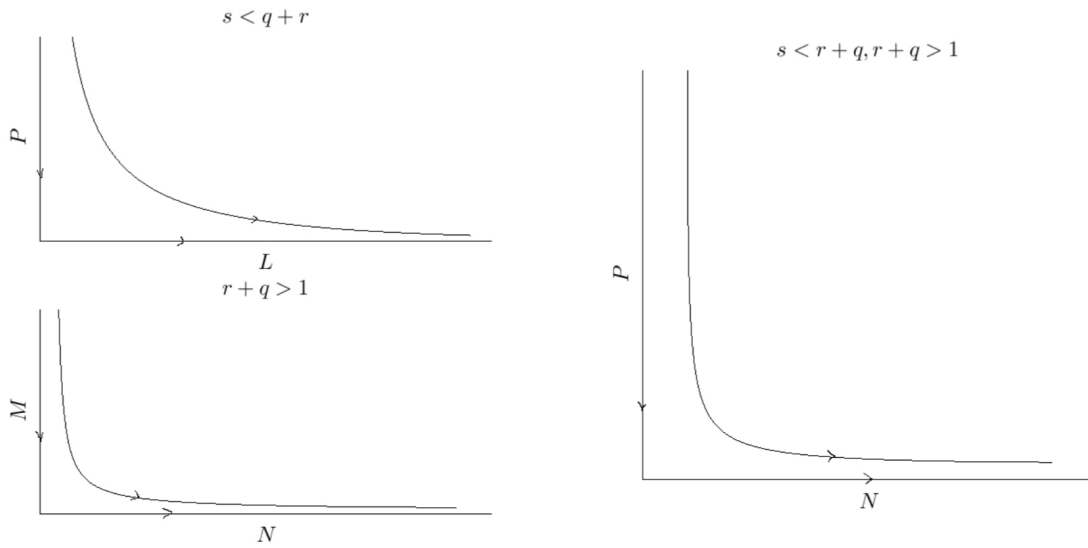


FIGURE 2.2: L'origine est un point-selle.

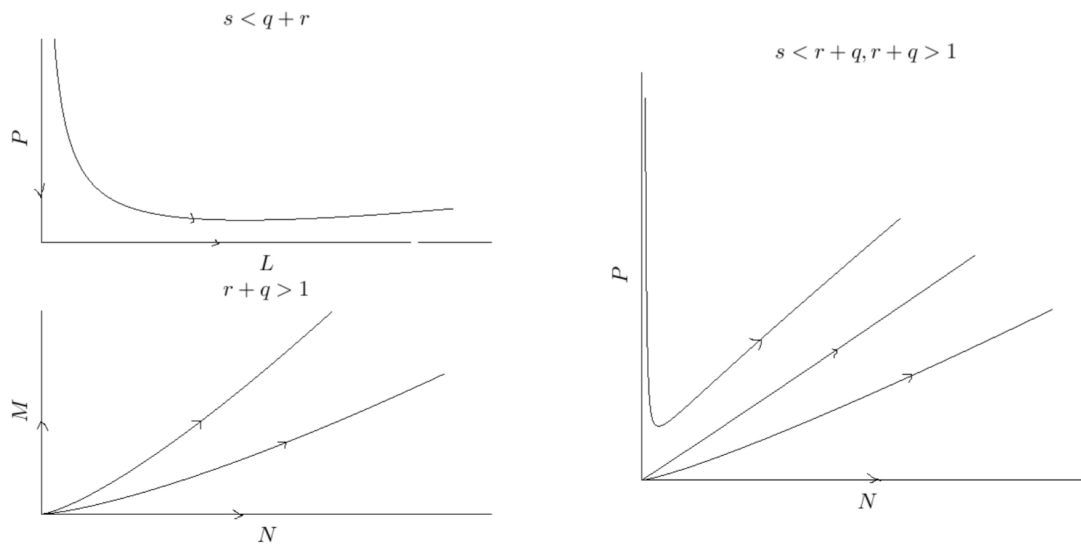


FIGURE 2.3: L'origine se comporte comme un point-selle.

Chapitre 3

Analyse qualitative d'un système stochastique proie prédateur de ratio dépendant

3.1 Présentation du modèle :

Arditi et Ginzburg [1] ont proposé une fonction de ratio dépendant de la forme

$$P\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\frac{cx}{y}}{my + \frac{x}{y}} = \frac{cx}{my + x}.$$

En conséquence, le modèle proie prédateur de ratio dépendant pris la forme suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) \\ \dot{y}(t) = y(t) \left(-d + \frac{fx(t)}{my(t) + x(t)} \right). \end{cases} \quad (3.1)$$

Ici, $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement les densités de population de la proie et du prédateur au temps t ; les paramètres, a , b , c , d , et m sont des constantes positive dans les quelles a/b est la capacité de charge (porteuse) de la proie .

3.1.1 Points d'équilibre du modèle

Pour déterminer les points d'équilibres, il suffit d'annuler les équations dynamiques :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \left(a - bx - \frac{cy}{my + x} \right) = 0 \\ y \left(-d + \frac{fx}{my + x} \right) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } a - bx - \frac{cy}{my + x} = 0 \\ y = 0 \text{ ou } -d + \frac{fx}{my + x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = \frac{x(a - bx)}{bxm + c - am} \\ y = 0 \text{ ou } x = \frac{dmy}{f - d} \end{cases} \implies$$

$$x = y \frac{dm}{f - d} \iff x = \frac{x(a - bx)}{bxm + c - am} \frac{dm}{f - d} \iff x = \frac{cd + fam - fc}{bfm} \iff$$

$$x = x^* = \frac{cd - f(c - am)}{bfm}$$

$$y^* = \frac{f - d}{dm} x^* \iff y^* = \frac{f - d}{dm} \frac{cd - f(c - am)}{bfm}$$

Le système (3.1) a toujours des équilibres $(0, 0)$, $(a/b, 0)$ et a un équilibre positif unique $E^* = (x^*, y^*)$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- i) $d < f < dc/(c - ma)$, lorsque $c > ma$,
- ii) $f > d$, lorsque $c \leq ma$.

Dans les deux cas, nous avons $x^* = [cd - f(c - ma)]/(bfm)$, $y^* = x^*(f - d)/(dm)$.

Théorème 3.1. [30] Si

$$f > d \text{ et } ma > c \tag{3.2}$$

alors le système (3.1) est permanent.

Preuve 3.1.1.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x(a - bx) - \frac{cy}{my + x}, \\
 &= x(a - bx) - \frac{cx}{m} \frac{(my + x - x)}{my + x}, \\
 &= x\left(a - \frac{cx}{m} - bx\right) \\
 \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) &\geq b^{-1}m^{-1}(ma - c) \\
 &= \underline{x} \\
 &> 0 \text{ (comme } ma > c)
 \end{aligned}$$

Donc pour t grand, $x(t) > \underline{x}/2$.

Maintenant, pour un grand t ,

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &\geq y\left(-d + \frac{f(\underline{x}/2)}{my + (\underline{x}/2)}\right) \\
 &= \left[(f - d)\frac{\underline{x}}{2} - dmy\right] \left(my + \frac{\underline{x}}{2}\right)^{-1} \\
 \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) &\geq (f - d)\underline{x}(2dm)^{-1} \\
 &= \underline{y} \\
 &> 0 \text{ (} f > d)
 \end{aligned}$$

Choisissons un nombre positif ϵ tel que $\epsilon < \min(\underline{x}/2, \underline{y}/2)$, on voit ça

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) > \epsilon$$

$$\text{et } \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) > \epsilon$$

Donc par définition, le système(3.1) est permanent.

Théorème 3.2. [30] Si $cm^{-1} > a + d$, alors le système (3.1) n'est pas persistant.

Les systèmes de population sont souvent affectés par le bruit environnemental, et par conséquent les modèles d'équations différentielles stochastiques jouent un rôle important dans diverses branches des sciences appliquées, surtout (notamment) en biologie et en dynamique des populations car ils offrent un certain degré de réalisme (réalité) supplémentaire par rapport à leur contrepartie déterministe.

En réalité, en raison des fluctuations continues de l'environnement (variation dans l'intensité des rayons solaires, température, le niveau d'eau ...), les paramètres impliqués dans les modèles ne sont pas des constantes absolues, mais ils fluctuent toujours autour d'une valeur moyenne. Comme résultat la densité de la population n'a jamais atteint une valeur fixe en fonction du temps (avec le temps) mais présente plutôt une oscillation continue autour de certaines valeurs moyennes. Sur la base de ces facteurs, les modèles de population stochastique ont reçu de plus en plus d'attention [9, 34]. À notre connaissance, une petite quantité de travail a été effectuée avec les modèles proie-prédateur ratio-dépendant stochastique. En [8], ils ont assuré que la perturbation stochastique des variables d'état était $\sigma_1(x - x^*)\dot{B}_1(t)$ et $\sigma_2(y - y^*)\dot{B}_2(t)$, où (x^*, y^*) est le point d'équilibre positif du système (3.1), $\dot{B}_1(t)$ et $\dot{B}_2(t)$ sont des bruits blancs, et ils ont montré que le modèle stochastique correspondant est asymptotiquement stable en moyenne quadratique. Tandis que dans [38], considérant que les fluctuations de l'environnement se manifesteraient principalement par des fluctuations du taux de croissance intrinsèque de la population de proies et du taux de mortalité de la population de prédateur [39], ils supposent que les paramètres a et d sont perturbés par

$$a \rightarrow a + \alpha\dot{B}_1(t), \quad d \rightarrow d + \beta\dot{B}_2(t),$$

où $B_1(t)$ et $B_2(t)$ sont des mouvements Browniens mutuellement indépendants et α et β représentent les intensités du bruit blanc. Alors le modèle proie-prédateur ratio-dépendant stochastique a pris la forme suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t), \\ dy(t) = y(t) \left(-d + \frac{fx(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt - \beta y(t) dB_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Par les méthodes de transformation de Laplace pour le modèle d'équation différentielle

stochastique, [38] ils ont calculé l'intensité (variance) de la fluctuation de la population pour les espèces de proies et de prédateurs. Mais pour la dynamique des populations, nous sommes plus intéressés par la persistance et l'extinction du système. Comme mentionné ci-dessus, les systèmes proie prédateur ratio-dépendant sans perturbation stochastique ont été bien étudiés et une dynamique beaucoup plus riche a été trouvée. Tout au long de ce chapitre sauf indication contraire, soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ est un espace de probabilité complet avec une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions usuelles (c'est-à-dire elle est contenu à droite et \mathcal{F}_0 contient tous les ensembles P-négligeables). On note que $B_1(t)$ et $B_2(t)$ sont des Mouvements Browniens standard indépendants définis sur cet espace de probabilité.

3.2 Existence, unicité et la bornitude de la solution positive

Comme $x(t)$ et $y(t)$ dans le système (3.3) sont les densités de population de la proie et du prédateur à l'instant t , respectivement, nous sommes seulement intéressé de la solution positive. En outre, pour qu'une équation différentielle stochastique ait une solution globale (c'est-à-dire pas d'explosion en un temps fini) unique pour toute valeur initiale donnée, les coefficients de l'équation sont généralement requis pour satisfaire la condition de croissance linéaire et la condition de Lipschitz locale [6, 33].

Cependant, les coefficients du système (3.3) ne vérifient ni la condition de croissance linéaire, ni la condition de Lipschitz locale continue. Dans cette section, en faisant le changement de variables, et le théorème de comparaison des équations stochastiques [24], nous allons montrer qu'il existe une solution positive unique avec une valeur initiale positive de system (3.3), et qu'elle est bornée en moyenne.

Lemme 3.1. *Il existe une solution locale positive unique $(x(t), y(t))$ pour $t \in [0, \tau_e)$ du système (3.3) p.s. pour toute valeur initiale $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.*

Démonstration.

$$dx(t) = x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t)$$

Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log x$ on obtient, et supposons $x(t)$ est positif :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

$$\log(x(t)) = \log(x(0)) + \int_0^t \frac{1}{x(s)} dx(s) + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{x^2(s)} d\langle x, x \rangle_s.$$

On a

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle_s &= \left\langle \int_0^t \alpha x(s) dB_1(s), \int_0^t \alpha x(s) dB_1(s) \right\rangle = \left\langle \int_0^t \alpha x(s) dB_1(s) \right\rangle \\ &= \int_0^t \alpha^2 x^2(s) d\langle B_1, B_1 \rangle_s = \int_0^t \alpha^2 x^2(s) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \log(x(t)) &= \log(x(0)) + \int_0^t \frac{1}{x(s)} x(s) \left[\left(a - bx(s) - \frac{cy(s)}{my(s) + x(s)} \right) ds + \alpha dB_1(s) \right] \\ &\quad + \int_0^t \frac{-1}{2x^2(s)} \alpha^2 x^2(s) ds \\ &= \log(x(0)) + \int_0^t \left(a - bx(s) - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{cy(s)}{my(s) + x(s)} \right) ds + \int_0^t \alpha dB_1(s) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $u(t) = \log(x(t)) \Leftrightarrow e^{u(t)} = x(t)$, on trouve

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \left(a - be^{u(t)} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{cy(t)}{my(t) + e^{u(t)}} \right) dt + \int_0^t \alpha dB_1(s)$$

on déduit que

$$du(t) = \left(a - be^{u(t)} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{cy(t)}{my(t) + e^{u(t)}} \right) dt + \alpha dB_1(s)$$

De même

$$dy(t) = y(t) \left(-d - \frac{fe^{u(t)}}{my(t) + e^{u(t)}} \right) dt + \beta y(t) dB_2(t)$$

Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log x$ on obtient, et supposons $y(t)$ est positif :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

$$\log(y(t)) = \log(y(0)) + \int_0^t \frac{1}{y(s)} dy(s) + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{y^2(s)} d\langle y, y \rangle_s$$

On a

$$\begin{aligned} \langle y, y \rangle_s &= \left\langle \int_0^t \beta y(s) dB_2(s), \int_0^t \beta y(s) dB_2(s) \right\rangle = \left\langle \int_0^t \beta y(s) dB_2(s) \right\rangle \\ &= \int_0^t \beta^2 y^2(s) d\langle B_2, B_2 \rangle_s = \int_0^t \beta^2 y^2(s) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \log(y(t)) &= \log(y(0)) + \int_0^t \frac{1}{y(s)} y(s) \left[\left(-d - \frac{f e^{u(s)}}{m y(s) + e^{u(s)}} \right) ds + \beta dB_2(s) \right] \\ &\quad + \int_0^t \frac{-1}{2 y^2(s)} \beta^2 y^2(s) ds \\ &= \log(y(0)) + \int_0^t \left(-d - \frac{\beta^2}{2} - \frac{f e^{u(t)}}{m y(s) + e^{u(t)}} \right) ds + \int_0^t \beta dB_2(s) \end{aligned}$$

En utilisant le faite que $v(t) = \log(y(t)) \Leftrightarrow e^{v(t)} = y(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0) + \int_0^t \left(-d - \frac{\beta^2}{2} - \frac{f e^{u(t)}}{m e^{v(t)} + e^{u(t)}} \right) dt + \int_0^t \beta dB_2(s) \\ dv(t) &= \left(-d - \frac{\beta^2}{2} - \frac{f e^{u(t)}}{m e^{v(t)} + e^{u(t)}} \right) t + \beta B_2(s). \end{aligned}$$

Alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} du(t) = \left(a - \frac{\alpha^2}{2} - b e^{u(t)} - \frac{c e^{v(t)}}{m e^{v(t)} + e^{u(t)}} \right) dt + \alpha dB_1(t), \\ dv(t) = \left(-d - \frac{\beta^2}{2} + \frac{f e^{u(t)}}{m e^{v(t)} + e^{u(t)}} \right) dt - \beta dB_2(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

sur $t \geq 0$ avec la valeur initiale $u(0) = \ln x_0$, $v(0) = \ln y_0$. Évidemment, les coefficients du système (3.4) satisfont la condition Lipschitz locale (localement Lipschitzienne), alors il existe une solution locale unique $(u(t), v(t))$ sur $t \in [0, \tau_e)$, où τ_e est le temps d'explosion (voir [6, 18]).

Par conséquent, par la formule d'Itô, il est facile de voir $x(t) = e^{u(t)}$, $y(t) = e^{v(t)}$ est la solution locale positive unique du système (3.3) avec valeur initiale $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. \square

Lemme 3.1 nous dit seulement qu'il existe une solution locale positive unique de sys-

tème (3.3). Ensuite, nous montrons que cette solution est globale, c'est-à-dire, $\tau_e = \infty$. Puisque la solution est positive, on a

$$dx(t) \leq x(t)(a - bx(t))dt + \alpha x(t)dB_1(t).$$

On considère l'équation différentielle stochastique auxiliaire suivante :

$$\Phi(t) = \frac{e^{(a - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha B_1(t)}}{\frac{1}{x_0} + b \int_0^t e^{(a - \frac{\alpha^2}{2})s + \alpha B_1(s)} ds}.$$

Alors $\Phi(t)$ est la solution unique de l'équation

$$\begin{cases} d\Phi(t) = \Phi(t)(a - b\Phi(t))dt + \alpha\Phi(t)dB_1(t). \\ \Phi(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

et

$$x(t) \leq \Phi(t) \text{ p.s. } t \in [0, \tau_e)$$

par le théorème de comparaison des équations stochastiques. D'autre part, nous avons

$$dx(t) \geq x(t) \left(a - bx(t) - \frac{c}{m} \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t) = x(t) \left(a - \frac{c}{m} - bx(t) \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t).$$

De même

$$\phi(t) = \frac{e^{(a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha B_1(t)}}{\frac{1}{x_0} + b \int_0^t e^{(a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2})s + \alpha B_1(s)} ds}$$

est la solution unique de l'équation

$$\begin{cases} d\phi(t) = \phi(t) \left(a - \frac{c}{m} - b\phi(t) \right) dt + \alpha\phi(t)dB_1(t), \\ \phi(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

et

$$x(t) \geq \phi(t) \text{ p.s. } t \in [0, \tau_e).$$

Par conséquent

$$\phi(t) \leq x(t) \leq \Phi(t) \text{ p.s. } t \in [0, \tau_e). \quad (3.7)$$

Ensuite, nous considérons la population de prédateur $y(t)$. Comme les arguments ci-dessus, nous pouvons obtenir

$$dy(t) \leq y(t)(-d + f)dt - \beta y(t)dB_2(t)$$

et

$$\begin{aligned} dy(t) &= y(t) \left(-d + f - \frac{fmy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt - \beta y(t)dB_2(t) \\ &\geq y(t)(-d + f - fm)dt - \beta y(t)dB_2(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aussi par le théorème de comparaison des équations stochastiques, on obtient

$$\underline{y}(t) := y_0 e^{(f-fm-d-\frac{\beta^2}{2})t-\beta B_2(t)} \leq y(t) \leq y_0 e^{(f-d-\frac{\beta^2}{2})t-\beta B_2(t)} := \bar{y}(t) \quad \text{p.s. } t \in [0, \tau_e]. \quad (3.9)$$

A partir de la représentation des solutions $\phi(t)$, $\Phi(t)$, $\underline{y}(t)$ et $\bar{y}(t)$, ces solutions sont bien définies pour tout $t \in [0, \infty)$, c'est-à-dire $\tau_e = \infty$. Donc,

Théorème 3.3. *Il existe une solution positive unique $(x(t), y(t))$ du système (3.3) p.s. pour toute valeur initiale $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. De plus il existe des fonctions $\phi(t)$, $\Phi(t)$, $\underline{y}(t)$ et $\bar{y}(t)$ définies comme ci-dessus telles que*

$$\phi(t) \leq x(t) \leq \Phi(t), \quad \underline{y}(t) \leq y(t) \leq \bar{y}(t) \quad \text{p.s. } t \geq 0.$$

De plus, à partir des arguments ci-dessus, nous pouvons voir que si le prédateur est absent, la population de proies suit la loi de la croissance logistique avec perturbation aléatoire, c'est-à-dire le système (3.5), qui a été étudié dans [25]. Ils ont montré que le système (3.5) est permanent stochastique. En combinant les lemmes 2.2 et 2.3 dans [25], nous savons

Lemme 3.2. *Soit $\Phi(t)$ la solution du système (3.5). Alors*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[\Phi(t)] \leq \frac{a}{b}. \quad (3.10)$$

Maintenant nous montrons que la solution $(x(t), y(t))$ du système (3.3) avec toute valeur initiale positive est uniformément bornée en moyenne.

Théorème 3.4. Soit $(x(t), y(t))$ la solution du système (3.3) avec toute valeur initiale positive a la propriété

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[x(t)] \leq \frac{a}{b}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} E[x(t)] + \frac{c}{f} E[y(t)] \leq \frac{(a+d)^2}{4bd}, \quad (3.11)$$

c'est-à-dire, elle est uniformément bornée en moyenne.

Preuve 3.2.1. En combinant $x(t) \leq \Phi(t)$ p.s et (3.10), il est facile de voir que $\limsup_{t \rightarrow \infty} E[x(t)] \leq \frac{a}{b}$. Ensuite, nous montrons que $y(t)$ est borné en moyenne. Soit

$$G(t) = x(t) + \frac{c}{f}y(t).$$

Calculons la dérivée temporelle de $G(t)$ le long du système (3.3), et on obtient

$$\begin{aligned} dG(t) &= dx(t) + \frac{c}{f}dy(t) \\ &= \left[x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + \alpha x(t)dB_1(t) \right] \\ &\quad + \frac{c}{f} \left[y(t) \left(-d + \frac{fx(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt - \beta y(t)dB_2(t) \right]. \\ &= x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + y(t) \left(\frac{-dc}{f} + \frac{cx(t)}{(my(t) + x(t))} \right) dt \\ &\quad + \alpha x(t)dB_1(t) - \frac{\beta c}{f}y(t)dB_2(t) \\ &= \left[x(t) \left(a - bx(t) - d + d \right) - \frac{cd}{f}y(t) \right] dt + \alpha x(t)dB_1(t) - \frac{\beta c}{f}y(t)dB_2(t) \\ &= [(a+d)x(t) - bx^2(t) - dG(t)] dt + \alpha x(t)dB_1(t) - \frac{c\beta}{f}y(t)dB_2(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

En intégrant de 0 à t , on trouve

$$G(t) = G(0) + \int_0^t ((a+d)x(s) - bx^2(s) - dG(s))ds + \alpha \int_0^t x(s)dB_1(s) - \frac{c\beta}{f} \int_0^t y(s)dB_2(s),$$

Ensuite

$$E[G(t)] = G(0) + \int_0^t E[(a+d)x(s) - bx^2(s) - dG(s)]ds$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dE[G(t)]}{dt} &= (a+d)E[x(s)] - bE[x^2(s)] - dE[G(s)] \\ &\leq (a+d)E[x(s)] - b(E[x(s)])^2 - dE[G(s)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La valeur maximale de $(a+d)E[x(s)] - b(E[x(s)])^2$ est $\frac{(a+d)^2}{4b}$ donc

$$\frac{dE[G(t)]}{dt} \leq \frac{(a+d)^2}{4b} - dE[G(s)]$$

Donc, par le théorème de comparaison, on a

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} E[G(t)] \leq \frac{(a+d)^2}{4bd}.$$

Remarque 3.1. Puisque la solution du système (3.3) est positive, d'après (3.11), on a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[y(t)] \leq \frac{f(a+d)^2}{4bcd}.$$

Remarque 3.2. Il a été prouvé que la solution du système (3.1) est uniformément bornée dans [8]. Le théorème (3.4) nous dit aussi que la solution du système (3.3) est uniformément bornée en moyenne, qui est similaire au système déterministe.

3.3 Le comportement à long terme du système

Pour les systèmes de population, nous sommes toujours préoccupés par la persistance du système. Dans cette section, nous étudions le comportement à long terme du système (3.3). Tout d'abord, nous établissons la condition de la persistance et obtenons à la fois que la population de proies et la fonction de ratio dépendante sont stables en moyenne temporelle; Ensuite, nous donnons la condition pour que le système (3.3) va à l'extinction; un exemple sera présenté à la fin pour confirmer les résultats.

3.3.1 Persistance

Dans cette partie, nous supposons toujours

$$a - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{c}{m} > 0, \quad f - d - \frac{\beta^2}{2} > 0 \quad (\text{H}_1)$$

Considérons une équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$dX(t) = X(t)[(a - bX(t))dt + \sigma dB(t)] \quad (3.14)$$

où les paramètres a , b et σ sont positifs, $a > \frac{\sigma^2}{2}$ et $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

Lemme 3.3. *supposons que $a > \frac{\sigma^2}{2}$ et $X(t)$ est la solution du système (3.14) avec tout valeur initial $x_0 > 0$. Puis*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log X(t)}{t} = 0 \quad p.s. \quad (3.15)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds = \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b} \quad p.s. \quad (3.16)$$

Preuve 3.3.1. *Par la formule d'Itô, nous pouvons voir*

$$X(t) = \frac{e^{(a - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)}}{\frac{1}{x_0} + b \int_0^t e^{(a - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma B(s)} ds}$$

La solution du système (3.14) avec la valeur initiale $X_0 > 0$. Alors il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_t} &= \frac{1}{X_0} e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})t - \sigma B(t)} + b \int_0^t e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) - \sigma(B(t) - B(s))} ds \\ &= e^{-\sigma B(t)} \left[\frac{1}{X_0} e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})t} + b \int_0^t e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} e^{\sigma B(s)} ds \right] \\ &\leq e^{-\sigma B(t)} \left[\frac{1}{X_0} e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})t} + b e^{\sigma \max_{0 \leq s \leq t} B(s)} \int_0^t e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} ds \right] \\ &\leq e^{\sigma [\max_{0 \leq s \leq t} B(s) - B(t)]} \left[\frac{1}{X_0} e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})t} + b \int_0^t e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} ds \right], \end{aligned}$$

La dernière inégalité est basé sur la propriété du mouvement Brownien $B(0) = 0$. De

même nous obtenons

$$\frac{1}{X(t)} \geq e^{\sigma(\min_{0 \leq s \leq t} B(s) - B(t))} \left[\frac{1}{X_0} e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})t} + b \int_0^t e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} ds \right].$$

Puisque la solution de l'équation

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = Z(t) \left[a - \frac{\sigma^2}{2} - bZ(t) \right], \\ Z(0) = X_0. \end{cases} \quad (3.17)$$

est $Z(t) = \frac{1}{\frac{1}{X_0} e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})t} + b \int_0^t e^{-(a - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)} ds}$, il s'ensuit que

$$e^{\sigma(\min_{0 \leq s \leq t} B(s) - B(t))} \frac{1}{Z(t)} \leq \frac{1}{X(t)} \leq e^{\sigma(\max_{0 \leq s \leq t} B(s) - B(t))} \frac{1}{Z(t)},$$

et

$$\sigma(B(t) - \max_{0 \leq s \leq t} B(s)) \leq \ln X(t) - \ln Z(t) \leq \sigma(B(t) - \min_{0 \leq s \leq t} B(s)). \quad (3.18)$$

La distribution de $\max_{0 \leq s \leq t} B(s)$ est la même que celle de $|B(t)|$, lorsque B est un mouvement Brownien standard, et $\min_{0 \leq s \leq t} B(s)$ a la même distribution que $\max_{0 \leq s \leq t} B(s)$. De plus, à partir de la représentation de $Z(t)$, on peut savoir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log Z(t)}{t} = 0. \quad (3.19)$$

Donc, par (3.19) et le théorème des grands nombres, (3.18) implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln X(t)}{t} = 0 \quad p.s.,$$

Comme l'égalité (3.15) est obtenues .

Ensuite, nous prouvons (3.16). Soit $u(t) = \ln X(t)$ et par la formule d'Itô nous obtenons

$$du(t) = \left(a - \frac{\sigma^2}{2} - bX(t) \right) dt + \sigma dB(t). \quad (3.20)$$

En l'intégrant de 0 à t , puis en divisant t du deux cotés, on obtient

$$\frac{u(t)}{t} - \frac{u(0)}{t} = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) - b \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds + \sigma \frac{B(t)}{t}.$$

Par la propriété du Mouvement Brownien, on sait que $\frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds \rightarrow \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b}$ est une conséquence de

$$\frac{u(t)}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

ce qui est vrai par (3.15).

Théorème 3.5. [31] (Loi des grands nombres)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = 0 \quad p.s. \quad (3.21)$$

Un résultat plus précis est fourni par la loi du logarithme itéré.

Théorème 3.6. [31] (Loi du logarithme itéré)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1, \quad p.s.$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1, \quad p.s.$$

Pour obtenir le comportement pour un petit t proche de zéro, le processus $W(t) = tB(\frac{1}{t})$ est considéré, qui est aussi un mouvement Brownien.

Remarque 3.3. L'inégalité (3.16) peut aussi être démontré par la méthode développée dans la preuve du Lemme 7 dans [36]. (3.20) peut être réécrit comme

$$du(t) = \left(a - \frac{\sigma^2}{2} - be^{u(t)}\right) dt + \sigma dB(t).$$

Quand $a > \frac{\sigma^2}{2}$, il y a une solution stationnaire qui a la densité g_* telle que

$$\frac{1}{2}\sigma^2 g'_*(x) = \left(a - \frac{\sigma^2}{2} - be^x\right) g_*(x). \quad (3.22)$$

Du le théorème ergodique et (3.22), il s'ensuit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{u(s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x g_*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b} g_*(x) dx = \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b}, \quad p.s.$$

C'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds = \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b} \quad p.s.$$

Soit $\Phi(t)$ et $\phi(t)$ sont des solutions de système (3.5) et (3.6), respectivement. En suivant le Lemme 3.3, quand $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} > 0$, on obtient les propriétés des solutions $\Phi(t)$ et $\phi(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \Phi(t)}{t} = 0, \quad (3.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(s) ds = \frac{a - \frac{\alpha^2}{2}}{b} \quad p.s. \quad (3.24)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \phi(t)}{t} = 0, \quad (3.25)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \phi(s) ds = \frac{a - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{c}{m}}{b} \quad p.s. \quad (3.26)$$

Ceci et (3.7) implique.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log x(t)}{t} = 0 \quad p.s.$$

et

$$\frac{a - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{c}{m}}{b} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq \frac{a - \frac{\alpha^2}{2}}{b} \quad p.s.$$

Autre

$$dy(t) \leq y(t) \left(-d + \frac{f\Phi(t)}{my(t)} \right) dt - \beta y(t) dB_2(t) = \left(-dy(t) + \frac{f}{m} \Phi(t) \right) dt - \beta y(t) dB_2(t).$$

Soit $\Psi(t)$ la solution de

$$\begin{cases} d\Psi(t) = \left(-d\Psi(t) + \frac{f}{m} \Phi(t) \right) dt - \beta \Psi(t) dB_2(t) \\ \Psi(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Donc par le théorème du comparaison des équations stochastiques, on a

$y(t) \leq \Psi(t)(t) (t \geq 0)$ p.s. En intégrant (3.27) de T à t ($t > T$), ou T satisfait $\frac{1}{2}e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})T} \geq 1$, donne

$$\Psi(t) = \Psi(T)e^{-(d+\frac{\beta^2}{2})(t-T)-\beta(B_2(t)-B_2(T))} + \frac{f}{m} \int_T^t \Phi(s)e^{-(d+\frac{\beta^2}{2})(t-s)-\beta(B_2(t)-B_2(s))} ds \quad (3.28)$$

Quand $s \geq T$, alors $\frac{1}{2}e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})T} \geq 1$ et

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})s+\alpha B_1(s)}}{\frac{1}{x_0} + b \int_0^s e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})u+\alpha B_1(u)} du} \leq \frac{e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})s+\alpha B_1(s)}}{b \int_0^s e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})u+\alpha B_1(u)} du} \\ &\leq \frac{e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})s+\alpha B_1(s)}}{be^{\alpha \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u)} \int_0^s e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})u} du} = \frac{a - \frac{\alpha^2}{2}}{b} \frac{e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})s+\alpha B_1(s)}}{e^{\alpha \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u)} \left[e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})s} - 1 \right]} \\ &\leq \frac{2 \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right)}{b} \frac{e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})s+\alpha B_1(s)}}{e^{\alpha \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u)} e^{(a-\frac{\alpha^2}{2})s}} = \frac{2 \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right)}{b} e^{\alpha(B_1(s)) - \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

En remplaçons ceci par (3.28), on trouve

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi(T)e^{-(d+\frac{\beta^2}{2})(t-T)-\beta(B_2(t)-B_2(T))} + \frac{2f \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right)}{bm} \int_T^t e^{B_1(s) - \min_{0 \leq u \leq s} B_1(u)} \\ &\quad \times e^{-(d+\frac{\beta^2}{2})(t-s)-\beta(B_2(t)-B_2(s))} ds \\ &\leq \Psi(T)e^{-(d+\frac{\beta^2}{2})(t-T)-\beta(B_2(t)-B_2(T))} + \frac{2f \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right)}{bm} e^{\alpha(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)) - \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s) + \beta(\max_{0 \leq s \leq t} B_2(s) - B_2(t))} \\ &\quad \times \int_T^t e^{-(d+\frac{\beta^2}{2})(t-s)} ds \\ &= \Psi(T)e^{-(d+\frac{\beta^2}{2})(t-T)-\beta(B_2(t)-B_2(T))} \\ &\quad + \frac{2f \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right)}{bm \left(d + \frac{\beta^2}{2} \right)} e^{\alpha(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)) - \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s) + \beta(\max_{0 \leq s \leq t} B_2(s) - B_2(t))} \left[1 - e^{-(d+\frac{\beta^2}{2})(t-T)} \right] \\ &\leq e^{\alpha(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)) - \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s) + \beta(\max_{0 \leq s \leq t} B_2(s) - B_2(t))} \left[\Psi(T) + \frac{2f \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right)}{bm \left(d + \frac{\beta^2}{2} \right)} \right] \\ &:= K_1 e^{\alpha(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)) - \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s) + \beta(\max_{0 \leq s \leq t} B_2(s) - B_2(t))} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou $K_1 = \Psi(T) + \frac{2f(a-\frac{\alpha^2}{2})}{bm(d+\frac{\beta^2}{2})}$ est une constant, donc on a

$$\frac{\log \Psi(t)}{t} \leq \alpha \frac{\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)}{t} - \alpha \frac{\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)}{t} + \beta \frac{\max_{0 \leq s \leq t} B_2(s)}{t} - \beta \frac{B_2(t)}{t} + \frac{\log K_1}{t} \quad (3.31)$$

La distribution de $\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)$, $\max_{0 \leq s \leq t} B_2(s)$ sont les même que $|B_1(t)|$ et $|B_2(t)|$ respectivement, et $\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)$ a la même du distribution que $-\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)$ soit $t \rightarrow \infty$, par la loi forte des grands nombres (3.31) implique

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \Psi(t)}{t} \leq 0 \quad \text{p.s.}$$

par conséquent

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log y(t)}{t} \leq 0 \quad \text{p.s.} \quad (3.32)$$

En outre

$$\begin{aligned} dy(t) &= y(t) \left(-d + f - \frac{fmy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt - \beta y(t) dB_2(t) \\ &\geq y(t) \left(-d + f - \frac{fm}{x(t)} y(t) \right) dt - \beta y(t) dB_2(t) \\ &\geq y(t) \left(-d + f - \frac{fm}{\phi(t)} y(t) \right) dt - \beta y(t) dB_2(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

soit

$$\begin{cases} d\Psi(t) = \Psi(t) \left(-d + f - \frac{fm}{\phi(t)} \Psi(t) \right) dt - \beta y(t) dB_2(t) \\ \Psi(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Donc $y(t) \geq \Psi(t)$ ($t \geq 0$) p.s. et

$$\frac{1}{\Psi(t)} = \frac{1}{y_0} e^{-(f-d-\frac{\beta^2}{2})t + \beta B_2(t)} + fm \int_0^t \frac{1}{\phi(s)} e^{-(f-d-\frac{\beta^2}{2})(t-s) + \beta(B_2(t)-B_2(s))} ds. \quad (3.35)$$

On note que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\phi(s)} &= e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s-\alpha B_1(s)} \left(\frac{1}{X_0} + b \int_0^s e^{\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)u+\alpha B_1(u)} du \right) \\
 &= \frac{1}{X_0} e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s-\alpha B_1(s)} + b e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s-\alpha B_1(s)} \int_0^s e^{\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)u+\alpha B_1(u)} du \\
 &\leq \frac{1}{X_0} e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s-\alpha B_1(s)} + b e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s+\alpha \left(\max_{0 \leq u \leq s} B_1(u)-B_1(s)\right)} \int_0^s e^{\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)u} du \\
 &= \frac{1}{X_0} e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s-\alpha B_1(s)} + \frac{b e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s+\alpha \left(\max_{0 \leq u \leq s} B_1(u)-B_1(s)\right)}}{a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}} \left(e^{\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s} - 1 \right) \\
 &\leq \frac{1}{X_0} e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s-\alpha B_1(s)} + \frac{b e^{\alpha \left(\max_{0 \leq u \leq s} B_1(u)-B_1(s)\right)}}{a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}} \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

puis en le remplaçant par (3.11) donne

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Psi(t)} &\leq \frac{1}{y_0} e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t+\beta B_2(t)} + \frac{fm}{x_0} \int_0^t e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s-\alpha B_1(s)} e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)(t-s)+\beta(B_2(t)-B_2(s))} ds \\
 &\quad + \frac{bfm}{a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}} \int_0^t e^{\alpha \left(\max_{0 \leq u \leq s} B_1(u)-B_1(s)\right)} e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)(t-s)+\beta(B_2(t)-B_2(s))} ds \\
 &\leq \frac{1}{y_0} e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t+\beta(B_2(t))} + \frac{fm}{x_0} e^{-\alpha \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)+\beta \left(B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)\right)} \\
 &\quad \int_0^t e^{-\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right)s-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t+\beta B_2(t-s)} ds \\
 &\quad + \frac{bfm}{a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}} e^{\alpha \left(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)-\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)+\beta B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)\right)} \int_0^t e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)(t-s)} ds \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

si

$$f - d - \frac{\beta^2}{2} \neq a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2}$$

alors il résulte de (3.37) que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Psi(t)} &\leq \frac{1}{y_0} e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t+\beta(B_2(t))} + \frac{fme^{-\alpha \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)+\beta(B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s))}}{x_0 \left(f-d-\frac{\beta^2}{2}-a+\frac{c}{m}+\frac{\alpha^2}{2}\right)} \left[e^{-(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2})t} - e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t} \right] \\
 &+ \frac{bfme^{\alpha \left(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)-\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)\right)+\beta \left(B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)\right)}}{\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right) \left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)} \left[1 - e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t} \right] \\
 &\leq e^{\alpha \left(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)-\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)\right)+\beta \left(B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)\right)} \\
 &\times \left[\frac{1}{y_0} + \frac{2fm}{x_0 \left|f-d-\frac{\beta^2}{2}-a+\frac{c}{m}+\frac{\alpha^2}{2}\right|} + \frac{bfm}{\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right) \left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)} \right]
 \end{aligned}$$

si

$$f-d-\frac{\beta^2}{2} = a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2}$$

Alors il découle le de (3.37) que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Psi(t)} &\leq \frac{1}{y_0} e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t+\beta(B_2(t))} + \frac{fm}{x_0} e^{-\alpha \min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)+\beta(B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s))} t e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t} \\
 &+ \frac{bfme^{\alpha \left(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)-\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)\right)+\beta \left(B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)\right)}}{\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)^2} \left[1 - e^{-\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)t} \right] \\
 &\leq e^{\alpha \left(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)-\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)\right)+\beta \left(B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)\right)} \left[\frac{1}{y_0} + \frac{fm}{x_0} t + \frac{bfm}{\left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

En résumé, il y a

$$\frac{1}{\Psi(t)} \leq K_2(t) e^{\alpha \left(\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)-\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)\right)+\beta \left(B_2(t)-\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)\right)}$$

où

$$K_2(t) = \frac{1}{y_0} + \frac{bfm}{\left(a-\frac{c}{m}-\frac{\alpha^2}{2}\right) \left(f-d-\frac{\beta^2}{2}\right)} + \max \left\{ \frac{2fm}{X_0 \left|f-d-\frac{\beta^2}{2}-a+\frac{c}{m}+\frac{\alpha^2}{2}\right|}, \frac{fm}{X_0} t \right\}$$

On obtient ainsi

$$-\frac{\log \Psi(t)}{t} \leq \frac{\log K_2(t)}{t} + \alpha \frac{\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)}{t} - \alpha \frac{\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)}{t} + \beta \frac{B_2(t)}{t} - \beta \frac{\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)}{t}$$

et

$$\frac{\log \Psi(t)}{t} \geq -\frac{\log K_2(t)}{t} - \alpha \frac{\max_{0 \leq s \leq t} B_1(s)}{t} + \alpha \frac{\min_{0 \leq s \leq t} B_1(s)}{t} - \beta \frac{B_2(t)}{t} + \beta \frac{\min_{0 \leq s \leq t} B_2(s)}{t}$$

On note que $\frac{\log K_2(t)}{t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, donc

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \Psi(t)}{t} \geq 0$$

selon la loi forte des grands nombres. Par conséquent

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log y(t)}{t} \geq 0 \quad p.s. \quad (3.39)$$

Donc (3.32) et (3.39) implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log y(t)}{t} = 0 \quad p.s. \quad (3.40)$$

D'ailleurs, à partir de (3.3) on obtient

$$d \log y(t) = \left(-d - \frac{\beta^2}{2} + \frac{fx(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt - \beta dB_2(t)$$

En l'intégrant de 0 à t , on obtient

$$\log y(t) - \log y(0) = \left(-d - \frac{\beta^2}{2} \right) t + \int_0^t \frac{fx(s)}{my(s) + x(s)} ds - \beta B_2(t)$$

et

$$\frac{\log y(t) - \log y(0)}{t} = -d - \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{fx(s)}{my(s) + x(s)} ds - \beta \frac{B_2(t)}{t} \quad (3.41)$$

En laissant $t \rightarrow \infty$, (3.40) et (3.41) impliquent

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{x(s)}{my(s) + x(s)} ds = \frac{d + \frac{\beta^2}{2}}{f} \quad p.s.$$

De plus, on peut obtenir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{my(s) + x(s)} ds = \frac{f - d - \frac{\beta^2}{2}}{mf} \quad p.s. \quad (3.42)$$

L'argument ci-dessus montre que :

Théorème 3.7. [26] *Supposons que la condition (H_1) soit satisfaite, et $(x(t), y(t))$ est la solution du système (3.3) pour tout valeur initiale $x_0 > 0, y_0 > 0$. Alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{x(s)}{my(s) + x(s)} ds = \frac{d + \frac{\beta^2}{2}}{f}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{my(s) + x(s)} ds = \frac{f - d - \frac{\beta^2}{2}}{mf} \quad p.s. \quad (3.43)$$

En d'autre termes, la fonction de ratio dépendent $P(\frac{x}{y})$ est stable en moyenne temporelle. En fait, nous avons aussi

$$d \log x(t) = \left(a - \frac{\alpha^2}{2} - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + \alpha dB_1(t)$$

En l'intégrant de 0 à t

$$\log x(t) - \log x(0) = \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right) t - b \int_0^t x(s) ds - c \int_0^t \frac{y(s)}{my(s) + x(s)} ds + \alpha B_1(t)$$

Puis en divisant sur t du deux cotés, on obtient

$$\frac{\log x(t) - \log x(0)}{t} = a - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{b}{t} \int_0^t x(s) ds - \frac{c}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{my(s) + x(s)} ds + \alpha \frac{B_1(t)}{t}$$

Ceci et (3.42) montrent que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = \frac{a - \frac{\alpha^2}{2}}{b} - \frac{c \left(f - d - \frac{\beta^2}{2} \right)}{bfm} = \frac{c \left(d - \frac{\beta^2}{2} \right) - f \left(c - m \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right)}{bfm} \quad p.s.$$

Donc nous avons

Théorème 3.8. [26] Supposons que la condition (H_1) est satisfaite et $(x(t), y(t))$, soit la solution du système (3.3) pour toute valeur initiale $x_0 > 0, y_0 > 0$. Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = \frac{c \left(d - \frac{\beta^2}{2} \right) - f \left(c - m \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right)}{bfm} \quad p.s. \quad (3.44)$$

C'est à dire, l'espèce proie est stable en temps moyenne.

Maintenant nous sommes en mesure de montrer la permanence du système 3.3. Chen et tout ont introduit la définition de la persistante en moyenne pour le système déterministe. Ici, on le modifie un peu pour définir la persistance pour les systèmes stochastique.

Définition 3.1. [26] Le système (3.3) est dit persistant en moyenne, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{x(s)} ds > 0 \quad p.s.$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{x(s)}{y(s)} ds > 0 \quad p.s.$$

à partir de (3.42) on peut voir que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{x(s)} ds \geq \frac{f - d - \frac{\beta^2}{2}}{mf} \quad p.s.$$

ceci avec (3.43) impliquent :

Théorème 3.9. [26] le système (3.3) est persistant en moyenne si la condition (H_1) est satisfaite.

3.3.2 Extinction

Dans cette partie, nous supposons que la condition (H_1) n'est pas satisfaite et on considère le cas : $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} < 0$. Soit $u(t) = \log x(t)$, $v(t) = \log y(t)$ et par la formule d'Itô, on a

$$du(t) = \left(a - \frac{\alpha^2}{2} - be^{u(t)} - \frac{ce^{v(t)}}{me^{v(t)} + e^{u(t)}} \right) dt + \alpha dB_1(t) \leq \left(a - \frac{\alpha^2}{2} \right) dt + \alpha dB_1(t)$$

En utilisant le théorème de comparaison des équations stochastiques et la théorie du processus de diffusion.

Considérons l'équation stochastique suivante

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t). \quad (3.45)$$

Lemme 3.4. [26] *Supposons que $X(t)$ est la solution du système (3.45). Si $S(-\infty) > -\infty$ et $S(+\infty) = \infty$, alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty,$$

ou la fonction d'échelle

$$s(u) = \int_0^u e^{-\int_0^v \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)} dy} dv.$$

pour $\mu(t) = a - \frac{\alpha^2}{2}$ et $\sigma(t) = \alpha$ on peut calculer $S(-\infty) > -\infty$ et $S(+\infty) > +\infty$, donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\infty \quad \text{p.s.}$$

C'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Dans ce cas, nous devons avoir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{p.s.} \quad (3.46)$$

Sinon, ça doit être

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) := k > 0 \quad \text{p.s.}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe t_0 et un ensemble Ω_ε tel que $P(\Omega_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ et $\frac{f(x(t))}{m y(t) + x(t)} \leq \varepsilon$ pour $t \geq t_0$ et $\omega \in \Omega_\varepsilon$. Donc,

$$y(t)(-ddt - \beta dB_2(t)) \leq dy(t) \leq y(t)((-d + \varepsilon) dt - \beta dB_2(t)),$$

et

$$-\left(d + \frac{\beta^2}{2}\right) dt - \beta dB_2(t) \leq dv(t) \leq \left(-\left(d + \frac{\beta^2}{2}\right) + \varepsilon\right) dt - \beta dB_2(t).$$

Par le même raisonnement que ci-dessus et pour un arbitraire ε , on peut obtenir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\infty \quad \text{p.s.},$$

c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{p.s.}$$

il y a une contradiction, donc (3.46) est vraie.

En combinant l'argument ci-dessus, on obtient

Théorème 3.10. [26] *Soit $(x(t), y(t))$ la solution du système (3.3) avec toute valeur initiale $x_0 > 0, y_0 > 0$. Si $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} < 0$, alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Remarque 3.4. De la condition $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} < 0$ dans le Théorème 3.10, nous pouvons voir qu'il y a deux situations qui conduisent à l'extinction des deux espèces dans le système (3.3). L'un est $a - \frac{c}{m} < 0$, l'autre est $a - \frac{c}{m} \geq 0$, mais $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} < 0$. De plus, la preuve du Théorème 3.10 nous dit que lorsque la proie va à l'extinction, le prédateur mourra également.

Quelle est l'autre situation ?

De (3.9), on peut voir que si $f - d - \frac{\beta^2}{2} < 0$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{p.s.} \tag{3.47}$$

Ensuite, nous prêtons attention à la population de proies $x(t)$. De toute évidence,

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t), \\ &= x(t) \left(a - \frac{c}{m} - bx(t) - \frac{\frac{c}{m}x(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t), \\ &\geq x(t) \left(a - \frac{c}{m} - bx(t) \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Si $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} > 0$, alors par Lemme 3.3, nous pouvons obtenir

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq \frac{a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2}}{b} > 0 \quad \text{p.s.}$$

ce qui implique qu'il existe un $T_0 > 0$ et une constante K_0 tel que $x(t) > K_0$ p.s. pour $t \geq T_0$. De plus (3.47) nous dit, pour $\forall \varepsilon > 0$ il y a $T > T_0$ et Ω_ε tels que $P(\Omega_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ et $\frac{cy(t)}{x(t)} \leq \varepsilon$ pour $\omega \in \Omega_\varepsilon$, $t \geq T$. Alors quand $\omega \in \Omega_\varepsilon$, $t \geq T$, on a

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t), \\ &\geq x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{x(t)} \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t), \\ &\geq x(t) \left(a - \varepsilon - bx(t) \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t). \end{aligned} \quad (3.49)$$

ce qui implique

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq \frac{a - \varepsilon - \frac{\sigma^2}{2}}{b} > 0 \quad \text{p.s.}$$

D'autre part, on note que

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x(t)} \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t), \\ &\leq x(t) \left(a - bx(t) \right) dt + \alpha x(t) dB_1(t), \end{aligned} \quad (3.50)$$

alors

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \leq \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b} > 0 \quad \text{p.s.}$$

Donc pour un arbitraire de ε on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b} \quad \text{p.s.}$$

Ces arguments montrent

Théorème 3.11. [26] Soit $(x(t), y(t))$ est la solution du système (3.3) avec toute valeur

initiale $x_0 > 0, y_0 > 0$. Si $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} > 0, f - d - \frac{\beta^2}{2} < 0$, puis

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = \frac{a - \frac{\alpha^2}{2}}{b}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad p.s.$$

Ryszard [36] ont également considéré cette situation pour le système proie-prédateur traditionnel avec perturbation aléatoire

$$\begin{cases} dX(t) = X(t)(\alpha - \beta Y(t) - \mu X(t))dt + \sigma X(t)dB(t), \\ dY(t) = Y(t)(-\gamma + \delta X(t) - v Y(t))dt + \rho Y(t)dB(t). \end{cases} \quad (3.51)$$

Il ont montré dans des conditions simple, $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$ et la distribution du processus $\xi(t)$ converge faiblement vers la mesure qui a la densité $f_*(x) = C e^{\frac{2(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2} x - \frac{2\mu}{\sigma^2} e^x}$, ou $\xi(t) = \log X(t)$.

Remarque 3.5. *Théorème (3.10) montre que les deux espèces sont disparaître sous la condition $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} < 0$. En comparant cette condition avec la condition (3.2). Si $ma < c$ mais $cm^{-1} < a + d$, alors le système stochastique (3.3) n'est pas permanent, mais le système déterministe (3.1) peut être permanent.*

3.3.3 Exemple

Dans cette section, on va utiliser la méthode mentionnée dans [21] pour trouver la solution forte du système (3.3) avec une valeur initiale donnée.

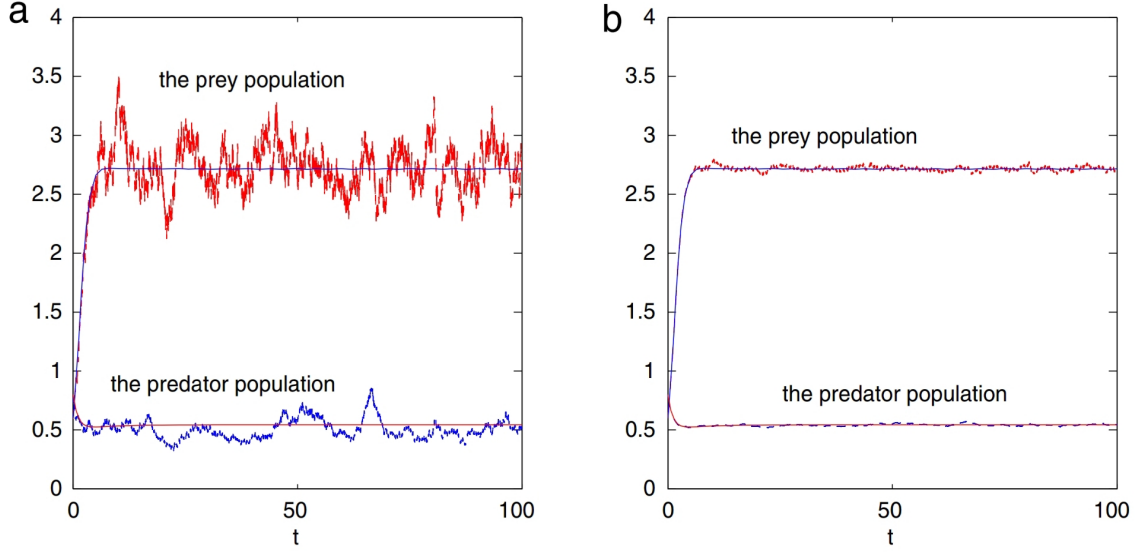


FIGURE 3.1: Solutions des systèmes (3.1) et (3.3) pour $(x_0, y_0) = (0.6, 0.8)$, $a = 1.2$, $b=0.4$, $c=0.8$, $d=0.5$, $f=0.7$, $m=2$, $\delta t = 0.001$ et σ variable. Les droites réelles représentent la solution du système (3.1), tandis que les droites imaginaires représentent celles du système (3.3). (a) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$; (b) $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$.

Considérons l'équation de discrétisation :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \left(ax_k - bx_k^2 - \frac{cx_k y_k}{my_k + x_k} \right) \Delta t + \alpha x_k \sqrt{\Delta t} \xi_k + \frac{\alpha^2}{2} x_k (\Delta t \xi_k^2 - \Delta t), \\ y_{k+1} = y_k + \left(-dy_k + \frac{fx_k}{my_k + x_k} \right) \Delta t - \beta y_k \sqrt{\Delta t} \eta_k + \frac{\alpha^2}{2} y_k (\Delta t \eta_k^2 - \Delta t), \end{cases} \quad (3.52)$$

où ξ_k et η_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont les variables aléatoires gaussiennes $N(0, 1)$.

En choisissant des paramètres appropriés, on obtient des simulations du système stochastique (3.3) et le déterministe correspondant système (3.1) aide du logiciel Matlab. Comme indiqué dans [30], le système (3.1) a un équilibre positif (x^*, y^*) , ou $x^* = \frac{a}{b} - \frac{c(f-d)}{bmf}$, $y^* = \frac{x^*(f-d)}{dm}$, et il est stable, si (3.2) est satisfait. Maintenant, on permet aux fluctuations stochastiques de l'environnement d'affecter les paramètres a , d et étudie la dynamique du système (3.3). D'après les Théorèmes 3.7-3.9, on attend à ce que $x(t)$ et $P(\frac{x}{y})$ sont stables en moyenne temporelle sous la condition (H_1) . Par exemple, dans la Fig. 3.1, on choisit la valeur initiale $(x_0, y_0) = (0.6, 0.8)$ et les paramètres satisfaisant aux conditions (3.2) et (H_1) . Les droites réelles et les droites imaginaires représentent les solutions du système déterministe (3.1) et le système stochastique (3.3), respectivement. Par rapport à la condition (3.2), la seule diffé-

rence est que l'intensité de bruit blanc est considéré dans la condition (H_1) . En particulier, on choisit $\alpha = 0.1, \beta = 0.1$ en (a) et en (b) $\alpha = 0.01, \beta = 0.01$. on observe qu'avec la diminution des valeurs α, β , la dynamique du système stochastique se rapproche de la système déterministe.

Le Théorème 3.8 montre que les deux espèces du système stochastique (3.3) s'éteindront sous la condition du Théorème 3.8. Dans la Fig 3.2, on considère le cas $f > d$, mais $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} < 0$. Par conséquent, l'espèce dans (3.3) est éteint, ce que l'on voit en (a1) et (a2) de la Fig 3.2. Alors qu'en (b1) et (b2), on simule le cas déterministe correspondant. Alors que dans (b1) et (b2), on simule le cas déterministe correspondant. Spécialement, $a - \frac{c}{m} > 0$ dans (b1), et $cm^{-1} > a + d$ dans (b2), ce qui conduit à la persistance du système déterministe, voir (b1), et l'extinction, voir (b2), respectivement. En comparant (a1) avec (b1), on choisit les mêmes valeurs de paramètres sauf il y a encore deux paramètres α et β dans (a1). Le résultat montre qu'un bruit fort peut entraîner l'extinction de l'espèce et cela peut arriver dans la réalité. De ce point de vue, le modèle stochastique est plus réel que le modèle déterministe. D'autre part, si le système déterministe va s'éteindre, alors peu importe la faiblesse du bruit, le système stochastique est également éteinte (comparer (a2) avec (b2)). On considère ensuite le cas $f \leq d$. Kuang et Beretta ont montré dans [30] que si $ma \geq c$ et $f \leq d$, alors $(\frac{a}{b}, 0)$ est globalement asymptotiquement stable pour le système déterministe (3.1). Dans la Fig. 3.3, les paramètres choisis satisfont cela et les simulations (b1), (b2) confirme également ce résultat. Dans (a1) et (a2), les paramètres α, β varient. En particulier, dans (a1), $\alpha = 0.4, \beta = 0.1$ tels que $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} < 0$, alors les deux espèces vont disparaître comme le prouve le Théorème (3.8); tandis que dans (a2), $\alpha = 0.1, \beta = 0.1$ tel que $a - \frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{2} > 0$, alors comme l'a dit le Théorème (3.8), la population de proies $x(t)$ est permanente, tandis que la population de prédateurs va s'éteindre.

Enfin, la Fig. 3.4 illustre la chose de la Remarque 3.5. On choisit les paramètres vérifiant $ma < c$, mais $cm^{-1} < a + d$. Comme La Remarque 3.5 a dit que les deux espèces du système (3.3) meurent (voir (a)), tandis que dans (b), la solution du système (3.1) est permanente.

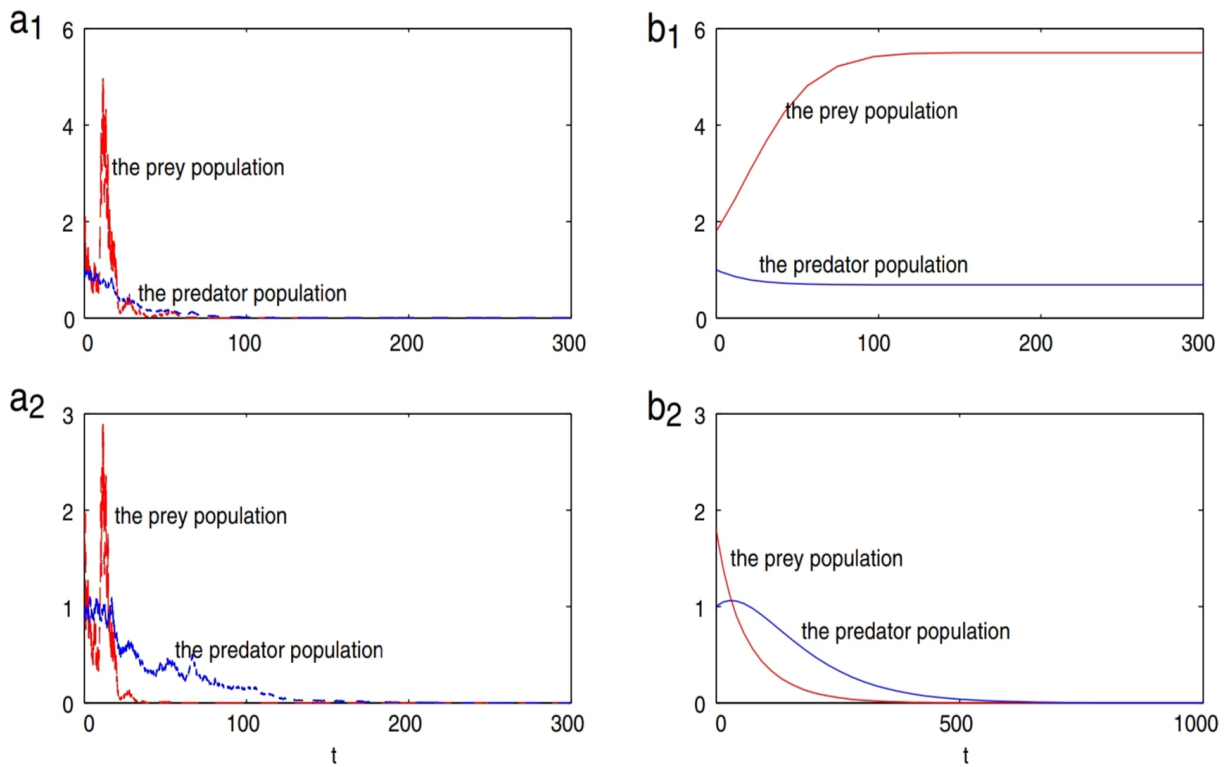


FIGURE 3.2: Solutions des systèmes (3.3) et (3.1) pour $(x_0, y_0) = (1.8, 1.0)$. Dans (a1) et (b1), les paramètres $a = 0.06$, $b = 0.01$, $c = 0.05$, $d = 0.04$, $f = 0.05$, $m = 2$, $\Delta t = 0.001$. (a1) est la solution du système stochastique avec $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.1$; (b1) est la solution du système déterministe. Alors que dans (a2) et (b2), paramètres $a = 0.015$, $b = 0.01$, $c = 0.06$, $d = 0.01$, $f = 0.03$, $m = 2$, $\Delta t = 0.001$. (a2) est la solution du système stochastique avec $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.1$; (b2) est la solution du système déterministe.

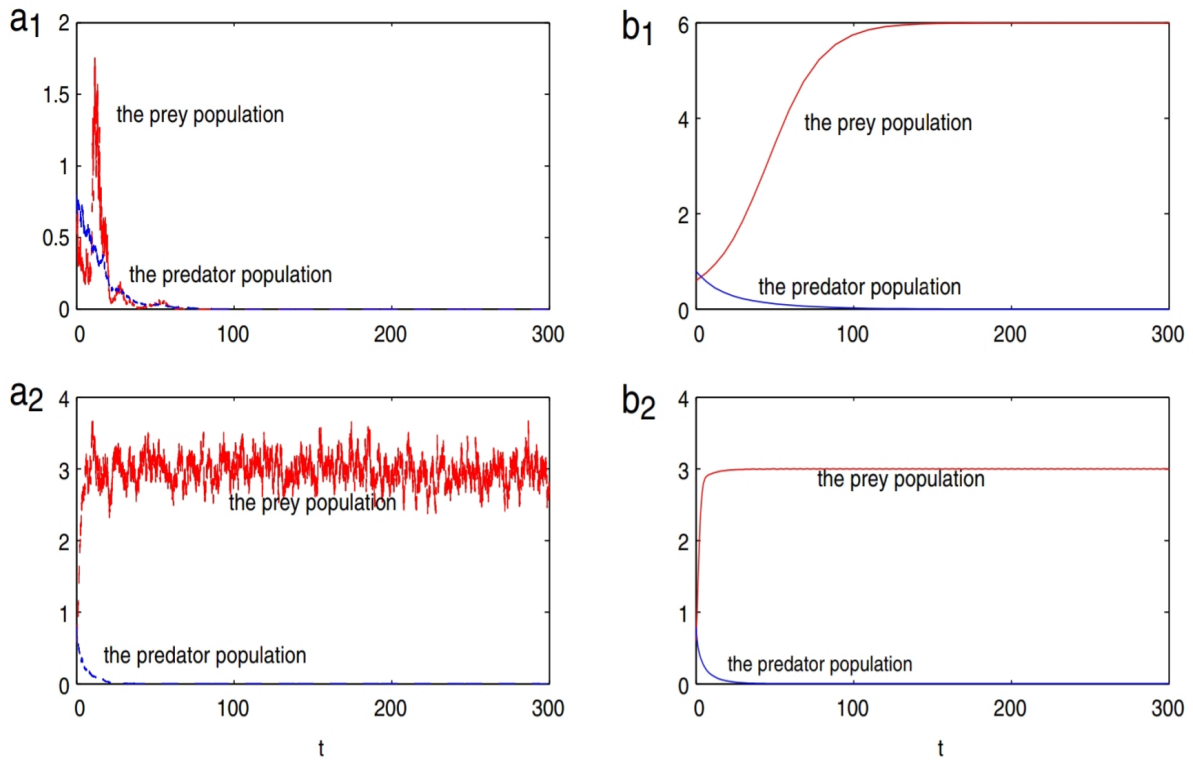


FIGURE 3.3: Solutions des systèmes (3.3) et (3.4) pour $(x_0, y_0) = (0.6, 0.8)$. Dans (a1) et (b1), les paramètres $a = 0.06$, $b = 0.01$, $c = 0.05$, $d = 0.06$, $f = 0.03$, $m = 2$, $\Delta t = 0.001$. (a1) est la solution du système stochastique avec $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.1$; (b1) est la solution du système déterministe. Alors que dans (a2) et (b2), paramètres $a = 1.2$, $b = 0.4$, $c = 0.6$, $d = 0.5$, $f = 0.4$, $m = 2$, $\Delta t = 0.001$. (a2) est la solution du système stochastique avec $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$; (b2) est la solution du système déterministe.

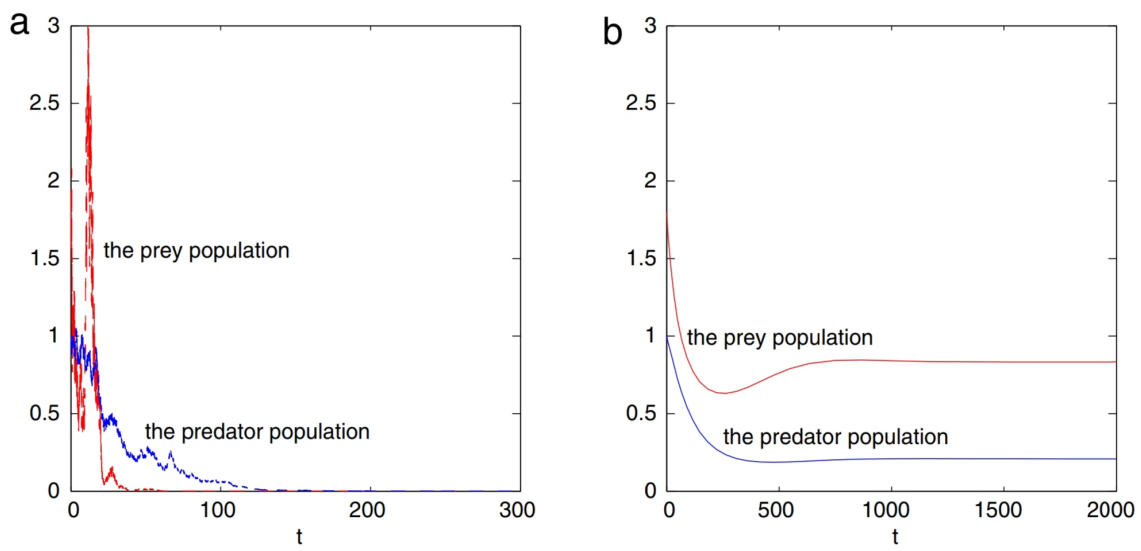


FIGURE 3.4: Solutions des systèmes (3.3) et (3.1) respectivement pour $(x_0, y_0) = (1.8, 1.0)$, $a = 0.015$, $b = 0.01$, $c = 0.04$, $d = 0.02$, $f = 0.03$, $m = 2$. Ils satisfont $ma < c$ mais $cm^{-1} < a + d$. En particulier, en (a), $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.1$.

Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique d'un système proie-prédateur de ratio-dépendant défini par un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) ou équations différentielles stochastiques (EDS), où par des systèmes couplés d'EDO ou d'EDS. Dans le premier chapitre nous avons rappelé les notions de base sur l'EDO et l'EDS. Dans le deuxième chapitre nous avons étudié le modèle proie-prédateur de ratio-dépendant d'Arditi-Ginzburg. Nous avons vu que la modélisation mathématique permet de décrire qualitativement et quantitativement le comportement des populations de différentes espèces dans la nature.

Du point de vue mathématique l'étude du système de Lotka-Volterra montre que :

- Il admet une solution positive globale et trois points d'équilibre.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié un modèle stochastique proie-prédateur de ratio-dépendant. On a étudié l'existence, l'unicité et la bornitude de la solution de ce modèle, nous avons utilisé la formule d'Itô et le théorème de comparaison des équations stochastiques on a trouvé que :

- . IL admet une solution locale positive unique $(x(t), y(t))$ pour $t \in [0, \tau_e)$ du système (3.3) p.s. pour toute valeur initiale $x_0 > 0$, $y_0 > 0$
- . La solution du système (3.1) est uniformément bornée
- . La solution du système (3.3) est uniformément bornée en moyenne, qui est similaire au système déterministe.

Puis on a étudié le comportement à long terme de ce système. Par le théorème de comparaison des équations stochastiques et la théorie du processus de diffusion :

- . On a prouvé que si le prédateur est absent, la population de proies suit la loi de la croissance logistique
- . Le système (3.3) est persistant en moyenne si la condition (H_1) est satisfaite.

Finalement, un exemple est effectué pour confirmer ces résultats.

Bibliographie

- [1] R. Arditi, L. R. Ginzburg. Coupling in predator–prey dynamics : ratio-dependence, *t. Biol.J. Theore t. Biol.* 139 (1989), 311–326.
- [2] R. Arditi, L. R. Ginzburg, H. R. Akcakaya. Variation in plankton densities among lakes : a case for ratio-dependent models, *Am. Nat.* 138 (1991), 1287–1296.
- [3] R. Arditi, N. Perrin, H. Saiah. Functional response and heterogeneities : an experiment test with cladocerans, *OIKOS* 60 (1991), 69–75.
- [4] R. Arditi, H. Saiah. Empirical evidence of the role of heterogeneity in ratio-dependent consumption, *Ecology* 73 (1992), 1544–1551.
- [5] R. Arditi, Ginzburg. L. R. *How species interact : altering the standard view on trophic ecology.* Oxford University Press, 2012.
- [6] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations : Theory and Applications,* Wiley, New York, 1972.
- [7] P. Auger, C. Lett, JC. Poggiale. *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés.* Dunod, 2015.

-
- [8] M. Bandyopadhyay, J. Chattopadhyay, *Ratio-dependent predator–prey model : effect of environmental fluctuation and stability*, *Nonlinearity* 18 (2005) 913–936.
- [9] E. Beretta, M. Carletti, F. Solimano. *On the effects of environmental fluctuations in a simple model of bacteria–bacteriophage interaction*, *Can. Appl. Math. Q.* 8 (2000), 321–366.
- [10] E. Beretta, Y. Kuang. *Global analysis in some delayed ratio-dependent predator–prey systems*, *Nonlinear Anal.* 32 (1998), 381–408.
- [11] F. Berezovskaya, G. Karev, R. Arditi, *Parametric analysis of the ratio-dependent predator–prey model*, *J. Math. Biol.* 43 (2001) 221–246.
- [12] A.A. Berryman, *The origin and evolution of predator–prey theory*, *Ecology* 73 (1992) 1530–1535.
- [13] M. Carletti, *Numerical simulation of a Campbell-like stochastic delay model for bacteriophage infection*, *Math. Med. Biol.* 23 (2006), 297–310.
- [14] M. Carletti, K. Burrage, P. M. Burrage. *Numerical simulation of stochastic ordinary differential equations in biomathematical modelling*, *Math. Comput. Simulation* 64 (2004), 271–277.
- [15] L. Chen, J. Chen. *Nonlinear Biological Dynamical System*, Science Press, Beijing, 1993.
- [16] M. Fan, K. Wang. *Periodicity in a delayed ratio-dependent predator–prey system*, *J. Math. Anal. Appl.* 262 (2001), 179–190.
- [17] H. I. Friedman. *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*, Marcel Dekker, New York, 1980.

-
- [18] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and their Applications*, Academic Press, New York, 1976.
- [19] A. P. Gutierrez. *The physiological basis of ratio-dependent predator–prey theory : a metabolic pool model of Nicholson’s blowflies as an example*, *Ecology* 73 (1992), 1552–1563.
- [20] I. Hanski. *The functional response of predator : worries about scale*, *TREE* 6 (1991), 141–142.
- [21] D. J. Higham. *An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations*, *SIAM Rev.* 43 (2001), 525–546.
- [22] S. B. Hsu, T. W. Hwang, Y. Kuang. *Global analysis of the Michaelis–Menten ratio-dependent predator–prey system*, *J. Math. Biol.* 42 (2001), 489–506.
- [23] S. B. Hsu, T. W. Hwang, Y. Kuang. *Rich dynamics of a ratio-dependent one prey two predator model*, *J. Math. Biol.* 43 (2001), 377–396.
- [24] N. Ikeda, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [25] D. Jiang, N. Shi, X. Li. *Global stability and stochastic permanence of a non-autonomous logistic equation with random perturbation*, *J. Math. Anal. Appl.* 340(2008) 588–597.
- [26] C. Ji, D. Jiang, X. Li, *Qualitative analysis of a stochastic ratio-dependent predator-prey system*, *Journal of Computational & Applied Mathematics* 235 (2011) 1326–1341.

- [27] C. Jost, O. Arino, R. Arditi. About deterministic extinction in ratio-dependent predator-prey models. *Bulletin of Mathematical Biology*, 61(1) : 19-32, 1999.
- [28] I. Karatzas et S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin, 1991.
- [29] Y. Kuang, *Delay Differential Equations, with Applications in population Dynamics*, Academic Press, New York, 1993.
- [30] Y. Kuang, E. Beretta, Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system, *J. Math. Biol.* 36 (1998), 389-406.
- [31] F. C. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press, London, 1998.
- [32] A. Maiti & G. P. Samanta, Deterministic and stochastic analysis of a ratio-dependent prey-predator system, *International Journal of Systems Science* 37 (2006), 817-826.
- [33] X. Mao. *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood, New York, 1997.
- [34] X. Mao, G. Marion, E. Renshaw. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics, *Stochastic Process. Appl.* 97 (2002), 95-110.
- [35] E. Renshaw. *Modelling Biological Populations in Space and Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [36] R. Ryszard. Long-time behaviour of a stochastic prey-predator model, *Stochastic Process. Appl.* 108 (2003), 93-107.

- [37] R. Ryszard, P. Katarzyna. *Influence of stochastic perturbation on prey–predator systems*, *Math. Biosci.* 206 (2007), 108–119.
- [38] S. Tapan, B. Mala.. *Dynamical analysis of a delayed ratio-dependent prey–predator model within fluctuating environment*, *Appl. Math. Comput.* 196 (2008), 458–478.
- [39] P. K. Tapaswi, A. Mukhopadhyay. *Effects of environmental fluctuation on plankton allelopathy*, *J. Math. Biol.* 39 (1999), 39–58.
- [40] R. Xu, L. Chen, *Persistence and stability for a two-species ratio-dependent predator–prey system with time delay in a two-patch environment*, *Comput. Math. Appl.* 40 (2000), 577–588.
- [41] R. Xu, L. Chen. *Persistence and global stability for n-species ratio-dependent predator–prey system with time delays*, *J. Math. Anal. Appl.* 275 (2002), 27–43.