

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université de Saida - Dr Moulay Tahar.  
Faculté des Sciences.  
Département de Mathématiques.



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

**Boulanouar Imane**<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Mr. Charif Fayssal**

**Thème :**

**Modèles Mathématiques Avec impulsions**

Soutenue le 15/06/2022 devant le jury composé de

<b>B. Saadli</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
<b>F. Charif</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
<b>L. Rabhi</b>	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examineur

Année univ. : 2021/2022

---

1. e-mail : boulanouarimane99@gmail.com

---

# Remerciements

*Je remercie Allah de m'avoir donné durant toutes ces années la santé, le courage, la force, et la volonté pour réaliser ce travail.*

*J'exprime ma profonde gratitude a monsieur Fayssal CHARIF mon encadreur, qui m'a encadré et dirigé et qui n'a pas lésiné sur ses précieux conseils tout au long de ce mémoire.*

*Je tiens aussi à remercier les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.*

*Tout mes sincères remerciements vont également à l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques qui m'a aidé à m'améliorer durant mon cursus universitaire.*

---

# Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Ma grande-mère.

Mes parents, mes frères, mes soeurs et toute ma famille.

Mes amis et toute personne qui m'a aidé de loin et de près.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>7</b>
1.1 Problème de Cauchy . . . . .	7
1.2 Équations différentielles ordinaires . . . . .	8
1.3 Stabilité des équilibres . . . . .	8
1.4 Stabilité d'un système linéaire . . . . .	9
1.5 Fonction de Liapunov . . . . .	10
1.6 Fonction de Lambert . . . . .	12
1.7 Un modèle d'une équation différentielle impulsive . . . . .	13
<b>2 Modèle Proie Prédateur</b>	<b>15</b>
2.1 Existence des solutions . . . . .	16
2.1.1 Existence locale . . . . .	16
2.1.2 Positivité des solutions . . . . .	16
2.1.3 Existence Globale . . . . .	16
2.1.4 Bornitude des solutions . . . . .	18
2.2 Points d'équilibres . . . . .	19
2.2.1 Stabilité des points d'équilibres . . . . .	19
2.3 Périodicité des solutions . . . . .	21

2.4	Simulation numérique . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Modèle Proie Prédateur avec impulsions</b>	<b>25</b>
3.1	Existence et stabilité de la solution périodique pour le système (3.1) .	26
3.1.1	Existence d'une solution périodique pour le système (3.1) . .	26
3.1.2	Stabilité de la solution périodique pour le système (3.1) . . . .	29
3.2	Existence et stabilité de la solution périodique pour le système (3.2) .	32
3.2.1	Existence et stabilité de la solution périodique pour $\tau = 0$ . .	32
3.2.2	Existence d'une solution périodique pour $\tau \neq 0$ . . . . .	41
3.3	Simulation numérique . . . . .	47
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>49</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>50</b>

# Introduction

Les mathématiques sont de plus en plus présentes dans diverses disciplines et notamment en biologie. La modélisation en biologie a commencé à être utilisée en dynamique de population, afin de modéliser non seulement la croissance des populations, mais aussi les différentes interactions qui peuvent exister entre elles.

Le modèle proie-prédateur a été imaginé par Volterra en 1925 pour modéliser l'évolution de sardines et des requins dans la mer Adriatique. Un modèle similaire a été développé par Lotka, un scientifique américain à la même époque. Ce modèle se présente sous la forme de deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)[a - by(t)], \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)[-c + dX], \end{cases}$$

avec  $a, b, c, d > 0$  et  $x(0) > 0, y(0) > 0$ , où :

$x$  : représente la densité de proies.

$y$  : représente la densité de prédateur.

$a$  : représente le taux de croissance de population  $x(t)$ .

$c$  : représente le taux de décroissance de population  $y(t)$ .

$b, d$  : représente le taux de l'interaction entre les deux populations.

Notre objectif est de connaître l'évolution des quantités  $x$  et  $y$  au cours du temps  $t$ .

Ce travail a pour thème l'étude des modèles mathématiques avec impulsions. Le premier chapitre présente des définitions et des résultats préliminaires nécessaires

pour la suite de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous analysons les propriétés asymptotiques pour un système Proie-Prédateur, qui nous aident à étudier le même modèle avec impulsions dans le chapitre suivant.

Dans le troisième chapitre, nous considérons deux modèles Proie-Prédateur avec des effets impulsifs dépendant de l'état. L'analyse mathématique de ces deux modèles permet d'étudier l'existence des solutions périodiques triviales et non triviales d'ordre 1 et leurs stabilités.

A la fin de chaque chapitre nous illustrons certains de nos résultats par des simulations.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et théorèmes nécessaires pour l'élaboration de ce travail.

### 1.1 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale (aussi appelé problème aux valeurs initiales). C'est donc un problème du type :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec  $t_0 \in I, y_0 \in \Omega$  et  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue .

**Définition 1.1.1.** [28] Soit  $(t_0, y_0) \in U = I \times \Omega$ . Résoudre le problème de Cauchy (1.1) consiste à déterminer  $(\varphi; J)$  où  $J$  est un intervalle contenant  $t_0$  et  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction dérivable (en fait de classe  $C^1$ ) sur  $J$  telle que  $J \subset I$  et pour tout  $t \in J$ , nous avons

$$\varphi(t) \in \Omega, \text{ et } \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$



Un problème de Cauchy peut ne pas avoir de solutions si  $f$  n'est pas continue et peut avoir plusieurs solutions maximales (même si  $f$  est continue).

## 1.2 Équations différentielles ordinaires

**Définition 1.2.1** ([27]). Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue, une équation différentielle ordinaire sur  $U$  est une relation de type :

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad (1.2)$$

avec  $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ .

**Définition 1.2.2** ([27]). La fonction  $x$  est dite solution de l'équation (1.2) sur l'intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  si elle est définie et continument dérivable sur  $I$ ,  $(t, x(t)) \in U$  pour tout  $t \in I$  et  $x$  satisfait la relation (1.2) sur  $I$ .

**Théorème 1.2.1. (Cauchy- Lipschitz)**[28]

Soit  $f$  une fonction continue sur  $U$ , si  $f$  est globalement lipschitzienne par rapport à  $x$ , i.e pour tout compact  $K \subset I$ , il existe  $k > 0$  tel que pour tout  $t \in K$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \|,$$

alors le problème (1.2) admet une solution globale et unique.

## 1.3 Stabilité des équilibres

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $t \geq 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.3.1** ([27]). Un point  $x^*$  est dit point stationnaire (où équilibre) de système (1.3) si et seulement si  $f(x^*) = 0$ .

**Définition 1.3.2** ([27]). Un équilibre  $x^*$  de (1.3) est dit stable si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.3) on a

$$\|x_0 - x^*\| < \eta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

**Définition 1.3.3** ([27]). Un équilibre  $x^*$  de (1.3) est dit instable, s'il existe  $\epsilon > 0$ , pour tout  $\eta > 0$ , tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.3) on a

$$\|x(0) - x^*\| < \eta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

**Définition 1.3.4** ([27]). Soit  $x^*$  un équilibre de (1.3) stable, alors  $x^*$  est dit asymptotiquement stable si on a pour toute solution  $x(t)$  de (1.3) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

**Définition 1.3.5** ([27]). L'équilibre  $x^*$  de (1.3) est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

## 1.4 Stabilité d'un système linéaire

Considérons le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.4}$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  et  $x \in U$  et  $x^*$  un point d'équilibre du système (1.4).

Soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de la matrice  $A$ .

**Théorème 1.4.1** ([27]). (Critère de Routh-Hurwitz)

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  sont de parties réelles nulles ou négatives alors l'équilibre  $x^*$  est stable.
2. S'il existe au moins une valeur propre de la matrice  $A$  de parties réelles positives alors  $x^*$  est instable.
3. Si les valeurs propres de la matrice  $A$  sont de parties réelles strictement négatives alors l'équilibre  $x^*$  est asymptotiquement stable.
4. Dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de  $x^*$ .

**Définition 1.4.1** ([27]). Soit  $A$  une matrice carrée, on appelle spectre de  $A$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$  :

$$Sp(A) = \{\lambda : \lambda \text{ est valeur propre de } A\},$$

et le rayon spectrale de  $A$ , la valeur maximale du module des valeurs propres de  $A$ ,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}.$$

## 1.5 Fonction de Liapunov

**Définition 1.5.1** ([30]). Soit  $V : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue,

1.  $V$  est dite définie positive si :
  - (i)  $V(0) = 0$ ,
  - (ii)  $V(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ ,
2.  $V$  est dite définie négative si  $-V$  est définie positive .
3.  $V$  est dit semi-définie positive si :
  - (i)  $V(0) = 0$ ,
  - (ii)  $V(x) \geq 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

4.  $V$  est dit semi-définie négative si  $-V$  est semi-définie positive.

**Définition 1.5.2.** (Fonction de Liapunov)([31])

Une fonction  $V : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite fonction de Liapunov si :

- $V$  est définie positive .
- $\dot{V}(t, x) < 0$  pour tout  $x \in U \setminus \{0\}$ .

**Théorème 1.5.1.** (Stabilité de Liapunov)([32])

Soit  $x^* = 0$  un point d'équilibre de (1.3) et  $V$  une fonction définie positive sur un voisinage de  $x^*$ .

1. Si  $\dot{V} \leq 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$ , alors  $x^*$  est stable.
2. Si  $\dot{V} < 0, \forall x \in U \setminus \{0\}$ , alors  $x^*$  est asymptotiquement stable.

**Lemme 1.5.1.** ([17]) La solution  $T$ -périodique  $(\alpha(t), \beta(t))$  du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), & \frac{dy}{dt} = Q(x, y), & \text{si } \phi(x, y) \neq 0, \\ \Delta x = \xi(x, y), & \Delta y = \eta(x, y), & \text{si } \phi(x, y) = 0, \end{cases}$$

est orbitalement asymptotiquement stable si le multiplicateur  $\mu_2$  satisfait la condition  $|\mu_2| < 1$ , où

$$\mu_2 = \prod_{j=1}^n k_j \exp\left[\int_0^T \left(\frac{\partial P(\alpha(t), \beta(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\alpha(t), \beta(t))}{\partial y}\right) dt\right],$$

et

$$k_j = \frac{P_+ \left(\frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + Q_+ \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)}{P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y}}.$$

**Définition 1.5.3.** ([27])

On appelle trajectoire partant de  $x_0$  l'ensemble

$$\tau_{x_0} = \{x(t) / t \in [0, b]\},$$

ou  $(x(t))$  est la solution correspondant à la condition initiale  $x(0) = x_0$  pour tout  $t \in [0, b]$ .

**Corollaire 1.5.1.** ([27])

Deux trajectoires distinctes sont disjointes.

**Définition 1.5.4.** (*Ensemble positivement invariant*)([29])

Un ensemble  $D$  est positivement invariant par rapport au système (1.2) si pour toute condition initiale  $x_0 \in D$  la trajectoire issue de  $x_0$  est contenue dans  $D$  pour tout  $t \geq 0$ , i.e.  $\forall x_0 \in D$  on a  $x(t, x_0) \in D, \forall t \geq 0$ .

## 1.6 Fonction de Lambert

**Définition 1.6.1** ([17]). La fonction Lambert  $W$  est définie comme une valeur inverse multiple de la fonction  $f : Z \mapsto ze^z$  satisfaisant

$$W(z) \exp(W(z)) = z$$

La fonction Lambert  $W(z)$  a deux branches pour  $z \geq -1/e$  où on définit la fonction inverse de  $W(z)$  limitée à l'intervalle  $[-1, \infty[$  à  $W_0$  et la fonction inverse de  $W(z)$  limitée à l'intervalle  $]\infty, -1]$  à  $W_{-1}(z)$ .

Il est clair que la branche  $W_0(z)$  satisfait  $-1 < W_0(z) < 0$  pour  $z \in (-\exp(-1), 0)$  et ses dérivés satisfait

$$W_0'(z) = \frac{W_0(z)}{z(1 + W_0(z))}. \quad (1.5)$$

Cela suit du théorème d'inversion de Lagrange, qui donne l'expansion de la série ci-dessous pour  $W_0(z)$

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n.$$

## 1.7 Un modèle d'une équation différentielle impulsive

Soit le système différentiel impulsif suivant :

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq \theta_i, & t > t_0 & i = 1, 2, \dots \\ \Delta x = I_i(x), & t = \theta_i, \\ x(t_0^+) = x_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $f(t, x)$  est une fonction réelle définie sur  $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ ,  $D$  est un domaine dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{I_i(x)\}$  est une suite de nombres réels pour  $x \in \Omega$ , et  $\{\theta_i\}$  est une suite de nombres réels qui satisfait  $\theta_i < \theta_{i+1}$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \infty$ . La solution de (1.6) est une fonction continue par morceau qui a des discontinuités du premier type aux instants  $\theta_i$  satisfaisant la condition,

$$\Delta x = x(\theta_i^+) - x(\theta_i^-) = I_i(x(\theta_i^-)), \quad (1.7)$$

avec  $x(\theta_i^+) = \lim_{t \rightarrow \theta_i^+} x(t)$  et  $x(\theta_i^-) = \lim_{t \rightarrow \theta_i^-} x(t)$ , on suppose également que  $f(t, x) \in C(D)$  et  $I_i(x) \in C(\Omega)$ .

**Définition 1.7.1** ([15]). Une fonction réelle  $x(t)$  est appelée une solution de (1.6) sur  $[t_0, t_0 + T)$ ,  $T > 0$ , si

- (i)  $x(t_0^+) = x_0$  et  $(t, x(t)) \in D$  pour  $t \in [t_0, t_0 + T)$ ,
- (ii)  $x(t)$  est continûment différentiable et satisfait  $x'(t) = f(t, x(t))$  sur chaque sous-intervalle de  $[t_0, t_0 + T)$  ne contenant pas  $\theta_i$ ,
- (iii)  $x(\theta_i^+) = x(\theta_i^-) + I_i(x(\theta_i^-))$  pour  $\theta_i \in [t_0, t_0 + T)$ , avec  $x(\theta_i^-) = x(\theta_i)$ .

On note que le problème aux valeurs initiales (1.6) est équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + \sum_{t_0 \leq \theta_i < t} I_i(x(\theta_i)). \quad (1.8)$$

## Chapitre 2

### Modèle Proie Prédateur

Dans ce chapitre on considère un cas d'une population d'insectes indésirables (notée  $x$  dans le modèle) pour réduire voir éliminer ces insectes on met une population d'insectes (notée  $y$  dans le modèle) prédateur de  $x$ . L'évolution des deux populations est gouvernée par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)[a - by(t)], \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)\left[\frac{\lambda bx(t)}{1 + bhx(t)} - d\right], \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $a, b, h > 0$  et  $\lambda > dh$ .

$x(t)$  : variation de la proie au temps  $t$ ,

$y(t)$  : variation de la prédateur au temps  $t$ ,

$a$  : taux de reproduction des proies,

$b$  : taux de mortalité des proies,

$d$  : taux de mortalité des prédateurs,

$\lambda$  : le temps de chercher des proie,

$h$  : le temps de capturer les proies.



## 2.1 Existence des solutions

### 2.1.1 Existence locale

On note  $u = (x, y)$ , le système (2.1) devient

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t)), \\ u(0) = (x_0, y_0). \end{cases} \quad \text{Avec } f(x, y) = (x(a - by), y(\frac{\lambda bx(t)}{1 + bhx(t)} - d)).$$

On a  $f \in C^1$ , alors  $f$  est localement lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution maximale locale.

### 2.1.2 Positivité des solutions

A partir du système (2.1) on a :

$$x(t) = x_0 \exp \int_0^t (a - by(s)) ds,$$

et

$$y(t) = y_0 \exp \int_0^t (-d + \frac{\lambda bx(s)}{1 + bhx(s)}) ds,$$

$(0, 0)$  est la solution triviale de (2.1).

1. Si  $x_0 > 0$  alors  $\forall t > 0 \quad x(t) > 0$ .
2. Si  $x_0 = 0$  alors (2.1) admet une solution semi-triviale  $(0, y_0 \exp(-dt))$ .
3. Si  $y_0 > 0$  alors  $\forall t > 0 \quad y(t) > 0$ .
4. Si  $y_0 = 0$  alors (2.1) admet une solution semi-triviale  $(x_0 \exp(at), 0)$ .

### 2.1.3 Existence Globale

Pour l'existence globale, nous utilisons la proposition suivante :

**Proposition 2.1.1.** Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour  $x, y > 0$  par :

$$H(x, y) = \frac{\lambda}{h} \ln(1 + bhx) - d \ln x + by - a \ln y. \quad (2.2)$$

Alors  $H$  est une intégrale première pour le système (2.1), i.e. si  $(x(t), y(t))$  est solution de (2.1), alors

$$\forall t > 0, H(x(t), y(t)) = cste.$$

**Preuve 2.1.1.** On divise les deux équations du système (2.1)

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x(a - by)}{y(-d + \frac{\lambda bx}{1 + bhx})},$$

par séparation des variables

$$\frac{x'(-d + \frac{\lambda bx}{1 + bhx})}{x} = \frac{y'(a - by)}{y},$$

alors

$$-d \frac{x'}{x} + \frac{x' \lambda bx}{1 + bhx} \frac{1}{x} = a \frac{y'}{y} - by'. \quad (2.3)$$

Une primitive pour l'équation (2.3) est donnée par la relation suivante :

$$-d \ln(x) + \frac{\lambda}{h} \ln(1 + bhx) - a \ln(y) + by = cste,$$

ainsi l'équation du courbe intégrale est donnée par :

$$H(x(t), y(t)) = -d \ln(x) + \frac{\lambda}{h} \ln(1 + bhx) - a \ln(y) + by = cste.$$

□

### 2.1.4 Bornitude des solutions

En utilisant l'équation (2.2), nous avons

**Lemme 2.1.1.** *La solution  $(x(t), y(t))$  est bornée.*

**Preuve 2.1.2.** Soit  $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{h} - d) \ln(1 + bhx)$  et  $\tilde{g}(y) = g(y) - \frac{b}{2}y$ .  
où  $f(x) = \frac{\lambda}{h} \ln(1 + bhx) - d \ln x$  et  $g(x) = by - a \ln y$ .

On a

$$\tilde{f}'(x) = -\frac{d}{x} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{\lambda}{h} + d)hb}{1 + bhx} = \frac{(\frac{\lambda}{h} - d)bhx - 2d}{2x(1 + bhx)}.$$

$x$	0	$\frac{2dh}{(\lambda-dh)hb}$	$\frac{2dh}{(\lambda-dh)hb}$	$+\infty$
$\tilde{f}'(x)$		-	+	
$\tilde{f}(x)$	$+\infty$	$\searrow \tilde{f}(\frac{2dh}{(\lambda-dh)hb})$	$\tilde{f}(\frac{2dh}{(\lambda-dh)hb}) \nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation de la fonction  $\tilde{f}$ , il existe  $A > 0$  tel que  $\forall x > A, \tilde{f} > 0$  i.e.

$$\forall x > A, f(x) > \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{h} - d) \ln(1 + bhx).$$

De même,  $\tilde{g}'(y) = \frac{b}{y} - \frac{a}{y} = \frac{by-2a}{2y}$ .

$y$	0	$\frac{2a}{b}$	$\frac{2a}{b}$	$+\infty$
$\tilde{g}'(y)$		-	+	
$\tilde{g}(y)$	$+\infty$	$\searrow \tilde{g}(\frac{2a}{b})$	$\tilde{g}(\frac{2a}{b}) \nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation de la fonction  $\tilde{g}$ , il existe  $B > 0$  tel que  $\forall y > B, \tilde{g}(x) > 0$  i.e.

$$\forall y > B, g(y) > \frac{b}{2}y.$$

Ainsi, si  $(x, y)$  est en dehors du compact  $[0, A] \times [0, B]$

$$H(x, y) = f(x) + g(y) > \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{h} - d) \ln(1 + bhx) + \frac{b}{2}y.$$

On déduit que

$$0 < x(t) < \max\left\{A, \frac{\exp\left(\frac{2hH(x_0, y_0)}{\lambda - dh}\right) - 1}{bh}\right\} \quad \text{et} \quad 0 < y(t) < \max\left\{B, \frac{2}{b}H(x_0, y_0)\right\}.$$

D'où le résultat.  $\square$

La solution du système (2.1) est maximale et borné, d'où elle est globale est unique.

## 2.2 Points d'équilibres

Les points d'équilibres sont obtenus en résolvant le système suivant :

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y\left(\frac{\lambda bx}{1 + bhx} - d\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{où } y = \frac{a}{b} \\ y = 0 & \text{où } x = \frac{d}{\lambda b - dbh}. \end{cases}$$

Alors le système (2.1) admet deux points d'équilibres, un équilibre trivial  $O(0, 0)$  et autre point d'équilibre  $\omega\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right)$ .

### 2.2.1 Stabilité des points d'équilibres

**Théorème 2.2.1.**

1. Le point d'équilibre trivial  $O(0, 0)$  est instable.
2. Le point d'équilibre non trivial  $\omega\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right)$  est stable.

**Démonstration.**

$$1. \text{ On a } \begin{cases} x'(t) = x(a - by) = f_1(x, y), \\ y'(t) = y\left(\frac{\lambda bx}{1 + bhx} - d\right) = f_2(x, y). \end{cases}$$

La matrice jacobienne au voisinage de  $(x, y)$  est :

$$Jac(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ \frac{\lambda - by}{(1 + bhx)^2} & -d + \frac{\lambda bx}{1 + bhx} \end{pmatrix}$$

Alors la matrice jacobienne au voisinage de  $(0, 0)$  est :

$$Jac(f)(0,0) = A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (a - \lambda)(-d - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a > 0 \text{ et } \lambda_2 = -d < 0.$$

L'une des valeurs propres est strictement positive, alors d'après le critère de Routh-Hurwitz (1.4.1) le point d'équilibre  $O(0,0)$  est instable.

2. La matrice jacobienne au voisinage de  $\omega(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b})$  est :

$$Jac(f)(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}) = B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-d}{\lambda - dh} \\ \frac{a(\lambda b - dbh)^2}{\lambda b^2} & -d + \frac{\lambda b d}{\lambda b} \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{abd(\lambda b - dbh)^2}{\lambda b^2(\lambda b - dbh)} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{ad(\lambda b - dbh)}{\lambda b} \Rightarrow \lambda_1 = -i\sqrt{\frac{ad(\lambda b - dbh)}{\lambda b}} \text{ et } \lambda_2 = i\sqrt{\frac{ad(\lambda b - dbh)}{\lambda b}}.$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont purement imaginaires . Dans ce cas, on peut rien dire sur la stabilité de  $\omega$ .

Pour étudier la stabilité du point non trivial  $\omega$  on cherche une fonction de Liapunov.

Soit  $V$  définie par :

$$V(x, y) = H(x, y) - H(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}).$$

(a)  $V(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}) = 0.$

(b)  $V(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}).$

(c)

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\
&= \left( \frac{\lambda}{h} \frac{bh}{1+bhx} - \frac{d}{x} \right) (ax - bxy) + \left( b - \frac{a}{y} \right) \left( y \frac{\lambda bx}{1+bhx} - dy \right) \\
&= \frac{\lambda ax}{h} \frac{bh}{1+bhx} - \frac{bxy\lambda}{h} \frac{bh}{1+bhx} - \frac{dxa}{x} + \frac{dbxy}{x} + by \frac{\lambda bx}{1+bhx} - bdy - \frac{ay\lambda bx}{y(1+bhx)} + \frac{ady}{y} \\
&= \frac{\lambda axb}{1+bhx} - \frac{b^2xy\lambda}{1+bhx} - da + dby + \frac{b^2y\lambda x}{1+bhx} - dby - \frac{a\lambda bx}{1+bhx} + ad = 0.
\end{aligned}$$

Puisque les conditions de la stabilité au sens de Liapunov sont vérifiées, alors le point l'équilibre  $\omega\left(\frac{d}{\lambda b - dbh}, \frac{a}{b}\right)$  est stable.  $\square$

## 2.3 Périodicité des solutions

**Théorème 2.3.1.** *Les solutions du système (2.1) sont périodiques.*

**Preuve 2.3.1.** *La figure (2.1) montre quatre zones, notées I, II, III et IV, dans lesquelles  $x$  et  $y$  sont monotones. Notre technique de démonstration consiste à suivre une trajectoire au travers de ces zones pour montrer qu'elle est périodique.*

*Soit donc  $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$  le point initial, qu'on suppose sans perte de généralité sur l'axe  $y = y^*$  tel que  $x_0 > x^*$ . Soit  $(x(t), y(t))$  la solution de (2.1) qui démarre de point initial  $(x_0, y_0)$ .*

**Étape 1. La solution parcourt les quatre zones successivement.**

- Il existe  $t_1 > 0$  à partir du quel  $M(t) = (x(t), y(t))$  rentre dans IV.

*En effet, si  $M(t)$  reste dans III ( $\forall t$ ), alors puisque  $x$  et  $y$  sont monotones et bornées (voir [2.1.1]), ils convergent tous les deux vers des limites respectives  $x_\infty, y_\infty$ . D'après (2.1), on en déduit que  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  convergent vers 0, car, si  $\dot{x}$  (resp.  $\dot{y}$ ) tend vers  $l_1 \neq 0$  (resp.  $l_2 \neq 0$ ), alors  $x$  (resp.  $y$ ) est équivalent à  $l_1 t$*

(resp.  $l_2t$ ), donc  $x$  (resp.  $y$ ) ne converge pas. En conséquence, toujours grâce à (2.1),  $(x_\infty, y_\infty)$  est un point stationnaire. Et, puisque  $y$  croît,  $y_\infty > \frac{a}{b}$ . On aboutit donc à une contradiction, puisque les seuls deux points stationnaires sont  $(0, 0)$  et  $(\frac{d}{b(\lambda-dh)}, \frac{a}{b})$ .

Ainsi,  $M(t)$  sort de la zone III et rentre dans la zone IV.

- Il existe  $t_2 > t_1$  à partir du quel  $M(t)$  rentre dans I. En effet, si  $M(t)$  reste dans IV ( $\forall t$ ), alors puisque  $x$  et  $y$  sont monotones et bornées (voir [2.1.1]), alors ils convergent vers  $x_\infty, y_\infty$ . De plus, par le même raisonnement  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  convergent vers 0. En conséquence,  $(x_\infty, y_\infty)$  est un point stationnaire. Et, puisque  $x, y$  décroît, alors  $x_\infty < \frac{d}{b(\lambda-dh)}$  et  $y_\infty > \frac{a}{b}$ . On aboutit donc à une contradiction, puisque les seuls deux points stationnaires sont  $(0, 0)$  et  $(\frac{d}{b(\lambda-dh)}, \frac{a}{b})$ .

Ainsi,  $M(t)$  sort de la zone IV et rentre dans la zone I.

- Il existe  $t_3 > t_2$  à partir du quel  $M(t)$  rentre dans II. En effet, si  $M(t)$  reste dans I ( $\forall t$ ), alors puisque  $x$  et  $y$  sont monotones et bornées (voir [2.1.1]), alors ils convergent vers  $x_\infty, y_\infty$ . De plus, par le même raisonnement  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  convergent vers 0. En conséquence,  $(x_\infty, y_\infty)$  est un point stationnaire. Et, puisque  $x$  croît, alors  $x_\infty > 0$  et  $y$  décroît,  $y_\infty < \frac{a}{b}$ . On aboutit donc à une contradiction, puisque les seuls deux points stationnaires sont  $(0, 0)$  et  $(\frac{d}{b(\lambda-dh)}, \frac{a}{b})$ .

Ainsi,  $M(t)$  sort de la zone I et rentre dans la zone II.

- Il existe  $t_4 > t_3$  à partir du quel  $M(t)$  rentre dans III. En effet, si  $M(t)$  reste dans II ( $\forall t$ ), alors puisque  $x$  et  $y$  sont monotones et bornées (voir [2.1.1]), alors ils convergent vers  $x_\infty, y_\infty$ . De plus, par le même raisonnement  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  convergent vers 0. En conséquence,  $(x_\infty, y_\infty)$  est un point stationnaire. Et, puisque  $x$  croît, alors  $x_\infty > \frac{d}{b(\lambda-dh)}$  et  $y$  décroît,  $y_\infty > 0$ . On aboutit donc à une contradiction, puisque les seuls deux points stationnaires sont  $(0, 0)$  et

$$\left(\frac{d}{b(\lambda-dh)}, \frac{a}{b}\right).$$

Ainsi,  $M(t)$  sort de la zone II et rentre dans la zone III.

**Étape 2. Les points  $M(t_0)$  et  $M(t_4)$  sont confondus.**

Par définition, on a déjà  $y(t_0) = y(t_4) = \frac{a}{b}$ . De plus,  $y(t_0)$  et  $y(t_4)$  appartiennent à la même trajectoire alors

$$H(x(t_0), y(t_0)) = H(x(t_4), y(t_4)).$$

On en déduit que  $f(x(t_0)) = f(x(t_4))$  avec  $f(x) = \frac{\lambda}{h} \ln(1 + bhx) - d \ln(x)$ .

Où  $x(t_0) > x^*$ ,  $x(t_4) > x^*$  et  $f$  est injective sur  $]x^*, \infty[$ . Donc la solution est périodique, de période  $t_4 - t_0$ . □

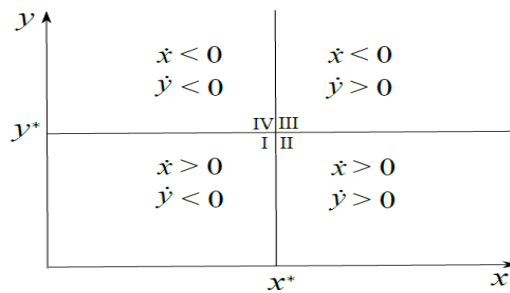


FIGURE 2.1: Champ des vitesses pour le système (2.1).

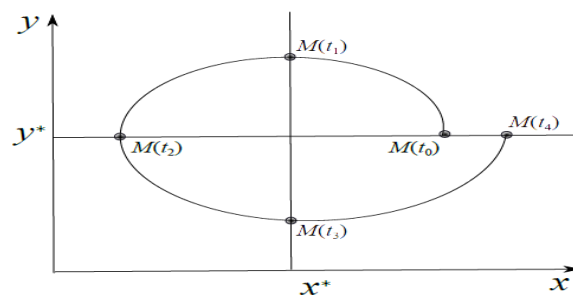


FIGURE 2.2: Trajectoire de la solution au travers de ces quatre zones.



## 2.4 Simulation numérique

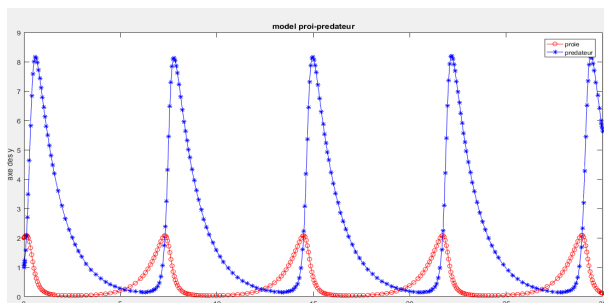


FIGURE 2.3: Comportement asymptotique des solutions du système (2.1).

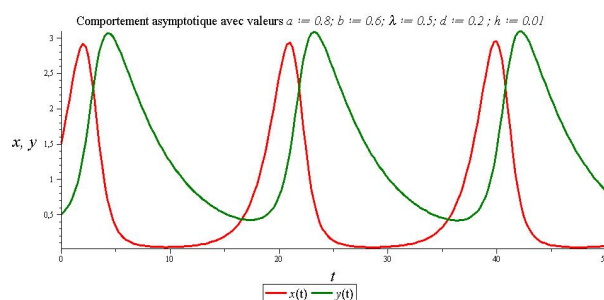


FIGURE 2.4: Comportement asymptotique des solutions du système (2.1).

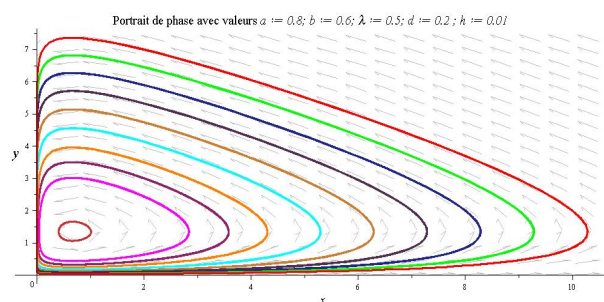


FIGURE 2.5: Portrait de phase du système (2.1) avec des conditions initiales différentes. On remarque que les solutions sont toutes positives et périodiques.

# Chapitre 3

## Modèle Proie Prédateur avec impulsions

*Dans ce chapitre, on va étudier deux modèles mathématiques avec impulsions, tel que l'étude mathématique de ces deux modèles est basée sur l'existence des solutions périodiques triviales et non triviales et leur stabilités orbitales.*

*Pour le premier modèle on considère le même modèle Proie-Prédateur que nous avons déjà étudié dans le chapitre précédent, tel que si la densité de la proie  $x$  atteint un seuil critique  $h_{max}$  on rajoute une densité constante  $\tau$  des prédateur  $y$  et on utilise un produit chimique pour réduire la densité de la proie  $x$ . Ces changements sont modélisés par des équations discrètes appelées effets d'impulsions, Le modèle est décrit par les équations différentielles impulsives suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x[a - by(t)], \\ \frac{dy}{dt} = y[\frac{\lambda bx(t)}{1 + bhx(t)} - \delta], \end{array} \right\} x \neq h_{max},$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -px, \\ \Delta y = \tau, \end{array} \right\} x = h_{max},$$
$$x(0^+) = x_0 < h_{max}, \quad y(0^+) = y_0.$$
(3.1)

Et pour le deuxième modèle, si la densité de la proie  $x$  atteint un seuil critique  $h_1$  on rajoute une densité constante  $\tau$  des prédateur  $y$ , pour réduire la densité de la proie. Si la densité des proies croit encore et atteint un seuil critique plus important  $h_2 (> h_1)$  alors on utilise un produit chimique pour réduire la densité  $x$ , mais l'effet du produit chimique va être sur les deux populations et il va réduire les deux populations  $x$  et  $y$  par  $px$  et  $qy$  resp ( $p, q \in (0, 1)$ ). Le modèle est décrit par les équations différentielles impulsives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} = x(a - by) & x(t) \neq h_1, x(t) \neq h_2 \\ \dot{y} = y(-d + \frac{\lambda bx}{1+bhx}) & x(t) \neq h_1, x(t) \neq h_2 \\ \Delta x = 0 & x(t) = h_1, \\ \Delta y = y(t^+) - y(t) = \tau & x(t) = h_1, \\ \Delta x = x(t^+) - x(t) = -px & x(t) = h_2 \\ \Delta y = y(t^+) - y(t) = -qy & x(t) = h_2. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

### 3.1 Existence et stabilité de la solution périodique pour le système (3.1)

#### 3.1.1 Existence d'une solution périodique pour le système (3.1)

**Théorème 3.1.1.** Si  $x_1 = h_{max} < \frac{\exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{\frac{-h\delta}{\lambda}} - 1}{bh[1 - \exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{1-\frac{h\delta}{\lambda}}]}$ , alors il existe une unique solution périodique pour le système (3.1).

**Preuve 3.1.1.** Soit  $x = \zeta(t), y = \eta(t)$  est une solution

$$\zeta_1 = \zeta(T) = x_1, \quad \eta_1 = \eta(T),$$

$$\zeta_1^+ = \zeta(T^+), \quad \eta_1^+ = \eta(T^+).$$

Donc

$$\zeta_1^+ = \zeta_0, \quad \eta_1^+ = \eta_0.$$

Donc  $(1-p)\xi_1 = \xi_0 \Leftrightarrow (1-p)x_1 = \xi_0$ ,  $\eta_1 + \tau = \eta_0$ .

Pour tout  $t \in ]0, T]$  la solution de système  $(\xi(t), \eta(t))$  possède la relation suivant :

$$\delta \int_0^t \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds + \int_0^t \frac{\xi'(s)\lambda b}{1+bh\xi(s)} ds = \int_0^t a \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} ds - \int_0^t b\eta'(s) ds,$$

donc

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1+bh\xi(t)}{1+bh\xi_0}\right) - \delta \ln\left(\frac{\xi(t)}{\xi_0}\right) = a \ln\left(\frac{\eta(t)}{\eta_0}\right) - b(\eta(t) - \eta_0).$$

Donc pour tout  $t = T$ , on obtient

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1+bhx_1}{1+bh\xi_0}\right) - \delta \ln\left(\frac{x_1}{\xi_0}\right) = a \ln\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) - b(\eta_1 - \eta_0),$$

donc

$$\ln\left(\frac{1+bhx_1}{1+(1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{h}} - \delta \ln\left(\frac{x_1}{(1-p)x_1}\right) = a \ln\left(\frac{\eta_0 - \tau}{\eta_0}\right) - b(\eta_0 - \tau - \eta_0),$$

$$\ln\left(\frac{1+bhx_1}{1+(1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{h}} (1-p)^\delta - b\tau = a \ln\left(\frac{\eta_0 - \tau}{\eta_0}\right),$$

on note  $Y = \frac{1+bhx_1}{1+(1-p)bhx_1}$ , alors

$$\ln\left[(Y)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\frac{\delta}{a}}\right] - \frac{b}{a}\tau = \ln\left(\frac{\eta_0 - \tau}{\eta_0}\right), \quad (3.3)$$

$$(Y)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\frac{\delta}{a}} \exp\left(\frac{-b}{a}\tau\right) = \frac{\eta_0 - \tau}{\eta_0},$$

Notons  $L = (Y)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\frac{\delta}{a}} \exp\left(\frac{-b}{a}\tau\right)$ , donc

$$L\eta_0 - \eta_0 = -\tau \Rightarrow \eta_0(1-L) = \tau \Rightarrow \eta_0 = \frac{\tau}{1-L}.$$

Donc

$$\eta_0 = \frac{\tau}{1 - \left(\frac{1+bhx_1}{1+(1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\delta/a} \exp\left(\frac{-b\tau}{a}\right)}.$$

Pour que (3.3) soit définie il faut que  $\eta_0 > \tau$ .

On note  $\alpha = \left(\frac{1+bx_1}{1+(1-p)bx_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\delta/a} \exp\left(\frac{-b\tau}{a}\right)$ , donc

$\eta_0 > \tau$  implique que  $\frac{\tau}{1-\alpha} > \tau$ , alors  $1-\alpha < 1$  ce qui donne  $\alpha > 0$ .

Pour que  $\eta_0$  soit positive il faut que  $\alpha < 1$ .

$$\alpha < 1 \Rightarrow \left(\frac{1+bx_1}{1+(1-p)bx_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\delta/a} \exp\left(\frac{-b\tau}{a}\right) < 1,$$

donc

$$\left(\frac{1+bx_1}{1+(1-p)bx_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} < (1-p)^{-\delta/a} \exp\left(\frac{b\tau}{a}\right),$$

ce qui donne

$$\left(\frac{1+bx_1}{1+(1-p)bx_1}\right) < (1-p)^{\frac{-\delta ah}{a\lambda}} \exp\left(\frac{b\tau ah}{a\lambda}\right),$$

prenons  $C = (1-p)^{\frac{-\delta ah}{a\lambda}} \exp\left(\frac{b\tau ah}{a\lambda}\right)$ , donc

$$1+bx_1 < (1+(1-p)bx_1)C,$$

alors

$$bx_1 - (1-p)bx_1C < C - 1,$$

$$x_1bh(1 - (1-p)C) < C - 1,$$

donc

$$x_1 < \frac{1}{bh} \left( \frac{C - 1}{1 - (1-p)C} \right),$$

on remplace  $C$  par sa valeur, on trouve

$$x_1 < \frac{1}{bh} \left( \frac{\exp\left(\frac{b\tau h}{\lambda}\right)(1-p)^{\frac{-\delta h}{\lambda}} - 1}{1 - \exp\left(\frac{b\tau h}{\lambda}\right)(1-p)^{1-\frac{\delta h}{\lambda}}}\right).$$

### 3.1.2 Stabilité de la solution périodique pour le système (3.1)

**Théorème 3.1.2.** Si  $x_1 = h_{max} < \frac{q \frac{ha}{\lambda} \exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{-\frac{h\delta}{\lambda}} - 1}{bh[1 - q \frac{ha}{\lambda} \exp(\frac{bh\tau}{\lambda})(1-p)^{(1-\frac{h\delta}{\lambda})}]}$  =  $ET_{max}$  la solution périodique  $(\xi(t), \eta(t))$  du système (3.1) est orbitalement asymptotiquement stable.

**Preuve 3.1.2.**  $\frac{\partial P}{\partial x} = a - by, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\lambda bx}{1+bhx} - \delta,$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -p, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,$$

$$k_1 = \frac{P_+(1)}{P(1)} = \frac{\xi_0(a-b\eta_0)}{\xi_1(a-b\eta_1)},$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dt &= \int_0^T \left[ (a - b\eta(t)) + \frac{\lambda b \xi(t)}{1 + bh \xi(t)} - \delta \right] dt \\ &= \int_0^T \left[ \frac{\xi(t)}{\xi(t)} + \frac{\eta(t)}{\eta(t)} \right] dt \\ &= \int_0^T d[\ln \xi(t) \eta(t)] dt \\ &= \ln \frac{\xi(T) \eta(T)}{\xi_0 \eta_0}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{\xi_0(a-b\eta_0)}{\xi_1(a-b\eta_1)} \frac{\xi_1 \eta_1}{\xi_0 \eta_0} \\ &= \frac{\eta_1(a-b\eta_0)}{\eta_0(a-b\eta_1)} \\ &= \frac{(\eta_0 - \tau)(a-b\eta_0)}{\eta_0(a-b(\eta_0 - \tau))}. \end{aligned}$$

On cherche des conditions pour que  $|\mu_2| < 1$ .

-Cas 1 : si  $\eta_0 \leq \frac{a}{b}$ , alors on a  $0 \leq \mu_2 < 1$ .

-Cas 2 : si  $\eta_0 > \frac{a}{b}$ , et  $a - b(\eta_0 - \tau) > 0$  (i.e.  $\eta_0 < \frac{a+b\tau}{b}$ ), alors on a  $\mu_2 < 0$ ,

et si  $\eta_0 < \frac{a+b\tau+\sqrt{a^2+b^2\tau^2}}{2b}$ , alors  $\mu_2 > -1$ .

$$\mu_2 > -1 \Rightarrow \frac{(\eta_0 - \tau)(a - b\eta_0)}{\eta_0(a - b(\eta_0 - \tau))} > -1,$$

donc

$$\begin{aligned} a\eta_0 - b\eta_0^2 - a\tau + b\tau\eta_0 + a\eta_0 - b\eta_0^2 + b\tau\eta_0 &> 0, \\ -2b\eta_0^2 + 2(a + b\tau)\eta_0 - a\tau &> 0. \end{aligned}$$

$\Delta' = (a + b\tau)^2 - 2ba\tau$ . Si  $\Delta' > 0$  alors on a deux racines

$$\eta_0' = \frac{-a-b\tau-\sqrt{a^2+b^2\tau^2}}{-2b} < \frac{a+b\tau}{b}, \quad \eta_0'' = \frac{-a-b\tau+\sqrt{a^2+b^2\tau^2}}{-2b} < \frac{a}{b}.$$

Donc si  $\frac{a}{b} < \eta_0 < \frac{a+b\tau+\sqrt{a^2+b^2\tau^2}}{2b}$ , alors  $-1 < \mu_2 < 0$ .

Cas 3 : Si  $a - b(\eta_0 - \tau) \leq 0$ , alors  $\mu_2 > 1$ .

On a  $\mu_2 = \left(\frac{a-b\eta_0}{\eta_0}\right) / \left(\frac{a-b(\eta_0-\tau)}{\eta_0-\tau}\right)$ , posons  $f(z) = \frac{a-bz}{z}$  avec  $z > 0$ ,  $f'(z) = -\frac{a}{z^2} < 0$ , alors  $f(\eta_0) < f(\eta_0 - \tau)$  ce qui nous donne

$$\frac{a - b\eta_0}{\eta_0} < \frac{\eta_0 - \tau}{a - b(\eta_0 - \tau)} < 0.$$

D'où

$$\left(\frac{a - b\eta_0}{\eta_0}\right) / \left(\frac{a - b(\eta_0 - \tau)}{\eta_0 - \tau}\right) > 1.$$

Donc si  $a - b(\eta_0 - \tau) \leq 0$ , alors  $\mu_2 > 1$ .

De cas(1) et cas(2), on conclut que

$$0 < \eta_0 < \frac{b\tau + a + \sqrt{a^2 + b^2\tau^2}}{2b}.$$

Et on a

$$\eta_0 = \frac{\tau}{1 - \left(\frac{1+bhx_1}{1+(1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\frac{\delta}{a}} \exp\left(\frac{-b\tau}{a}\right)} < \frac{b\tau + a + \sqrt{a^2 + b^2\tau^2}}{2b},$$

donc

$$1 - \left( \frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\frac{\delta}{a}} \exp\left(\frac{-b\tau}{a}\right) > \frac{2b\tau}{b\tau + a + \sqrt{a^2 + b^2\tau^2}},$$

$$\left( 1 - \frac{2b\tau}{b\tau + a + \sqrt{a^2 + b^2\tau^2}} \right) > \left( \frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\frac{\delta}{a}} \exp\left(\frac{-b\tau}{a}\right),$$

on prend  $q = \left( 1 - \frac{2b\tau}{b\tau + a + \sqrt{a^2 + b^2\tau^2}} \right)$ ,

$$\left( \frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1} \right)^{\frac{\lambda}{ah}} (1-p)^{\frac{\delta}{a}} \exp\left(\frac{-b\tau}{a}\right) < q,$$

$$\left( \frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1} \right) < q^{\frac{ah}{\lambda}} (1-p)^{\frac{-\delta h}{\lambda}} \exp\left(\frac{b\tau h}{\lambda}\right),$$

on prend  $S = q^{\frac{ah}{\lambda}} (1-p)^{\frac{-\delta h}{\lambda}} \exp\left(\frac{b\tau h}{\lambda}\right)$ .

$$1 + bhx_1 < S + S(1-p)bhx_1,$$

$$bhx_1(1 - S(1-p)) < S - 1,$$

$$x_1 < \frac{1}{bh} \left( \frac{S - 1}{1 - S(1-p)} \right),$$

donc

$$x_1 < \frac{1}{bh} \left( \frac{q^{\frac{ah}{\lambda}} (1-p)^{\frac{-\delta h}{\lambda}} \exp\left(\frac{b\tau h}{\lambda}\right) - 1}{1 - (1-p)q^{\frac{ah}{\lambda}} (1-p)^{\frac{-\delta h}{\lambda}} \exp\left(\frac{b\tau h}{\lambda}\right)} \right).$$

Cela complète la preuve de ce théorème. □



## 3.2 Existence et stabilité de la solution périodique pour le système (3.2)

### 3.2.1 Existence et stabilité de la solution périodique pour $\tau = 0$

Pour  $\tau = 0$ , le modèle (3.2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)[a - by(t)] \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)\left[\frac{\lambda bx(t)}{1 + bhx(t)} - d\right] \end{array} \right\} x \neq h_2, \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x(t) = -px(t) \\ \Delta y(t) = -qy(t) \end{array} \right\} x = h_2.$$

#### Existence de la solution périodique semi-triviale

Soit  $y(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , alors du système (3.4) nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax(t), \quad x \neq h_2, \\ \Delta x = x(t^+) - x(t) = -px, \quad x = h_2, \end{array} \right.$$

avec  $x_0 = x(0) = (1 - p)h_2$ , donc la solution de  $\dot{x}(t) = ax(t)$  est donné par :

$$x(t) = (1 - p)h_2 \exp(at).$$

On a  $x(T) = h_2$ , alors  $x(T) = (1 - p)h_2 \exp(aT) = h_2$ , ce qui implique que  $\exp(aT) = \frac{1}{1-p}$ , donc  $aT = -\ln(1 - p)$ , ce qui donne  $T = -a^{-1} \ln(1 - p)$ .

On a  $x(T^+) - x(T) = -px(T)$  ce qui implique que  $x(T^+) = (1 - p)x(T)$ , et donc  $x(T^+) = (1 - p)h_2 = x_0$ .

Cela signifie que le système admet une solution périodique semi-triviale  $(x(t), y(t)) = ((1 - p)h_2 \exp(at), 0)$ .

### Stabilité de la solution périodique semi-trivial

**Théorème 3.2.1.** *Si*

$$0 < \mu = (1 - q)(1 - p)^{\frac{d}{a}} \left( \frac{1 + bh_2}{1 + (1 - p)bh_2} \right)^{\lambda/ah} < 1,$$

*alors la solution semi-trivial est asymptotiquement orbitalement stable.*

**Preuve 3.2.1.** *Pour montrer la stabilité orbitale on va appliqué le lemme (1.5.1) sur le système (3.4) :*

*Calculons maintenant le multiplicateur de Floquet.*

*On a une seul impulsion donc  $j = 1$*

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{P_+(-q(1)-0(0)+1)+Q_+(-p(0)-(0)(1)+0)}{1 \times P+0 \times Q} \\ &= \frac{P(\alpha(T^+),0)(-q+1)+Q(\alpha(T^+),0)(0)}{P(\alpha(T),0)} \quad \text{avec} \quad \alpha(T^+) = (1 - p)h_2 \\ &= \frac{a(1-p)h_2(1-q)}{(1-p)h_2 \exp(aT)a} \\ &= \frac{(1-p)(1-q)ah_2}{(1-p)h_2 \exp(a(-a^{-1} \ln(1-p)))a} \\ &= \frac{(1-p)(1-q)ah_2}{ah_2} = (1 - p)(1 - q). \end{aligned}$$

*Et*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \left( \frac{\partial P(\alpha(t),\beta(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\alpha(t),\beta(t))}{\partial y} \right) dt \\ &= \int_0^T \frac{\partial P}{\partial x}((1 - p)h_2 \exp(at), 0) + \frac{\partial Q}{\partial y}((1 - p)h_2 \exp(at), 0) dt \end{aligned}$$

*alors*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^T a - d + \frac{\lambda bh(1-p)h_2 \exp(at)}{1+bh(1-p)h_2 \exp(at)} dt \\
&= aT - dT + \frac{\lambda}{ah} \int_0^T \frac{abh(1-p)h_2 \exp(at)}{1+bh(1-p)h_2 \exp(at)} dt \\
&= aT - dT + \frac{\lambda}{ah} [\ln(1 + bh(1-p)h_2 \exp(at))]_0^T \\
&= aT - dT + \frac{\lambda}{ah} \ln(1 + bh(1-p)h_2 \exp(aT)) - \frac{\lambda}{ah} \ln(1 + bh(1-p)h_2) \\
&= -a(a^{-1} \ln(1-p)) + d(a^{-1} \ln(1-p)) + \ln\left(\frac{1+bhh_2}{1+bh(1-p)h_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} \\
&= \ln \frac{1}{1-p} + \frac{d}{a} \ln(1-p) + \ln\left(\frac{1+bhh_2}{1+bh(1-p)h_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}}.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mu &= k_1 \left( \exp\left(\ln \frac{1}{1-p} + \frac{d}{a} \ln(1-p) + \ln\left(\frac{1+bhh_2}{1+bh(1-p)h_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}}\right) \right) \\
&= k_1 \left( (1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1+bhh_2}{1+bh(1-p)h_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} \times \frac{1}{1-p} \right) \\
&= k_1 \left( \frac{(1-p)^{\frac{d}{a}} (1+bhh_2)^{\frac{\lambda}{ah}}}{(1-p)(1+bh(1-p)h_2)^{\frac{\lambda}{ah}}} \right) \\
&= k_1 \left( (1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1+bhh_2}{1+bh(1-p)h_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}} \times \frac{1}{1-p} \right) \\
&= k_1 \left( \frac{(1-p)^{\frac{d}{a}} (1+bhh_2)^{\frac{\lambda}{ah}}}{(1-p)(1+bh(1-p)h_2)^{\frac{\lambda}{ah}}} \right) \\
&= (1-q)(1-p)^{\frac{d}{a}} \left(\frac{1+bhh_2}{1+bh(1-p)h_2}\right)^{\frac{\lambda}{ah}}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Existence des solutions périodiques si  $h_2 < x^*$**

Soit les deux sections suivantes :

$$\Sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x = (1 - p)h_2, y \geq 0\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x = h_2, y \geq 0\}.$$

**Théorème 3.2.2.** Soit  $p, q \in ]0, 1[$ , si  $h_2 < x^*$  alors le système (3.4) n'admet pas de solution périodique d'ordre-1.

**Preuve 3.2.2.** Soit  $R_0(h_2, \eta_0)$  un point dans  $\Sigma_2$  avec  $\eta_0 < \frac{a}{b}$  et par les impulsions

$$\Delta x = -px, \quad \Delta y = -qy.$$

Automatiquement on se trouve dans  $\Sigma_1$  au point  $f_0((1 - p)h_2, (1 - q)\eta_0)$  ensuite la trajectoire continue son évolution et coupe  $\Sigma_2$  au point  $R_1(h_2, \eta_1)$  et par les impulsions la trajectoire saute dans  $\Sigma_1$  au point  $f_1((1 - p)h_2, (1 - q)\eta_1)$  puis la trajectoire fait la même chose dans le troisième retour et le quatrième jusqu'à le  $k$ ème retour la trajectoire saute de point  $R_1(h_2, \eta_k)$  au point  $f_k((1 - p)h_2, (1 - q)\eta_k)$ , donc puisqu'on  $h_2 < x^*$  alors on déduit que  $\eta_k \leq \eta_{k-1} \leq \dots \leq \eta_0 < \frac{a}{b}$  et

$$\eta_k \leq (1 - q)\eta_{k-1} \leq (1 - q)^2\eta_{k-2} \leq \dots \leq (1 - q)^k\eta_0 \leq (1 - q)^k\frac{a}{b}.$$

Cela donne que  $\eta_k \rightarrow 0$  pour  $k \rightarrow +\infty$ , donc le système n'admet pas une solution périodique d'ordre-1 si  $h_2 < x^*$ . □

**Existence d'une solution périodique non trivial d'ordre-1 pour  $h_2 > x^*$**

**Théorème 3.2.3.** Soit  $p, q \in ]0, 1[$ , si  $x_1 = h_2 < \frac{(1-p)^{-\frac{a}{\lambda}}(1-q)^{-\frac{a}{\lambda}} - 1}{bh[1-(1-p)^{-\frac{a}{\lambda}}(1-q)^{-\frac{a}{\lambda}}(1-p)]}$ , alors le système (3.4) admet une unique solution périodique non trivial d'ordre-1.

**Preuve 3.2.3.** *On a*

$$x(t^+) = (1 - p)x, \quad y(t^+) = (1 - q)y.$$

$$\xi_0 = \xi(0^+), \eta_0 = \eta(0^+), \xi_1 = \xi(T) = x_1, \eta_1 = \eta(T), \xi_1^+ = \xi(T^+) = (1 - p)x_1 = \xi_0, \eta_1^+ = (1 - q)\eta_1 = \eta_0.$$

Soit  $(x(t), y(t)) = (\xi(t), \eta(t))$  une solution de système.

La solution est périodique si

$$(1 - p)\xi(T) = \xi_0, \quad \text{et} \quad (1 - q)\eta(T) = \eta_0,$$

pour  $t \in ]0, T]$  la solution  $(\xi(t), \eta(t))$  de système possède la relation suivante :

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bh\xi(t)}{1 + bh\xi_0}\right) - d \ln\left(\frac{\xi(t)}{\xi_0}\right) = a \ln\left(\frac{\eta(t)}{\eta_0}\right) - b(\eta(t) - \eta_0),$$

pour  $t = T$  on a

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bh\xi(T)}{1 + bh\xi_0}\right) - d \ln\left(\frac{\xi(T)}{\xi_0}\right) = a \ln\left(\frac{\eta(T)}{\eta_0}\right) - b(\eta(T) - \eta_0),$$

donc

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bhx_1}{1 + (1 - p)bhx_1}\right) - d \ln\left(\frac{x_1}{(1 - p)x_1}\right) = a \ln\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) - b(\eta_1 - \eta_0),$$

alors

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bhx_1}{1 + bh(1 - p)x_1}\right) - d \ln\left(\frac{1}{1 - p}\right) = a \ln\left(\frac{\eta_0}{\eta_0}\right) - b\left(\frac{\eta_0}{1 - q} - \eta_0\right),$$

ce qui donne

$$\frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bhx_1}{1 + (1 - p)bhx_1}\right) + d \ln(1 - p) + a \ln(1 - q) = -b\left(\frac{\eta_0 - \eta_0(1 - q)}{1 - q}\right),$$

alors

$$\ln\left[\left(\frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{h}}(1-p)^d(1-q)^a\right] = -b\left(\frac{\eta_0 q}{1-q}\right),$$

on a

$$\left(\frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1}\right)^{\frac{\lambda}{h}}(1-p)^d(1-q)^a < 1,$$

alors

$$\frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1}(1-p)^{\frac{dh}{\lambda}}(1-q)^{\frac{ah}{\lambda}} < 1,$$

ce qui donne

$$\frac{1 + bhx_1}{1 + (1-p)bhx_1} < (1-p)^{\frac{-dh}{\lambda}}(1-q)^{\frac{-ah}{\lambda}},$$

On prend  $S = (1-p)^{\frac{-dh}{\lambda}}(1-q)^{\frac{-ah}{\lambda}}$ ,

$$1 + bhx_1 < S(1 + (1-p)bhx_1),$$

donc

$$bhx_1 - Sbh(1-p)x_1 < S - 1,$$

$$x_1(bh - Sbh(1-p)) < S - 1,$$

$$x_1 < \frac{S - 1}{bh - Sbh(1-p)},$$

on obtient que

$$x_1 = h_2 < \frac{(1-p)^{\frac{-dh}{\lambda}}(1-q)^{\frac{-ah}{\lambda}} - 1}{bh[1 - (1-p)^{\frac{-dh}{\lambda}}(1-q)^{\frac{-ah}{\lambda}}(1-p)]}.$$

□

### Stabilité de la solution périodique non triviale d'ordre-1

**Théorème 3.2.4.** Soit  $p, q \in ]0, 1[$ , si  $x_1 = h_2 < \frac{(1-p)^{\frac{-dh}{\lambda}}(1-q)^{\frac{-ah}{\lambda}} - 1}{bh[1-(1-p)^{\frac{-dh}{\lambda}}(1-q)^{\frac{-ah}{\lambda}}(1-p)]}$ , et  $\eta_0 > \frac{a}{b}(1 - \frac{q}{2-q})$ , alors la solution périodique  $(\phi(t), \Psi(t))$ , est orbitalement asymptotiquement stable.

**Preuve 3.2.4.**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) & \varphi(x, y) = x - h_2 \neq 0, \\ \frac{dy}{dt} = y(-d + \frac{\lambda bx}{1 + bhx}) & \varphi(x, y) = x - h_2 \neq 0, \\ \Delta x = -px = \xi(x, y) & \varphi(x, y) = x - h_2 = 0, \\ \Delta y = -qy = \eta(x, y) & \varphi(x, y) = x - h_2 = 0. \end{cases}$$

$$(\phi(T), \Psi(T)) = (\xi_1, \eta_1),$$

$$(\phi(T^+), \Psi(T^+)) = ((1-p)h_2, (1-q)\eta_1).$$

On a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = a - by \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\lambda bx}{1 + bhx} - d, \quad (3.5)$$

et

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -p, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (3.6)$$

On utilise le lemme (1.5.1)

Calculons le multiplicateur de Floquet

$$\mu_2 = \prod_{j=1}^n k_j \exp\left[\int_0^T \left(\frac{\partial P(\phi(t), \Psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\phi(t), \Psi(t))}{\partial y}\right) dt\right],$$

avec  $(\phi(t), \Psi(t))$  est la solution périodique.

$$k_j = \frac{P_+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + Q_+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{P \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

On a une seule impulsion donc  $j = 1$ ,

$$k_1 = \frac{(-q(1)-0(0)+1)P_++Q_+(-p(0)+0(1)+0)}{P(1)+Q(0)}$$

$$k_1 = \frac{(1-q)P(\phi(T^+), \Psi(T^+))}{P(\phi(T), \Psi(T))}$$

$$k_1 = \frac{(1-q)(1-p)h_2(a-b(1-q)\eta_1)}{h_2(a-b\eta_1)}$$

$$k_1 = \frac{(1-q)(1-p)(a-b(1-q)\eta_1)}{(a-b\eta_1)}.$$

$$\mu_2 = k_1 \exp \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x}(\phi(t), \Psi(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\phi(t), \Psi(t)) \right) dt$$

$$\mu_2 = k_1 \exp \int_0^T \left( (a - b\Psi(t)) + \frac{\lambda b\phi(t)}{1+bh\phi(t)} - d \right) dt$$

$$\mu_2 = k_1 \exp \int_0^T \left( \frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)} + \frac{\dot{\Psi}(t)}{\Psi(t)} \right) dt$$

$$\mu_2 = k_1 \exp[\ln(\phi(t)\Psi(t))]_0^T$$

$$\mu_2 = k_1 \exp\left[\ln \frac{\phi(T)\Psi(T)}{\phi(0)\Psi(0)}\right] = k_1 \frac{h_2\eta_1}{\xi_0\eta_0}$$

$$\mu_2 = k_1 \frac{h_2\eta_1}{(1-p)h_2(1-q)\eta_1} = \frac{(1-p)(1-q)(a-b(1-q)\eta_1)}{a-b\eta_1} \frac{h_2\eta_1}{(1-p)h_2(1-q)\eta_1}$$

$$\mu_2 = \frac{a-b(1-q)\eta_1}{a-b\eta_1} = \frac{a-b(1-q)\frac{\eta_0}{1-q}}{a-b(\frac{\eta_0}{1-q})}$$

$$\mu_2 = \frac{a-b\eta_0}{a-\frac{b}{1-q}\eta_0}.$$

Condition pour que  $|\mu_2| < 1$ .

- Condition pour que  $0 < \mu_2 < 1$

(a) pour que  $\mu_2 > 0$ , il faut que



cas(1) :  $a - b\eta_0 \geq 0$  et  $a - \frac{b}{1-q}\eta_0 \geq 0$

cas(2) :  $a - b\eta_0 < 0$  et  $a - \frac{b}{1-q}\eta_0 < 0$

- cas(1) : puisque  $a - \frac{b}{1-q}\eta_0 < a - b\eta_0$ , donc si  $a - \frac{b}{1-q}\eta_0 \geq 0$  alors  $a - b\eta_0 \geq 0$ .

Donc pour que  $\mu_2$  soit positive il suffit que  $a - \frac{b}{1-q}\eta_0 > 0$ , et donc

$$a - \frac{b}{1-q}\eta_0 \geq 0 \Rightarrow \eta_0 \leq \frac{a}{b}(1-q),$$

si  $\eta_0 \leq \frac{a}{b}(1-q)$  on obtient que  $\frac{a-b\eta_0}{a-\frac{b}{1-q}\eta_0} \geq 0$ , et puisque  $a - b\eta_0 >$

$a - \frac{b}{1-q}\eta_0$  on conclut que  $\frac{a-b\eta_0}{a-\frac{b}{1-q}\eta_0} > 1$ , d'où on a pas la stabilité orbitale dans ce cas.

cas(2) : si  $a - b\eta_0 < 0$ ,  $a - \frac{b}{1-q}\eta_0 < 0$ , donc si  $a - b\eta_0 < 0$ , on a automatiquement  $a - \frac{b}{1-q}\eta_0 < 0$ , donc pour que  $\mu_2 > 0$  soit positive il suffit que  $a - b\eta_0 < 0$ .

Donc si  $\eta_0 > \frac{a}{b}$  alors  $\mu_2 < 1$ , d'où on a la stabilité orbitale dans ce cas.

- Condition par que  $-1 < \mu_2 < 0$

**Pour que  $\mu_2 < 0$  il faut que**

$$a - b\eta_0 > 0 \quad \text{et} \quad a - \frac{b}{1-q}\eta_0 < 0 \quad (3.7)$$

car  $a - \frac{b}{1-q}\eta_0 < a - b\eta_0$

**condition pour que  $\mu_2 > -1$**

$\frac{a-b\eta_0}{a-\frac{b}{1-q}\eta_0} > -1$  cela implique que  $a - b\eta_0 < -1(a - \frac{b}{1-q}\eta_0)$  car ( $a -$

$\frac{b}{1-q}\eta_0 < 0$ ), donc  $a - b\eta_0 + a - \frac{b}{1-q}\eta_0 < 0$ , alors  $2a + \eta_0(-b - \frac{b}{1-q}) <$

0, ce qui donne  $\eta_0(-b - \frac{b}{1-q}) < -2a$ , donc on obtient que

$$\eta_0 > \frac{-2a}{-(b - \frac{b}{1-q})} = \frac{2a}{(b + \frac{b}{1-q})} \quad \text{car}(-b - \frac{b}{1-q} < 0) \quad (3.8)$$

donc on a les trois conditions suivantes d'après (3.7) et (3.8) on a

$$\begin{cases} \eta_0 < \frac{a}{b} \\ \eta_0 > \frac{a}{b}(1 - q) \\ \eta_0 > \frac{a}{b}(1 - \frac{q}{2-q}) \end{cases}$$

Puisque  $\frac{a}{b}(1 - q) < \frac{a}{b}(1 - \frac{q}{2-q})$ , donc si  $\frac{a}{b}(1 - \frac{q}{2-q}) < \eta_0 < \frac{a}{b}$  on a la stabilité orbital

Les deux conditions  $\frac{a}{b}(1 - \frac{q}{2-q}) < \eta_0 < \frac{a}{b}$ ,  $\eta_0 > \frac{a}{b}$ , nous donne la stabilité orbitale de la solution périodique, donc on conclut que si  $\eta_0 > \frac{a}{b}(1 - \frac{q}{2-q})$ , alors on a la stabilité orbitale de la solution périodique non triviale d'ordre-1 □

### 3.2.2 Existence d'une solution périodique pour $\tau \neq 0$

Dans cette partie, nous donnons les conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques non trivial pour  $h_2 \leq d / (\lambda b - bdh)$ .

**Théorème 3.2.5.** Soit  $p, q \in ]0, 1[$ , si

$$0 < \tau < \frac{a}{b} W_0(-\exp(\frac{L_1 - a}{a})) + \frac{a}{b} = \tau_0.$$

Alors le système (3.2) admet une solution périodique positive non trivial d'ordre  $-1$ .

**Preuve 3.2.5.** On a

$$a \ln(\frac{y_2}{y_1}) - b(y_2 - y_1) = \frac{\lambda}{h} \ln(\frac{1 + bhx_2}{1 + bhx_1}) - d \ln(\frac{x_2}{x_1}). \tag{3.9}$$

Soit  $O^+(E^*, t_0)$  une trajectoire du système (3.2) débute de point initial  $E^*((1 - p)h_2, \frac{a}{b})$  et coupe la section  $\Sigma_2$  au point  $F^*(h_1, y^*)$ .

De (3.9), on peut déterminer  $y^*$  à partir de la relation suivante :

$$a \ln(\frac{y^*b}{a}) - b(y^* - \frac{a}{b}) = \frac{\lambda}{h} \ln(\frac{1 + bh h_1}{1 + (1 - p)bh h_2}) - d \ln(\frac{h_1}{(1 - p)h_2}) = L_1,$$

et

$$a \ln\left(\frac{y^*b}{a}\right) - by^* = L_1 - a,$$

alors

$$\ln\left(\frac{y^*b}{a}\right) - \frac{b}{a}y^* = \frac{L_1 - a}{a},$$

donc

$$\ln\left(\frac{y^*b}{a}\right) + \ln \exp\left(-\frac{b}{a}y^*\right) = \frac{L_1 - a}{a},$$

$$\ln\left(\frac{y^*b}{a}\right) \exp\left(-\frac{b}{a}y^*\right) = \frac{L_1 - a}{a},$$

exp de cette formule

$$\frac{y^*b}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}y^*\right) = \exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right),$$

et

$$-\frac{y^*b}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}y^*\right) = -\exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right).$$

Et à l'aide de propriété de la fonction de Lambert suivante :

pour tout  $A \geq \frac{1}{e^1}$  on a  $\exp(W_0(A \ln A)) = A$ , et par le changement de variable

$$\alpha = \exp\left(-\frac{b}{a}y^*\right),$$

on a

$$\alpha \ln \alpha = -\exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right)$$

donc

$$W_0(\alpha \ln \alpha) = W_0\left(-\exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right)\right)$$

alors

$$\exp(W_0(\alpha \ln \alpha)) = \exp\left(W_0\left(-\exp\left(\frac{L_1 - a}{a}\right)\right)\right),$$

et puisque  $y^* < \frac{a}{b}$  alors  $\frac{by^*}{a} < 1$  d'où

$$\exp\left(-\frac{by^*}{a}\right) > \frac{1}{e^1},$$

aussi

$$\alpha = \exp(W_0(-\exp(\frac{L_1 - a}{a}))),$$

et donc

$$\exp(-\frac{by^*}{a}) = \exp(W_0(-\exp(\frac{L_1 - a}{a}))),$$

en déduit que

$$-\frac{by^*}{a} = W_0(-\exp(\frac{L_1 - a}{a})),$$

ce qui donne

$$y^* = -\frac{a}{b}W_0(-\exp(\frac{L_1 - a}{a})).$$

Pour tout  $0 < \tau < \tau_0 = a/b - y^*$ , la trajectoire  $O^+(S, t_0)$  coupe  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  infinité de fois par impulsion.

Donc pour tout  $0 < \tau < \tau_0$ , supposons que la trajectoire  $O^+(S_1, t_0)$  du système (3.2) débute de section  $\Sigma_2$  au point  $S_1(h_1, \tau)$  et coupe  $\Sigma_3$  au point  $S_2(h_2, \tau^*)$ .

Ensuite, par (3.9), on peut déterminer  $\tau^*$  de la relation suivante

$$a \ln\left(\frac{\tau^*}{\tau}\right) - b(\tau^* - \tau) = \frac{\lambda}{h} \ln\left(\frac{1 + bh_2}{1 + bh_1}\right) - d \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = L_2,$$

alors

$$\ln\left(\frac{\tau^*}{\tau}\right) - \frac{b}{a}\tau^* = \frac{L_2 - b\tau}{a},$$

et on a

$$\ln\left(\frac{\tau^*}{\tau}\right) + \ln \exp\left(-\frac{b}{a}\tau^*\right) = \frac{L_2 - b\tau}{a},$$

donc

$$\ln\left(\frac{\tau^*}{\tau} \exp\left(-\frac{b}{a}\tau^*\right)\right) = \frac{L_2 - b\tau}{a},$$

exp de cette formule

$$\frac{\tau^*}{\tau} \exp\left(-\frac{b}{a}\tau^*\right) = \exp\left(\frac{L_2 - b\tau}{a}\right),$$

on multiplie par  $(-\frac{b}{a}\tau)$

$$-\frac{b}{a}\tau \frac{\tau^*}{\tau} \exp(-\frac{b}{a}\tau^*) = -\frac{b}{a}\tau \exp(\frac{L_2 - b\tau}{a}),$$

ce qui donne

$$-\frac{b}{a}\tau^* \exp(-\frac{b}{a}\tau^*) = -\frac{b}{a}\tau \exp(\frac{L_2 - b\tau}{a}),$$

donc à l'aide de la propriété de la fonction de Lambert,

par le changement de variable  $\beta = \exp(-\frac{b\tau^*}{a})$ ,

on a

$$\beta \ln \beta = -\frac{b\tau}{a} \exp(\frac{L_2 - b\tau}{a}),$$

et donc

$$W_0(\beta \ln \beta) = W_0(-\frac{b\tau}{a} \exp(\frac{L_2 - b\tau}{a})),$$

alors

$$\exp(W_0(\beta \ln \beta)) = \exp(W_0(-\frac{b\tau}{a} \exp(\frac{L_2 - b\tau}{a}))),$$

et puisque

$$\tau^* < \frac{a}{b} \quad \text{alors} \quad \frac{b\tau^*}{a} < 1 \quad \text{donc} \quad \exp(-\frac{b\tau^*}{a}) < \exp(-1),$$

alors

$$\beta = \exp(W_0(-\frac{b\tau}{a} \exp(\frac{L_2 - b\tau}{a}))),$$

et

$$\exp(-\frac{b\tau^*}{a}) = \exp(W_0(-\frac{b\tau}{a} \exp(\frac{L_2 - b\tau}{a}))),$$

on déduit que

$$-\frac{b\tau^*}{a} = W_0(-\frac{b\tau}{a} \exp(\frac{L_2 - b\tau}{a})),$$

ce qui donne

$$\tau^* = -\frac{a}{b}W_0\left(-\frac{b}{a}\tau \exp\left(\frac{L_2 - b\tau}{a}\right)\right).$$

Maintenant on va construire deux applications de Poincaré définies telles que. Soit le point  $E_1((1-p)h_2, \alpha_1)$  sur  $\Sigma_1$  et  $\alpha_1 < (1-q)\tau^*$ . Supposons que la trajectoire  $O^+(E_1, t_0)$  du système (3.2) coupe  $\Sigma_2$  au point  $F_1(h_1, \beta_1)$ , et par impulsion  $\Delta y = \tau$  la trajectoire saute vers le point  $F_1^+(h_1, \beta_1 + \tau)$ , puis la trajectoire continue l'évolution et coupe  $\Sigma_3$  au point  $G_1(h_2, \gamma_1)$  et par impulsion  $\Delta x = -px$ ,  $\Delta y = -qy$  la trajectoire saute vers le point  $E_2((1-p)h_2, \alpha_2)$  avec  $\alpha_2 = (1-q)\gamma_1$ . A l'état  $E_2$ , la trajectoire coupe  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  aux points  $F_2(h_1, \beta_2)$ ,  $F_2^+(h_1, \beta_2 + \tau)$  et  $G_2(h_2, \gamma_2)$ , respectivement. Par  $\alpha_1 < (1-q)\tau^*$ ,  $\tau < \beta_1 + \tau$  et la construction géométrique de portrait de phase du système (2.1), on obtient que le point  $E_2$  est au-dessus du point  $E_1$ . De plus, le point  $G_2$  est au-dessus du point  $G_1$ . Donc nous avons  $\gamma_2 = P_2(q, \tau, \gamma_1)$ , et donc  $\gamma_1 - P_2(q, \tau, \gamma_1) = \gamma_1 - \gamma_2 < 0$ .

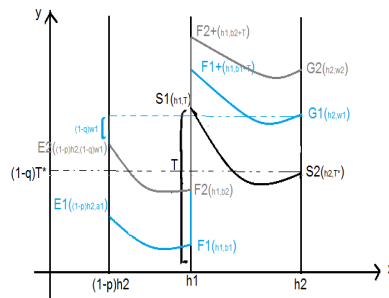


FIGURE 3.1: Trajectoire de système (3.2).

D'autre part, pour tout  $0 < \tau < \tau_0$ , supposons que la trajectoire  $O^+(A_1, t_0)$  com-

mence par  $A_1((1-p)h_2, a/b)$  et coupe  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  au point  $B_1(h_1, \mu_1)$ ,  $B_1^+(h_1, \mu_1 + \tau)$  et  $C_1(h_2, \nu_1)$ , respectivement. À l'état  $C_1$ , la trajectoire  $O^+(A_1, t_0)$  saute aux points  $A_2((1-p)h_2, (1-q)v_1)$  sur le section  $\Sigma_1$  et la trajectoire continue l'évolution et coupe  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  aux points  $B_2(h_1, \mu_2)$ ,  $B_2^+(h_1, \mu_2 + \tau)$  et  $C_2(h_2, \nu_2)$ , donc la construction géométrique du portrait de phase du système (3.2), on obtient que le point  $C_2$  est sous le point  $C_1$  pour tout  $p, q \in ]0, 1[$  et  $\tau \in ]0, \tau_0[$ .

Donc nous avons  $v_1 - P_2(q, \tau, v_1) = v_1 - v_2 > 0$ .

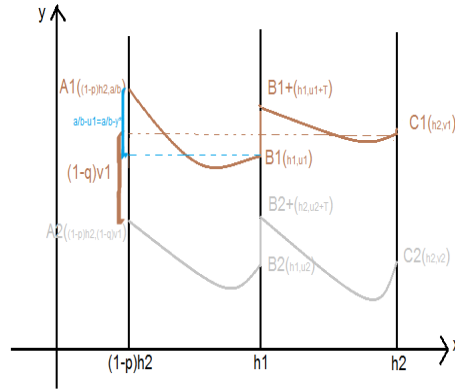


FIGURE 3.2: Trajectoire de système (3.2).

Alors  $\exists \tau \in ]0, \tau_0[$  et  $\gamma_\tau$  telle que  $P(q, \tau, \gamma_\tau) = \gamma_\tau$ , d'où la périodicité de la solution.  $\square$

### 3.3 Simulation numérique

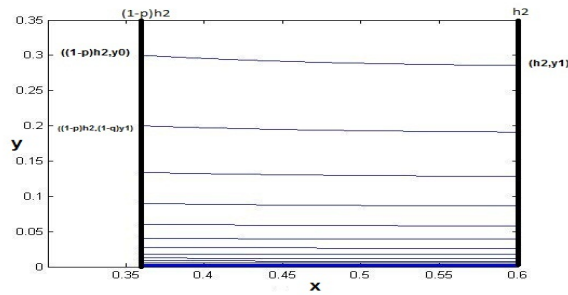


FIGURE 3.3: La trajectoire du système (3.2) pour  $\tau = 0$  et  $h_2 < x^*$ , avec les conditions  $a = 0.8$ ,  $b = 0.6$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $d = 0.2$ ,  $h = 0.02$ ,  $p = 0.4$ ,  $q = 0.3$ ,  $h_2 = 0.6$

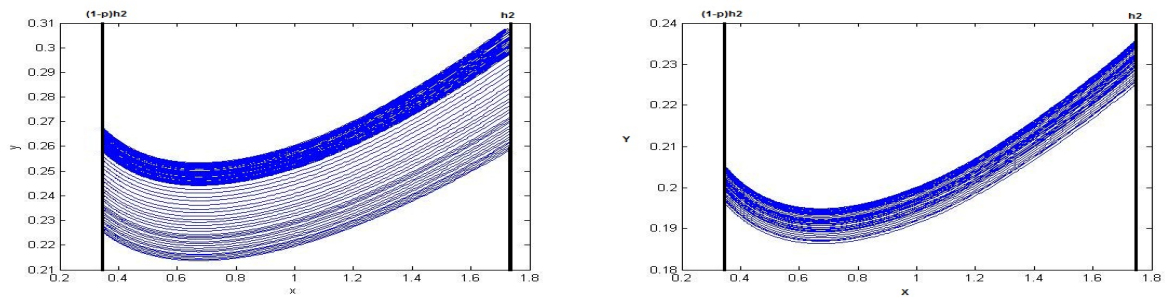


FIGURE 3.4: La trajectoire du système (3.2) pour  $\tau = 0$  et  $h_2 > x^*$ , avec les conditions  $a = 0.8$ ,  $b = 0.6$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $d = 0.2$ ,  $h = 0.02$ ,  $p = 0.8$ ,  $q = 0.13$ ,  $h_2 = 1.75$ ,  $x_0 = 0.35$ ,  $y_0 = 0.225$

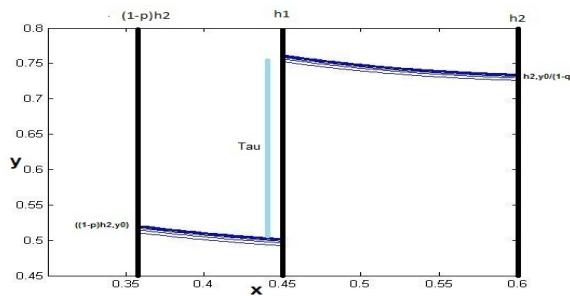


FIGURE 3.5: La trajectoire du système (3.2) pour  $\tau \neq 0$  et  $h_2 < x^*$ , avec les conditions  $\tau = 0.26$ ,  $a = 0.8$ ,  $b = 0.6$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $d = 0.2$ ,  $h = 0.02$ ,  $p = 0.4$ ,  $q = 0.3$ ,  $h_2 = 0.6$



# Conclusions et perspectives

*Dans ce travail, nous avons analysé les propriétés asymptotiques (Existences, stabilités des équilibres, solutions périodiques ) pour un modèle Proie-Prédateur qui nous ont aidés à étudier le même modèle avec impulsions, puis nous avons proposé quelques conditions pour l'existence et la stabilité orbitale des solutions périodiques de système des équations différentielles impulsives.*

*Dans le futur, on prévoit d'étudier des modèles plus généraux avec des impulsions non constantes, et éventuellement des cas avec retard.*

# Bibliographie

- [1] S. AHMAD, AC LAZER, *Necessary and sufficient average growth in a Lotka-Volterra system*, Elsevier Science Ltd. Oxford, UK , 1998.
- [2] D.D.BAINOV, P.S.SIMEONOV, *Impulsive Differential Equations : Periodic Solutions and Applications*, 66, Longman, 1993.
- [3] D.D.BAINOV, P.S.SIMEONOV, *Systems with Impulsive effect, stability, theory and app*, John Wiley & Sons, Now York, 1989.
- [4] T. A. BURTON, *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*, Academic Press, inc, 1985
- [5] S. N. Chow and J. Hale, *Methods of bifurcation theory*, Springer Verlag 1982.
- [6] J. A. DIEUDONNÉ, *Eléments d'analyse. Tome I. Fondements de l'analyse moderne. 3ème Édition*. Paris Gauthier-Villars, 1979,
- [7] M. FAN, K. WANG, D. JIANG, *Existence and global attractivity of positive periodic solutions of periodic n-species Lotka-Volterra competition systems with several deviating arguments*, Mathematical Biosciences 160, Elsevier, pages 47-61, 1999.
- [8] A. GROTHENDIECK, *Topological vector spaces*, Gordon and Breach, 1973.
- [9] J. K. HALE, *Ordinary Differential Equations*, Malabar, Krieger, 1980,
- [10] J. HOFBAUER AND K. SIGMUND, *Evolutionary Games and population Dynamics*, Cambridge university Press, 1998,

- [11] A.IGGIDR, B.KALITINE AND R. OUTBIB, *Semi-definite Lyapunov functions stability and stabilization*, Springer-Verlag London Limited, *Math. Control Signals Systems*(1996) 95-106,
- [12] G. IOOSS, *Bifurcation of maps and applications*, *Study of mathematics*, North Holland (1979).
- [13] G.W. KELLEY, A. C. PETERSON, *The Theory of Differential Equations, Classical and Qualitative*, Second Edition, Springer, 2010,
- [14] A.C. KING, J. BILLINGHAM ET S.R. OTTO, *Differential Equations Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*, Cambridge University Press, 2003.
- [15] V. LAKSHMIKANTHAM, D.D. BAINOV, P.S. SIMEONOV, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [16] X. LIAO, L. WANG, P. YU, *Stability of Dynamical Systems*. Elsevier, première édition, 2007.
- [17] L.F.NIE, J.G.PENG, Z.D.TENG, L. HU, *Existence and stability of periodic solution of a predator-prey model with state-dependent impulsive effects*, *J.Comput. Appl. Math.* 224 (2009) 544-555
- [18] D. O'REGAN, *Topological degree theory and applications*. In *Series in mathematical analysis and applications*. Chapman Hall/CRC, 2006.
- [19] J. C. PANETTA, *A mathematical model of drug resistance : Heterogeneous tumors*, *Math. Biosci.*, 147, 1998, 41-61
- [20] R. SCHOEN, *Dynamic Population Models*. Springer, 2006.
- [21] E. SENETA, *Non-negative matrices and Markov chains*, Allen and Unwin Ltd., London, 1973.
- [22] B. SHULGIN, L. STONE AND Z. AGUR, *Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model*, *Math. Comput. Model.*, 31, 2000, 207-215.

- [23] P.S. SIMEONOV, D.D. BAINOV, *Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulse effect*, *Int. J. Syst. SCI.* 19 (1988) 12, 2561-2585.
- [24] Y. SONNTAG, *Topologie et Analyse Fonctionnelle*, Ellipse, 1997.
- [25] Y.TAKEUCHI, *Global dynamical properties of Lotka-Volterra systems*, World Scientific Publishing, 2006.
- [26] X. ZHANG, Z. SHUAI AND K. WANG, *Optimal impulsive harvesting policy for single population*, *Nonlinear Anal.*, 4, 2003, 639-651.
- [27] DANG-VU, H., AND DELCARTE , C.*Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal , Fortran et Mathematica . Ellipses ; 2000.*
- [28] J.HALE, *Ordinary differential equations*, Springer. New York 1969.
- [29] RACHID, AHMED ET MEHDI, DRISS. *Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires. Editions Technip, 1997.*
- [30] X. LIAO , L. WANG , P.YU, *Stability of Dynamical Systems. Elsevier , première édition , 2007.*
- [31] AUGER ,P., LETT ,C.,AND POGGIALE ;J. *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés.*
- [32] MOULAY, E. *Stabilité des équations différentielles ordinaires .*