Table des matières

0.1 Introduction 2

1 La transformée de Laplace **3**

1.0.1 Défintions et exemples 4

1.0.2 Conditions d'existence d'une transformation de Laplace 6

1.0.3 Propriétés des transformations de Laplace 8

2 Applications de la transformation de Laplace **18**

2.0.4 Equations différentielles linéaires 18

2.0.5 Systèmes linéaires (Généralisation) 20

2.0.6 Equations aux dérivées partielles linéaires 22

2.0.7 Equations intégrales 24

2.0.8 Application à la solution d'équations différentielles ordinaires 25

2.0.9 Application à la solution de systèmes différentielles ordinaires 28

2.0.10 Application à la solution de quelques équations aux dérivées partielles . . 29

3 La transformée de Fourier **32**

3.0.11 Fonctions localement intégrables 32

3.0.12 L'intégrale de Fourier 32

3.0.13 Transformation de Fourier 36

3.0.14 Propriétés 37

3.0.15 Quelques propriétés de la transformée de Fourier 40

3.0.16 Equations aux dérivées partielles. Solution à l'aide des tansformées de Fourier : 44

0.1 Introduction

De nombreaux problèmes de la physique Mathématique modélisés conduisent à des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles linéaires ou non. La résolution de ces problèmes éxige des méthodes directes ou indirectes liées à l'analyse mathématique. Parmis ces méthodes on cite :

- La méthode des variations des constantes pour quelques EDO linéaires.

- La méthode des séries entières pour des équations différentielles linéaires d'ordre deux à coéfficients non constants.

- La méthode des éléments finis pour quelques types d'EDP (linéaires ou non).

- La méthode des transformations intégrales.

Le but dans ce travail est de clarifier l'aspect de cette dernière méthode et de donner des applications pour quelques type d'équations de la physique mathématique, en particulier les équations dont la forme impose la transformation de Laplace et celle de Fourier.

En analyse mathématique on trouve plusièrs types de transformations intégrales, et Il faut remarquer que c'est le forme de l'équation à résoudre (EDO ou EDP) qui impose la transformation choisie qui convient à la résolution du problème.

Ce mémoire est décomposé de la façon suivante :

Le premier chapitre consiste à définir la transformée de Laplace avec les conditions d'éxistence et d'éxpliquer ses propriétés avec des exemples de calcul.

Le deuxième chapitre est consacré à l'application de la transformation de Laplace dans la résolution de quelques types d'équations différentielles, systèmes différentiels, équations intégrales et équations aux dirivées partielles.

Dans le troisième chapitre on étudie la transformation de Fourier avec ses propriétés, on éxplique dans un éxemple d'EDP du second ordre comment utiliser cette transformation à la résolution d'un problème de la mécanique.

Chapitre 1

La transformée de Laplace

Introduction

La transformée de Laplace permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire où les formes dérivées disparaissent. on se rappellera qu'en posant la solution sons la forme d'une exponentielle ; on avait transmit le problème d'une équation ordinaire vars une équation caractéristique (algébrique). La transformée de Laplace est la généralisation de cette idée.

Une telle pratique permet de transposer le problème de l'espace des temps (notre monde temporel), vers un espace dit des phases (un monde parallèle), puis résoudre dans cet espace, ensuite transposer de nouveau la solution vers le monde réel (l'espace temporel).Voici un diagramme de cette transposition :

La transformée de Laplace fait elle-même parti d'une catégorie de transformations intégrales de la forme :

$$F(s) = \int_{t_1}^{t_2} k(s,t) f(s) \, dt$$

Une transformée particulière nécessite donc la définition du noyau $k(s,t)$ et de l'intervalle d'intégration I. Les transformations les plus utilisées sont celles de Fourier, pour laquelle on a

$$I = \mathbb{R} \text{ et } k(s,t) = e^{-ist}, \quad s \in \mathbb{R} \quad (\text{Fourier}),$$

Et celles de Laplace, pour laquelle on a

$$I = \mathbb{R}^+ \text{ et } k(s,t) = e^{-st}, \quad s = s_r + is_i \in \mathbb{C} \quad (\text{Laplace}).$$

Puisques est complexe, la transformation de Laplace peut être vue comme une généralisation de la transformation de Fourier, restreinte aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$. La restriction à $\mathbb{R}^+$ n'est guère contraignante dans les applications réalistes où $f(t)$ représente un signal physique à l'instant t qui ne peut exister de toute éternité . Il est en effet toujours possible de choisir l'instant où on démarre les mesures comme l'origine des temps . De ce point de vue, l'analyse de Fourier est plus adaptée à l'étude des régimes forcés, tandis que l'analyse de Laplace convient davantage pour l'étude des régimes transitoires.

En revanche, il est extrêmement bénéfique de passer de la variable réelle à la variable complexe qui rajoute le facteur de convergence $e^{-s_r t}$ dans l'intégrale, au mois sans une partie du plan complexe . Il en résulte qu'un grand nombre de fonctions admettent une transformée de Laplace, ca que n'est pas le cas des transformées de Fourier.

Pour peu qu'ils soient linéaires, la transformées de Laplace est un outil très simple d'emploi pour résoudre les problèmes d'évolution (équations différentielles ou dérivées partielles, équations aux différences ou intégrales...). Le principe général d'action de la transformées de Laplace sur les opérateurs. Par transformées de Laplace, les équations différentielles devinent des équations algébriques, tandis que les équations aux dérivées partielles se transforment en des équations différentielles. Il en résulte une simplification efficace des problèmes qui permet souvent leur résolution analytique .

1.0.1 Défintions et exemples

Définition 1.1 *Soit* $f \ :\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *, la transformée de Laplace de* f *est la fonction* F *définie par :*

$$\mathfrak{L}[f(t)](z) = F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,dt.$$

Le domaine de définition de F *est déterminé suivant la convergence de l'intégrale.*

Remarque 1.2 *L'intégrale dans la définition est une intégrale généralisée pour valeurs complexes.*

Exemple 1.3 *(Transformées de Laplace de quelques fonctions élémentaires)*

a) $f\ (t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0, \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f\ (t)](z) &= F\ (z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}.1dt \\ &= \left[-\frac{1}{z}e^{-zt}\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{z}, \quad Rz > 0. \end{aligned}$$

Dans cet exemple le domaine définition de $\mathfrak{L}[f\ (t)]$ *est* $]0, +\infty[$.

b) $f\ (t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0, \\ t^n & si\ t > 0 \end{cases} \quad pour\ n \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{L}[t^n](z) = F\ (z) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-zt} dt,$$

Faisant le calcul par parties :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[t^n](z) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{-z} d\left(e^{-zt}\right) \\ &= \left[-\frac{t^n}{z}e^{-zt}\right]_{t=0}^{+\infty} + \frac{1}{z}\left[\int_0^{+\infty} e^{-zt} d\ (t^{\ n})\right] \\ &= \frac{n}{z}\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^{n-1}dt \qquad (pour\ Rz > 0) \\ &= \frac{n}{z}\mathfrak{L}\left[t^{\ n-1}\right](z). \end{aligned}$$

De la même façon, on a :

$$\mathfrak{L}\left[t^{\ n-1}\right](z) = \frac{n-1}{z}\mathfrak{L}\left[t^{n-2}\right](z)$$

Donc, par recurrence on aura :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[t^n](z) &= \frac{n}{z} \times \frac{(n-1)}{z} \times \frac{(n-2)}{z} \times \dots \times \frac{1}{z}\mathfrak{L}\left[t^0\right](z) \\ &= \frac{n!}{z^n} \cdot \mathfrak{L}\left[t^0\right](z) \\ &= \frac{n!}{z^n} \cdot \frac{1}{z} \\ &= \frac{n!}{z^{n+1}} \qquad ; (pour Rz > 0). \end{aligned}$$

$c)\ f\ (t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0, \\ e^{at} & si\ t > 0 \end{cases} \quad (pour \quad a \in \mathbb{R}^*)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\ [f(t)](z) &= F\ (z) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-zt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(a-z)}dt \\ &= \left[-\frac{1}{a-z}e^{t(ai-z)}\right]_{t=0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{z-a} \qquad ; (poura < Rz). \end{aligned}$$

$d) \qquad f\ (t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0, \\ e^{iat} & si\ t > 0 \end{cases} \qquad (pour\ a \in \mathbb{R}^*)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\ \left[e^{iat}\ \right](z) &= \int_0^{+\infty} e^{ait}e^{-zt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(ai-z)}dt \\ &= \left[-\frac{1}{ai-z}e^{t(ai-z)}\right]_{t=0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{z-ai} \qquad ; \quad (\ pour\ \ Rz > 0). \end{aligned}$$

1.0.2 Conditions d'existence d'une transformation de Laplace

Théorème 1.4 *Si une fonction $f\ (t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle ouvert* $]0, +\infty[$ *et vérifie*

$$|f\ (t)| \leq Me^{at}\ ,$$

alors la transformée de Laplace de f existe pour toute phase $z > a$.

Preuve. Lorsque $f\ (t)$ est continue par moreaux sur l'intervalle d'intégralation $]0, +\infty[$, alors $e^{-zt}f\ (t)$ est intégrable. De plus l'intégrale

$$\int_{t=0}^{t=+\infty} f(t)\, e^{-zt}dt \qquad est\ d\acute{e}finie\ si\ elle\ converge.$$

Pour cela nous appliquons le principe de convergence absolue . C'est à dire que si :

$$\int_{t=0}^{t=+\infty} \left| f(t) e^{-zt} \right| dt \ \text{ converge } \Longrightarrow \int_{t=0}^{t=+\infty} f\ (t) e^{-zt} dt \ \text{ converge.}$$

Puisque l'inégalité de Minkowski (inégalité du triangle) dans notre cas donne :

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \left| \mathfrak{L} [f\ (t)] \right| = \left| \int_{t=0}^{t=+\infty} f\ (t) e^{-zt} dt \right| \\ &\leq \int_{t=0}^{t=+\infty} \left| f\ (t) e^{-zt} \right| dt \\ \int_{t=0}^{t=+\infty} \left| f\ (t) e^{-zt} \right| dt \ &= \int_{t=0}^{t=+\infty} \left| f\ (t) \right| e^{-zt} dt, \quad \text{ puisque } \quad e^{-zt} \geq 0 \ , \ \forall t \ , \forall z \ . \end{aligned}$$

Il reste à déterminer dans quelles conditions l'inégalité

$$\int_{t=0}^{t=+\infty} \left| f\ (t) \right| e^{-zt} dt \quad \text{converge.}$$

Pour cela il faut imposer à $|f\ (t)|$ de croître moins vite que e^{-zt} ne décroît lorsque $t \to +\infty$. Donc si on choisit

$$|f\ (t)| \leq M e^{at} \ , \quad \forall t$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=+\infty} \left| f\ (t) e^{-zt} \right| dt \quad &\leq \int_{t=0}^{t=+\infty} M e^{at} e^{-zt} dt \\ &= \frac{M}{z-a}, \quad Rz > a. \end{aligned}$$

Dès lors on a

$$0 \leq \left| \mathfrak{L} [f\ (t)] \right| \leq \frac{M}{z-a}.$$

Donc qu'on peut trouver cette intégrale qui est la transformée de Laplace pour $f\ (t)$. ■

1.0.3 Propriétés des transformations de Laplace

Théorème 1.5 ***(Linéarité)*** *La transformée de Laplace est une application (transformation) linéaire. C'est a dire qu' elle satisfiat à la condition*

$$\mathfrak{L}\left[a.f\ \ (t)+b.g\ \ (t)\right](z)=a.\mathfrak{L}\left[f\ \ (t)\right](z)+b.\mathfrak{L}\left[g\ \ (t)\right](z),$$

pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2,$ *et* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}.$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[a\,.\,f\ \ (t)+b\,.\,g\ \ (t)\right](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}\left[a.f\ \ (t)+b.g\ \ (t)\right]dt \\ &= a\int_0^{+\infty} e^{-zt}f\,(t)\,dt+b\int_0^{+\infty} e^{-zt}g\,(t)\,dt \\ &= a.\mathfrak{L}\left[f\ \ (t)\right](z)+b.\mathfrak{L}\left[g\ \ (t)\right](z)\end{aligned}$$

■

Applications

Cette proprieté de linéarisation nous permet de trouver des transformées de Laplace d'une fonction en la décomposant en une combinaison linéaire de fonctions à transformées de Laplace plus simples .

a)

$$f\,(t)=\cos\left(at\right)=\frac{e^{ait}+e^{-ait}}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[f\ \ (t)\right](z) &= \mathfrak{L}\left[\cos\left(at\right)\right](z) \\ &= \frac{1}{2}\ \mathfrak{L}\left[e^{t}\right](z)+\frac{1}{2}\ \mathfrak{L}\left[e^{-t}\right](z) \\ &= \frac{1}{2}(\ \frac{1}{z-1})+\frac{1}{2}(\ \frac{1}{z+1}) \\ &= \frac{1}{z^2+1}\quad ;(pour\ \ Rz>1).\end{aligned}$$

b)

$$f\,(t)=\sin\left(at\right)=\frac{e^{ait}-e^{-ait}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left[f\ \ (t)\right](z) &= \mathfrak{L}\left[\sin(at)\right](z) \\
&= \frac{1}{2i}\ \mathfrak{L}\left[e^{ait}\right](z) - \frac{1}{2i}\ \mathfrak{L}\left[e^{-ait}\right](z) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-ai}\right) - \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z+ai}\right) \\
&= \frac{a}{z^2+a^2} \quad ;(pour\ \ Rz > 0).
\end{aligned}$$

c)

$$f(t) = \cosh(at) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left[f\ \ (t)\right](z) &= \mathfrak{L}\left[\cos(at)\right](z) \\
&= \frac{1}{2}\ \mathfrak{L}\left[e^{t}\right](z) + \frac{1}{2}\ \mathfrak{L}\left[e^{-t}\right](z) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right) \\
&= \frac{1}{z^2+1} \quad ;(pour\ \ z > 1).
\end{aligned}$$

d)

$$f(t) = \sinh(at) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left[f\ \ (t)\right](z) &= \mathfrak{L}\left[\sin(at)\right](z) \\
&= \frac{1}{2}\ \mathfrak{L}\left[e^{t}\right](z) - \frac{1}{2}\ \mathfrak{L}\left[e^{-t}\right](z) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right) \\
&= \frac{1}{z^2+1} \qquad\qquad ;(pour\ \ Rz > 1).
\end{aligned}$$

Théorème 1.6 *(Transformée de la dérivée) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, sauf éventuellent en $t = 0$ où $\lim\limits_{t\to+\infty} f\ \ (t) \equiv f\ \left(0^{+k,}\right)$ existe .On suppose en outre que f est une fonction* *continue par moreaux qui admet une transformée de Laplace, alors :*

$$\mathfrak{L}\left[f'(t)\right](z) = zF\ \ (z) - f\left(0_+\right),$$

Preuve. *La démonstration se fait par parties .gf*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left[f'(t)\right](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} f\ '\ \ (t)\, dt \\
&= \left[{}^{-zt} f\ \ (t)\right]_0^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} f\ \ (t)\, d\left(e^{-zt}\right) \\
&= -f(0) + z\int_0^{+\infty} e^{-zt} f\ \ (t)\, dt\ ; (pour\ \ Rz > 1) \\
&= z\mathfrak{L}\left[f\ \ (t)\right](z) - f\left(0_+\right)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathfrak{L}\left[f'(t)\right](z) = zF\ \ (z) - f\left(0_+\right).$$

■

Théorème 1.7 *(Transformée de la primitive d'une fonction) Soit g la primitive de f qui s'annule en* 0, *alors*

$$\mathfrak{L}[g](z) = \frac{1}{z}\mathfrak{L}\left[f\ \right](z).$$

Preuve. Posons $g\ (t) = \int_0^t f\ \ (u)\, du$.Ona $g\ '(t) = f\ \ (t)$ et $g\ (0) = 0$.

On applique le théorème sur la transformée d'une dérivée

$$\mathfrak{L}\left[f\ \right](z) = \ \mathfrak{L}\left[g'\right](z) = z\mathfrak{L}[g](z) - g(0) = z\mathfrak{L}[g](z),$$

Donc

$$\mathfrak{L}[g](z) = \frac{1}{z}\mathfrak{L}\left[f\ \right](z)$$

■

Proposition 1.8 *(retard temporel) pour $a > 0$ donné on a*

$$\mathfrak{L}\left[t_a\left(f\ \right)\right] = e^{at}\mathfrak{L}\left[f\ \right].$$

Avec

$$t_a(f)(x) = f(x+a).$$

Preuve. Observons d'abord que si f est à croissance au plus exponentielle, il en va de même pour $t_a(f)$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f\ (t-a)\, e^{-zt} dt &= \int_0^\infty f\ (u)\, e^{-z(u+a)} du \\ &= e^{-za} \int_0^\infty f\ (u)\, e^{-zu} du \\ &= e^{-za} \mathfrak{L}\left[f\ \right].\end{aligned}$$

Donc

$$\mathfrak{L}\left[t_{-a}\left(f\ \right)\right](z) = e^{-za}\mathfrak{L}\left[f\ \right](z).$$

Pour $a > 0$,

$$\mathfrak{L}\left[t_a(f)\right](z) = e^{at}\mathfrak{L}\left[f\ \right]$$

■

Proposition 1.9 *Pour* $a > 0$,

$$\mathfrak{L}\left[f\ \right](z-a) = \mathfrak{L}\left[e^{at}\left(f\ \right)\right](z).$$

Preuve. Par un calcul direct :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[f\ \right](z-a) &= \int_0^\infty f\ (t)\, e^{-(z-a)t} dt \\ &= \int_0^\infty \left(f\ (t)\, e^{at}\right) e^{-zt} dt \\ &= \mathfrak{L}\left[e^{at}\left(f\ \right)\right](z).\end{aligned}$$

■

Théorème 1.10 *(La valeur initiale et la valeur finale)*

Dans le cas où f *est développable en série entière et où la série transformée en* $\frac{1}{z}$ *a un rayon de convergence non nul, il est immédiat de constater que :*

$$zF(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{2a_2}{z^2} + \cdots + \frac{n!a_n}{z^n} + \cdots \ \rightarrow_{z\to+\infty} \ \ a_0 = f\ (0)\,.$$

Dans les autre cas, nous admettrons que ce résultat reste valable pourvu que les limites envisagées existent, à savoir :

$$\lim_{t\to 0^+} f\ (t) = \lim_{z\to+\infty} zF(z) \quad , \qquad \textit{(théorème de la valeur initiale).}$$

Preuve. Supposons maintenant que $f\ (t) \to_{t\to\infty} l$, limite finie, et charchons $\lim_{z\to\infty} zF(z)$; pour cela écrivons :

$$\begin{aligned} zF(z) &= z\int_0^T e^{-zt} f\ (t)\,dt + \int_T^{+\infty} ze^{-zt} f\ (t)\,dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Quel que soit T fixé,

$$\lim_{z\to 0} I_1 = 0,$$

et pour tout $\varepsilon > 0$,on peut choisir T telle que :

$$t \geq T \Rightarrow |f\ (t) - l| < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} z(l-\varepsilon) &< zf\ (t) < z(l+\varepsilon) \Rightarrow ze^{-zt}(l-\varepsilon) < ze^{-zt} f\ (t) < ze^{-zt}(l+\varepsilon), \\ &\Rightarrow \int_T^{+\infty} ze^{-zt}(l-\varepsilon) < \int_T^{+\infty} ze^{-zt} f\ (t) < \int_T^{+\infty} ze^{-zt}(l+\varepsilon), \\ &\Rightarrow \int_T^{+\infty} (l-\varepsilon)\, ze^{-zt}dt < I_2 < \int_T^{+\infty} (l+\varepsilon)\, ze^{-zt}dt, \\ &\Rightarrow (l-\varepsilon)\int_T^{+\infty} ze^{-zt}dt < I_2 < (l+\varepsilon)\int_T^{+\infty} ze^{-zt}dt, \\ &\Rightarrow -(l-\varepsilon)\int_T^{+\infty} -ze^{-zt}dt < I_2 < -(l+\varepsilon)\int_T^{+\infty} -ze^{-zt}dt, \\ &\Rightarrow (l-\varepsilon)\left[e^{-zt}\right]_T^{\infty} < I_2 < -(l+\varepsilon)\left[e^{-zt}\right]_T^{\infty} \\ &\Rightarrow (l-\varepsilon)\, e^{-zT} < I_2 < (l+\varepsilon)\, e^{-zT} \end{aligned}$$

Et quand ε et par suite T sont fixé, alors

$$\lim_{z\to 0}(l-\varepsilon)\,e^{-zT}\quad = l-\varepsilon$$

Et

$$\lim_{z\to 0}(l+\varepsilon)\,e^{-zT}\ =\ l+\varepsilon$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on peut rendre $|I_2 - l\ |$ arbitrairement petit, on a donc

$$\lim_{z\to\infty} zF(z) = l.$$

En conclusion, si l'abscisse de convergence de f est au plus égale à 0 et si les limites envisagées existent, on a

$$\lim_{t\to\infty} f\ (t) = \lim_{z\to 0} zF(z)\quad ,\qquad \text{(théorème de la valeur finale).}$$

■

Produit de convolution de deux fonctions

Définition 1.11 *On appelle produit de convolution ou de composition des fonctions $f\ (t)$ et $g\ (t)$ de la variable réelle t la fonction $h(t)$ définie par :*

$$h(t) = \int_0^t f\ (t-u)\,g(u)\,du.$$

Ce produit est noté symboliquement

$$h(t) = f\ (t) * g\ (t)\,.$$

Propriétés du produit de convolution

a) **Commutativité :**

$$f\ (t) * g\ (t) = g\ (t) * f\ (t)\,.$$

b) **Associativité :**

$$(f * g) * h = g * (f * h).$$

c) **Distribivité par rapport à la somme :**

$$[f(t) + g(t)] * h(t) = f(t) * h(t) + g(t) * h(t).$$

Proposition 1.12 *Soient f et g deux fonctions sont continues par morceaux et à croissance au plus exponentielle, telle que :*

$$\mathfrak{L}[f * g] = \mathfrak{L}[f]\,\mathfrak{L}[g].$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[f]\,\mathfrak{L}[g] &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,dt \int_0^{+\infty} e^{-zu} g(u)\,du \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,e^{-z(t+u)}dudt
\end{aligned}$$

Gardons la variable t , posons $v = t + u$

$$\mathfrak{L}[f]\,\mathfrak{L}[g] = \int_0^{+\infty} f(t) \int_0^{+\infty} g(v-t)\,e^{-zv}dvdt,$$

Maintenant, changeons l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[f]\,\mathfrak{L}[g] &= \int_0^{+\infty} e^{-zv} \int_0^{v} f(t)\,g(v-t)\,dtdv, \\
&= \mathfrak{L}\left[\int_0^{v} f(t)\,g(v-t)\,dt\right], \\
&= \mathfrak{L}[f * g].
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathfrak{L}[f]\,\mathfrak{L}[g] = \mathfrak{L}[f * g].$$

■

Table de quelques Transformées

$f(t)$	$F(z)$
1	$\frac{1}{z}$
t	$\frac{1!}{z^2}$
t^2	$\frac{2!}{z^3}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$t^a, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{z-a}$
$\cos at$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
$\sin at$	$\frac{w}{z^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{z}{z^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{z^2-a^2}$

Transformée de Laplace inverse :

On va voir plus comment la transformée de Laplace permet de transformer une équation différentielle impliquant une fonction $x(t)$ et certaines de ses dérivées en une équation algébrique ordinaire . La solution de ctte équation algébrique permet alors d'obtenir la transformée de la solution de équation différentielle . Il faut donc développer des méthodes pour retrouver une fonction $f\ (t)$ lorsqu'on conneît sa transformée $F\ (z)$. On peut, à partir de la table, trouver quelques transformée inverses .

Définition 1.13 *La transformée de Laplace inverse $f\ (t)$ d'une fonction $F\ (z)$ est définie par :*

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(z)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} F(z)\, e^{zt} dz.$$

Théorème 1.14 *(Linéarité de l'inverse) Si $\mathfrak{L}^{-1}[F(z)], \mathfrak{L}^{-1}[G(z)]$ alors :*

$$\mathfrak{L}^{-1}[c_1F(z) + c_2G(z)] = c_1\mathfrak{L}^{-1}[F(z)] + c_2\mathfrak{L}^{-1}[G(z)] \ , \qquad (\textit{ pour tout } c_1,c_2 \textit{ dans } \mathbb{R})$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^{-1}\left[c_1F(z)+c_2G(z)\right] &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}(c_1F(z)+c_2G(z))e^{zt}dz, \\
&= \frac{1}{2\pi i}(c_1\int_0^{+\infty}F(z)\,e^{zt}dz+c_2\int_0^{+\infty}G(z)\,e^{zt}dz), \\
&= (\mathfrak{c}_1\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}F(z)\,e^{zt}dz)+(c_2\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}G(z)\,e^{zt}dz), \\
&= c_1\mathfrak{L}^{-1}\left[F(z)\right]+c_2\mathfrak{L}^{-1}\left[G(z)\right].
\end{aligned}$$

■

Exemple 1.15 *(Recherche de la transformée inverse) Soit à chercher la transformée inverse de la fonction des phases :*

$$F(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)} \qquad , \; a\neq b$$

C'est à dire qu'on recherche :

$$\begin{aligned}
f\ \ (t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left[F(z)\right] \\
&= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)}\right]
\end{aligned}$$

Pour cela, nous devons décomposer la fonction des phases en éléments simples :

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{(z-a)(z-b)} \\
&= \frac{1}{(a-b)}\left[\frac{1}{(z-a)}-\frac{1}{(z-b)}\right].
\end{aligned}$$

Et alors :

$$\begin{aligned}
f\ \ (t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left[F(z)\right] \\
&= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)}\right] \\
&= \frac{1}{(a-b)}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)}\right]-\frac{1}{(a-b)}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-b)}\right].
\end{aligned}$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathfrak{L}^{-1}[F(z)] \\ &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)}\right] \\ &= \frac{1}{(a-b)}\left[e^{at}-e^{bt}\right]. \end{aligned}$$

Exemple 1.16 *(Transformée inverse d'une dérivée) Soit la fonction suivante de l'espace des phases :*

$$F(z)=\frac{z}{(z-a)(z-b)} \qquad ,a\neq b$$

Il s'agit de trouver la fonction temporelle $f\ '(t)$ associée par transformée de Laplace inverse

$$f'(t)=\mathfrak{L}^{-1}[F(z)].$$

Pour cela, nous allons décomposer la fonction des phases en éléments simples (fonctions partielles) :

$$F(z)=\frac{z}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{(a-b)}\left[\frac{a}{(z-a)}-\frac{b}{(z-b)}\right]$$

Et alors :

$$\begin{aligned} f\ '(t) &= \mathfrak{L}^{-1}[F(z)] \\ &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)(z-b)}\right] \\ &= \frac{1}{(a-b)}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a}{(z-a)}\right]-\frac{1}{(a-b)}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{b}{(z-b)}\right]. \end{aligned}$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} f\ '(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)(z-b)}\right] \\ &= \frac{1}{(a-b)}\left[ae^{at}-be^{bt}\right]. \end{aligned}$$

Or on se rend compte que c'est la dérivée de la fonction $f\ (t)$ de l'exemple précédent .

Chapitre 2

Applications de la transformation de Laplace

2.0.4 Equations différentielles linéaires

La plupart des problèmes de physique conduisent à poser et à tenter de résoudre une équation d'évolution avec des conditions aux limites caractéristiques de la situation étudiée . La transformée de Laplace permet de traiter un grand nombre d'équations d'évolution, pour peu qu'elles soient linéaires .

Pour introduire le sujet, commençons par le cas fréquent des équations différentielles du 2ème ordre à coefficients constants.

L'équation étudiée est donc de la forme :

$$x''(t) + \gamma x'(t) + w_0^2 x(t) = f(t),$$

Complétées par les conditions initiales $x(0) \equiv x_0$ et $x'(0) \equiv x_1$. f est une fonction source connue.

Soit$X(w)$ et $F(w)$ les transformées de Laplace des fonctions x et f . On a aussitôt :

$$X(w) = \frac{x_1 + x_0 w + \gamma x}{w^2 + \gamma w + w_0^2} + \frac{F(w)}{w^2 + \gamma w + w_0^2}$$

Deux cas sont à considérer :

-Si le polynôme caractéristique $w^2 + \gamma w + w_0^2$ admet deux racines distinctes $w_1$et w_2, on trouve par inversion que la solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = A_1 e^{tw_1} + A_2 e^{tw_2} + \int_0^t \varkappa(t-t')\, f\ \ (t'),$$

Où A_1et A_2 dépondent des conditions initiales x_0 et x_1 , et où $\varkappa$ et la susceptibilité définie par :

$$\begin{aligned} \varkappa(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{w^2+\gamma w+w_0^2}\right](t) \\ &= \frac{e^{tw_1}-e^{tw_2}}{w_1-w_2}, w_1 \neq w_2. \end{aligned}$$

La susceptibilité traduit la réponse du système à la force extérieure f . On notre que la convolution traduit le principe de causalité, selon lequel l'effet ne peut précéder la cause, puisque l'intégration est limitée aux seuls temps $t \geq t'$.

-Si les parties réelles de w_1 et w_2 sont toutes deux négatives, le système est stable .

Dans cette situation, aux temps suffisamment longs, seul demeure le terme forcé (proportionnel à f) : l'oubli des conditions initiales est total .

-Si une des racines est imaginaire par (en fait les 2, si l'équation est à coefficients réels), alors le terme homogène ne tend pas vers zéro aux temps longs : les pôles imaginaire purs donnent des contributions oscillatoires non amorties, même aux temps longs.

-Si le polynôme caractéristique $w^2+\gamma w+w_0^2$ admet 1 racine duale $\overline{w} = w_1 = w_2$, on trouve par inversion que la solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = (x_0 + A_1 t)\, e^{t\overline{w}} + \int_0^t \varkappa(t-t')\, f\ \ (t'),$$

Où A_1 dépondent des conditions initiales x_0 et x_1 , et où $\varkappa$ est définie par :

$$\begin{aligned} \varkappa(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{w^2+\gamma w+w_0^2}\right](t) \\ &= te^{t\overline{w}}, \\ w_1 &= w_2 = \overline{w}, \end{aligned}$$

L' apparition d'un terme de la forme $te^{t\overline{w}}$ est caractéristique des pôles multiples .

2.0.5 Systèmes linéaires (Généralisation)

D'une façon assez générale, les systèmes physiques limités par une frontière physique avec le milieu antérieur, peuvent être caractérisés globalement par la relation qui existe entre une grandeur de sortie et une grandeur d'entrée (cf. les exemples en mécanique, automatique, électronique...) .

Une classe particulière de systèmes traitables par transformation de Laplace comprend les systèmes linéaires et homogènes, caractérisés du point de vine mathématique par des équations différentielles à coefficients constants. La situation générique consiste à exciter un système par une fonction extérieure, que nous natrons $e(t)$ et à mesurer la réponse(t) du système. Dans le carde de notre étude, on supposera que e et s admettent une transformation de Laplace . le système physique étudié est dit linéaire et homogène (ou linéaire et invariant) si l'on peut définir un opérateur $\mathfrak{L}$:$e \longmapsto s = \mathfrak{L}(e)$, qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

$$\mathfrak{L}(\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)) = \alpha\mathfrak{L}(e_1(t)) + \mathfrak{L}(\beta e_2(t)) \ \ avec \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{L}(e(t - t_0)) = s(t - t_0)$$

La convolution permet de construire aisément un opérateur linéaire et homogène. On montre en effet, que si la réponse du système s'écrit sous la forme $s = \mathfrak{L}(e) = h * e = h * e$, où h une fonction sommable, l'opérateur $\mathfrak{L}$ est bien linéaire et homogène.

$$\underset{e(t)}{Entrée} \quad \Longrightarrow \underset{h(t)}{Système\ linéaire\ et\ \hom ogène} \quad \Longrightarrow \underset{s(t)=(h*e)(t)}{Sortie}.$$

Le théorème sur La transformée de Laplace du produit de convolution permet de calculer la réponse $e = h * e$ d'un système linéaire et homogène. En effet la transformée de Laplace conduit à l'égalité :

$$H(z) = \frac{S(z)}{\varepsilon(z)},$$

Où H est appelée fonction de transfert (ou admittance) du système . De façon plus précise, considérons un système linéaire et invariant caractérisé par l'équation différentielle homogène à coefficients constants :

$$a_n s^{(n)}(t) + \cdots + a_0 s'(t) = b_m e^{(m)}(t) + \cdots + b_1 e'(t) + b_0 e(t),$$

Avec, pour simplifier, l'ensemble des conditions initiales nulles. (On notera que les équations inhomogènes (avec présence de termes constants) se ramènent aux équations homogènes par changement de variables) . La fonction de transfert du système s'écrit comme le rapport de polynômes z :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} \\ &\equiv \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0}. \end{aligned}$$

L'équation algébrique $D(z) = 0$ est l'équation caractéristique l'équation différentielle en $s(t)$. Ses racines sont appelée les pôles du système ou de la fonction de transfert, est conditionnent, comme nous allons le voir, la stabilité du système .

Puisque le système est caractérisé par un opérateur de convolution, il suffit d'étudier sa réponse par un opérateur à l'impulsion de Dirac δ (méthode de Green).

Définition 2.1 *Un système est stable si la réponse au signal d'entrée, $e \equiv \delta$, tend vers 0 , lorsque $t \to +\infty$ (ou reste bornée, selon une autre défintion) . Dans ce cas, puisque $\varepsilon(z) = 1$, on obtient $S(z)$ conduit à une somme de tempes de la forme :*

$$S(z) = \sum_k \frac{A_k}{(z - z_k)^{\alpha_k}},$$

Où α_k est la multiplicité associée à la racine pôles z_k. L'original correspondant est donc de la forme :

$$s(t) = \sum_k A_k t^{\alpha_k - 1} e^{z_k t}.$$

Le système ne sera donc stable que si tous les pôles de la fonction de transfert sont dans le demi-plan gauche ouvert du plan complexe . Les pôles sur l'axe imaginaire ($\Re z_k = 0$) conduisent à une solution bornée lorsqu'ils dont de multiplicité 1 ($\alpha_k = 1$) . La localisation des pôles peut être réalisée à l'aide de critères algébreques ou géométriques .

2.0.6 Equations aux dérivées partielles linéaires

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation différentielle ordinaire (EDO) pour une fonction de plusieurs variables . On recontre de telles équation dans tous les domaines de la physique . Les équations de Maxwell en électromagnétisme, l' équation de la chaleur en thermodynamique, l' équation de la chalaur en thermodynamique,...etc...en sont des exemples bien connus .

Dans le cas des problèmes à deux dimensions (par exemple un problème dépendant du temps mais unidimensionnel dans l'espace), l'applicatuion de la transformée de Laplace, par rapport à une des variables permet de transformée l'EDP en une EDO par rapport à la variable non transformée . Dans le cas d'un plus grand nombre de variables, on est aminé à effectuer plusieurs transformations consécutives (de Laplace ou de fourier).

Taitons à titre d'exemple le cas d'une ligne de transmission électrique sans perte, de logueur d, dont l'inductance et la capacité par unité de longueur sont L et C .Le long de la linge, le potentiel $v\ (x,t)$ et le courant $i\,(x,t)$ sont représentés par des fonctions de la position x et du temps t . Ces 2 fonctions obéissent aux équations aux dérivées partielles dites des télégraphistes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -L\frac{\partial i}{\partial t},\\ \frac{\partial i}{\partial x} &= -C\frac{\partial v}{\partial t},\end{aligned}$$

On cherche le potentiel à l'extrémité de la ligne $x = d$, sachant

-Que les conditions initiales sont données par :

$$v\,(x,0) = i\,(x,0) = 0.$$

-Que les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{aligned}v\,(0,t) &= v_0,\\ v\,(d,t) &= L_0\frac{\partial i}{\partial t},\end{aligned}$$

C'est-à-dire qu'une tension contante v_0 est appliquée à l'entrée de la linge que se termine sur une inductance L_0.

Effectuons une transformée de Laplace par rapport à la variable t .Onpose donc :

$$\begin{aligned} v(x,w) &\equiv \int_{\mathbb{R}^+} v(x,t)\, e^{-tw} dt, \\ I(x,w) &\equiv \int_{\mathbb{R}^+} i(x,t)\, e^{-tw} dt. \end{aligned}$$

Compte-tenu des conditions initiales, les équations des télégraphistes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -LwI \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -CwV. \end{aligned}$$

En combinant ces 2 équations, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LCw^{\ 2} V \quad ,$$

Dont la solution évidente est :

$$V(x,w) = A \cosh\left(\frac{wx}{v}\right) + B \sinh\left(\frac{wx}{v}\right) \quad ,$$

Où on a introduit la vitesse de propagation du signal $v = 1/\sqrt{LC}$ le long de lalinge . Les constantes A et B sont fixées par les conditions aux limites qui s'écrivent :

$$V(0,w) = \frac{v_0}{w}, \quad V(d,w) = L_0 wI \ = -\frac{L_0}{L} \frac{\partial V}{\partial x}(d,w).$$

Tout calcul fait, on trouve en bout de ligne :

$$V(d,w) = \frac{v_0}{w \cosh\left(\frac{wd}{v}\right) + \overline{w} \sinh\left(\frac{wd}{v}\right)},$$

Où $\overline{w} = \sqrt{L/C}/L_0$. Le résultat dépendant du temps est obtenu par la formule d'inversion :

$$V(d,t) = \frac{v_0}{2\pi i} \int_\beta \frac{v_0}{w \cosh\left(\frac{wd}{v}\right) + \overline{w} \sinh\left(\frac{wd}{v}\right)} dw.$$

Cette intégrale peut être calculée par un développement en série et s'exprime en fonction des polynômes de laguerre .

2.0.7 Equations intégrales

Traitons à titre d'exemple le cas de l'inversion d'abel .On considère l'équation intégrale définie par la relation :

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}dt = f\ (x)\ .$$

Le problème consiste à exprimer la fonction y à partir de f qui est supposée connue . On supposera que y et f sont des fonctions continues qui admettent des transformée de Laplace .

L' intégrale peut s'ecrire comme un produit de convolution :

$$\begin{aligned} \frac{H(x)}{\sqrt{x}} * H(x)\,y(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{H(x-t)}{\sqrt{x-t}} H(x)\,y(t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}dt\ . \end{aligned}$$

On a montré précédemment que

$$H(x)\,t^{-1/2} \underset{\longrightarrow}{F} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \quad ; \quad (pour \quad \Re z > 0)\,.$$

Notons $F(z)$ et $Y(z)$ les transformée de Laplace des fonctions $f(t)$ et $y(t)$.

Enappliquant le théorème de convolution, on obtient

$$F(z) = \sqrt{\frac{\pi}{z}}.Y(z) \qquad \Leftrightarrow \quad Y(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}}F(z)\ .$$

On remarquera que la fontion $z \to \sqrt{z}$ ne tendpas vers 0 lorsque $z \to +\infty$,elle ne peut donc pas être la transformée de Laplace d' une fonction. Cependant , en divisant par z, on a :

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{z}}F(z) \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{z}} \cdot F(z) \quad . \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le théorème sur l'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^x y(x')\,dx' &= \frac{1}{\pi}\frac{H(x)}{\sqrt{x}} * H(x)\,f(t) \\ &\equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt \quad ,\end{aligned}$$

$y(x)$ est obtenu en dérivant par rapport à x :

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt \quad .$$

On peut aller un peu plus loin si f est dérivable. Comme la fonction $t \longmapsto (x-t)^{-1/2}$ est singulière pour $t = x$, il convient d'aort d'intégrer par parties .

Posons

$$I(t) = \int\limits_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt,$$

On trouve :

$$I(t) = 2x^{1/2}f(0) + 2\int\limits_0^x (x-t)^{1/2} f'(t)\,dt \quad ,$$

Puis en dérivant cette expression :

$$I'(x) = \frac{f(0)}{x^{1/2}} + 2\lim_{t\to+\infty}(x-t)^{1/2} f'(t) + \int\limits_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1/2}}dt \quad ,$$

Soit encore :

$$= \frac{f(0)}{\pi\sqrt{x}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}dt \quad .$$

2.0.8 Application à la solution d'équations différentielles ordinaires

Exemple 2.2 *1)Résoudre l'équation différentielles :*

$\mathfrak{L}[y] = 2y" + 5y' - 3y = 2$ *avec les conditions initiales* : $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Posons$\mathfrak{L}[y](t) = F(z)$*et prenons la transformée de chaque membre nous obtenons*

$$\begin{cases} 2\left[z^2F(z) - zy(0) - y'(0)\right] + 5\left[zF(z) - y(0)\right] - 3F(z) = \frac{2}{z} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2z^2F(z) - 2 + 5zF(z) - 3F(z) &= \frac{2}{z} \\ F(z)\left[2z^2 + 5z - 3\right] &= \frac{2}{z} + 2 \\ F(z) &= \frac{2+2z}{2z^2+5z-3}. \end{aligned}$$

Et ainsi

$$[y](t) = -\frac{2}{3} - \frac{4}{21}e^{-3t} + \frac{6}{7}e^{\frac{1}{2}t}.$$

2)Résoudre l'équation différentielles :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\ [y] &= y" - 3y' + 2y \\ &= 4e^{3t}. \end{aligned}$$

Avec les conditions initiales :

$$y(0) = 4, y'(0) = 9.$$

Posons

$$\mathfrak{L}[y](t) = F(z)$$

Et prenons la transformée de chaque membre nous obtenons

$$\begin{cases} \left[z^2F(z) - zy(0) - y'(0)\right] - 3\left[zF(z) - y(0)\right] + 2F(z) = \frac{4}{z-3} \\ y'(0) = 9 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
z^2F(z) - zy(0) - y'(0) - 3zF(z) + 3y(0) + 2F(z) &= \frac{4}{z-3} \\
F(z)\left[z^2 - 3z + 2\right] + y(0)[3-z] - y'(0) &= \frac{4}{z-3} \\
F(z)\left[z^2 - 3z + 2\right] + 4[3-z] - 9 &= \frac{4}{z-3}
\end{aligned}$$

'Ou l'on tire

$$F(z) = \frac{4z-3}{(z-1)(z-2)} + \frac{4}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Soit

$$F(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}$$

Et ainsi

$$[y](t) = e^t + e^{2t} + 2e^{3t}.$$

3)Résoudre l'équation différentielles :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[y] &= y" + 4y' + 3y \\
&= e^{-3t}\cos(t)
\end{aligned}$$

Avec les conditions initiales

$$: y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

En pronant la transformée des deux membres, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[y] &= \frac{F(z+3)}{z^2+4z+3}, \\
\text{où} \qquad F(z) &= \mathfrak{L}[\cos(t)] \\
&= \frac{z}{z^2+1}. \\
or, z^2 + 4z + 3 &= (z+3)(z+1),
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[y] &= \frac{s+3}{\left((z+3)^2+1\right)(z+3)(z+1)} \\ &= \frac{1}{\left((z+3)^2+1\right)(z+3-2)}.\end{aligned}$$

En utisant à nouveau de théorème de translation,

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{-3t}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}\right] \\ y(t) &= e^{-3t}\mathfrak{L}^{-1}\left[-\frac{1}{5}\frac{1}{(z^2+1)} - \frac{2}{5}\frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{z-2}\right],\end{aligned}$$

D'ou

$$y(t) = -\frac{e^{-3t}}{5}(\cos t + 2\sin t) + \frac{1}{5}e^{-t}.$$

2.0.9 Application à la solution de systèmes différentielles ordinaires

L'opérateur de Laplace transforme un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients contants en système équations algébriques.

Exemple 2.3 *1)Soit à résoudre le système d'équations différentielles :*

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) + x(t) - y(t) = 2 + 3e^{2t}, \\ x'(t) + 2y'(t) - 3x(t) = 3 + 2e^{2t}, \\ x(0) = 4, \quad y(0) = 1. \end{cases},$$

Posons

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[x](t) &= F(z) \\ ,\mathfrak{L}[y](t) &= G(z)\end{aligned}$$

Et prenons la transformée de chaque membre nous obtenons :

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}(z+1)F(z) - (z+1)G(z) &= 3 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z-2}, \\ (z-3)F(z) + 2zG(z) &= 6 - \frac{2}{z} + \frac{2}{z-2},\end{aligned}$$

En multipliant la 1ère équation par $2z$, la 2ième par $(z+1)$est additonnant, on obtient :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{12z^3 - 9z^2 - 15z + 6}{3z(z+1)(z-1)(z-2)} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}, \end{aligned}$$

Et

$$x(t) = 1 + e^t + 2e^{2t}.$$

De même on obtient :

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z^3 + z^2 - 2z - 2}{z(z+1)(z-1)(z-2)} \\ &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}, \end{aligned}$$

Et

$$y(t) = e^t + 2e^{2t} - 1.$$

2.0.10 Application à la solution de quelques équations aux dérivées partielles

Si on suppose la fonction à deux variables $u(x,t)$, et

$$U(x,z) = \mathfrak{L}(u(x,t)),$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= \int_0^\infty e^{-zt}\frac{\partial u}{\partial t}dt \\ &= zU(x,,z) - u(x,0) \end{aligned}$$

Et

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = z^2U(x,,z) - zu(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x-0)$$

On a aussi

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\int_0^{\infty}e^{-zt}\frac{\partial u}{\partial t}dt=\frac{dU}{dx}$$

0On utilisant la règle de leibniz pour dériver sous le signe de l'intégrale, On aurait aussi :

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\frac{d^2U}{dx^2}$$

Exemple 2.4 *Résoudre l'EDP suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4u, \\ u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0, \\ u(x,0)=6\sin(x)-4\sin(2x). \end{cases},$$

Posons

$$U(x,z)=\mathfrak{L}(u(x,t))$$

Et prenons la transformée de chaque membre nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(z+4)U=-6\sin(x)+4\sin(2x).$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 par rapport à la variable x . On a :

$$\begin{aligned} U_h &= C_1e^{\sqrt{z+4x}}+C_2e^{-\sqrt{z+4x}}, \\ U_p &= \frac{6}{z+5}\sin(x)-\frac{4}{z+8}\sin(2x), \end{aligned}$$

La solution générale est donnée par :

$$U(x,z)=C_1e^{\sqrt{z+4x}}+C_2e^{-\sqrt{z+4x}}+\frac{6}{z+5}\sin(x)-\frac{4}{z+8}\sin(2x)$$

En utilisant les conditions aux limites on trouve

$$C_1=C_2=0,$$

Donc :

$$U(x,z)=\frac{6}{z+5}\sin(x)-\frac{4}{z+8}\sin(2x)$$

Et ainsi

$$u(x,t) = 6e^{-5t}\sin(x) - 4e^{-8t}\sin(2x).$$

Chapitre 3

La transformée de Fourier

Introduction

Historiquement les séries de Fourier tirent leur origine d'une étude de l'équation des cordes vibrantes par Daniel Bernoulli (1753) .

Fourier les à beaucoup utiliser dans son ouvrage théorie analytique de la chaleur (1822).

3.0.11 Fonctions localement intégrables

Définition 3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application .On dit que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I, i.e :*

$\int_a^b f(x)\,dx$ existe pour tout intervalle $[a, b]$ dans I .

On note $f \in Loc(I)$.

Remarque 3.2 *Il est clair que toutes les fonctions continues sont localement intégrables .*

On a alors $C(I) \subset Loc(I)$ et l'inclusion est stricte . Comme exemple la fonction $f(x) = [x]$,(partie entière de x) est localement intégrable mais non continue.

Proposition 3.3 *L'ensemble $Loc(I)$est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I)$, (espace de toutes les fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$).*

3.0.12 L'intégrale de Fourier

Pour conclure l'étude de la théorie des séries de Fourier , on examinera le cas limite où l'intervalle $]-\ell, \ell[$,dans lequel on étudie la série de Fourier , tend vers $]-\infty, \infty[$, c'est à dire lorsque $\ell \to \infty$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dt \qquad converge.$$

On suppose que f satisfait aux conditions de Dirichlet et admet un développement en série de Fourier dans l'intervalle $[-\ell, \ell]$, $\ell > 0$. Donc il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, de période $T = 2\ell = \frac{2\pi}{\omega}$, vérifiant les hypothèses de Dirichlet (donc développable en série de Fourier) telle que la restriction $g\big|_{[-\ell,\ell]} = f$.

Alors pour tout $x \in [-\ell, \ell]$ on a :

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right], \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right]. \end{aligned}$$

(b)

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x)\, dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

(c)

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x)\, dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

En remplaçant les quantités (b) et (c) dans (a), on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \\ &\quad + \left[\frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right) dt\right] \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}(t-x)\right) dt. \qquad (1) \end{aligned}$$

Nous allons étudier cette dernière intégral quand $\ell \to \infty$.

Posons

$$z_1 = \frac{\pi}{\ell},\ z_1 = \frac{2\pi}{\ell}, \cdots, z_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

Et

$$\triangle z_n = z_n - z_{n-1} = \frac{\pi}{\ell}.$$

En reportant dans l'expression (1) ci-dessus, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dt + \frac{1}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos z_n(t-x)\,dt\right]\triangle z_n.$$

Posons

$$\varphi(z_n) = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos z_n(t-x)\,dt.$$

Il résulte de cela

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(z_k)\triangle z_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(z_k(t-x)\,dt)\triangle z_k\right).$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(z_k)\triangle z_k = \int_{\pi/\ell}^{\infty}\varphi(z)\,dz \quad \text{(l'intégrale de Riemann.)}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(z_k)\triangle z_k = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(z_k(t-x)\,dt)\right)\triangle z_k\right].$$

Ainsi

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi/\ell}^{\infty}\varphi(z)\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/\ell}^{\infty}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(z(t-x)\,dt)\right)dz.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\pi/\ell}^{\infty}\varphi(z)\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\varphi(z)\,dz$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\pi/\ell}^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(z(t-x)\,dt)\right]dz = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(z(t-x)\,dt)\right]dz.$$

On a finalement la relation pour f continue :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos(z(t-x)\,dt)\right]dz.$$

Cette dernière expression est appelée intégrale de Fourier. Cette égalité a lieu en tout point x où f continue.

Si f possède des discontinuités, on a la formule valable pour tout x :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(z(t-x))\,dt\right]dz=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Posons maintenant

$$\phi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(z(t-x))\,dt.$$

Il est clair que $\phi(-z)=\phi(z)$ et donc ϕ est paire et par suite

$$\int_0^{\infty}\phi(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(z)\,dz.$$

On a finalement :

$$\boxed{\begin{array}{c}-L'int\acute{e}grale\ de\ Fourier\ -\\ f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(z(t-x))\,dt\right]dz\end{array}}$$

Forme complexe de l'intégrale de Fourier

Posons

$$\psi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(z(t-x))\,dt.$$

ψ est une fonction impaire et donc pour tout

$$a>0,\int_{-a}^{a}\psi(z)\,dz=0=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(z(t-x))\,dt\right]dz.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a}\psi(z)\,dz=\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(z(t-x))\,dt\right]dz=0.$$

On dit dans ce cas que l'intégrale converge en valeur principale de cauchy vers 0. Cice implique qu'on a aussi

$$\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(z\,(t-x))\,dt\right]dz=0.$$

Et donc;

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{—Forme complexe de l'intégrale de Fourier —}\\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iz(t-x)}dt\right]dz.\end{array}}$$

Posons :

$$\hat{f}(z)=\mathcal{F}(f)(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-itz}dt\ ;$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(z)\,e^{-ixz}dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iz(t-x)}dt\right]dz\\ &= \frac{2\pi f(x)}{\sqrt{2\pi}}\\ &= \sqrt{2\pi}f(x).\end{aligned}$$

On peut écrire généralement si f possède des discontinuités :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(z)\,e^{ixz}dz=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Maintenant on peut définir la notion de transformée de Fourier.

3.0.13 Transformation de Fourier

Définition 3.4 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction localement intégrable .*

On définit la transformée de Fourier de f , la fonction notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$; et sa transformée inverse de $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{—Transformée de Fourier —}\\ \hat{f}(z)=\mathcal{F}(f)(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-ixz}dx\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{—Transformée inverse de Fourier —}\\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(z)\,e^{ixz}dz=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\end{array}}$$

Exemple 3.5 *Soit* $f(x)=e^{-|x|}$.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}e^{-ixz}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-x}e^{-ixz}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{x}e^{-ixz}dx\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-iz)x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+iz)x}dx\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1+iz} + \frac{1}{1-iz}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+z^2}.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$,La transformée inverse donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-|x|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(z)\, e^{ixz}dz \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+z^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ixz}dz \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos zx}{1+z^2}dz + \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin zx}{1+z^2}dz \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos zx}{1+z^2}dz + i\cdot 0
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos zx}{1+z^2}dz = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

En particulier on a ;

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

3.0.14 Propriétés

Lemme 3.6 *(Riemann)*

On pose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{k}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ .Alors les fonctions

$f(t)\cos zt$ et $f(t)\sin zt$ sont intégrables dans $[a,b]$ pour tout z dans $\mathbb{R}$et on a :

$$\lim_{z\to\pm\infty}\int_a^b f(t)\cos zt dt=\lim_{z\to\pm\infty}\int_a^b f(t)\sin zt dt=0$$

Preuve. *f intégrable sur $[a,b]$ implique que pour tout $\varepsilon>0$,il existe une subdivision de $[a,b]$ $a=x_0<x_1<x_3<\cdots<x_n=b$ et une fonction en escalier,*

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$telle que

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

$$\left|\int_a^b f(x)-g(x)\cos zt dt\right|\leq\int_a^b|f(x)-g(x)||\cos zt|\,dt\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dt=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Or , dans chaque intervalle $]x_k,x_{k+1}[$,la fonction g est constante et vaut

$$g\left|_{]x_k,x_{k+1}[}\right.(t)=c_k.$$

On a alors ,

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)\cos zt dt &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_{x_k,}^{x_{k+1}} g(t)\cos zt dt\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}c_k\int_{x_k,}^{x_{k+1}} g(t)\cos zt dt\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}c_k\left(\frac{\sin zt}{z}\right)_{x_k}^{x_{k+1}}\\ &= \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{n-1}c_k(\sin zx_{k+1}-\sin zx_k)\longrightarrow_{z\to\pm\infty}0.\end{aligned}$$

En par suite,

$$\lim_{z\to\pm\infty}\int_a^b f(t)\cos zt dt=0$$

Raisonnement identique pour la deuxième intégrale.

Théorème 3.7 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ .Alors*

1)

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixz} dx \ \ (\textit{ convergence normale}) \ .$$

2)

$$\hat{f} \quad \textit{est bornée}$$

3)

$$\lim_{z \to \pm\infty} \hat{f}(z) = 0$$

Preuve. *1) C'est immédait car*

$$\left| f(x) e^{-ixz} \right| = |f(x)|$$

$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixz} dx$ *est absolument convergente .*

2)

$$\left| \hat{f}(z) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) e^{-ixz} \right| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx = M.$$

3) Posons

$$I(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} |f(x)| \, dx.$$

$$\lim_{a \to \infty} I(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} |f(x)| \, dx = I \ \ (\textit{existe}) \, .$$

Soit $\varepsilon > 0$*.Il existe alors* $b > 0$ *tel que*

$$|I - I(b)| = I - I(b) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\left| \hat{f}(z) \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixz} dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-b} f(x) e^{-ixz} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} f(x) e^{-ixz} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b}^{+\infty} f(x) e^{-ixz} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-b} |f(x)| \, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-b}^{b} f(x) e^{-ixz} dx \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b}^{+\infty} |f(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left| \hat{f}(z) \right| \leq I - I(b) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-b}^{b} f(x) e^{-ixz} dx \right| .$$

Comme la fonction $f(x)\,e^{-ixz}$ *est localement intégrable , d'après le lemme de Riemann ,*

$$\lim_{z\to\pm\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,e^{-ixz}dx = 0.$$

Il existe alors $M>0$ *, tel que pour tout*

$$|z|\geq M, on\ a \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-b}^{b} f(x)\,e^{-ixz}dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il résulte que pour tout

$$|z|\geq M, \left|\hat{f}(z)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

Ce que traduit le fait que

$$\lim_{z\to\pm\infty}\hat{f}(z)=0.$$

■

■

Notation 3.8 $\kappa=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} : f\in Loc(\mathbb{R})\ \ et\ \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt\ \ existe\right\}$

$$\beta=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} : \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0\right\}.$$

On note aussi D *l'opérateur de dérivation définie sur l'ensemble des fonctions dérivables* $D(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *par* $Df=f'$. *Et* P *l'opérateur défini dans l'ensemble* β *dans* $\{g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\}$ *par* $(Pf)(x)=xf(x)$.

3.0.15 Quelques propriétés de la transformée de Fourier

Théorème 3.9 *1) (**Dérivée de la transformée de Fourier**)*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :*

i) $f\in\kappa$

ii) f *continue*

iii) $Pf\in\kappa$

Alors $\hat{f}\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *et on a :*

$$\mathcal{F}'(f(x))(z)=-i\mathcal{F}(f(x))(z).$$

*2)(**Linéarité**)*

Soient $f, g \in \kappa$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\mathcal{F}\left(\alpha f+\beta g\right)(x)=\alpha\mathcal{F}\left(f\right)(x)+\beta\mathcal{F}\left(g\right)(x)$$

*3) (**Transformée de Fourier de la translation**)*

Soit $T \in \mathbb{R}$ *et soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *une application . On note* $f_T(x)=f(x-T)$. *Alors*

$$\mathcal{F}(f_T)(z)=e^{-izT}\mathcal{F}(f)(z).$$

*4) (**Transformée de Fourier de l'homothétie**)*

Soit $k>0$ *et soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *. On note* $f_k(x)=f(kx)$. *Alors*

$$\mathcal{F}(f_k)(z)=\frac{1}{k}\mathcal{F}(f)\left(\frac{z}{k}\right).$$

Preuve. *1)Soit la fonction* $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *définie par :*

$$\varphi(t,x)=f(t)\,e^{-itz}$$

.

a) φ *est continue comme produit de deux fonctions continues.*

b)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)=itf(t)\,e^{-itz}=-it\varphi(t,x)\quad \text{est continue.}$$

c) L'intégrale $\int_{\mathbb{R}}\varphi(t,x)\,dt$ *est normalement convergente car*

$$|\varphi(t,x)|=|f(t)|\quad et\quad f\in\kappa$$

d) $\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\,dt$ *est normalement convergente car*

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\right| &= |tf(t)|\\ &= |(Pf)(t)|\quad et\qquad Pf\in\kappa.\end{aligned}$$

Pour ces raisons

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,x)\, dt$$

Est dérivable dans $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$\begin{aligned}
\left(\hat{f}\right)'(x) &= \left(D\hat{f}\right)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x)\, dt \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[t f(t,x)\right] e^{-itz} dt
\end{aligned}$$

Ce qui se traduit par

$$\left(D\hat{f}\right)(x) = -i\left(P\hat{f}\right)(x) \quad \text{ou} \quad i\left(D\hat{f}\right)(x) = \left(P\hat{f}\right)(x)$$

En multipliant par i *chaque membre.*

3)Si $f \in \kappa$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_T)(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_T(x)\, e^{-ixz} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-T)\, e^{-ixz} dx.
\end{aligned}$$

On pose

$$x - T = t.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_T)(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i(t-T)z} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-itz} e^{-iTz} dt \\
&= \frac{e^{-iTz}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-itz} dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{F}(f_T)(z) = e^{-iTz} \mathcal{F}(f)(z).$$

4)Si $f \in \kappa$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_k)(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, e^{-ixz} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(kx)\, e^{-ixz} dx.
\end{aligned}
$$

En posant $kx = t$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_k)(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i(t/k)z} \frac{dt}{k}. \\
&= \frac{1}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-it(z/k)} dt\right] \\
&= \frac{1}{k}\mathcal{F}(f)\left(\frac{z}{k}\right).
\end{aligned}
$$

■

Produit de convolution

Problème 3.10 *Etant données deux fonctions f et g et leurs transformées de Fourier $\mathcal{F}(f)(z)$ et $\mathcal{F}(g)(z)$, pour -on trouver une fonction k telle que*

$$\mathcal{F}(k)(z) = \mathcal{F}(f)(z) \cdot \mathcal{F}(g)(z)?$$

Solution 3.11 *On a*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(z) \cdot \mathcal{F}(g)(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixz} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y)\, e^{-iyz} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(y)\, e^{-iz(x+y)} dx dy
\end{aligned}
$$

Posons : $x + y = t$ et donc $dy = dt$, l'intégrale double devient :

$$\mathcal{F}(f)(z) \cdot \mathcal{F}(g)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x-t)\, e^{-izt} dx dt.$$

Posons :

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x-t)\, e^{-izt} dx,$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(z)\cdot\mathcal{F}(g)(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h(t)\, e^{-izt}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(t)\, e^{-izt}dt\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(h)(z).
\end{aligned}$$

En posant

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}h(t),$$

La fonction k est solution du problème posée .

Proposition 3.12 *La produit de convolution est commutatif; et on a :*

$$\mathcal{F}(f\star g)(z) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(z)\cdot\mathcal{F}(g)(z)$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition ; puisque :

$$\forall z\in\mathbb{R},\quad \mathcal{F}(f)(z)\cdot\mathcal{F}(g)(z) = \mathcal{F}(g)(z)\cdot\mathcal{F}(f)(z)$$

■

3.0.16 Equations aux dérivées partielles. Solution à l'aide des tansformées de Fourier :

Le problème :Résoudre l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2u \quad ,0<x<l \quad ,t>0$$

Avec les conditions unitiales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) &= 0, \\
u(x,0) &= x
\end{aligned}$$

Comme on s'intéresse à x entre 0 et l , on pense à une transformée finie. Comme on connaît la dérivée par rapport à x à $x=0$ et $x=l$, on utilisera la transformée cosinus par rapport à x.

Soit

$$\mathcal{F}_C(n,t)=\int_0^l u(x,t)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

$\frac{l^2}{2}$ la transformée de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$est $-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_C(n,t)$ et celle de $\frac{\partial u}{\partial t}$ est $\mathcal{F}_C'(n,t)$. On obtient :

$$\mathcal{F}_C'(n,t)=\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}-2\right)\mathcal{F}_C(n,t)$$

Dont la solution est

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_C(n,t) &= Ae^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}-2\right)t}\\ \text{or}\ \ \mathcal{F}_C(n,0) &= A=\int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\\ &= \frac{l^2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}_C(n,t)=\frac{l^2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}-2\right)t}\quad ,n=1,2,3,...$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_C(0,0) &= \int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\\ &= \int_0^l xdx=\frac{l^2}{2},\\ \mathcal{F}_C(0,t) &= \frac{l^2}{2}e^{-2t},\end{aligned}$$

Et la transformée inverse est :

$$u(x,t)=\frac{l}{2}e^{-2t}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^2}e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}-2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Après implication il vient :

$$u(x,t)=\frac{l}{2}e^{-2t}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-\left(\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2}-2\right)t}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right).$$

Considérons le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},x>0,t>0,$$

Avec les conditions $\begin{cases} u\left(0,t\right)=0, \\ u\left(x,0\right)=x^2, \\ 0<x<2, \\ u\left(x,0\right)=0 \\ x>2 \end{cases}$

On pense donc à la transformée sinus ou cosinus par raporet à x. Comme on connaît $u\left(x,t\right)$,on pense à une transformée sinus de Fourier. On trouve comme solution :

$$u\left(0,t\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^l\left(-\frac{4\cos\left(2w\right)}{w}+\frac{4\sin\left(2w\right)}{w^2}+\frac{2\cos\left(2w\right)-2}{w^3}\right)e^{-4w^2t}\sin\left(wx\right)dw.$$

Bibliographie.

[1] : V. Ditkine et A. Proudnikov, Transformations intégrales et calcul opérationnel, Editions Mir, Moscou, Deuxième édition, 1982.r

[2] : René Le, Transformations de Laplace, UQAT, CANADA, 2004.

[3] : J. L. Raimbault, Transformées de Laplace des fonctions et des distributions, WWW.math.u-psud.fr

[4] : A.Taik,Cours FI-GET-GPE-IMIAE : Transformée de Laplace et Transformée de Fourier, FST- Mohammedia, Maroc, 2008.