République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse

par

Wiam Boulanouar [1]

Sous la direction de

Mr. Baghdad Said

Thème :

Résultats d'existence pour des équations différentielles via les théorèmes du point fixe hybride

Soutenue le 13/06/2022 devant le jury composé de

A. Halimi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
S. Baghdad	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
L. Rabhi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examinateur

Année univ. : 2021/2022

1. e-mail : Wiam.Boulanouar@outlook.com

Dédicase

Au nom d'Allah le tout miséricordieux le très miséricordieux.

Avec une grande émotion je dédie ce modeste travaille :

A mes chers parents, ma chère mère *SAMIRA*, la reine de ma vie, à mon exemple éternel, mon cher père *HOUCINE*. Pour tout leur sacrifice, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études. Je leur témoigne mon grand respect, mon affection et ma profonde gratitude. Que Dieu les protège et l' entoure de sa bénédiction.

A mes adorables sœurs et frères *MARWA*, *AYA*, *MOHAMED*, *OMAR* pour leurs encouragements et leur soutien moral.

A ma meilleure amie *AICHA* pour son soutien et encouragements.

A mon fiancé *AMR* pour son amour et son soutien.

Remerciement

Tout d'abord je remercie Allah qui m'a donné la force et le courage pour achever ce modeste travail.

Mes premiers remerciements vont à mon encadreur de mémoire, BAGHDAD SAID, enseignant à la Faculté MI de l'université Ibn Khaldoun, Tiaret , pour sa confiance, ses conseils avisés et le temps qu'il m'a accordé et pour la responsabilité de diriger ce travail. Je le remercie d'avoir été toujours disponible pour répondre à mes questions et d'avoir dirigé mes recherches.

Je remercie Mr. Halimi, enseignant au département de mathématiques de l'université de Saida de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Mr. Rabhi, enseignant au département de mathématiques de l'université de Saida d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

Table des matières

Introduction

Lors de l'étude des phénomènes dans la nature, les solutions de plusieurs problèmes de la physique et de la technique, de la chimie et de la biologie ou d'autres sciences, sont rarement exprimables sous forme d'une relation directe entre les grandeurs décrivant l'un ou l'autre processus évolutif. Cependant, dans la plupart des cas, on peut parvenir à établir une relation entre les grandeurs (fonctions) et les vitesses de leur changement $i.e.$ on peut parvenir à trouver des équations dans lesquelles des fonctions inconnues entrent sous le signe de dérivée. Ces équations sont dites équations différentielles. Lorsque la fonction inconnue dépend d'une variable, on parle d'équations différentielles ordinaires, et si elle dépend de plusieurs variables, on parle d'équations aux dérivées partielles.

Une des propriétés caractéristiques des équations différentielles : Posséder un ensembl infini de solutions. C'est pourquoi, en résolvant une équation différentielle décrivant l'évolution d'un processus donné, on trouve une infinité de relations entre les grandeurs caractérisant le processus donné. Pour ressortir de cette infinité de relations, celle qui décrit particulièrement ce processus, il faut disposer une information supplémentaire, par exemple, savoir quel est l'état initial du processus. Sans cette information supplémentaire, le problème n'est pas défini et est semblable à ceci : " Un véhicule circule suivant une route droite dans la direction d'une ville A, avec une vitesse constante v_0. En combien de temps le véhicule parviendra t-il dans la ville A? " Symbolisant par $s = s(t)$, la distance parcourue par le véhicule en un temps t, dès le début de l'observation, nous obtenons la loi du mouvement $\dfrac{ds}{dt} = v_0$. Pour répondre à la question posée, il faut connaitre la position initiale du véhicule. De telles conditions sont généralement dites conditions initiales du problème. Dans d'autres circonstances, les conditions nécessaires sont les valeurs des solutions sur la frontière d'un intervalle ou d'un domaine donnés. En ce cas on parle de problèmes aux conditions de frontière.

Il convient de noter que les techniques de perturbation sont utiles dans l'analyse non linéaire pour étudier les systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles et intégrales non linéaires. Certaines équations différentielles représentant un certain système dynamique n'ont pas de solution analytique, de sorte que la perturbation de ces problèmes peut être utile. Les équations différentielles perturbées sont classées en différents types. Un type important de ces perturbations est appelé une équation différentielle hybride (c'est-à-dire une perturbation quadratique d'une équation différentielle non linéaire). Récemment, cette question a reçu beaucoup d'attention [9]. Nous mentionnons que la théorie du point fixe hybride peut être utilisée pour développer la théorie de l'existence pour les équations hybrides. Pour plus de détails, voir [11].

Soit E un ensemble non vide, $T : E \to E$ une application. Si pour $x^* \in E$, on a $Tx^* = x^*$, alors x^* est appelé un point fixe de dans E. La théorie du point fixe joue un rôle important dans l'analyse fonctionnelle non linéaire. Différents types de théorèmes de point fixe ont été utilisés pour prouver l'existence de solutions pour les équations différentielles et intégrales, voir [2, 6, 12]. Le principe de contraction de Banach est l'un des théorèmes de point fixe les plus puissants en analyse non linéaire pour prouver l'existence et l'unicité des points fixes dans les espaces métriques.

En 1955, Krasnoselskii [17] a prouvé un théorème du point fixe motivé par une observation selon laquelle l'inversion d'un opérateur différentiel perturbé peut donner la somme des opérateurs compacts et de contraction. Son théorème combine en fait à la fois le principe de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Schauder, et est utile pour établir des théorèmes d'existence pour les équations d'opérateurs perturbés. Il y a eu un grand nombre d'articles ont contribué à des généralisations ou à des modifications du théorème du point fixe de Krasnoselskii et de leurs applications, voir [9, 10, 11, 14]. L'une des principales caractéristiques de ces généralisations est l'adoption de formes généralisées du principe de Banach ou du théorème de Schauder. L'une des généralisations les plus impressionnantes du théorème de Krasnoselskii a été donnée par Dhage [11]. Plus récemment, plusieurs auteurs ont établi diverses formes et applications étendues du théorème de Krasnoselskii.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base concernant la topologie et l'analyse fonctionnelle utilisées tout le long de ce mémoire.

Deuxième chapitre : Ce chapitre nous présentons les théorèmes du point fixe (Banach, Shauder, Krasnoselskii).

Troisième chapitre : Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle perturbées et une équation différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo en appliquant le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[x(t) - f(t, x(t))] = g(t, x(t)), \ t \in J \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

avec $f, g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continus.

$$\begin{aligned} &D^\alpha x(t) + f(t, x(t)) = \theta, \ \ 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2, \\ &x(0) = \int_0^t g(\tau)x(\tau)d\tau, \ \ x(1) = \theta. \end{aligned} \tag{2}$$

où ${}^cD^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times X \to X$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, $\displaystyle\int_0^t g(\tau)x(\tau)d\tau$, $\theta \in X$ et X est un espace de Banach avec la norme $\| \cdot \|$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Topologie des espaces métriques

Définition 1.1.1. ***(Espaces métriques).***
Un espace métrique (E, d) est un ensemble E muni d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$, appelée distance ou métrique, *qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *(séparation).*
2. $d(x, y) = d(y, x)$, *(symétrie).*
3. $\forall x, y, z \in E,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *(inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.1. *Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on peut définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.*
On définit deux distances, à savoir

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, \ldots, n\} \quad et \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid .$$

La trisième est ce qu'on appelle la distance euclidienne :

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Proposition 1.1.1. *[3] Pour tous x, y et z des points d'un espace métrique (E, d), on a*

$$\mid d(x, y) - d(x, z) \mid \leq d(y, z). \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2. *Soit (E, d) un espace métrique. Pour $x \in E$ et $r > 0$, on définit :*

1. *La **boule ouverte** de centre x et rayon r :*

$$\mathbf{B}(x,r) = \{y \in E;\;\; d(y,x) < r\}, \tag{1.2}$$

2. *La **boule fermée** de centre x et rayon r :*

$$\mathbf{B}_f(x,r) = \{y \in E;\;\; d(y,x) \leq r\}, \tag{1.3}$$

3. *La **sphère** de centre x et rayon r :*

$$\mathbf{S}(x,r) = \{y \in E;\;\; d(y,x) = r\}. \tag{1.4}$$

Définition 1.1.3. *Soit (E,d) un espace métrique. Soit A et B deux parties de E, on appelle distance entre A et B de E la quantitée*

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}. \tag{1.5}$$

Définition 1.1.4. *On appelle diamètre d'une partie A de (E,d) et on note $diam(A)$ la quantité*

$$Diam(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}. \tag{1.6}$$

Définition 1.1.5. ***(Parties bornées).***
Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée s'il existe une boule fermée $\mathbf{B}_f(x_0,r)$ telle que

$$A \subset \mathbf{B}_f(x_0,r). \tag{1.7}$$

On vérifie immédiatement qu'une partie A de X est bornée si et seulement si son diamètre est fini.

Définition 1.1.6. ***(Fonctions borneés).***
Soit D un ensemble et (E,d) un espace métrique. Une application $f : D \to E$ est bornée si son image $f(D) \subset E$ est bornée pour la distance d. On note par $\mathcal{F}_b(D,E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(D,E)$ des fonctions bornées.
On peut munir l'ensemble $\mathcal{F}_b(D,E)$ d'une distance dite distance de la convergence uniforme, notée d_∞. Elle est définie comme suit

$$\forall f,g \in \mathcal{F}_b(D,E),\; d_\infty(f,g) = \sup_{x \in D} d(f(x),g(x)). \tag{1.8}$$

Définition 1.1.7. ***(Ouverts).***
Soit (E,d) un espace métrique. Par définition, une partie U de E est un ouvert si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathbf{B}(x,r) \subset U$.

Proposition 1.1.2. *1. Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, $\mathbf{B}(x,r)$ est un ouvert.*

2. Si U_i est un ouvert, $\forall i \in I$, alors $\bigcup_{i\in\mathbf{I}} U_i$ est un ouvert.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_i est ouvert, $i = 1, \dots, n$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est un ouvert.

Définition 1.1.8. ***(Fermés).***
Soit (E, d) un espace métrique. Un ensemble $F \subset E$ est **fermé** *si son complémentaire F^c est ouvert.*

Proposition 1.1.3. *1. Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, $\mathbf{B}_f(x,r)$ est un fermé.*

2. Si F_i est un fermé, $\forall i \in I$, alors $\bigcap_{i\in\mathbf{I}} F_i$ est un fermé.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si F_i est fermé, $i = 1, \dots, n$, alors $\bigcup_{i\in\mathbf{I}}^{n} F_i$ est un fermé.

Définition 1.1.9. ***(Voisinages).***
On dit qu'une partie V d'un espace métrique (E, d) est un voisinage d'un point x_0 si V contient un ouvert contenant x_0.
On note par $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinage du point $x_0 \in E$. Ainsi

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \Longleftrightarrow \exists O \in \mathcal{O} : x_0 \in O \subset V. \tag{1.9}$$

Un Voisinage de x_0 peut-être définie par

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathbf{B}(x_0, \varepsilon) \subset V. \tag{1.10}$$

Définition 1.1.10. ***(Intérieur, adhérence).***
*Soit (E, d) un espace métrique. Pour $A \subset E$, on définit l'***intérieur** *de A, notée $\mathring{A}$, par*

$$\mathring{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert},\, U\subset A} U,$$

*et l'***adhérence** *de A, notée $\overline{A}$, par*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé},\, F\supset A} F.$$

Définition 1.1.11. ***(Topologie des espaces métriques).***
Soit (E, d) un espace métrique. ***La topologie métrique*** *de (E, d) est*

$$\mathcal{T} = \{U \subset E;\ U \text{ est un ouvert}\}. \tag{1.11}$$

Exemple 1.1.2. *On peut définir une distance, dite* **discrète***, sur un ensemble quelconque D en posant, pour $x, y \in D$:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases}$$

Définition 1.1.12. ***(Densité).***
Une partie A d'un espace topologique E est **dense** *dans E si l'adhérence de A est E lui-même, soit : $\overline{A} = E$.*

Définition 1.1.13. ***(Espace topologique séparé).***
Un espace topologique $(\mathbf{X}, \mathcal{T}_{\mathbf{X}})$ est dit séparé s'il vérifie la propriété suivante appeleé axiome de Hausdorff :
Pour tout coupel $(x, y) \in \mathbf{E}^2$ avec $x \neq y$ il existe $\mathbf{V}_1 \in \mathcal{V}_x$ et de $\mathbf{V}_2 \in \mathcal{V}_y$ tels que $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \emptyset$. Autrement dit, deux points distincts de $\mathbf{E}$ possèdent deux voisinages disjoints.

Proposition 1.1.4. *Tout espace métrique est séparé.*

Définition 1.1.14. ***(Séparabilité).***
Un espace métrique (E, d) est **séparable** *s'il existe une partie A de E qui soit à la fois dénombrable et dense dans E.*

1.1.2 Applications continues

Définition 1.1.15. ***(Limite d'une suite).***
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et soit $l \in E$. On dit que l est une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infinie si pour tout voisinage V de l dans E, il existe un rang à partir du quel tous les termes de la suite sont dans V. cela se résume en

$$\forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists N_{\mathcal{V}} \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_{\mathcal{V}},\ x_n \in V. \tag{1.12}$$

La traduction dans les espaces métrique est plus quantitative (On a une distance pour mesurer comment les termes de la suite s'approchent de la limite).

Proposition 1.1.5. *Soit (E, d) un espace métrique. On dit que $l \in E$ est une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\varepsilon,\ \lim_{n\to\infty} (x_n, l) = 0. \tag{1.13}$$

Définition 1.1.16. ***(Continuité en un point).***
Soit $(E, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et soit $a \in E$. On dit qu'une fonction

$f \in \mathcal{F}(E, E')$, est continue au point a si l'image réciproque $f^{-1}(\mathbf{V}')$ de tout voisinage V' de $f(a)$ est un voisinage de a. Cela s'écrit

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f(a)),\ f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(a), \tag{1.14}$$

ou bien

$$\forall O' \in \mathcal{O},\ f(a) \in O',\ \exists O \in \mathcal{O},\ a \in O \ \text{ et } \ f(O) \subset O'. \tag{1.15}$$

Théorème 1.1.1. *Soit $(E, \mathcal{T})$,$(E', \mathcal{T}')$ et $(E", \mathcal{T}'')$ trois espaces topologiques. Si la fonction $f : E \to E'$ et continue en $a \in E$ et si la fonction $g : E' \to E"$ est continue en $f(a) \in E'$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

Proposition 1.1.6. *Une application $f : E \to E'$ est continue au point $a \in E$ si et seulement si $f(a)$ est limite de $f(x)$ quand x tend vers a.*

Proposition 1.1.7. *Si (E, d) et (E', d') sont des espaces métriques, si $a \in E$ et si $f \in \mathcal{F}(E, E')$ les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue au point a.*
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in E,\ (d(x, a) \leq \alpha) \Rightarrow (d'(f(x), f(a)) \leq \varepsilon)$.
3. *Continuité séquentielle en a : Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers a, la suite image $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Définition 1.1.17. ***(Continuité globale.)***
Soit $(E, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une fonction $f : E \to E'$ est continue sur E si elle est continue en tout point de E. On note $\mathbf{C}^0(E, E')$ (ou $\mathbf{C}^0(E, \mathcal{T}; E', \mathcal{T}')$ s'il est besoin de préciser les topologies) l'ensemble de toutes les fonctions continues de E dand E'.

Théorème 1.1.2. *[18] Pour deux espaces topologiques $(E, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ et $f \in \mathcal{F}(E, E')$ on équivalence entre :*

1. *f est continue sur E.*
2. *L'image réciproque de tout ouvert de E' est un ouvert de E :*

$$\forall O' \in \mathcal{O}',\ f^{-1}(O') \in \mathcal{O}.$$

3. *L'image réciproque de tout fermé de E' est un fermé de E' :*

$$\forall F' \in \mathcal{F}',\ f^{-1}(F') \in \mathcal{F}$$

.

Définition 1.1.18. ***(Uniforme continuité).***
On dit que $f \in \mathcal{F}(E, E')$ est **uniformément continue** *si elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon > 0,\ \forall x, y \in E,\ (d(x, y) \leq \alpha_\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon. \tag{1.16}$$

Définition 1.1.19. ***(Lipschitz continuité).***
On dit que $f \in \mathcal{F}(E, E')$ est **lipschitzienne** *de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur E si :*

$$\forall x, y,\ d'(f(x), f(y)) \leq k d(x, y). \tag{1.17}$$

On vérifie immédiatement les implications.

Proposition 1.1.8.

$$f \text{ Lipschitzienne} \Rightarrow f \text{ uniformément continue} \Rightarrow f \text{ continue.}$$

1.1.3 Compacité

Théorème 1.1.1. ***(Borel-Lebesgue).***
On dit qu'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est **compact** *s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini :*

$$\left(E = \bigcup_{i \in I} O_i\right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I,\ J \text{ fini},\ \ E = \bigcup_{i \in J} O_i\right). \tag{1.18}$$

Par passage au complémentaire on a une définition équivalente avec les fermés que nous donnons ici comme propriété.

Proposition 1.1.9. *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est compact s'il est séparé et si de toute famille de d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide :*

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i = \theta\right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I,\ J\ fini\ \ , \bigcap_{i \in I} F_i = \theta\right). \tag{1.19}$$

Le résultat suivant est une conséquence utile dans le cas ou les fermés sont emboîtés.

Définition 1.1.20. *Un espace métrique (E, d) est* **compact** *si toute suite $(x_n) \subset E$ admet une sous-suite convergente.*

Proposition 1.1.10. *Dans un espace métrique, une partie compacte est fermée.*

Proposition 1.1.11. *[16] Si $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique campact et F est un fermé de E alors F est compact.*

Définition 1.1.21. *On dit qu'une partie* $\mathbf{A}$ *d'un espace métrique* $(E, \mathcal{T})$ *est* ***relativement compacte*** *si son adhérence est compacte.*

Corollaire 1.1.1. *Toute fonction continue sur un espace compact à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Définition 1.1.22. *On dit qu'une application continue* $f : E \to E'$, *où* $(E, \mathcal{T})$ *et* $(E', \mathcal{T}')$ *deux topologiques séparés, est propre si pour tout compact* K' *de* E' *l'image réciproque* $f^{-1}(K')$ *est un compact de* E.

Théorème 1.1.3. ***(Heine).***
Si (E, d) *et* (E', d') *sont deux espaces métriques avec* (E, d) *compact, toute application continue* $f : E \to E'$ *est uniformément continue.*

Définition 1.1.23. *On dit qu'un espace topologique séparé* $(E, \mathcal{T})$ *est localement compact si tout point admet une base de voisinages compacts.*

Proposition 1.1.12. *Un espace compact est complet.*

1.1.4 Complétude

Définition 1.1.24. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'un espace métrique* (E, d) *est de Cauchy si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon,\ d(x_m, x_n) \leq \varepsilon. \tag{1.20}$$

Proposition 1.1.13. *Une suite de Cauchy est toujours bornée.*

Proposition 1.1.14. *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.*

Proposition 1.1.15. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 1.1.25. *On dit que l'espace métrique* (E, d) *est complet si toute suite de Cauchy converge.*

Théorème 1.1.4. $\mathbb{R}$ *est complet.*

Théorème 1.1.5. *Si* D *est un ensemble et* (E, d) *est un espace métrique complet, alors* $\mathcal{F}_b(D, E)$ *muni de la distance* d_∞ *de la convergence uniforme est complet.*

Proposition 1.1.16. *Dans un espace métrique complet* (E, d), *les sous-espaces complets sont les fermés.*

Corollaire 1.1.2. *Si* $(E, \mathcal{T})$ *est un espace topologique et* (E', d) *est un espace métrique complet, l'espace* $\mathcal{C}_b^0(E, E')$ *des fonctions continues bornées de* E *dans* E' *muni de la distance* d_∞ *de la convergence uniforme est complet.*

Corollaire 1.1.3. *Soit (E, d) un espace métrique. Une intersection quelconque de sous-espaces complets est compléte.*

Proposition 1.1.17. *Soit (E, d) un espace métrique. Une union finie de sous-espaces complets de (E, d) est complète.*

Proposition 1.1.18. *Tout espace métrique compact est complet.*

Proposition 1.1.19. *Un produit fini ou dénombrable d'espaces métriques complets est complet.*

1.2 Espaces vectoriels normés

1.2.1 Notion d'espace normé

Définition 1.2.1. ***(Norme).***
Soit X un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On appelle norme sur X une application de X dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\| \ \|$ vérifiant pour tout $x, y \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\| \lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, *(homogénéité).*
2. $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$.
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, *(inégalité triangulaire).*

Exemple 1.2.1.

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|, i = 1, \cdots, n\}, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{2} | x_i | \quad et \quad \| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} x_i^2}.$$

Définition 1.2.2. *Un espace vectoriel normé est un couple $(X, \| \ \|)$ où X est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\| \ \|$ est une norme sur X.*

Proposition 1.2.1. *L'application $d : (x, y) \rightarrow \| x - y \|$ est une métrique sur X invariante par translation (c'est-à-dire $d(x+a, y+a) = d(x, y)$). On dit que d est la métrique associée à norme.*

Proposition 1.2.2. *Si $(X, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé alors $d(x, y) = \| y - x \|$ définit une distance sur X. De plus la topologie ainsi définie est compatible avec la structure d'espace vectoriel, i, e. les applications*

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} \quad et \quad \mathbb{K} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \rightarrow \lambda . x$$

sont continues.

Remarque 1.2.1. *On supposera toujours qu'un espace vectoriel normé est muni de cette métrique et de la topologie associée.*

Définition 1.2.3. *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel $\mathbb{K}$. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ teles que*

$$\forall x \in X, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x). \tag{1.21}$$

Proposition 1.2.3. *L'application $x \rightarrow \parallel x \parallel$ est uniformément continue sur X.*

Proposition 1.2.4. *La norme $\parallel \parallel$ est une application $1-$Lipschitzienne de $(X, \parallel \parallel)$ dans $\mathbb{R}_+$:*

$$\forall x, y \in X, |\parallel y \parallel - \parallel x \parallel| \leq \parallel y - x \parallel . \tag{1.22}$$

Définition 1.2.4. *Deux normes $\parallel \parallel$ et $\parallel \parallel'$ sur un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel X sont equivalentes si il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x \in X, C^{-1} \parallel x \parallel \leq \parallel x' \parallel \leq C \parallel x \parallel . \tag{1.23}$$

Théorème 1.2.1. *Dans un espace vectoriel de dimension finie X, $dimX = n < \infty$:*

1. *Toute les normes sont équivalentes.*
2. *Pour toute norme, les compacts sont les fermés bornés.*
3. *Si $(F, \parallel \parallel_F)$ est un autre $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé (dimension quelconque), toute application linéaire de X dans F est continue.*

Proposition 1.2.5. *Tous sous-espace vectoriel de dimension finie F est fermé de $(X, \parallel \parallel_X)$.*

Théorème 1.2.2. *Si $(X, \parallel \parallel_X)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé, on a équivalence entre :*

1. *$B_f(0,1)$ est compacte.*
2. *X est de dimension finie.*

1.2.2 Convexité

Définition 1.2.5. *Une partie C de X est convexe si et seulement si, pour tout $x \in C$ et tout $y \in C$, le segment*

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y : \lambda \in [0, 1]\} \tag{1.24}$$

est inclus dans C.

Proposition 1.2.6. *Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$, soit C_i un convexe de X. Alors $\bigcap\limits_{i \in I} C_i$ est convexe.*

1.2.3 Espace de Banach

Définition 1.2.6. *On appelle espace de Banach un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé complet.*

Proposition 1.2.7. *Les $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Banach.*

Proposition 1.2.8. *Si $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(X, \|\ \|_X)$ est un espace de Banach alors $\mathcal{F}_b(E, X)$ et $\mathcal{C}_b^0(E, X)$ munis de la norme de la convergence uniforme $\| f \|_\infty = \sup_{x \in E} \| f(x) \|_X$ sont des espaces de Banach.*

Définition 1.2.7. *Dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé $(X, \|\ \|_X)$ on dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est absolument convergente (ou normalement convergente) si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \| x_n \|_X < +\infty$. Dans la définition ci-dessus on ne dit pas que la série converge mais que la série des normes converge.*

Théorème 1.2.3. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(X, \|\ \|_X)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge dans X,*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \| x_n \|_X < \infty\right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X\right) \tag{1.25}$$

1.3 Espaces des fonctions

1.3.1 Espaces de fonctions continues

Théorème 1.3.1. ***(Ascoli).****[7]*
Soit (E, d) un espace métrique compact et $(X, \| \|)$ un espace de Banach. Une partie A de $\mathcal{C}^0(E, X)$ est relativement compacte dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^0(E, X)$ si et seulement si :

1. *Pour tout $x \in A$, $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compacte dans X.*
2. *A vérifie la propriété d'équicontinuité*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in A,\ \forall y \in E,\ d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique compact et (E', d') un espace métrique. Les parties compactes K de $(\mathcal{C}^0(E; E'), d_\infty)$ sont nécessairement équicontinues et ponctuellement compactes. Il est clair que la propriété d'équicontinuité est transmise à toute partie du compact K. On a donc aussi la variante suivante pour les parties relativement compactes.*

Corollaire 1.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique compact et (E', d') un espace métrique. Les parties relativement compactes X de $(\mathcal{C}^0(E; E'), d_\infty)$ sont nécessairment équicontinues et ponctuellement relativement compactes.*

Théorème 1.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique compact et (E', d') un espace métrique. Une partie X de $\mathcal{C}^0(E; E')$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si elle est équicontinue et ponctuellement relativement compacte.*

Corollaire 1.3.2. *Si on munit $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \| f' \|_\infty$ alors les bornés de $(\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}), \| \|_{\mathcal{C}^1})$ sont relativement compacts dans $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$.*

1.3.2 Les espaces L^p

Définition 1.3.1. *Soit $1 \leq p < \infty$ un nombre réel. Si $f : X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction mesurable on pose*

$$\| f \|_p = \left(\int_X | f |^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{1.26}$$

En général $\| f \|_p \leq +\infty$. On notera $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, T, \mu)$ l'espace des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{K}$ telles que $\| f \|_p < +\infty$, i.e. $| f |^p$ est $\mu-$intégrable sur X.

Théorème 1.3.2. *(Inégalité de Hölder).*
Soit $f \in \mathbf{L}^p$ et $g \in \mathbf{L}^{p'}$ alors $fg \in \mathbf{L}^1$ et

$$\| fg \|_{\mathbf{L}^1} \leq \| f \|_{\mathbf{L}^p} \| g \|_{\mathbf{L}^{p'}}. \tag{1.27}$$

Théorème 1.3.3. *Soit $p \in [1, \infty]$, $\mathbf{L}^p(\Omega)$ est espace vectoriel et $\| \cdot \|_{\mathbf{L}^p}$ est une norme sur $\mathbf{L}^p(\Omega)$.*

Théorème 1.3.4. *$\mathbf{L}^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $p \in [1, \infty[$.*

Proposition 1.3.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathbf{L}^p$ et $f \in \mathbf{L}^p$. Si f_n converge vers f dans $\mathbf{L}^p$ alors (f_n) possède une sous-suite qui admet une majorante $\mathbf{L}^p$ et qui converge vers f presque partout.*

Corollaire 1.3.3. ***(Inégalité de Cauchy Schwarz).***
Soit $f, g \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{K}}(X, T, \mu)$, alors $fg \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{K}}(X, T, \mu)$ et

$$\int | fg | \, d\mu \leq \left(\int_X | f |^2 \right)^{1/2} \left(\int_X | g |^2 \right)^{1/2}. \tag{1.28}$$

Théorème 1.3.5. ***(Inégalité de Minkowski).***
Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f, g : X \to \mathbb{K}$ des fonctions mesurables, alors on a

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p. \tag{1.29}$$

Chapitre 2

Théorème de krasnoselskii

2.1 Théorème du point fixe de Picard-Banach

Définition 2.1.1. ***(Application contractante)***
Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \to E$ une application. On dit que f est contractante s'il existe une constante $0 < K < 1$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y). \tag{2.1}$$

On pourra alors dire que f est contractante.

Théorème 2.1.1. ***(Théorème du point fixe de Picard-Banach)****[1]*
Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante. Alors

1. *f admet un unique point fixe $a \in E$.*
2. *Pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées de x_0 par f, définie par $x_n := f^n(x_0)$ pour tout $n \in N$, converge vers a.*
3. *La convergence est géométrique*

$$\forall n \in N, \quad d(x_n, a) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_1, x_0). \tag{2.2}$$

Démonstration :

1. **Existence du point fixe**
   On fixe un point $x_0 \in E$ et on définit une suite (x_n) par récurence en posant

$$x_{n+1} = T(x_n).$$

Alors
$$d(x_2;x_1)=d(T(x_1);T(x_0))\leq Kd(x_1;x_0),$$
par ittération, on a
$$d(x_{n+1};x_n)\leq K^n d(x_1;x_0),$$
Ainsi, pour $n<m$, en utilisant l'inégalité triangulaire et la somme de série déométrique, on a

$$\begin{aligned} d(x_n;x_m) &\leq d(x_n;x_{n+1}+\cdots+d(x_{m-1};x_m), \\ &\leq (K^n+K^{n+1}+\cdots+K^{m-1})d(x_1;x_0), \\ &= K^n(1+K+\cdots+K^{m-n-1})d(x_1;x_0), \\ &\leq \frac{K^n}{1-K}d(x_1;x_0), \end{aligned} \tag{2.3}$$

comme $K<1, \dfrac{K^n}{1-K}\to 0$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy, elle admet une limite $x\in E$. T étant une contraction, elle est lipschitzienne donc continue,il s'ensuit donc
$$T(x)=\lim_{n\to+\infty}T(x_n)=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=x.$$

2. **Unicité du point fixe** $x\in E$
   Supposons qu'il ait $x'\neq x$ dans E tel que x' soit aussi un point fixe de T.
   Alors, puisque
   $$T(x)=x \quad \text{et} \quad T(x')=x',$$
   on a,
   $$d(T(x);T(x'))=d(x;x'). \tag{2.4}$$
   Et, T est une contraction, alors
   $$d(T(x);T(x'))\leq Kd(x;x')<d(x;x'). \tag{2.5}$$
   (2.4) contredit (2.5). Donc, notre supposition est fausse.
   En considérant $m\to\infty$ dans (2.3) on obtient l'estimation d'erreur souhaitée.

Définition 2.1.2. ***(Application $\mathfrak{D}$-contractante)*** *[11]*
Une application $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est appelée fonction dominante ou, en bref, $\mathfrak{D}-$ fonction si elle est continue et non décroissante vérifiant $\psi(0)=0$. Une application $Q:X\to X$ est appelée D-Lipschitz s'il existe une $\mathfrak{D}-$fonction $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$\forall x,y\in X,\ \| Qx-Qy \|\leq\psi(\|x-y\|). \tag{2.6}$$

La fonction ψ est appelée une $\mathfrak{D}-$ fonction de Q sur X . Si $\psi(r) = kr, k > 0$, alors Q est dite Lipschitzinne avec la constante de Lipschitz k. En particulier, si $k < 1$, alors Q est appelé une contraction sur E avec la constante de contraction k. En plus, si $\psi(r) < r$ pour $r > 0$, alors Q est appelé une $\mathfrak{D}-$ contraction non-linéaire et la fonction ψ est appelée une $\mathfrak{D}-$fonction de Q sur E.
Par exemple, il existe des $\mathfrak{D}-$fonctions et les $\mathfrak{D}-$fonctions couramment utilisées couramment utilisées sont $\psi(r) = kr$ et $\psi(r) = \dfrac{r}{1+r}$, etc.

Théorème 2.1.1. ***(Théorème du point fixe de Boyd-wong-Banach)**[6]*
Soit E un espace métrique complet et convexe, $T : X \to X$ une application satisfasse

$$\rho(Tx, Ty) \leq \psi(\rho(x, y)), \tag{2.7}$$

où $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue supérieure sur $\mathbb{R}_+$, et satisfasse $\psi(t) < t$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, T a un unique point fixe x_0, et $T^n x \to x_0$ pour tout $x \in E$.

Démonstration :
Soit $x \in E$, nous savons

$$c_n = \rho(T^n x, T^{n-1} x). \tag{2.8}$$

Alors, c_n est décroissant jusqu'à zéro. Car, par (2.7), et a donc une limite c. Mais, si $c > 0$, on a

$$c_{n+1} \leq \psi(c_n), \tag{2.9}$$

pour que

$$c \leq \limsup_{t \to c} \psi(t) \leq \psi(c), \tag{2.10}$$

qui est une contradiction.
On montre que pour tout $x \in E$, $T^n x$ est suite de cauchy. On peut donc compléter la preuve, puisque la limite de cette séquence est un point fixe de T qui est clairement unique. Supposons que $T^n x$ n'est pas une suite de Cauchy. Alors, il existe un $\epsilon > 0$ et des suites d'entiers $m(k), n(k)$, avec $m(k) > n(k) \geq k$, et telles que

$$d_k = \rho(T^m x, T^n x) \geq \epsilon \quad \text{pour } k = 1, 2, \ldots. \tag{2.11}$$

On peut supposer que

$$\rho(T^{m-1} x, T^n x) < \epsilon, \tag{2.12}$$

en choisissant $m(k)$ comme étant le plus petit nombre dépassant $n(k)$ pour lequel (2.11) est valable. En rappelant (2.8), nous avons

$$d_k \leq \rho(T^m x, T^{m-1} x) + \rho(T^{m-1} x, T^n x) \leq c_m + \epsilon \leq c_k + \epsilon. \tag{2.13}$$

Donc, $d_k \to \epsilon$, que $k \to \infty$.
Mais là,

$$\begin{aligned} d_k &= \rho(T^m x, T^n x) \leq \rho(T^m x, T^{m+1}x) + \rho(T^{m+1}x, T^{m+1}x) \\ &+ \rho(T^{n+1}x, T^n x) \leq 2c_k + \psi(\rho(T^m x, T^n x)) = 2c_k + \psi(d_k). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Alors, comme $k \to \infty$ dans (2.14), on obtient $\epsilon \leq \psi(\epsilon)$, ce qui est une contradiction pour $\epsilon > 0$.

2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Définition 2.2.1. *Soit X un espace vectoriel normé et F un sous-ensemble fini de X*

$$F = \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}.$$

Alors $conv(F)$, l'enveloppe convexe de F, est définie par

$$conv(F) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ / \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}. \tag{2.15}$$

Définition 2.2.2. *Soit X un espace vectoriel normé et F un sous-ensemble de X. L'enveloppe convexe $conv(F)$ est l'intersection de tous les ensembles convexes $S \subset X$ tels que $F \subset S$.*

Définition 2.2.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Un sous-ensemble S d'un espace métrique X est dit $\varepsilon-$filet de X si*

$$X \subset \underset{x \in S}{\cup} \mathbf{B}(x, \varepsilon). \tag{2.16}$$

Définition 2.2.4. *Un espace métrique X est dit totalement borné s'il existe un $\varepsilon-$filet, pour tout $\varepsilon > 0$.*

Remarque 2.2.1. *Au lieu de totalement borné, le terme relativement compact est parfois utilisé. Cependant, cela peut également signifier que la fermeture de l'ensemble est compacte. Uniquement pour les espaces métriques complets, les deux notions coïncident.*

Lemme 2.2.1. ***(Lemme de Projection de Schauder).***
Soit A un sous-ensemble compact d'un espace vectoriel normé $(X, \| \|)$, avec d la métrique induite par la norme $\| \|$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il exixte un sous-ensemble fini $F \subset X$ et une application $P : A \to conv(F)$ tel que

$$\forall x \in A; \ d(P(x); x) < \varepsilon. \tag{2.17}$$

Cette application est appelée projection de Schauder.

Théorème 2.2.1. ***(Théorème de Brouwer).***
Soit A un sous-ensemble non vide, compact et convexe de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors, toute application continue $T : A \to A$ admet un point fixe.

Démonstration :
On considère un $\varepsilon-$ filet pour le compact A et on note par $F = \{x_1, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des centres des $\varepsilon-$boules. Pour $i = 1, \cdots, n$, on définit $\phi_i : A \to \mathbb{R}$ par,

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \quad d(x, x_i) & x \in \mathbf{B}(x_i, \varepsilon) \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

On voit que ϕ_i est continue et strictement positif dans $\mathring{\mathbf{B}}(x_i; \varepsilon)$ et s'annule ailleurs. Par conséquent

$$\forall x \in A; \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) > 0,$$

On définit la projection de Schauder $P : A \to conv(F)$ par

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i,$$

avec $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)$ L'application P est continue car les ϕ_i le sont. De plus

$$\begin{aligned} d(P(x), x) &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x \right\|, \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} (x_i - x) \right\|, \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \parallel (x_i - x) \parallel < \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

car $\phi_i(x) = 0$ si $\parallel (x_i - x) \parallel \geq \varepsilon$.

Remarque 2.2.2. *Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.*

Théorème 2.2.1. ***(Théorème de point fixe de Schauder).***
Soit X un espace de Banach et soit $M \subset X$, non vide, convexe et fermé. Si $T : M \to M$ est compact (c'est-à-dire que $T(M)$ et relativement compact), alors T admet un point fixe.

Démonstration :
Soit $A = \overline{T(M)}$ la fermeture de $T(M)$ qui, par hypothèse, est compacte. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit F_n un $\frac{1}{n}-$filet pour A (qui existe car A est compact) et soit $P_n : A \to conv(F_n)$ la projection de Schauder correspondante. La convexité de M implique que $conv(F_n) \subset M$ et on peut définir l'application $T_n : conv(F_n) \to conv(F_n)$;

$$T_n = (P_n \circ T) \mid_{conv(F_n)}$$

.

Le corollaire 2.2.1 garantit que T_n admet un point fixe. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit un tel point fixe de T_n et le note x_n. Puisque A est compact $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, elle admet donc une sous-suite $(x_{n_A})_A$ convergente vers $x \in A$.
Du lemme 2.2.1 on a,

$$\begin{aligned} d(T(x);x_{n_A}) &= d(T(x);T_{n_A}(x_{n_A})), \\ &\leq d(T(x);T(x_{n_A})) + d(T(x_{n_A});T_{n_A}(x_{n_A}), \\ &\leq d(T(x);Tx_{n_A})) + \frac{1}{n_A} \to_{A\to\infty} 0. \end{aligned}$$

puisque T est continu. Ainsi $(x_{n_A})_A$ converge à la fois vers x et $T(x)$. Les limites sont uniques, donc $T(x) = x$. *c.q.f.d*

Corollaire 2.2.1. *Soient X un espace de Banach et $M \subset M$, non vide, convexe et compact. Si $T : M \to M$ est continu, alors T admet un point fixe.*

2.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Lemme 2.3.1. *[14] Si $(X, \| \|)$ est un espace normé, $M \subset X$ et $B : M \to X$ une application contractante, alors $(I - B)$ est un homéomorphisme de M sur $(I - B)M$.*

Démonstration :
On suppose que B est α-contraction, $(I - B)$ est continue car elle est la somme de deux application continues. D'autre part, pour tout $x, y \in M$ avec $x \neq y$, on voit que

$$\begin{aligned}
\|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|(x - y) - (Bx - By)\| \\
&\geq \|x - y\| - \|Bx - By\| \\
&\geq \|x - y\| - \alpha\|x - y\| \\
&\geq (1 - \alpha)\|x - y\| \\
&> 0,
\end{aligned}$$

d'où $\| (I-B)x-(I-B)y \| \neq 0 \Rightarrow (I-B)x \neq (I-B)y$. En conclusion, $(I-B)$ est injective, et comme $I - B : M \to (I - B)M$ alors $\forall y \in (I - B)M, \exists x \in M$ tel que $(I - B)x = y$ d'où $I - B$ est surjective et donc $(I - B)^{-1}$ est continue, par l'absurde, si $(I - B)^{-1}$ n'était pas continue, alors $\exists (I - B)y$ et $((I - B)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(I - B)x_n \to (I - B)y$ mais $x_n \nrightarrow y$. Or, pour

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \tag{2.18}$$

$$\varepsilon \geq \| (I - B)x_n - (I - B)y \| \geq \|x_n - y\| - \|Bx_n - By\|$$

,

comme $x_n \nrightarrow y, \exists \varepsilon_0 > 0$ et $(x_{n_K})_K$ telle que $\| (x_{n_K}) - y \| \geq \varepsilon_0$, et comme B est une contraction alors $\exists 0 < \delta < 1$ avec $\| B(x_{n_K}) - By \| \leq \delta \| (x_{n_K}) - y \|$. Ainsi, en utilisant (2.18), on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \| (I - B)x_{n_K} - (I - B)y \| \\
&\geq \| x_{n_K} - y \| - \| Bx_{n_K} - By \| \\
&\geq \| x_{n_K} - y \| -\delta \| x_{n_K} - y \| \\
&= (1 - \alpha) \| x_{n_K} - y \| \\
&\geq (1 - \alpha)\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Mais ε_0 est fixé, $\delta < 1$, par conséquent on aura une contradiction lorsque $\varepsilon \to 0$. Donc, $I - B$ est bien un homeomorphisme.

Théorème 2.3.1. ***(Théorème de Krasnoselskii(1955))***
Soit $(X, \| \|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermée de S. On suppose que : $A, B : M \to X$ sont deux applications satisfaisant :

(1) $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$.

(2) A est continue et AM est cotenue dans un ensemble compact.

(3) B est une contraction de constante $\alpha < 1$.

Alors $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.

Démonstration :
Soient A, B deux application vérifiant l'hypothèse, on a B est contractant alors $\exists \alpha$ telque $0 < \alpha < 1$ et

$$\| B(x) - B(y) \| \leq \| x - y \|, \ \forall x, y \in M. \tag{2.19}$$

D'aprés le lemme (2.3.1) : $(I - B) : M \to (I - B)M$ est un homeomorphisme alors $(I - B)^{-1}$ existe et continue sur $(I - B)M$. D'autre part, pour tout $y \in M$ l'equation $x = B(x) + A(y)$ admet unique solution $x \in M$ puisque l'application $x \to Bx + Ay$ définit une contraction de M dans lui même grâce à théorème de Banach. Ainsi $A(y) \in (I - B)M$ pour $y \in M$ et $(I - B)^{-1}A : M \to M$ est une application continue car elle est composée de deux application continues. Comme A est une application compact alors $AM \subset K$ avec K compact de X.
$(I - B)^{-1}(AM) \subset (I - B)^{-1}(K)$ avec $(I - B)^{-1}(K)$ compact car $(I - B)^{-1})$ est continue donc $(I - B)^{-1}A : M \to M$ est compact.
D'aprés le théorème de schauder. $(I - B)^{-1}A$ posséde un point fixe dans M.

2.3.1 Théorème de Dhage

Théorème 2.3.1. ***(Dhage)[11]***
Soit S un sous-ensemble convexe fermé et borné de l'espace de Banach X et soit $A : X \to X$ et $B : S \to X$ deux opérateurs tels que

(a) A est la $\mathfrak{D}-$contraction non linéaire,

(b) B est compact et continue,

(c) $x = Ax + By$ pour tout $y \in S \Rightarrow x \in S$.

Alors l'équation opérateur $Ax + Bx = x$ a une solution dans S.

Démonstration :
Puisque A est $\mathfrak{D}$-contraction sur S, il est equivalent à la condition de contraction

$$\| \mathcal{A}x - \mathcal{A}y \| \leq \phi(\| x - y \|), \tag{2.20}$$

pour tout $x, y \in E$,où $\phi \in \mathcal{DL}$.
Soit $y \in S$ un élèment fixé et l'application $\mathcal{A}_y$ de E, est définie par

$$\mathcal{A}_y(x) = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y. \tag{2.21}$$

Nous montrons que $\mathcal{A}_y$ est une $\mathfrak{D}$-contraction de E. Soit $x_1, x_2 \in E$.Alors, nous avons

$$\| \mathcal{A}_y(x_1) - \mathcal{A}_y(x_n) \| \leq \| \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 \| \leq \phi(\| x_1 - x_2 \|) \tag{2.22}$$

où $\phi \in \mathcal{DL}$, d'après le théorème de Boyd-wong, $\mathcal{A}_y$ a un point fixe unique, dit $y' \in E$, i.e, est un point unique de E tel que

$$\mathcal{A}_y(y') = \mathcal{A}y' + \mathcal{B}y = y'. \tag{2.23}$$

Par l'hypothèse (c), on obtient $y' \in S$. Maintenant, l'équation (2.23) écrite comme suit

$$(I - \mathcal{A})^{-1}By = y', \tag{2.24}$$

où I est l'opérateur d'identite sur E.
Définie un opérateur $\mathcal{T}$ sur S lui même par

$$\mathcal{T}x = (I - \mathcal{A})^{-1}Bx. \tag{2.25}$$

Clairement, l'opérateur $(I - \mathcal{A})^{-1}$ est bien définie et continue sue E compte tenu de l'hypothèse (a).

Chapitre 3

Applications aux équations différentielles

3.1 Équations différentielles perturbées

Pour tout intervalle fermé et borné $J = [0, T]$ de la ligne réelle $\mathbb{R}$, on considère le problème de la valeur initiale des équations différentielles ordinaires non linéaires du premier ordre

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ a.e. } t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

si $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Le problème (3.1) est une partie fondamentale ou centrale de l'analyse non linéaire et largement étudiée dans la littérature au fil des ans pour différents aspects des solutions. Il n'est pas faux de dire que le sujet de l'analyse non linéaire commence avec ces équations différentielles non linéaires. Or, il se peut que la non-linéarité f impliquée dans le problème (3.1) ci-dessus ne soit pas lisse ou régulière pour discuter de l'existence ou de certaines autres caractérisations des solutions. Cependant, si nous divisons la fonction f en une somme de deux fonctions $f1$ et $f2$, soit $f = f_1 + f_2$, alors ces fonctions ont de très bonnes propriétés et l'équation différentielle non linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t)) \text{ a.e. } t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2}$$

est facilement résolution avec les techniques de théorie fonctionnelle disponibles. La méthode qui permet de le faire est appelée méthode des perturbations et l'équation différentielle (3.2) est appelée une perturbation de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t)) \text{ a.e. } t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.3}$$

L'équation différentielle ci-dessus (3.2) est obtenue en perturbant la non-linéarité f_1 de (3.3) et est appelée une équation différentielle perturbée. Maintenant, les équations différentielles perturbées sont classées en deux catégories principales. Si la fonction inconnue libre d'une équation différentielle est perturbée d'une manière quelconque, on l'appelle alors une équation différentielle perturbée de premier type. De même, si la fonction inconnue fonction inconnue sous dérivée est perturbée d'une certaine manière, alors on l'appelle une équation différentielle à perturbation du second type. L'équation différentielle non linéaire (3.2) est elle-même en fait une perturbation implicite de la fonction inconnue sous dérivation. La perturbation implicite du premier type correspondant à des problèmes bien connus de valeur initiale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \text{ a.e. } t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Considérons maintenant l'équation différentielle perturbée associée (3.3), à savoir,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[x(t) - f_2(t, x(t))] = f_1(t, x(t)) \text{ a.e. } t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Dans cette perturbation de l'équation différentielle (3.5), le terme sous dérivée est perturbé et ce type de perturbation est appelé une perturbation de second type. Une perturbation d'une équation non linéaire qui implique l'addition ou la soustraction d'un terme est appelé une perturbation linéaire et une perturbation qui implique la multiplication ou la division par un terme est appelée une perturbation quadratique des équations en question. De même, si la fonction inconnue dans l'équation différentielle (3.1) est perturbée par une fonction, alors on l'appelle une perturbation implicite de l'équation différentielle (3.3). Encore une fois, un implicite la perturbation peut être du premier ou du second type. L'équation différentielle (3.5) est une perturbation linéaire de second type pour l'équation différentielle (3.3).

Étant donné un intervalle borné $J = [t_0, t_0 + a)$ dans $\mathbb{R}$ pour certains $t_0, a \in \mathbb{R}$ fixes avec $a > 0$, on considère les problèmes de valeur initiale (1) (en abrégé HDE). Par une solution de l'EDH (1), nous entendons une fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ telle que

1. La fonction $t \to x - f(t, x)$ est continue pour chaque $x \in \mathbb{R}$,
2. x satisfait les équations de (1).

L'importance des recherches sur les équations différentielles hybrides réside dans le fait que qu'elles incluent plusieurs systèmes dynamiques en tant que cas particuliers. La prise en compte des équations différentielles hybrides est implicite dans les travaux de Krasnoselskii et largement traitée dans plusieurs articles sur les équations différentielles hybrides avec différentes perturbations (par exemple les travaux de Burton et Dhage). Cette classe d'équations différentielles hybrides comprend les perturbations des équations différentielles originales de différentes manières. Une classification précise des différents types de perturbations des équations différentielles apparaît dans Dhage qui peut être traité avec la théorie du point fixe hybride (Dhage et Lakshmikantham).

3.1.1 Problèmes de valeur initiale pour les équations différentielles hybrides

Dans cette section, nous prouvons un résultat d'existence pour l'EDH (1) sur un intervalle fermé et borné $J = [t_0, t_0 + a]$ sous conditions de Lipschitz et de compacité sur les non-linéarités qui y interviennent. Nous considérons l'EDH (1) dans l'espace de fonctions $C(J, \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles définies sur J muni de la norme $\| \|_\infty$ définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in J} |x(t)|.$$

Clairement, $(C(J, \mathbb{R}), \| \cdot \|)$ est un espace de Banach. Nous prouvons l'existence d'une solution pour l'EDH (1) via le théorème du point fixe hybride 2.3.1 dans l'espace $(C(J, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

Définition 3.1.1. *Un opérateur Q sur un espace de Banach X dans lui-même est dit compact si $Q(X)$ est un sous-ensemble relativement compact de X. Q est dit totalement borné si pour tout sous-ensemble borné S de $\mathbf{E}$, $Q(S)$ est un sous-ensemble relativement compact de X. Si X est continue et totalement bornée, alors on dit qu'elle est complètement continue sur X.*

Nous considérons les hypothèses suivantes dans ce qui suit.

(A_0) La fonction $x \to x - f(t, x)$ est croissante dans $\mathbb{R}$ pour tout $t \in J$.

(A_1) Il existe une constante $L > 0$ telle que

$$| f(t, x) - f(t, y) | \leq \frac{L \mid x - y \mid}{M + \mid x - y \mid},$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$. De plus, $L \leq M$.

(A_2) Il existe une fonction continue $h : J \to \mathbb{R}$ telle que

$$| g(t, x) | \leq h(t), t \in J,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.1.1. *Supposons que l'hypothèse (A_0) soit vérifiée. Alors pour toute fonction continue $h : J \to \mathbb{R}$, la fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ est une solution de l'EDH.*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[x(t) - f(t, x(t))] = h(t), \ t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.6}$$

si et seulement si x satisfait à l'équation intégrale hybride (HIE)

$$x(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + f(t, x(t)) + \int_{t_0}^{t} h(s)ds, t \in J. \tag{3.7}$$

Démonstration :

Soit $h \in C(J, \mathbb{R})$. Supposons que x est une solution de l'EDH (3.6). Par définition, $\frac{d}{dt}[x(t) - f(t, x(t))]$ est continue sur J , et donc différentiable sur J. d'où $\frac{d}{dt}[x(t) - f(t, x(t))]$ est intégrable sur J. En appliquant l'intégration à (3.6)de t_0 à t, nous obtenons la HIE (3.7) sur J.

Inversement, supposons que x satisfasse la HIE (3.7). Alors, par différentiation directe, on obtient la première équation de (3.6). De nouveau, en substituant $t = t_0$ dans (3.7), on obtient

$$x(t_0) - f(t_0, x(t_0)) = x_0 - f(t_0, x_0).$$

Puisque l'application $x \to x - f(t, x)$ est croissant dans $\mathbb{R}$ pour tout $t \in J$, l'application $x \to x - f(t_0, x)$. est injective dans $\mathbb{R}$, d'où $x(t_0) = x_0$. Par conséquent, la démonstration du lemme est complète.

Théorème 3.1.1. *Supposons que les hypothèses $(A_0) - (A_2)$ soient vérifiées. Alors l'EDH* (1) *a une solution définie sur J.*

Démonstration :

On définit $X = C(J, \mathbb{R})$ et un sous-ensemble S de X défini par

$$S = \{x \in X \mid \| x \| \leq \mathbf{N}\}, \tag{3.8}$$

où,

$$\mathbf{N} = | x_0 - f(t_0, x_0) | + L + F_0 + a \| h \| .$$

et $F_0 = \sup\limits_{t \in J} | f(t, 0) |$.

Clairement, S est un sous-ensemble fermé, convexe et borné de l'espace de Banach X. Maintenant, en utilisant les hypothèses (A_0) et (A_2), on peut montrer par une application du lemme (3.1.1) que l'EDH (1) est équivalente à l'EDH non linéaire.

$$x(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + f(t, x(t)) + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))ds \tag{3.9}$$

pour $t \in J$.
On définit deux opérateurs $A : X \to X$ et $B : S \to X$ par

$$Ax(t) = f(t, x(t)), t \in J, \tag{3.10}$$

et

$$Bx(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))ds, t \in J, \tag{3.11}$$

Alors, la HIE (3.9) est transformée en une équation d'opérateur comme suit

$$Ax(t) + Bx(t) = x(t), t \in J.$$

Nous allons montrer que les opérateurs A et B satisfont toutes les conditions du théorème (2.3.1). Tout d'abord, nous montrons que A est une $\mathfrak{D}$-contraction non linéaire sur E avec une $\mathfrak{D}$-fonction ψ. Soit $x, y \in X$.
Alors, par hypothèse (A_1),

$$\mid Ax(t) - Ay(t) \mid = \mid f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \mid \leq \frac{L \mid x(t) - y(t) \mid}{M + \mid x(t) - y(t) \mid} \leq \frac{L \parallel x - y \parallel}{M + \parallel x - y \parallel}$$

pour tout $t \in J$. En utilisant le suprême sur t , on obtient

$$\parallel Ax - Ay \parallel \leq \frac{L \parallel x - y \parallel}{M + \parallel x - y \parallel}$$

pour tout $x, y \in X$.Il en résulte que A est une $\mathfrak{D}$-contraction non linéaire X avec la $\mathfrak{D}$-fonction ψ définie par

$$\psi = \frac{Lr}{M + r}.$$

Par la suite, nous montrons que B est un opérateur compact et continu sur S dans X. Nous montrons d'abord que B est continu sur S. Soit $\{x_n\}$ une séquence dans S convergeant vers un point $x \in S$. Alors par théorème de convergence dominée pour l'intégration, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) &= \lim_{n\to\infty}\left[x_0 - f(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} g(s,x_n(s))ds\right] \\
&= x_0 - f(t_0,x_0) + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} g(s,x_n(s))ds \\
&= x_0 - f(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\lim_{n\to\infty} g(s,x_n(s))\right]ds \\
&= x_0 - f(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} g(s,x(s))ds = Bx(t).
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. De plus, on peut montrer comme ci-dessous que Bx_n est une suite équicontinue de fonctions dans E. Maintenant, en suivant les arguments similaires à ceux donnés dans Granas et al. prouvé que B est un opérateur continu sur S.
Ensuite, nous montrons que B est un opérateur compact sur S. Il suffit de montrer que $B(S)$ est un ensemble uniformément borné et équi-continu dans X. Soit $x \in S$ arbitraire. Alors par hypothèse (A_2),

$$\begin{aligned}
\mid Bx(t) \mid &\leq \mid x_0 - f(t_0,x_0) \mid + \int_{t_0}^{t} \mid g(s,x(s)) \mid ds, \\
&\leq \mid x_0 - f(t_0,x_0) \mid + \int_{t_0}^{t} h(s)ds \leq \mid x_0 - f(t_0,x_0) \mid + \parallel h \parallel a.
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. En prenant le suprême sur t ,

$$\parallel Bx \parallel \leq \mid x_0 - f(t_0,x_0) \mid + \parallel h \parallel a.$$

pour tout $x \in S$. On montre que B est uniformément borné sur S.
De même, soit $t_1, t_2 \in J$. Alors pour tout $x \in S$, on a

$$\begin{aligned}
\mid Bx(t_1) - Bx(t_2) \mid &= \left| \int_{t_0}^{t_1} g(s,x(s))ds - \int_{t_0}^{t_2} g(s,x(s))ds \right|, \\
&\leq \left| \int_{t_2}^{t_1} \mid g(s,x(s)) \mid ds \right| \leq \mid p(t_1) - p(t_2) \mid .
\end{aligned}$$

où, $p(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)ds$. Puisque la fonction p est continue sur J compact, elle y est uniformément continue. Donc, pour $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\mid t_1 - t_2 \mid < \delta \Rightarrow \mid Bx(t_1) - Bx(t_2) \mid < \epsilon.$$

uniformément pour tout $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in S$. Ceci montre que $B(S)$ est un ensemble équicontinue dans X. Or l'ensemble $B(S)$ est un ensemble uniformément borné et equicontinue dans X, donc il est compact par le théorème d'Arzelá-Ascoli. Par conséquent, B est un opérateure continue et compact sur S. On montre par la suite que l'hypothèse (c) du théorème 2.3.1 est satisfaite. Soit $x \in X$ fixé et $y \in S$ soient arbitraires de sorte que $x = Ax + By$. Alors, par l'hypothèse (A_1), nous avons

$$\begin{aligned}
\mid x(t) \mid &\leq \mid Ax(t) + By(t) \leq \mid x_0 - f(t_0, x_0) \mid + \mid f(t, x(t)) \mid + \int_{t_0}^{t} \mid g(s, y(s)) \mid ds, \\
&\leq \mid x_0 - f(t_0, x_0) \mid + (|f(t, x(t)) - f(t, 0) \mid + \mid f(t, 0)|) + \int_{t_0}^{t} \mid g(s, y(s)) \mid ds, \\
&\leq \mid x_0 - f(t_0, x_0) \mid + L + F_0 + \int_{t_0}^{t} h(s) ds \leq \mid x_0 - f(t_0, x_0) \mid + L + F_0 + \parallel h \parallel a.
\end{aligned}$$

En prenant le suprême sur t,

$$\parallel x \parallel \leq \mid x_0 - f(t_0, x_0) \mid + L + F_0 + \parallel h \parallel a.$$

et par conséquent, $x \in S$.

Ainsi, toutes les conditions du théorème 2.3.1 sont satisfaites et l'équation opérateur $Ax + By = x$ a une solution dans S. Par conséquent, l'EDH (1) a une solution définie sur J. Ceci complète la preuve.

□

3.2 Résultats d'existence pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

3.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 3.2.1. ***(La fonction Gamma)***
On appelle fonction Gamma eulérienne (ou intégrale eulérienne de seconde espèce) la fonction notée Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

ou x est un nombre complexe quelconque tel que $Re(x) > 0$

Définition 3.2.2. ***(Intégrale fractionnaire)***
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue ou intégrable et

$$\begin{aligned}
I_a^1 : \ & [a, b[\ \to \mathbb{R} \\
& x \quad \to (I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt,
\end{aligned}$$

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $(I_a^1 f)$ *d'order* $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ *est définie par*

$$(I_a^1 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-1)^{1-\alpha}} \ (x > a, Re(\alpha) > 0). \tag{3.12}$$

respectivement. Ici, $\Gamma(\alpha)$ *est la fonction Gamma.*

Définition 3.2.3. ***(Dérivée Fractionnaire)***
Le dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $(D_a^\alpha y)$ *d'order* $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) \geq 0)$ *est définie par*

$$\begin{aligned}(D_a^\alpha)(x) &= (\frac{d}{dx})^n (\Gamma_a^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dx})^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha - n - 1} \ (n = [Re(\alpha)] + 1; x > a).\end{aligned}$$

Définition 3.2.4. ***(Dérivées fractionnaires de Caputo)***
La Le dérivée fractionnaire de caputo $({}^c D_a^\alpha y)(x)$ *respectivement d'order* α. *avec* $(\alpha \geq 0)$ *sur* $[a, b]$ *est définie par*

$$({}^c D_a^\alpha y)(x) = \left(D_a^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x). \tag{3.13}$$

Lemme 3.2.1. *Soit* $\alpha > 0$, *alors*

$$J^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots c_{n-1} t^{n-1},$$

pour tout $c_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2 \cdots n-1,\ n = [\alpha] + 1.$

3.2.2 Existence des solutions

On s'intéresse au résultat d'existence des solutions pour le problème aux limites (2).

Lemme 3.2.2. *Une solution du problème de la valeur limite fractionnelle (2) est donnée par :*

$$\begin{aligned}x(t) &= (1-t) \int_0^1 g(\tau) x(\tau) d\tau + \theta \left(t - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\ &+ \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^\alpha - 1 f(\tau, x(\tau)) d\tau - J^\alpha f(t, x(t)).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Démonstration :
On a

$$D^\alpha x(t) = \theta - f(t, x(t)),\ 0 \leq t \leq 1. \tag{3.15}$$

en appliquant l'opérateur J^α aux deux parties de (3.15), et en utilisant l'identité $J^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t$, on obtient

$$x(t) = \frac{\theta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - J^\alpha f(t, x(t)) - c_0 - c_1 t. \tag{3.16}$$

En particulier, pour $t = 0$, nous avons

$$c_0 = -\int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau, \tag{3.17}$$

et pour $t = 1$, nous obtenons

$$c_1 = -\theta + \frac{\theta}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{3.18}$$

En substitution des valeurs de c_0 et c_1 dans (3.16), nous obtenons (3.14). Lemme 3.2.2 est donc prouvé.
Maintenant, nous avons l'opérateur $T : C([0,1], X) \to C([0,1], X)$ comme suit :

$$\begin{aligned} T(x) &= (1-t)\int_0^t g(\tau)x(\tau)d\tau + \theta\left(t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ &+ \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

pour $0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2$.

Le résultat suivant est basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Pour appliquer ce théorème, nous avons besoin des hypothèses suivantes :

(D1) :
$$\| f(t,x) \| \leq \nu(t), (t,x) \in [0,1] \times X, \nu \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+).$$

(D2) : Soit $f : [0,1] \times X \to X$ est une fonction continue conjointe qui met en correspondance des bornés de $[0,1] \times X$ en sous-ensembles relativement compacts de X.

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses (D1) et (D2) soient satisfaites. Si* $M = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| < 1$ *; alors le problème de la valeur limite (2) a au moins une solution dans* $C([0,1], X)$ *:*

Démonstration :
Fixons

$$\rho \geq (1-M)^{-1}\left(\theta(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}) + \frac{2 \| \nu \|}{\Gamma(\alpha+1)}\right), \tag{3.19}$$

avec $\| \nu \|= \sup_{t\in[0,1]} | \nu(t) |$.

Sur $B_\rho = \{x \in X, \| x \|\leq \rho\}$, nous avons déduit les opérateurs R et S en utilisant la formule suivante

$$R(x) = (1-t)\int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau + \theta\left(t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)}\right), \tag{3.20}$$

$$S(x) = \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau - J^\alpha f(t, x(t)), \tag{3.21}$$

pour $x, y \in B_\rho$, on a

$$\begin{aligned} \| R(x)+S(y) \| &\leq \| (1-t)\int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau + \theta\left(t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \| \\ &+ \quad \| \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau \| . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\| R(x)+S(y) \leq M \| x \| + \theta\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ &+ \quad \| \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau \| \\ &+ \quad \| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau \| . \end{aligned} \tag{3.23}$$

En utilisant $(D1)$ et (3.19), nous obtenons

$$\begin{aligned} \| R(x)+S(x) &\leq M \| x \| + \theta\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \frac{2 \| \nu \|}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq M\rho + (1-M)\rho. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Donc $R(x)+S(y) \in B_\rho$.
D'autre part, il est facile de voir que

$$\| R(x)-R(y) \|\leq M \| x-y \|, \tag{3.25}$$

et puisque $M < 1$, alors R est une contraction. De plus, il résulte de $(D2)$ que l'opérateur S est continue et que

$$\begin{aligned} \| S(x) \| &\leq \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-\tau)^{\alpha-1} \| f(\tau, x(\tau))d\tau \| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \| f(\tau, x(\tau))d\tau \| . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Puisque $t \in [0,1]$, alors nous pouvons écrire

$$\| S(x) \| \leq \frac{2 \| \nu \|}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Par conséquent, S est uniformément borné sur B_ρ.

Prenons maintenant $t_1, t_2 \in [0,1]$ et $y \in B_\rho$. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \| Sy(t_1) - Sy(t_2) \| \ &\leq \ \| \frac{t_1 - t_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \| \\ &+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \\ &- \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \| . \end{aligned} \tag{3.27}$$

En vertu de $(D1)$, nous obtenons

$$\| Sy(t_1) - Sy(t_2) \| \leq \frac{\| \nu \|}{\Gamma(\alpha+1)} \left(| t_1 - t_2 | + | t_1^\alpha - t_2^\alpha | \right). \tag{3.28}$$

Le côté droit de (3.28) est indépendant de y. Par conséquent, S est équicontinue et comme $t_1 \to t_2$, le côté gauche de (3.28) tend vers 0, donc $S(B_\rho)$ est relativement compact et alors par le théorème 1.3.1, l'opérateur S est compact. Enfin, par le théorème 2.3.1, nous concluons qu'il existe une solution de (2) : Le théorème 3.2.1 est donc prouvé.

□

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté le théorème du point fixe classique de Krasnoselskii et l'éxtension de Dhage concernant les espaces de Banach et quelque applications aux équations différentielles. La technique utilisée pour prouver que ces équations d'opérateur ont une solution est de reformuler le problème comme un problème du point fixe et de voir si ce dernier peut être résolu via un argument du point fixe dans un espace vectoriel approprié et sous des hypothèses suffisantes.

Ce théorème d'existence est très important pour étudier plusieurs types d'équations hybride différentielles et intégrales et reste valable pour les espaces vectoriels topologiques quelconques. Mentionons qu'il existe plusieurs généralisations de ce théorème surtout pour les opérateurs condensés.

Bibliographie

[1] F.Abbas, Etude de Quelques Théorèmes du point fixe et leurs Applications, Mémoire de Master Académique en Mathématiques, Université Saida, 2015.

[2] R.Agarwal, M.Meehan and D.Oregan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press.

[3] H.Amara, Topologie des espaces métriques, Université 08 mai 1945/ Guelma, 2009-2010.

[4] A.Anber, S.Belarbi and Z.Dahmani, New Existence and Uniqueness Results for Fractional Differential Equations,*An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 21(3), 2013, 33-41.

[5] C.Berger, Topologie pour la licence, Univercité de Nice-Sophia Antipolis, 2004.

[6] D. W. Boyd and J. S. W. Wong, On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc* , 20 (1969), 458-464.

[7] F.Boyer, Analyse Fonctionnelle, Aix-Marseille Université, 13 décembre 2015.

[8] G.Carlier, Notes de cours Analyse Fonctionnelle, ENS, 2008-2009.

[9] B.C.Dhage, Quadratic Perturbattons of Periodic Boundary Value Problems of Second order Ordinary Differential Equations,*Tamkang journal ofmathematics*, 4(2010),465-486.

[10] B.C.Dhage, Some variants of two basic hybrid fixed point theorems of Krasnoselskii and Dhage with application, *Nolinear Stud*, 25(2018), no.3, 559-573.

[11] B.C.Dhage and N.S.Jadhav, Basic Results in the Theory of Hybrid Differential Equations with Linear Perturbations of Second Type, *Journal of Mathematics*, 44(2),2013,171-186.

[12] S. Djebali. *Degré Topologique et Application*, B.P.92 Kouba, Alger, Algérie.le 22 mars 2006.

[13] A.El Jai, *Eléments de topologie et espaces métriques*, Université de Perpignan, 2007.

[14] L. Fedhila, Le théorème de point fixe de Krasnoselskii et ses application au équation différentielle impulsive, Mémoire de Master Académique en Mathématiques, Université d'Adrar, 2017.

[15] I.Hammana et K.Herier, *Le rôle des applications pseudo contractives dans la théorie du point fixe et applications*, Mémoire de Master Académique en Mathématiques, Université Hamma Lakhdar El Oued, 2018.

[16] G.Kineider et T.Harbeteau, *Théorèmes de point fixe et applications*, Université de Rennes, 2020.

[17] M.A. Krasnoselskii, Positive solutions of operator equations, *Noordhoff, Groningen* 1964.

[18] R.Nier et D.Iftimie, *Introduction à la Topologie* , Université de Rennes.

[19] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.

[20] A. Zeriahi, *Les espaces de Lebesgue L^p*, 2011.