N° d'ordre :

Université de Saida- Dr. Moulay Tahar

Faculté des sciences

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat 3ème Cycle

Spécialité : Géométrie différentielle

Filière : Mathématiques

Par :

Abbes Mohamed Elmahdi

Thème :

L'harmonicité et la biharmonicité dans les structures presque de contact.

Thèse soutenue le 02 juin 2022 devant le jury composé de :

N°	Nom et prénom	Grade	Etablissement	Qualité
01	Guendouzi Toufik	Prof.	Université de Saida – Dr. Moulay Tahar	Président
02	Ouakkas Seddik	Prof.	Université de Saida – Dr. Moulay Tahar	Rapporteur
03	Belarbi Lakehal	Prof.	Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem	Examinateur
04	Elhendi Hichem	MCA	Université Tahri Mohammed de Béchar	Examinateur

Remerciements

Ces remerciements clôturent mes travaux de thèse réalisés au sein du laboratoire de Géométrie, Analyse, Contrôle et Applications (LGACA) de l'Université de Saida - Dr. Moulay Tahar.

La réalisation de cette thèse a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je tiens à remercier Monsieur Ouakkas Seddik, Professeur à l'Université de Saida-Dr. Moulay Tahar pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Guendouzi Toufik, Professeur à l'Université de Saida-Dr. Moulay Tahar qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de cette thèse .

Je remercie Monsieur Belarbi Lakehal Professeur à l'Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem et Monsieur Elhendi Hichem Maitre de conférences à l'Université Tahri Mohammed de Béchar pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en examinant cette thèse et de m'avoir honoré de faire partie du jury. Je les remercie vivement.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance envers les enseignants, trop nombreux pour les citer, qui ont contribué à ma formation et aux amis qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Table des matières

Introduction générale

Le produit des variétés riemanniennes est un moyen de présenter de nouvelles variétés riemanniennes. En 1969 R.L. Bishop et B. O'Neill [9] ont réussi à généraliser cette notion en introduisant la notion du produit tordu de deux variétés riemanniennes, définie comme suit :

Définition 1 *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes et $f : M \to \mathbb{R}^*$ une fonction différentiable positive sur M. Le produit tordu de (M,g) et (N,h) est la variété produit $M \times_f N$ munie de la métrique riemannienne :*

$$\widetilde{G} = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \sigma^* h,$$

où π et σ sont les projections canoniques de $M \times_f N$ sur M et N respectivement.
La variété M est dite la base de $M \times_f N$ alors que la variété N est dite la fibre.

En 2012, D.E. Blair [12] a introduit la notion du produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique entre une variété riemannienne et une variété métrique presque de contact définie comme suit :

Définition 2 *Soient (M^m, g) une variété riemannienne et $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété métrique presque de contact. Pour des fonctions $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ ($\alpha\beta \neq 0$ partout), on considère $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ le produit d'une variété riemannienne et une variété métrique presque de contact où :*

$$\widetilde{G} = g + \alpha h + \alpha(\alpha - 1)\, \eta \otimes \eta.$$

En outre, l'auteur a donné la définition de la métrique tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée sur le produit de deux variétés métriques presque de contact.
Récemment, en 2016 G. Beldjilali et M. Belkhelfa [5] ont introduit la notion de la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique sur le produit d'une variété riemannienne avec une variété métrique presque de contact définie comme suit :

Définition 3 *Soient (M^m, g) une variété riemannienne et $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété métrique presque de contact. Pour des fonctions $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ ($\alpha\beta \neq 0$ partout), on considère $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ le produit d'une variété riemannienne et une variété métrique presque de contact où :*

$$\widetilde{G} = g + \alpha^2 h + \alpha^2\left(\beta^2 - 1\right) \eta \otimes \eta.$$

Le couple $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ est dit variété riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique.

Cette notion est une généralisation de la métrique tordue de R.L. Bishop et B. O'Neill [9] et de la métrique tordue $\mathcal{D}$-homothétique de D.E. Blair [12].
En 1968 S.Tanno [38] a introduit une notion connue par la déformation $\mathcal{D}$-homothétique ($2n$-homothétique) sur les variétés métriques de contact, donnée par la définition suivante :

Définition 4 *Soientt $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique de contact et a une constante strictement positive, et soit la déformation donnée par :*

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = a\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \qquad \overline{g} = ag + a\,(a-1)\,\eta \otimes \eta,$$

alors $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est aussi une variété métrique de contact.

Cette derrnière notion a été généralisée en 1974 par S. Suguri et S. Nakayama [37] en remplaçant a par une fonction α qui est une fonction positive sur M. Cette notion est dite une déformation D-conforme.
Ensuite, en 2011 P. Alegre et A. Carriazo [2] ont trouvé un moyen d'introduire une notion plus générale connue par la déformation D-conforme généralisée ; cette notion a été obtenue en introduisant deux fonctions α et β. Ils ont réussi à donner la définition suivante :

Définition 5 *Étant donné une variété métrique presque de contact $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, considérons la déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée donnée par :*

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = \alpha\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \qquad \overline{g} = \beta g + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta \otimes \eta,$$

où α et β sont des fonctions strictement positives sur M^{2m+1}, alors la variété $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est aussi une variété métrique presque de contact.

Récemment en 2019, et afin de simplifer les calculs fastidieux, N. Özdemir, S. Aktay et M. Solgun [33] ont obtenu des nouvelles dérivées covariantes des structures métriques presque de contact déformées où ils ont séparé trois cas particuliers différents.
D'autre part, en 1964 J. Eells et J. H. Sampson [19] ont suggéré la définition des applications harmoniques qui sont les correspondances entre les variétés riemanniennes qui minimisent la fonctionnelle énergie $E\,(\varphi, D)$ définie par :

$$E\,(\varphi, D) = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2\, v_g, \tag{1}$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$.
Une telle application est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (1) :

$$\tau(\varphi) = Tr_g \nabla d\varphi = 0,$$

où $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de φ.
Une généralisation naturelle des applications harmoniques appelée application biharmonique a été suggérée par J.Eells et L. Lemaire dans [17]. Le premier résultat dans ce domaine

a été obtenu par G. Y. Jiang [23] en 1986 en dérivant l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle bi-énergie $E_2(\varphi, D)$ définie par :

$$E_2(\varphi, D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g. \tag{2}$$

Cette équation caractérise les applications biharmoniques. Plus précisément, une application $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ est dite biharmonique si et seulement si elle est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (2) :

$$\begin{aligned}
\tau_2(\varphi) &= -Tr_g (\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi) - Tr_g R^N (\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Il est clair que toute application harmonique est biharmonique. Il est donc trés intéressant de construire des applications biharmoniques non-harmoniques.
Dans le premier chapitre de cette thèse, nous rappelons les définitions et certaines propriétés des applications harmoniques, biharmoniques et des structures métriques presque de contact.
Le deuxième chapitre est consacré à la construction puis l'étude d'harmonicité et de biharmonicité des applications vers ou depuis des variétés métriques presque de contact.
Nous commençons par donner les relations entre la connexion de Levi-Civita sur la variété produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ et les connexions de Levi-Civita sur une variété riemannienne (M^m, g) et une variété métrique presque de contact $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$. Ces relations sont données par la proposition suivante :

Proposition 1 *Considérons $\{e_i\}_{1 \le i \le m}$ et $\{f_j, \varphi f_j, \xi\}_{1 \le j \le n}$ deux bases orthonormées sur (M, g) et (N, h) respectivement, alors $\left\{(e_i, 0), \frac{1}{\alpha}(0, f_j), \frac{1}{\alpha}(0, \varphi f_j), \frac{1}{\alpha\beta}(0, \xi)\right\}$ une base orthonormée sur $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$. Les équations suivantes nous donnent les relations entre $\widetilde{\nabla}$, ∇ et ∇'.*

$$\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla_{X_1} Y_1, 0),$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) &= \left(0, \nabla'_{X_2} Y_2\right) + \frac{(\beta^2 - 1)}{2} \left\{\eta(X_2)\left(0, \nabla'_{Y_2}\xi\right) + \eta(Y_2)\left(0, \nabla'_{X_2}\xi\right)\right\} \\
&- \frac{(\beta^2 - 1)}{2} \left\{\eta(X_2)(0, Tr_h h(\nabla'_{\cdot}\xi, Y_2)\cdot) + \eta(Y_2)(0, Tr_h h(\nabla'_{\cdot}\xi, X_2)\cdot)\right\} \\
&+ \frac{(\beta^2 - 1)^2}{2\beta^2} \left\{\eta(X_2) h\left(\nabla'_\xi \xi, Y_2\right) + \eta(Y_2) h\left(\nabla'_\xi \xi, X_2\right)\right\}(0, \xi) \\
&+ \frac{(\beta^2 - 1)}{2\beta^2} \left\{h\left(\nabla'_{X_2}\xi, Y_2\right) + h\left(\nabla'_{Y_2}\xi, X_2\right)\right\}(0, \xi) \\
&- \alpha h(X_2, Y_2)(grad\alpha, 0) - \alpha\left(\beta^2 - 1\right)\eta(X_2)\eta(Y_2)(grad\alpha, 0) \\
&- \alpha^2 \beta \eta(X_2)\eta(Y_2)(grad\beta, 0),
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0, Y_2) = \frac{1}{\alpha} X_1(\alpha)(0, Y_2) + \frac{1}{\beta}\eta(Y_2) X_1(\beta)(0, \xi)$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(Y_1,0)=\frac{1}{\alpha}Y_1(\alpha)(0,X_2)+\frac{1}{\beta}\eta(X_2)Y_1(\beta)(0,\xi).$$

Pour tout $X_1,Y_1\in\Gamma(TM)$ *et* $X_2,Y_2\in\Gamma(TN)$.

Grâce à cette proposition, nous déduisons que si la variété $(N^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,h)$ est une variété de Kenmotsu, alors les relations entre $\widetilde{R}$, R^M et R^N les tenseurs de courbure riemannienne sur $\left(M\times N,\widetilde{G}\right)$, (M^m,g) et $(N^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,h)$ respectivement sont données par le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit* $(N^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,h)$ *une variété de Kenmotsu, les relations entre* $\widetilde{R}$, R^M *et* R^N *sont données par les équations suivantes :*

$$\widetilde{R}((X_1,0),(Y_1,0))(Z_1,0)=\left(R^M(X_1,Y_1)Z_1,0\right),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}((X_1,0),(0,Y_2))(0,Z_2)&=-\alpha\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(grad\alpha,0)\\&-\alpha\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\alpha)(grad\beta,0)-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(Y_2)\eta(Z_2)(\nabla_{X_1}grad\alpha,0)\\&-\alpha^2\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)(\nabla_{X_1}grad\beta,0)-\alpha h(Y_2,Z_2)(\nabla_{X_1}grad\alpha,0)\\&-\frac{1}{\beta^3}\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,\xi)+\frac{1}{\beta^3}h(Y_2,Z_2)X_1(\beta)(0,\xi)\\&-\frac{1}{\beta}\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,Y_2)+\frac{1}{\beta}\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,\xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}((0,X_2),(Y_1,0))(Z_1,0)&=-\frac{1}{\alpha\beta}\eta(X_2)Z_1(\alpha)Y_1(\beta)(0,\xi)\\&-\frac{1}{\alpha\beta}\eta(X_2)Y_1(\alpha)Z_1(\beta)(0,\xi)-\frac{1}{\beta}\eta(X_2)g(Z_1,\nabla_{Y_1}grad\beta)(0,\xi)\\&-\frac{1}{\alpha}g(Z_1,\nabla_{Y_1}grad\alpha)(0,X_2).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{R}((0,X_2),(0,Y_2))(0,Z_2)&=\left(0,R^N(X_2,Y_2)Z_2\right)+\frac{\alpha^2}{\beta}h(Y_2,Z_2)\eta(X_2)(grad\beta,0)\\&-\frac{\alpha^2}{\beta}h(X_2,Z_2)\eta(Y_2)(grad\beta,0)+\frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}h(Y_2,Z_2)(0,X_2)\\&-\frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}\eta(Y_2)\eta(Z_2)(0,X_2)-h(Y_2,Z_2)|grad\alpha|^2(0,X_2)\\&-\frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}h(X_2,Z_2)(0,Y_2)+\frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}\eta(X_2)\eta(Z_2)(0,Y_2)\\&+h(X_2,Z_2)|grad\alpha|^2(0,Y_2)-\left(\beta^2-1\right)\eta(Y_2)\eta(Z_2)|grad\alpha|^2(0,X_2)\\&-\alpha\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)d\alpha(grad\beta)(0,X_2)+\left(\beta^2-1\right)\eta(X_2)\eta(Z_2)|grad\alpha|^2(0,Y_2)\\&+\alpha\beta\eta(X_2)\eta(Z_2)d\alpha(grad\beta)(0,Y_2)-\frac{\alpha}{\beta}\eta(X_2)h(Y_2,Z_2)d\alpha(grad\beta)(0,\xi)\\&+\frac{\alpha}{\beta}\eta(Y_2)h(X_2,Z_2)d\alpha(grad\beta)(0,\xi).\end{aligned}$$

Ce dernier théorème nous conduit au corollaire suivant :

Corollaire 1 *Soit $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété de Kenmotsu, on a alors :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ricci}\,(X_1, X_2) = {} & \left(Ricci^M(X_1), \frac{1}{\alpha^2}Ricci^N(X_2)\right) - \frac{2n+1}{\alpha}(\nabla_{X_1}grad\alpha, 0) - \frac{1}{\beta}(\nabla_{X_1}grad\beta, 0) \\
& + \frac{2n}{\beta}\eta(X_2)(grad\beta, 0) - \frac{1}{\alpha\beta}X_1(\beta)(grad\alpha, 0) - \frac{1}{\alpha\beta}X_1(\alpha)(grad\beta, 0) \\
& - \frac{1}{\alpha}(\Delta\alpha)(0, X_2) - \frac{2n}{\alpha^2}|grad\alpha|^2(0, X_2) + \frac{2n(\beta^2-1)}{\alpha^2\beta^2}(0, X_2) \\
& - \frac{1}{\alpha\beta}d\alpha(grad\beta)(0, X_2) - \frac{2n+1}{\alpha\beta}\eta(X_2)d\alpha(grad\beta)(0, \xi) \\
& + \frac{2n}{\alpha^2\beta^3}X_1(\beta)(0, \xi) - \frac{1}{\beta}\eta(X_2)(\Delta\beta)(0, \xi)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = {} & S^M(X_1, Y_1) + S^N(X_2, Y_2) - \frac{2n(\beta^2-1)}{\beta^2}\eta(X_2)\eta(Y_2) \\
& - \frac{2n+1}{\alpha}g(\nabla_{X_1}grad\alpha, Y_1) - \frac{1}{\beta}g(\nabla_{X_1}grad\beta, Y_1) + \frac{2n}{\beta}Y_1(\beta)\eta(X_2) \\
& + \frac{2n}{\beta}X_1(\beta)\eta(Y_2) - \frac{1}{\alpha\beta}X_1(\beta)Y_1(\alpha) - \frac{1}{\alpha\beta}X_1(\alpha)Y_1(\beta) \\
& - \alpha\left(\beta^2-1\right)(\Delta\alpha)\eta(X_2)\eta(Y_2) - 2n\left(\beta^2-1\right)|grad\alpha|^2\eta(X_2)\eta(Y_2) \\
& - 2(n+1)\alpha\beta d\alpha(grad\beta)\eta(X_2)\eta(Y_2) + \frac{\alpha}{\beta}d\alpha(grad\beta)\eta(X_2)\eta(Y_2) \\
& - \alpha^2\beta(\Delta\beta)\eta(X_2)\eta(Y_2) - \alpha(\Delta\alpha)h(X_2, Y_2) - 2n|grad\alpha|^2h(X_2, Y_2) \\
& - \frac{\alpha}{\beta}d\alpha(grad\beta)h(X_2, Y_2) + \frac{2n(\beta^2-1)}{\beta^2}h(X_2, Y_2),
\end{aligned}$$

où $\widetilde{Ricci}$ désigne le tenseur de Ricci de la variété riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique et $\widetilde{S}$ désigne le tenseur de courbure de Ricci de la variété riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique.

Dans la deuxième partie du chapitre 2, nous calculons le champ de tension et le champ de bi-tension de l'application $\Phi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ définie par $\Phi(x, y) = \phi(x)$.
Ce résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (P^p, k)$ une application de classe C^∞, le champ de tension et le champ de bi-tension de l'application $\Phi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ définie par $\Phi(x, y) = \phi(x)$ sont donnés par :*

$$\tau(\Phi) = \tau(\phi) + \frac{2n+1}{\alpha}d\phi(grad\alpha) + \frac{1}{\beta}d\phi(grad\beta)$$

et

$$\begin{aligned}\tau_2(\Phi) &= \tau_2(\phi) - \frac{2n+1}{\alpha}\nabla_{grad\alpha}\tau(\phi) - \frac{1}{\beta}\nabla_{grad\beta}\tau(\phi)\\
&- \frac{2n+1}{\alpha}\left\{Tr_g\nabla^2 d\phi(grad\alpha) + Tr_g R^P(d\phi(grad\alpha), d\phi)d\phi\right\}\\
&- \frac{1}{\beta}\left\{Tr_g\nabla^2 d\phi(grad\beta) + Tr_g R^P(d\phi(grad\beta), d\phi)d\phi\right\}\\
&+ \frac{2n+1}{\alpha^2}(\Delta\alpha)\,d\phi(grad\alpha) + \frac{4n^2-1}{\alpha^3}|grad\alpha|^2 d\phi(grad\alpha)\\
&+ \frac{1}{\beta^2}(\Delta\beta)\,d\phi(grad\beta) - \frac{1}{\beta^3}|grad\beta|^2 d\phi(grad\beta)\\
&+ \frac{2n+1}{\alpha^2\beta}d\alpha(grad\beta)\,d\phi(grad\alpha) + \frac{2n+1}{\alpha\beta^2}d\alpha(grad\beta)\,d\phi(grad\beta)\\
&- \frac{4n^2-1}{\alpha^2}\nabla_{grad\alpha}d\phi(grad\alpha) - \frac{2n+1}{\alpha\beta}\nabla_{grad\alpha}d\phi(grad\beta)\\
&- \frac{2n+1}{\alpha\beta}\nabla_{grad\beta}d\phi(grad\alpha) + \frac{1}{\beta^2}\nabla_{grad\beta}d\phi(grad\beta).\end{aligned}$$

Grâce à ce théorème, nous pouvons donner une condition nécessaire et suffisante pour que la première projection $P_1 : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (M, g)$ soit biharmonique et nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 2 *La première projection* $P_1 : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (M, g)$ *est biharmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned}&\frac{2n+1}{\alpha}grad\Delta\alpha + \frac{1}{\beta}grad\Delta\beta - \frac{2n+1}{\alpha^2}(\Delta\alpha)\,grad\alpha - \frac{1}{\beta^2}(\Delta\beta)\,grad\beta\\
&- \frac{4n^2-1}{\alpha^3}|grad\alpha|^2 grad\alpha + \frac{1}{\beta^3}|grad\beta|^2 grad\beta + \frac{4n^2-1}{2\alpha^2}grad\left(|grad\alpha|^2\right)\\
&- \frac{1}{2\beta^2}grad\left(|grad\beta|^2\right) - \frac{2n+1}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha}d\alpha(grad\beta)\,grad\alpha + \frac{1}{\beta}d\alpha(grad\beta)\,grad\beta\right)\\
&+ \frac{2n+1}{\alpha\beta}\left(\nabla_{grad\alpha}grad\beta + \nabla_{grad\beta}grad\alpha\right) + \frac{2(2n+1)}{\alpha}Ricci^M(grad\alpha)\\
&+ \frac{2}{\beta}Ricci^M(grad\beta) = 0.\end{aligned}$$

Dans la troisième partie du chapitre 2, nous étudions l'harmonicité de l'application $\Psi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ définie par $\Psi(x, y) = \psi(y)$ où $\psi : (N^{2n+1}, h) \longrightarrow (P^p, k)$ est une application affine. L'expression du champ de tension de l'application $\Psi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2 *Soit* $\Psi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ *une application définie par :* $\Psi(x, y) = \psi(y)$ *où* $\psi : (N^{2n+1}, h) \longrightarrow (P^p, k)$ *est une application affine.*

Le champ de tension de l'application $\Psi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ *est donné par :*

$$\tau(\Psi) = \frac{1}{\alpha^2}\tau(\psi) - \frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2\beta^2}(div\xi)\, d\psi(\xi) + \frac{1-\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\nabla_\xi d\psi(\xi).$$

Cette dernière proposition nous a permis de déduire l'expression du champ de tension de la deuxième projection dans le cas où la variété N^{2n+1} est une variété métrique presque de contact et dans le cas où la variété N^{2n+1} est une variété de Kenmotsu. Ces deux expressions sont données par le corollaire suivant :

Corollaire 3 *Le champ de tension de la deuxième projection est donné par :*

$$\tau(P_2) = \frac{1-\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left\{(div\xi)\,\xi + \nabla_\xi\xi\right\}.$$

Donc P_2 *est harmonique si et seulement si :*

$$\nabla'_\xi\xi + (div\xi)\,\xi = 0.$$

Dans le cas où $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ *est une variété Kenmotsu, le champ de tension de la deuxième projection devient*

$$\tau(P_2) = -\frac{2n\left(\beta^2 - 1\right)}{\alpha^2\beta^2}\xi.$$

Notons que si $\beta \neq \pm 1$*, alors la deuxième projection n'est jamais harmonique.*

Aprés cela, nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles la deuxième projection et l'inclusion sont biharmoniques où nous obtenons les deux théorèmes suivants :

Théorème 3 *Soit* $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ *une variété de Kenmotsu, la deuxième projection* $P_2 : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (N, h)$ *est biharmonique si et seulement si les fonctions* α *et* β *sont des solutions de l'équation suivante :*

$$\begin{aligned}&\frac{2\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^3\beta^2}(\Delta\alpha) - \frac{2}{\alpha^2\beta^3}(\Delta\beta) + \frac{4(n-1)\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^4\beta^2}\left|grad\alpha\right|^2 + \frac{4}{\alpha^2\beta^4}\left|grad\beta\right|^2 \\ &- \frac{4(n-1) - 2\beta^2}{\alpha^3\beta^3}d\alpha(grad\beta) + \frac{4n\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^4\beta^2} = 0.\end{aligned}$$

Théorème 4 *Soit* $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ *une variété de Kenmotsu, l'inclusion* $i_{x_0} : N \longrightarrow \left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ *définie par* $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$ *est biharmonique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}&\left(\left(\beta^2+2n\right)^2\left|grad\alpha\right|^2 + 2\alpha^2\beta^2\left|grad\beta\right|^2 + 3\alpha\beta\left(\beta^2+2n\right)d\alpha(grad\beta)\right)grad\alpha \\ &+ \alpha\left(\alpha^2\beta\left|grad\beta\right|^2 + \alpha\left(3\beta^2+2n\right)d\alpha(grad\beta) + 2\beta\left(\beta^2+2n\right)\left|grad\alpha\right|^2\right)grad\beta \\ &- \frac{4n^2\left(\beta^2-1\right)\left(\beta^2+1\right)}{\beta^2}grad\alpha - \frac{4n^2\alpha\left(\beta^2-1\right)^2}{\beta^3}grad\beta \\ &+ \frac{\alpha\left(\beta^2+2n\right)^2}{2}grad\left(\left|grad\alpha\right|^2\right) + \frac{\alpha^3\beta^2}{2}grad\left(\left|grad\beta\right|^2\right) \\ &+ \alpha^2\beta\left(\beta^2+2n\right)\left(\nabla_{grad\alpha}grad\beta + \nabla_{grad\beta}grad\alpha\right) = 0.\end{aligned}$$

et

$$\left(\beta^2-1\right)\left(\beta^2+2n\right)\left|grad\alpha\right|^2+\alpha^2\beta^2\left|grad\beta\right|^2$$
$$+\alpha\beta\left(2\beta^2+n-1\right)d\alpha\left(grad\beta\right)+2n\left(\beta^2-1\right)=0.$$

Dans la fin de ce chapitre, nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'application identité $Id:\left(M\times N,\widetilde{G}\right)\longrightarrow\left(M\times N,G\right)$ soit harmonique et nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 3 *L'application identité* $Id:\left(M\times N,\widetilde{G}\right)\longrightarrow\left(M\times N,G\right)$ *est harmonique si et seulement si :*

$$\begin{cases}\left(2n+1\right)\beta grad\alpha+\alpha grad\beta=0\\ \qquad\qquad et\\ \nabla'_{\xi}\xi+\left(div\xi\right)\xi=0.\end{cases}$$

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, nous nous intéressons aux déformations $\mathcal{D}$-conforme généralisées des structures métriques presque de contact.
Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons la relation entre ∇_XY et $\overline{\nabla}_XY$ les connexions de Levi-Civita sur $\left(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)$ et $\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ respectivement. Cette relation est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5 *Pour tout* $X,Y\in\Gamma\left(TM\right)$*, la relation entre* $\overline{\nabla}_XY$ *et* ∇_XY *est donnée par :*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_XY&=\nabla_XY-\frac{\alpha}{\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)grad\alpha+\frac{1}{2\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)grad\beta-\frac{1}{2\beta}g\left(X,Y\right)grad\beta\\&+\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\alpha\right)\xi-\frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\beta\right)\xi+\frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2\beta}g\left(X,Y\right)\xi\left(\beta\right)\xi\\&+\frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta\left(Y\right)\nabla_X\xi+\frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta\left(X\right)\nabla_Y\xi+\frac{1}{2\beta}X\left(\beta\right)Y+\frac{1}{2\beta}Y\left(\beta\right)X\\&-\frac{1}{2\beta}\eta\left(X\right)Y\left(\beta\right)\xi-\frac{1}{2\beta}\eta\left(Y\right)X\left(\beta\right)\xi-\frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta\left(X\right)Tr_gg\left(\nabla.\xi,Y\right)\cdot\\&+\frac{\left(\alpha^2-\beta\right)^2}{2\alpha^2\beta}\eta\left(X\right)g\left(\nabla_\xi\xi,Y\right)\xi-\frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta\left(Y\right)Tr_gg\left(\nabla.\xi,X\right)\cdot\\&+\frac{\left(\alpha^2-\beta\right)^2}{2\alpha^2\beta}\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_\xi\xi,X\right)\xi+\frac{1}{\alpha}\eta\left(Y\right)X\left(\alpha\right)\xi+\frac{1}{\alpha}\eta\left(X\right)Y\left(\alpha\right)\xi\\&+\frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2}g\left(\nabla_X\xi,Y\right)\xi+\frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2}g\left(\nabla_Y\xi,X\right)\xi,\end{aligned}\tag{3}$$

où

$$Tr_gg\left(X,\nabla.\xi\right)\cdot=g\left(X,\nabla_{e_i}\xi\right)e_i+g\left(X,\nabla_{\varphi e_i}\xi\right)\varphi e_i+g\left(X,\nabla_\xi\xi\right)\xi.$$

La deuxième partie de ce chapitre est dédiée à l'étude de l'harmonicité de l'application identitité $Id_M:\left(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)\rightarrow\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$.

Après avoir déformé la métrique d'arrivée g en $\overline{g} = \beta g + (\alpha^2 - \beta)\,\eta \otimes \eta$, nous donnons les expressions des champs de tension de l'application identité dans le cas d'une variété métrique presque de contact comme dans le cas d'une variété de Kenmotsu et nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 6 *Soit $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact et soit $\left(\overline{\varphi} = \varphi, \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \overline{\eta} = \alpha\eta, \overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée définie sur M, où $\overline{g} = \beta g + (\alpha^2 - \beta)\,\eta \otimes \eta$.*
Le champ de tension de l'application identité $Id_M : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est donné par :

$$\begin{aligned}\tau\,(Id) = &-\frac{\alpha}{\beta} grad\alpha - \frac{m-1}{\beta} grad\beta + \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi\,(\alpha)\,\xi \\ &+ \frac{(m-1)\,\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta}\xi\,(\beta)\,\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}\,(div\xi)\,\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{\beta}\nabla_\xi\xi.\end{aligned}$$

En particulier, si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu, le champ de tension de l'application identité $Id_M : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ devient :

$$\begin{aligned}\tau\,(Id) = &-\frac{\alpha}{\beta} grad\alpha - \frac{m-1}{\beta} grad\beta + \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi\,(\alpha)\,\xi \\ &+ \frac{(m-1)\,\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta}\xi\,(\beta)\,\xi + \frac{2m\,(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2}\xi.\end{aligned}$$

Ce théorème nous a permis d'extraire les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles l'application $Id_M : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \to \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est harmonique dans le cas d'une variété métrique presque de contact et aussi dans le cas d'une variété de Kenmotsu. Ces conditions sont données par le corollaire suivant :

Corollaire 4 *L'application identité $Id_M : (M, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est harmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned}&\alpha^3 grad\alpha + (m-1)\,\alpha^2 grad\beta - \alpha\left(\alpha^2+\beta\right)\xi\,(\alpha)\,\xi - \left((m-1)\,\alpha^2 - m\beta\right)\xi\,(\beta)\,\xi \\ &-\left(\alpha^2-\beta\right)\beta\,(div\xi)\,\xi - \alpha^2\left(\alpha^2-\beta\right)\nabla_\xi\xi = 0.\end{aligned}$$

De plus, si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu, nous concluons que $Id_M : (M, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est harmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned}&\alpha^3 grad\alpha + (m-1)\,\alpha^2 grad\beta - \alpha\left(\alpha^2+\beta\right)\xi\,(\alpha)\,\xi \\ &-\left((m-1)\,\alpha^2 - m\beta\right)\xi\,(\beta)\,\xi - 2m\left(\alpha^2-\beta\right)\beta\xi = 0.\end{aligned}$$

Nous donnons ensuite, dans les deux cas, les condition nécessaires et suffisantes pour lesquelles l'application $Id_M : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \to \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est harmonique lorsque les fonctions α et β dépendent uniquement de la direction de ξ.

Comme application du dernier théorème, nous donnons de nouveaux exemples d'applications harmoniques aprés déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée de la métrique d'arrivée.
Dans la dernière partie de ce chapitre, en déformant la métrique de départ par une déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée, nous donnons les expressions des champs de tension quand la variété $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété métrique presque de contact ou lorsqu'elle est une variété de Kenmotsu. Les champs de tension de l'application identité, dans les deux cas, sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 7 *Soit $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact et soit $\left(\overline{\varphi} = \varphi, \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \overline{\eta} = \alpha\eta, \overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée définie sur M, où $\overline{g} = \beta g + (\alpha^2 - \beta)\, \eta \otimes \eta$.*
Le champ de tension de l'application identité $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est donné par :

$$\begin{aligned}\tau(Id) &= \frac{1}{\alpha\beta} grad\alpha + \frac{m-1}{\beta^2} grad\beta - \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha^3\beta}\xi(\alpha)\xi \\ &\quad - \frac{(m-1)\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta^2}\xi(\beta)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}(div\xi)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\nabla_\xi\xi.\end{aligned}$$

en particulier, si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu, Le champ de tension de l'application identité devient :

$$\begin{aligned}\tau(Id) &= \frac{1}{\alpha\beta} grad\alpha + \frac{m-1}{\beta^2} grad\beta - \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha^3\beta}\xi(\alpha)\xi \\ &\quad - \frac{(m-1)\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta^2}\xi(\beta)\xi - \frac{2m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2\beta}\xi.\end{aligned}$$

Dans le cas où les fonctions α et β dépendent seulement de la direction de ξ, le champ de tension de l'application $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ devient :

$$\tau(Id) = -\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi + \frac{m}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}(div\xi)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\nabla_\xi\xi.$$

De plus, si la variété $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu alors l'expression du champ de tension de l'application identité se transforme en :

$$\tau(Id) = -\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi + \frac{m}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi - \frac{2m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2\beta}\xi.$$

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre on rappelle les définitions et certaines propriétés des applications harmoniques, applications biharmoniques et des structures métriques presque de contact dont nous aurons besoin dans la suite de cette thèse.

1.1 Applications harmoniques

1.1.1 Equations d'Euler-Lagrange

Définition 1.1.1.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le lagrangien sur U est une fonction de classe C^∞ :*

$$L : (x, y, z) \in U \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \to L(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Étant donné deux points $x_1, x_2 \in U$, le problème variationnel associé consiste à chercher les courbes $\varphi : [t_1, t_2] \to U$ tracées dans U telles que $\varphi(t_1) = x_1$ et $\varphi(t_2) = x_2$. Ces courbes minimisent la fonctionnelle énergie :

$$E(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right) dt. \tag{1.1}$$

Pour caractériser la fonction $\varphi : [t_1, t_2] \to U$, on considère la variation $\varphi_s(t) = \varphi(t) + sv(t)$ où $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ et $v(t)$ une fonction non nulle, sauf aux bornes t_1 et t_2. On a alors :

$$v(t_1) = v(t_2) = 0, \qquad \varphi_s(t_1) = \varphi(t_1) = x_1, \qquad \varphi_s(t_2) = \varphi(t_2) = x_2.$$

Théorème 1.1.1.1 *D'aprés la définition précédente on a :*

$$\frac{d}{ds}E(\varphi_s)|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right)\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt$$

où $\langle , \rangle_{\mathbb{R}^n}$ désigne le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{\partial L}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial L}{\partial x^n}\right) \qquad , \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \left(\frac{\partial L}{\partial y^1}, \dots \frac{\partial L}{\partial y^n}\right).$$

Preuve du théorème 1.1.1.1.
Considérons l'application $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times [t_1, t_2] \to R$ définie par :

$$\phi(s,t) = \varphi_s(t) = \varphi(t) + sv(t.)\,. \tag{1.2}$$

D'aprés (1.1) et (1.2), nous avons :

$$\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} L\left(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\right)\Big|_{s=0} dt. \tag{1.3}$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} L\left(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t) \frac{\partial L}{\partial x^i}\left(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial t}\right)(s,t) \frac{\partial L}{\partial y^i}\left(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\right).\end{aligned} \tag{1.4}$$

En intégrant par parties, nous trouvons :

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial t}\right)(s,t) \frac{\partial L}{\partial y^i}\left(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial s}\right)(s,t) \frac{\partial L}{\partial y^i}\left(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t) \frac{\partial L}{\partial y^i}\left(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\right)\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &- \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t) \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\left(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\right)\right) dt.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Les formules (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5), nous mènent à déduire que :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &+ \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial y}\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right)\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt.\end{aligned}$$

Comme $v(t_1) = v(t_2) = 0$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right)\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt.\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.1.1.1.

Théorème 1.1.1.2 *La courbe $\varphi : [t_1, t_2] \to U$ est un point critique pour la fonctionnelle énergie $E(\varphi)$ si et seulement si :*

$$\frac{\partial L}{\partial x}\left(\varphi\left(t\right), \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(t\right), t\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\left(\varphi\left(t\right), \frac{d\varphi}{dt}\left(t\right), t\right)\right) = 0. \tag{1.6}$$

Ce système de n équations différentielles du second ordre est appelé système d'équations d'Euler-Lagrange.

Exemple 1.1.1.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit l'application $L : U \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$L(x, y, t) = \frac{y^2}{2}.$$

Dans ce cas le lagrangien représente l'énergie cinétique.

$$E\left(\varphi\right) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt,$$

par conséquent, le système (1.6) se réduit à l'équation :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Les solutions des équations d'Euler-Lagrange sont bien les droites affines (géodésiques) :

$$\varphi(t) = at + b, \qquad\qquad (\text{avec } a, b \in \mathbb{R}^n).$$

1.1.2 Applications harmoniques

Définition 1.1.2.1 *Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes de dimensions m et n respectivement. On appelle densité de φ l'application*

$$e(\varphi) : M \to \mathbb{R}_+,$$

définie par :

$$e(\varphi)(x) = \frac{1}{2}|d_x\varphi|^2, \qquad\qquad \forall x \in M,$$

où $|d_x\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d_x\varphi$ de φ au point x.
Etant donnée $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée de T_xM, alors :

$$\begin{aligned}|d_x\varphi|^2 &= Tr_g\varphi^*h\\ &= \sum_{i=1}^m h\left(d_x\varphi(e_i), d_x\varphi(e_i)\right).\end{aligned}$$

Si $\{x^i\}_{i=1}^m$ et $\{y^j\}_{j=1}^n$ sont les coordonnées locales autour de $x \in M$ et $\varphi(x) \in N$ respectivement, on a alors :

$$|d_x\varphi|^2 = g_x^{i\alpha}\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\Big|_x\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^\alpha}\Big|_x h_{j\beta}(\varphi(x)).$$

Définition 1.1.2.2 *Soit $\varphi : M \to N$ une application de classe C^∞ et D un domaine compact de M. La fonctionnelle de l'énergie de l'application φ sur le domaine D est définie par :*

$$\begin{aligned} E(\varphi, D) &= \int_D e(\varphi) v_g \\ &= \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 \, v_g \end{aligned}$$

où v_g est la forme volume sur M définie par :

$$v_g = \sqrt{\det g_{i\alpha}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m = \sqrt{\det g_{i\alpha}} dx.$$

Définition 1.1.2.3 *Une variation de l'application φ est une application de classe C^∞,*

$$\begin{aligned} \phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) &\to N \\ (x, t) &\to \varphi_t(x), \end{aligned}$$

telle que $(\varphi_t)_{t \in [-\epsilon, \epsilon]}$ est une famille d'applications de classe C^∞ sur M, et $\varphi_0 = \varphi$.

Définition 1.1.2.4 *(Application harmonique).*
Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes. Une application $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ de classe C^∞, est dite harmonique si elle est un point critique de la foncionnelle d'énergie $E(\varphi, D)$ pour tout domaine compact $D \subset M$, i.e :

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t, D) \big|_{t=0} = 0,$$

$\{\varphi_t\}$ étant une variation de classe C^∞ de φ à support compact dans D.

1.1.3 Première variation de l'énergie

Théorème 1.1.3.1 *(Première variation d'énergie).*
Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes. Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans un domaine compact D, alors :

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t, D) |_{t=0} = - \int_D h(v, \tau(\varphi)) \, v_g,$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ dénote le champ de vecteurs de variation de $\{\varphi_t\}$,

$$\tau(\varphi) = Tr_g \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right) \right\}$$

où $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est une base orthonormée sur (M^m, g).
$\tau(\varphi)$ est appelé champ de tension de l'application φ.

Preuve du théorème 1.1.3.1.
Soient $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée locale sur (M^m, g) et $\left\{\frac{d}{dt}\right\}$ une base sur $(-\epsilon, \epsilon)$, alors $\left\{(e_i, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right\}_{i=1}^m$ est une base locale orthonormée pour la métrique diagonale $g + dt^2$ sur la variété produit $M^m \times (-\epsilon, \epsilon)$. On a le crochet de Lie $\left[(e_i, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right] = 0$, pour tout $i = 1, \ldots, m$, nous avons :

$$d\phi(e_i, 0) = d\varphi(e_i) \text{ et } d\phi(0, \frac{d}{dt}) = v.$$

En utilisant la formule de Leibniz, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
d\phi\left(e_i, 0\right)_{(x,0)} &= d_x\phi_0\left(e_i|_x\right) + d_0\phi_x\left(0\right) \\
&= d_x\phi_0\left(e_i|_x\right) \\
&= d_x\varphi\left(e_i|_x\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d\phi\left(0, \frac{d}{dt}\right)_{(x,0)} &= d_x\phi_0\left(0\right) + d_0\phi_x\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}\right) \\
&= d_0\phi_x\left(\frac{d}{dt}\right)|_{t=0} \\
&= v(x),
\end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x, 0)$ et $\phi_x(t) = \phi(x, t)$.
Soit ∇^ϕ la connexion de Pull-back associée à ϕ, on a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E\left(\varphi_t, D\right)|_{t=0} =&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D \sum_{i=1}^m h\left(d\varphi_t\left(e_i\right), d\varphi_t\left(e_i\right)\right) v_g|_{t=0} \\
=& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D \sum_{i=1}^m h\left(d\phi\left(e_i, 0\right), d\phi\left(e_i, 0\right)\right) v_g|_{t=0} \\
=& \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^m h\left(d\phi\left(e_i, 0\right), d\phi\left(e_i, 0\right)\right) v_g|_{t=0} \\
=& \int_D \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^\phi_{\left(0, \frac{d}{dt}\right)} d\phi\left(e_i, 0\right), d\phi\left(e_i, 0\right)\right) v_g|_{t=0} \qquad (1.7) \\
=& \int_D \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^\phi_{(e_i, 0)} d\phi\left(0, \frac{d}{dt}\right), d\phi\left(e_i, 0\right)\right) v_g|_{t=0} \\
=& \int_D \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^N_{d\varphi(e_i)} v, d\varphi\left(e_i\right)\right) v_g \\
=& \int_D \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^\varphi_{e_i} v, d\varphi\left(e_i\right)\right) v_g.
\end{aligned}$$

Soit maintenant ω la 1-forme différentielle à support compact dans D définie par :

$$\omega(X) = h(v, d\varphi(X)), \qquad\qquad \forall X \in \Gamma(TM).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
div^M \omega &= \sum_{i=1}^{m} \left(\nabla_{e_i}\omega\right)(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\{ e_i\left(\omega\left(e_i\right)\right) - \omega\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\{ h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi\left(e_i\right)\right) + h\left(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi\left(e_i\right)\right) - h\left(v, d\varphi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi\left(e_i\right)\right) + h\left(v, \tau\left(\varphi\right)\right).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

D'aprés le théorème de Stokes, nous avons :

$$\int_D div^M \omega v_g = 0. \tag{1.9}$$

En utilisant les formules (1.8) et (1.9) nous obtenons :

$$\int_D \sum_{i=1}^{m} h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi\left(e_i\right)\right) v_g = -\int_D h\left(v, \tau\left(\varphi\right)\right) v_g. \tag{1.10}$$

En remplaçant l'égalité (1.10) dans (1.7) nous obtenons alors :

$$\frac{d}{dt} E\left(\varphi_t, D\right)|_{t=0} = -\int_D h\left(v, \tau\left(\varphi\right)\right) v_g.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.1.3.1.

Théorème 1.1.3.2 *Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. L'application φ est dite harmonique si et seulement si :*

$$\tau(\varphi) = Tr_g \nabla d\varphi = 0,$$

telle que $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est une base orthonormée sur M.

Remarque 1.1.3.1 *Localement, le champ de tension d'une application $\varphi \in C^\infty(M, N)$ entre deux variétés riemanniennes est donné par :*

$$\tau\left(\varphi\right) = g^{ij}\left(\nabla d\varphi\right)\left(\partial_i, \partial_j\right) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x_k} {}^M\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ \varphi \tag{1.11}$$

où $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial}{\partial y_\gamma}$ sont des bases locales des champs de vecteurs sur M et N respectivement.

1.1.4 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 1.1.4.1 *Toute application constante* $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ *est harmonique.*

Exemple 1.1.4.2 *Soient* (M^m, g) *une variété riemannienne, et* $f : (M^m, g) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable. On a alors :*

$$
\begin{aligned}
\tau(f) &= Tr_g \nabla df \\
&= \sum_{i=1}^{m} \nabla df(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \nabla^f_{e_i} df(e_i) - df\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\{ e_i(e_i(f)) - \left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)(f) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} gradf, e_i\right) \\
&= div(gradf) \\
&= \triangle(f),
\end{aligned}
$$

où $\{e_i\}_{i=1}^m$ *est une base orthonormée locale sur* (M^m, g).

Exemple 1.1.4.3 *Soit* $\mathbb{R}^n$ *muni de la métrique canonique* $g_0 = dy_1^2 + \ldots + dy_n^2$ *et soit*

$$\varphi : (M, g) \to (\mathbb{R}^n, g_0), \quad \varphi(x) = \left(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x)\right),$$

une application différentiable.
D'aprés (1.11), et comme ${}^{\mathbb{R}^n}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, *alors le champ de tension de l'application* φ *est donné par :*

$$\tau(\varphi) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_k} {}^M\Gamma^k_{ij}\right) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ \varphi.$$

Donc

$$\tau(\varphi) = \left(\Delta\left(\varphi^1\right), \ldots, \Delta(\varphi^n)\right).$$

Par conséquent, l'application φ *est harmonique si et seulement si les fonctions* φ^α, $\alpha = 1, \ldots, n$ *sont harmoniques.*

Exemple 1.1.4.4 *Soit* $M =]a, b[$ *un intervalle sur* $\mathbb{R}$. *Alors la courbe* $\gamma : (a, b) \to (N^n, h)$ *est harmonique si :*

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} + {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\delta} \frac{d\gamma^\beta}{dt} \frac{d\gamma^\delta}{dt} = 0,$$

donc, γ *est harmonique si et seulement si c'est une géodésique.*

Exemple 1.1.4.5 *Soient* $\mathbb{S}$ *une surface dans* $\mathbb{R}^3$ *et* $\varphi : (\Omega, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^2}) \to (\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^3})$ *une paramétrisation locale de* $\mathbb{S}$ *(où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*) telle que :*

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|, \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{R^3} = 0.$$

Soient $N = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|}$ *le champ de vecteurs unitaire normal à* $\mathbb{S}$, $E = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2$, $F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$ *et* $G = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|^2$ *les composantes de la première forme fondamentale et*

$$e = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, f = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, g = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

les composantes de la duxième forme fondamentale et soit $H = \frac{eG+gE-2fF}{2(EG-F^2)}$ *la courbure moyenne de* $\mathbb{S}$*. On a :*

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tau(\varphi) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

En suivant la même méthode, on obtient $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tau(\varphi) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$*. Par conséquent,* $\tau(\varphi)$ *est normal à la surface* $\mathbb{S}$*, et on a :*

$$H = \frac{e+g}{2E} = \frac{\langle N, \tau(\varphi) \rangle_{\mathbb{R}^3}}{2E}.$$

La surface $\mathbb{S}$ *est donc minimale si et seulement si* φ *est harmonique.*

Exemple 1.1.4.6 *Soit l'application de Hopf :*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^3 &\to \mathbb{S}^2 \\ (s, a, b) &\mapsto (\alpha(s), \psi(a, b)) \end{aligned}$$

où $\psi(a, b) = ka + lb$ *et* $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, \pi]$ *telle que* $\alpha(0) = 0$ *et* $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.
Soient $g_{\mathbb{S}^3} = ds^2 + \cos^2 s da^2 + \sin^2 s db^2$*, la métrique riemannienne sur* $\mathbb{S}^3$ *et*
$h_{\mathbb{S}^2} = d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\psi^2$*, une métrique riemannienne sur* $\mathbb{S}^2$.
On a :
$\left\{e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, e_3 = \frac{\partial}{\partial a}, e_3 = \frac{\partial}{\partial b}\right\}$ *est une base orthonormée sur* $\mathbb{S}^3$.
$\left\{f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}, f_3 = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \psi}\right\}$ *est une base orthonormée sur* $\mathbb{S}^2$.
Par un simple calcul on a :

$$d\phi(e_1) = \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha}, d\phi(e_2) = \frac{k}{\cos s} \frac{\partial}{\partial \psi}, d\phi(e_3) = \frac{l}{\sin s} \frac{\partial}{\partial \psi};$$

$$\nabla^{\mathbb{S}^3}_{e_1} e_1 = 0, \nabla^{\mathbb{S}^3}_{e_2} e_2 = \tan s \frac{\partial}{\partial s}, \nabla^{\mathbb{S}^3}_{e_3} e_3 = -\cos s \frac{\partial}{\partial s};$$

$$\nabla^{\mathbb{S}^2}_{\frac{\partial}{\partial \alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha} = 0, \nabla^{\mathbb{S}^2}_{\frac{\partial}{\partial \psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} = -\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

$$\nabla^{\phi}_{e_1} d\phi\left(e_1\right) = \alpha'' \frac{\partial}{\partial \alpha}, \nabla^{\phi}_{e_2} d\phi\left(e_2\right) = -\frac{k^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 s} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \nabla^{\phi}_{e_3} d\phi\left(e_3\right) = -\frac{l^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 s} \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

où $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$. *En remplaçant ces relations dans l'expression du champ de tension*

$$\tau\left(\phi\right) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(e_i\right) - d\phi\left(\nabla_{e_i} e_i\right) \right\},$$

on trouve que :

$$\tau\left(\phi\right) = \left(\alpha''\left(s\right) + \alpha'\left(s\right)\left(\cot s - \tan s\right) - \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Si $\alpha\left(s\right) = 2s$ *et* $|k| = |l| = 1$, *alors l'application* ϕ *est harmonique.*

Exemple 1.1.4.7 *Soient* (M, g) *et* (N, h) *deux variétés riemanniennes. Si* $\varphi : M \to N$ *est un plongement régulier isométrique, c'est à dire,* φ *est un plongement régulier et que pour tout* $p \in M, X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$ *on a :*

$$g_p\left(X_p, Y_p\right) = h_{\varphi(p)}\left(d\varphi\left(X_p\right), d\varphi\left(Y_p\right)\right).$$

Alors, $\varphi\left(M\right)$ *est une sous-variété de* N, *de plus* $\varphi\left(M\right)$ *est minimale si et seulement si l'application* φ *est harmonique.*
En effet, si $\nabla^{\varphi(M)}$ *est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique induite par* h *sur* $\varphi\left(M\right)$, *et* B *désigne la deuxième forme fondamentale de* $\varphi\left(M\right)$ *sur* N, *alors :*

$$\begin{aligned}
B\left(d\varphi\left(X\right), d\varphi\left(Y\right)\right) &= \left(\nabla^{N}_{d\varphi(X)} d\varphi\left(Y\right)\right)^{\perp} \\
&= \nabla^{N}_{d\varphi(X)} d\varphi\left(Y\right) - \left(\nabla^{N}_{d\varphi(X)} d\varphi\left(Y\right)\right)^{\top} \\
&= \nabla^{\varphi}_{X} d\varphi\left(Y\right) - \nabla^{\varphi(M)}_{d\varphi(X)} d\varphi\left(Y\right) \\
&= \nabla^{\varphi}_{X} d\varphi\left(Y\right) - d\varphi\left(\nabla^{M}_{X} Y\right) \\
&= \nabla d\varphi\left(X, Y\right), \qquad\qquad X, Y \in \Gamma\left(TM\right).
\end{aligned}$$

Soit (e_i) *une base orthonormée locale sur* M. *Comme l'application* φ *est isométrique, on a* $d\varphi\left(e_i\right)$ *une base orthonormée sur* $\varphi\left(M\right)$, *d'où :*

$$\begin{aligned}
H &= TrB \qquad \textit{(courbure moyenne)} \\
&= B\left(d\varphi\left(e_i\right), d\varphi\left(e_i\right)\right) \\
&= \nabla d\varphi\left(e_i, e_i\right) \\
&= \tau\left(\varphi\right).
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.4.8 *Soient* (M^m, g) *une variété riemannienne,* $\mathbb{S}^n$ *la sphère unité de* $\mathbb{R}^{n+1}$, $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *l'injection canonique, et* $\varphi : (M^m, g) \to \mathbb{S}^n$ *une application de classe* C^∞. *Posons* $\psi = i \circ \varphi : (M^m, g) \to \mathbb{R}^{n+1}$, *alors* φ *est harmonique si et seulement si* $\tau(\psi) = -|d\psi|^2 \psi$. *en effet :*

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= \tau(i \circ \varphi)\\ &= di(\tau(\varphi)) + Tr_g \nabla di(d\varphi, d\varphi).\end{aligned}$$

φ *est donc harmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= Tr_g \nabla di(d\varphi, d\varphi)\\ &= \sum_{i=1}^{m} \nabla di(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)),\end{aligned}$$

où $\{e_i\}_{i=1}^m$ *est une base orthonormée locale sur* (M^m, g). *Par conséquent :*

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= -\sum_{i=1}^{m} g(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \mathcal{N}_{\psi(x)} && \text{où } \mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}\\ &= -\sum_{i=1}^{m} |d\varphi(e_i)|^2 \psi(x) && \left(\mathcal{N}_{\psi(x)} = \psi(x)\right)\\ &= -|d\varphi|^2 \psi(x)\\ &= -|d\psi|^2 \psi(x).\end{aligned}$$

Remarque 1.1.4.1 *La composée de deux applications harmoniques n'est pas en général une application harmonique. En particulier, si* φ *est harmonique et si* ψ *est totalement géodésique (c'est à dire* $\nabla d\psi = 0$*), alors* $\psi \circ \varphi$ *est harmonique.*

Exemple 1.1.4.9 *Soit l'application :*

$$\begin{aligned}\varphi : \left(\mathbb{R}, dx^2\right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2\right)\\ x &\longrightarrow (x, 0)\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}\tau(\varphi) &= \left(\frac{\partial^2 x}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

et soit l'application :

$$\begin{aligned}\psi : \left(\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2\right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}, dz^2\right)\\ (x, y) &\longrightarrow x^2 - y^2,\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= \Delta(\psi) \\ &= \frac{\partial^2\psi}{dx^2} + \frac{\partial^2\psi}{dy^2} \\ &= 2-2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Alors les applications φ et ψ sont toutes les deux harmoniques mais la composée

$$\begin{aligned}\psi\circ\varphi : \left(\mathbb{R}, dx^2\right) &\to \left(\mathbb{R}, dz^2\right) \\ x &\to x^2,\end{aligned}$$

est non harmonique car $\tau(\psi\circ\varphi) = 2$.

Exemple 1.1.4.10 *Soit l'inverse de la projection stéréographique :*

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \left(\mathbb{S}^n, h_{\alpha\beta} = \frac{4\delta_{\alpha\beta}}{\left(1+\|y\|^2\right)^2}\right), \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\|x\|^2+1}\left(2x, \|x\|^2 - 1\right).\end{aligned}$$

La norme de Hilbert-Schmidt de df est donnée par :

$$\begin{aligned}|df|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{ij}\left(h_{\alpha\beta}\circ f\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x_j}, \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{4\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}}{\left(1+\|y\|^2\right)^2\circ f}\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{4\delta_{i\alpha}}{\left(1+\|y\|^2\right)^2\circ f} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{\left(1+\|y\|^2\right)^2\circ f} \\ &= \frac{4n}{\left(1+\|y\|^2\right)^2\circ f},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y\|^2\circ f &= \left(y_1^2+ ... + y_n^2\right)\circ f \\ &= \left(\left(\varphi_N^1\right)^2 + ... + \left(\varphi_N^n\right)^2\right)\circ f \\ &= \left(\varphi_N^1\circ f\right)^2 + ... + \left(\varphi_N^n\circ f\right)^2 \\ &= \left(f^1\right)^2 + ... + \left(f^n\right)^2 \\ &= x_1^2 + ... + x_n^2 \\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

Donc $|df| = \frac{2\sqrt{n}}{1+\|x\|^2}$. *On calcule maintenant le champ de tension de l'application* f *:*

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left[\nabla^{f}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - df\left(\underbrace{\nabla^{\mathbb{R}^n}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}}_{=0}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla^{f}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,\alpha=1}^{n} \nabla^{f}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \delta_{i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\circ f\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla^{f}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\circ f\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\circ f \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left({}^{\mathbb{S}^n}\Gamma^{j}_{ii}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\circ f \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {}^{\mathbb{S}^n}\Gamma^{j}_{ii}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\circ f \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n} {}^{\mathbb{S}^n}\Gamma^{j}_{ii}\frac{\partial}{\partial y_j} + {}^{\mathbb{S}^n}\Gamma^{j}_{jj}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\circ f \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{2y_j}{1+\|y\|^2}\frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{2y_j}{1+\|y\|^2}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\circ f.
\end{aligned}$$

Comme ${}^{\mathbb{S}^n}\Gamma^{j}_{ii} = \frac{2y_j}{1+\|y\|^2}$ *et* ${}^{\mathbb{S}^n}\Gamma^{j}_{jj} = -\frac{2y_j}{1+\|y\|^2}$ *pour tout* $i \neq j$, *on trouve que :*

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{2y_j}{1+\|y\|^2}\frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{2y_j}{1+\|y\|^2}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\circ f \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2(n-1)y_j}{1+\|y\|^2}\frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{2y_j}{1+\|y\|^2}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\circ f \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2(n-2)y_j}{1+\|y\|^2}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\circ f \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{2(n-2)x_j}{1+\|x\|^2}\frac{\partial}{\partial y_j}\circ f.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application f *est harmonique si et seulement si* $n = 2$.

1.2 Applications biharmoniques

Définition 1.2.1 *Soient* (M^m, g), (N^n, h) *deux variétés riemanniennes, et* D *un domaine compact de* M. *La bi-énergie d'une application différentiable* $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ *est définie par :*

$$E_2(\varphi, D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g,$$

où $\tau(\varphi)$ *est le champ de tension de l'application* φ, v_g *est la forme volume sur* M *associée à la métrique* g *et* $|\tau(\varphi)|^2 = h(\tau(\varphi), \tau(\varphi))$

Définition 1.2.2 *Soit* $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ *une application différentiable entre deux variétés riemanniennes. L'application* φ *est dite biharmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle bi-énergie* $E_2(\varphi, D)$, *c'est- à-dire :*

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} = 0,$$

pour tout domaine compact D *dans* M *et pour toute variation* $\{\varphi_t\}$ *de classe* C^∞ *à support inclus dans* D.

1.2.1 Première variation de la bi-énergie

Théorème 1.2.1.1 *(Première variation de la bi-énergie)*
Soient $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ *une application différentiable entre deux variétés riemanniennes, et* $\{\varphi_t\}_{t \in]-\varepsilon, \varepsilon[}$ *une variation de classe* C^∞ *de* φ *à support inclus dans* D. *Alors :*

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_2(\varphi)) v_g,$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ *dénote le champ de variation associé à* $\{\varphi_t\}_{t \in]-\varepsilon, \varepsilon[}$, *et* $\tau_2(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ *désigne le champ de bi-tension de l'application* φ *définie relativement à une base orthonormée locale sur* (M^m, g) *par :*

$$\begin{aligned}
\tau_2(\varphi) &= -Tr_g (\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi) - Tr_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi \\
&= -\sum_{i=1}^m \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} \tau(\varphi) \right\} - \sum_{i=1}^m R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i),
\end{aligned}$$

où R^N *désigne le tenseur de courbure riemannienne de la variété* (N^n, h)

Preuve du théorème 1.2.1.1.
Soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support inclus dans un domaine compact D dans M, et soit $\phi : M \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to N$ définie par $\phi(x, t) = \varphi_t(x)$, alors on a

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} = \int_D \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^\phi_{(0, \frac{d}{dt})} \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)) \right) v_g|_{t=0}. \tag{1.12}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} d\phi\left(e_i,0\right) &= \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi\left(0,\frac{d}{dt}\right),\\
\nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} d\phi\left(\nabla^M_{e_i}e_i,0\right) &= \nabla^{\phi}_{\left(\nabla^M_{e_i}e_i,0\right)} d\phi\left(0,\frac{d}{dt}\right),\\
\nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} \nabla d\phi\left(\left(e_i,0\right),\left(e_i,0\right)\right) &= \nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)}\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi\left(e_i,0\right) - \nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} d\phi\left(\nabla^{M\times]-\varepsilon,\varepsilon[}_{(e_i,0)}\left(e_i,0\right)\right)\\
&= R^N\left(d\phi\left(0,\frac{d}{dt}\right), d\phi\left(e_i,0\right)\right) d\phi\left(e_i,0\right) + \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} d\phi\left(e_i,0\right)\\
&\quad + \nabla^{\phi}_{\left[\left(0,\frac{d}{dt}\right),(e_i,0)\right]} d\phi\left(e_i,0\right) - \nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} d\phi\left(\nabla^M_{e_i}e_i,0\right)
\end{aligned}$$

et comme $\left[\left(0,\frac{d}{dt}\right),\left(e_i,0\right)\right]=0$, alors :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} \nabla d\phi\left(\left(e_i,0\right),\left(e_i,0\right)\right) &= R^N\left(d\phi\left(0,\frac{d}{dt}\right), d\phi\left(e_i,0\right)\right) d\phi\left(e_i,0\right) + \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi\left(0,\frac{d}{dt}\right)\\
&\quad - \nabla^{\phi}_{\left(\nabla^M_{e_i}e_i,0\right)} d\phi\left(0,\frac{d}{dt}\right).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&h\left(\nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} \nabla d\phi\left(\left(e_i,0\right),\left(e_i,0\right)\right), \nabla d\phi\left(\left(e_i,0\right),\left(e_i,0\right)\right)\right)|_{t=0} =\\
&\qquad h\left(R^N\left(v,d\varphi\left(e_i\right)\right)d\varphi\left(e_i\right),\tau\left(\varphi\right)\right) + h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau\left(\varphi\right)\right) - h\left(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau\left(\varphi\right)\right).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Soit $\omega \in \Gamma\left(T^*M\right)$ la 1-forme différentielle à support inclus dans un domaine compact D définie par :

$$\omega\left(X\right) = h\left(\nabla^{\varphi}_X v,\tau\left(\varphi\right)\right), \qquad \forall X\in\Gamma\left(TM\right).$$

On a :

$$\begin{aligned}
div^M\omega &= \sum_{i=1}^m\left\{e_i\left(\omega\left(e_i\right)\right) - \omega\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\right\}\\
&= \sum_{i=1}^m\left\{e_i\left(h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau\left(\varphi\right)\right)\right) - h\left(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau\left(\varphi\right)\right)\right\}\\
&= \sum_{i=1}^m\left\{h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau\left(\varphi\right)\right) + h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau\left(\varphi\right)\right) - h\left(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau\left(\varphi\right)\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

D'aprés les formules (1.13) et (1.14), nous avons :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m h\left(\nabla^{\phi}_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)} \nabla d\phi\left(\left(e_i,0\right),\left(e_i,0\right)\right), \nabla d\phi\left(\left(e_i,0\right),\left(e_i,0\right)\right)\right)|_{t=0} =\\
&\qquad \sum_{i=1}^m h\left(R^N\left(v,d\varphi\left(e_i\right)\right)d\varphi\left(e_i\right),\tau\left(\varphi\right)\right) + div^M\omega - \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau\left(\varphi\right)\right).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Soit maintenant $\eta \in \Gamma\left(T^{*}M\right)$ la 1-forme différentielle à support inclus dans un domaine compact D définie par :

$$\eta\left(X\right)=h\left(v,\nabla_{X}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)\right), \qquad\qquad \forall X\in\Gamma\left(TM\right).$$

On a :

$$\begin{aligned} div^{M}\eta &= \sum_{i=1}^{m}\left\{e_{i}\left(\eta\left(e_{i}\right)\right)-\eta\left(\nabla_{e_{i}}^{M}e_{i}\right)\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left\{e_{i}\left(h\left(v,\nabla_{e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)\right)\right)-h\left(v,\nabla_{\nabla_{e_{i}}^{M}e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)\right)\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left\{h\left(\nabla_{e_{i}}^{\varphi}v,\nabla_{e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)\right)+h\left(v,\nabla_{e_{i}}^{\varphi}\nabla_{e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)\right)-h\left(v,\nabla_{\nabla_{e_{i}}^{M}e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

En substituant (1.15) dans (1.16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}h\left(\nabla_{\left(0,\frac{d}{dt}\right)}^{\phi}\nabla d\phi\left(\left(e_{i},0\right),\left(e_{i},0\right)\right),\nabla d\phi\left(\left(e_{i},0\right),\left(e_{i},0\right)\right)\right)|_{t=0} = \\ \sum_{i=1}^{m}h\left(v,\nabla_{e_{i}}^{\varphi}\nabla_{e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)\right)+div^{M}\omega \\ -div^{M}\eta-\sum_{i=1}^{m}h\left(v,\nabla_{\nabla_{e_{i}}^{M}e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)\right) \\ +\sum_{i=1}^{m}h\left(v,R^{N}\left(\tau\left(\varphi\right),d\varphi\left(e_{i}\right)\right)d\varphi\left(e_{i}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.17}$$

D'aprés les formules (1.17), (1.12) et le théorème de divergence, nous déduisons que :

$$\frac{d}{dt}E_{2}\left(\varphi_{t},D\right)|_{t=0}=-\int_{D}\sum_{i=1}^{m}h\left(v,\nabla_{e_{i}}^{\varphi}\nabla_{e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)+\nabla_{\nabla_{e_{i}}^{M}e_{i}}^{\varphi}\tau\left(\varphi\right)-R^{N}\left(\tau\left(\varphi\right),d\varphi\left(e_{i}\right)\right)d\varphi\left(e_{i}\right)\right)v_{g},$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}E_{2}\left(\varphi_{t},D\right)|_{t=0}=-\int_{D}\sum_{i=1}^{m}h\left(v,\tau_{2}\left(\varphi\right)\right)v_{g}|_{t=0}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.2.1.1.
Comme conséquence immédiate du théorème 1.2.1.1, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.1.1 *Une application différentiable $\varphi:\left(M^{m},g\right)\rightarrow\left(N^{n},h\right)$ entre deux variétés riemanniennes est biharmonique si et seulement si $\tau_{2}\left(\varphi\right)=0$.*

Remarque 1.2.1.1 *Soit l'application* $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ *et soient* (U, x^i), (V, x^α) *deux cartes locales en* p *dans* M *et en* $\varphi(p)$ *dans* N *respectivement, alors :*

$$\begin{aligned}
\tau_2(\varphi) = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{n} g^{ij} \Bigg\{ & \frac{\partial^2 \tau^\sigma}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \tau^\beta}{\partial x_j} {}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tau^\alpha \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x_i \partial x_j} {}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \\
& + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tau^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial\, {}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_j} + \sum_{\alpha,\beta,\upsilon,\rho=1}^{n} \tau^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^\upsilon}{\partial x_j} {}^N\Gamma^\rho_{\alpha\beta} {}^N\Gamma^\sigma_{\upsilon\rho} \\
& - \sum_{k=1}^{m} {}^M\Gamma^k_{ij} \left(\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial x_k} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tau^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_k} {}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \right) - \sum_{\alpha,\beta,\upsilon=1}^{n} \tau^\upsilon \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j} {}^N R^\sigma_{\beta\alpha\upsilon} \Bigg\} \frac{\partial}{\partial y_\sigma} \circ \varphi,
\end{aligned}$$

où

$$\tau^\gamma = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x_k} {}^N\Gamma^k_{ij} \right)$$

et ${}^N R^\sigma_{\beta\alpha\upsilon}$ *sont les composantes du tenseur de courbure de* (N^n, h).

Définition 1.2.1.1 (*L'opérateur de Jacobi*). *Soit* $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application différentiable entre deux variétés riemanniennes, on définit l'opérateur de Jacobi de* φ, *noté* J_φ, *par :*

$$\begin{aligned}
J_\varphi : \Gamma\left(\varphi^{-1}(TN)\right) &\longrightarrow \Gamma\left(\varphi^{-1}(TN)\right) \\
V &\longmapsto J_\varphi(V)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_\varphi(V) &= -Tr_g (\nabla^\varphi)^2 V - Tr_g R^N(V, d\varphi) d\varphi \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} V - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} V \right\} + \sum_{i=1}^{m} R^N(V, d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i).
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.1.1 . *Soit* J_φ *l'opérateur de Jacobi de* φ, *Soient* $V \in \Gamma(\varphi^{-1}(TN))$ *et* $f \in C^\infty(M)$, *alors on a :*

1. J_φ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire,*
2. $J_\varphi(fV) = f J_\varphi(V) + (\Delta f) V + 2\nabla^\varphi_{grad\ f} V.$

Preuve de la proposition 1.2.1.1.

1. Soit $V, W \in \Gamma\left(\varphi^{-1}(TN)\right)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
J_\varphi(V+W) =& \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} (V+W) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} (V+W) \right\} \\
& + \sum_{i=1}^m R^N\left((V+W), d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_i) \\
=& \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} V - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} V \right\} + \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} W - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} W \right\} \\
& + \sum_{i=1}^m R^N\left(V, d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_i) + \sum_{i=1}^m R^N\left(W, d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_i) \\
=& \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} V - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} V + R^N\left(V, d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_i) \right\} \\
& + \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} W - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} W + R^N\left(W, d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_i) \right\} \\
=& J_\varphi(V) + J_\varphi(W).
\end{aligned}$$

   D'autre part, il est clair que $J_\varphi(\lambda V) = \lambda J_\varphi(V), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. Soient $V \in \Gamma\left(\varphi^{-1}(TN)\right)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
J_\varphi(fV) =& \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} (fV) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} (fV) \right\} \\
& + \sum_{i=1}^m R^N\left(fV, d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_i) \\
=& \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla^\varphi_{e_i} e_i(f) V + \nabla^\varphi_{e_i} f \nabla^\varphi_{e_i}(V) - \left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)(f) V - f \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} V \right\} \\
& + f \sum_{i=1}^m R^N\left(V, d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_i) \\
=& \sum_{i=1}^m \left\{ e_i(e_i(f)) V + 2 e_i(f) \nabla^\varphi_{e_i} V + f \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} V - \left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)(f) V - f \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i} e_i} V \right\} \\
& + f \sum_{i=1}^m R^N\left(V, d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_i) \\
=& f J_\varphi(V) + (\Delta f) V + 2 \nabla^\varphi_{grad\ f} V.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 1.2.1.1.

Remarque 1.2.1.2 *L'application $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ est biharmonique si et seulement si $\tau(\varphi) \in Ker J_\varphi$.*

1.2.2 Exemples d'applications biharmoniques

Exemple 1.2.2.1 *Toute application harmonique entre deux variétés riemanniennes est biharmonique.*

Exemple 1.2.2.2 *Les polynômes de degré ≤ 3 sur $\mathbb{R}$, sont des applications biharmoniques.*

Exemple 1.2.2.3 *Soit $\mathbb{R}^n$ munit de la métrique canonique $g_0 = dy_1^2 + \ldots + dy_n^2$, et soit*

$$\begin{aligned} \varphi : (M^m, g) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_0) \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \left(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x)\right), \end{aligned}$$

une application différentiable, alors :

$$\tau_2(\varphi) = \left(\tau_2\left(\varphi^1\right), \ldots, \tau_2\left(\varphi^n\right)\right).$$

Par conséquent, l'application φ est biharmonique si et seulement si les applications φ^α, $\alpha = 1, \ldots, n$ sont biharmoniques.

Exemple 1.2.2.4 *Soit :*

$$\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, h),$$

une application différentiable.
Sachant que la sphère unité $\mathbb{S}^n$ est de courbure égale à 1, et d'aprés la formule :

$$R^{\mathbb{S}^n}(X, Y) Z = h(Y, Z) X - h(X, Z) Y,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} Tr_g R^{\mathbb{S}^n}(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi &= Tr_g\left(h(d\varphi, d\varphi)\tau(\varphi) - h(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi\right) \\ &= |d\varphi|^2 \tau(\varphi) - Tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi \\ &= 2e(\varphi)\tau(\varphi) - Tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

où $e(\varphi) = \frac{1}{2}|d\varphi|^2$.
Alors, l'application φ est biharmonique si et seulement si :

$$Tr_g\left(\nabla^\varphi\right)^2 + |d\varphi|^2 \tau(\varphi) - Tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi = 0,$$

autrement dit, l'application φ est biharmonique si et seulement si :

$$Tr_g\left(\nabla^\varphi\right)^2 + 2e(\varphi)\tau(\varphi) - Tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi = 0.$$

Remarque 1.2.2.1 *Les applications biharmoniques ne sont pas nécessairement harmoniques.*

Exemple 1.2.2.5 *Les polynômes de degré 3 sur $\mathbb{R}$, sont des applications biharmoniques non-harmoniques.*

Exemple 1.2.2.6 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= 0,\end{aligned}$$

et soit la fonction $\varphi(x) = r^2(x) f(x)$, où $r(x) = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$,
pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned}r^2(x) &= x_1^2 + ... + x_n^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial r^2}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i} \\ &= 2x_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{\partial r^2}{\partial x_i} f + r^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= 2x_i f + r^2 \frac{\partial f}{\partial x_i},\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 2f + 2x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + 2x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

En calculant le Laplacien de la fonction φ, on trouve que :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2f + \sum_{i=1}^{n} 4x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \\ &= 2nf + 4 \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \underbrace{\Delta f}_{=0} \neq 0.\end{aligned}$$

La fonction φ est donc non-harmonique. Maintenant pour j fixé, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x_j} &= 2n \frac{\partial f}{\partial x_j} + 4 \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial x_i} + 4 \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= 2n \frac{\partial f}{\partial x_j} + 4 \frac{\partial f}{\partial x_j} + 4 \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial x_j^2} = 2n\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + 4\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + 4\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}.$$

Comme

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial x_j^2} = (2n+4)\,\Delta f + 4\Delta f + 4\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,(\Delta f)$$

et

$$\Delta\,(f) = 0,$$

alors $\tau_2\,(\varphi) = 0$, ceci nous conduit à conclure que la fonction φ est une fonction biharmonique non-harmonique.

Exemple 1.2.2.7 *Soit l'inversion :*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ x &\longmapsto \varphi\,(x) = \frac{x}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

En posant $\varphi^\alpha\,(x) = \frac{x_\alpha}{\|x\|^2}$ pour tout $\alpha = 1, ..., n$, et pour i fixé, nous avons :

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} = \delta_{i\alpha}\,\|x\|^{-2} - 2x_\alpha x_i\,\|x\|^{-4},$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x_i^2} = -4\delta_{i\alpha} x_i\,\|x\|^{-4} - 2x_\alpha\,\|x\|^{-4} + 8x_\alpha x_i^2\,\|x\|^{-6}.$$

Le Laplacien de la fonction φ^α est donné donc par :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^\alpha &= -4\sum_{i=1}^{n} \delta_{i\alpha} x_i\,\|x\|^{-4} - 2\sum_{i=1}^{n} x_\alpha\,\|x\|^{-4} + 8\sum_{i=1}^{n} x_\alpha x_i^2\,\|x\|^{-6} \\ &= 4x_\alpha\,\|x\|^{-4} - 2nx_\alpha\,\|x\|^{-4} \\ &= 2\,(2-n)\,x_\alpha\,\|x\|^{-4}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\tau\,(\varphi) = 2\,(2-n)\,\|x\|^{-4}\,x.$$

De la même manière, nous obtenons :

$$\tau_2\,(\varphi) = -8\,(2-n)\,(4-n)\,\|x\|^{-6}\,x,$$

ce qui nous mène à déduire que l'application φ est biharmonique non-harmonique si et seulement si $n = 4$.

1.3 Structures métriques presque de contact

Définition 1.3.1 *Soient :*

- *M une variété différentiable de dimension impaire (2n+1),*
- *φ un champ de tenseurs de type (1,1),*
- *ξ un champ de vecteurs,*
- *η une 1-forme sur M.*

Le triplet (φ, ξ, η) est dit une structure presque de contact sur M tel que

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

Définition 1.3.2 *Une variété presque de contact est une variété de dimension (2n+1) munie d'une structure presque de contact (φ, ξ, η).*

Théorème 1.3.1 *Soit (φ, ξ, η) une structure presque de contact, alors :*

$$\begin{aligned} \varphi\xi &= 0 \\ \eta \circ \varphi &= 0 \\ rang\varphi &= 2n \end{aligned}$$

Preuve du théorème 1.3.1.

1. Soit (φ, ξ, η) une structure presque de contact sur M alors :

   $$\eta(\xi) = 1 \qquad et \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

   En remplaçant X par ξ dans la définition on trouve :

   $$\begin{aligned} \varphi(\varphi\xi) &= \varphi^2\xi \\ &= -\xi + \eta(\xi)\xi = 0 \\ &= -\xi + \xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Ce qui donne : $\varphi\xi = 0$, de plus $\varphi\xi$ est un vecteur propre de φ correspondant à la valeur propre 0.
   Pour le sens inverse on raisonne par l'absurde. Supposons que $\varphi\xi \neq 0$, en remplaçant X par $\varphi\xi$ on trouve :

   $$\varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

   on a :

   $$\varphi^2(\varphi\xi) = 0$$

ce qui implique :

$$-\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi = 0$$

alors :

$$\eta(\varphi\xi)\xi = \varphi\xi$$

donc :

$$\eta(\varphi\xi)\xi \neq 0$$

alors que :

$$\eta(\varphi\xi)\varphi\xi = \varphi^2\xi = 0$$

Ce qui contredit avec le fait que $\eta(\varphi\xi) \neq 0$ et $\varphi\xi \neq 0$.
On déduit finalement que :

$$\varphi\xi = 0$$

2.

$$\begin{aligned}
\eta(\varphi X)\xi &= \varphi^3 X + \varphi X \\
&= \varphi(\varphi^2 X) + \varphi X \\
&= \varphi(-X + \eta(X)\xi) + \varphi X \\
&= \eta(X)\varphi\xi.
\end{aligned}$$

Puisque $\varphi\xi = 0$ alors, $\eta(\varphi X)\xi = 0$
c'est à dire :

$$\eta(\varphi X) = 0 \Rightarrow \eta \circ \varphi = 0$$

3. Puisque $\varphi\xi = 0$, $\xi \neq 0$ et φ non injective alors,

$$rang(\varphi) < 2n + 1.$$

Soit $\overline{\xi}$ un champ de vecteurs tel que $\varphi\overline{\xi} = 0$.
En remplaçant X par ξ dans la définition on trouve :

$$0 = \varphi^2\overline{\xi} = -\overline{\xi} + \eta(\overline{\xi})\xi \Rightarrow \overline{\xi} = \eta(\overline{\xi})\xi,$$

d'où $\overline{\xi}$ est proportionnel à ξ.
Donc $dim\ ker\varphi = 1$, de plus $rang\varphi = (2n + 1) - 1$,
alors :

$$rang\varphi = 2n$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.3.1.

Théorème 1.3.2 *Toute variété presque de contact (M, φ, ξ, η) admet une métrique riemannienne g compatible avec la structure presque de contact (φ, ξ, η) telle que :*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Preuve du théorème 1.3.2.
Soit k une application définie par :

$$k(X,Y) = k'(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y) \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

où k' est une métrique riemannienne sur M^{2n+1}
On définit g par :

$$g(X,Y) = \frac{1}{2}(k(X,Y) + k(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y))$$

alors g est une métrique riemannienne ; de plus on a :

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi Y) &= \frac{1}{2}(k(\varphi X, \varphi Y) + k(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(\varphi X)\eta(\varphi Y)) \\
&= \frac{1}{2}(k(\varphi X, \varphi Y) + k(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi)) \\
&= \frac{1}{2}(k(\varphi X, \varphi Y) + k(X,Y) - k(X, \eta(Y)\xi) - k(Y, \eta(X)\xi) + k(\eta(X)\xi, \eta(Y)\xi)) \\
&= \frac{1}{2}(k(\varphi X, \varphi Y) + k(X,Y) - \eta(Y)k(X,\xi) - \eta(X)k(Y,\xi) + \eta(X)\eta(Y)k(\xi,\xi)) \\
&= \frac{1}{2}(k(\varphi X, \varphi Y) + k(X,Y) - 2\eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\
&= \frac{1}{2}(k(\varphi X, \varphi Y) + k(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) \\
&= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y).
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.3.2.

Proposition 1.3.1 *Toute variété presque de contact (M, φ, ξ, η) admet une métrique riemannienne g telle que :*

$$g(X,\xi) = \eta(X)$$

Preuve de la proposition 1.3.1.
Posons $Y = \xi$, alors :

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi \xi) &= g(X,\xi) - \eta(X)\eta(\xi) \\
0 &= g(X,\xi) - \eta(X) \\
g(X,\xi) &= \eta(X).
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 1.3.1.

Proposition 1.3.2 *Soit (M,φ,ξ,η) une variété presque de contact munie d'une métrique riemannienne g, alors,*

$$g(X,\varphi Y)+g(\varphi X,Y)=0 \qquad\qquad \forall X,Y\in\Gamma(TM).$$

Preuve de la proposition 1.3.2.
Il suffit de faire une simple vérification en remplaçant X par φX et Y par $\varphi^2 Y$.

$$\begin{aligned}
g(\varphi X,\varphi^2 Y) &= g(\varphi X,-Y+\eta(Y)\xi)\\
&= -g(\varphi X,Y)+\eta(Y)g(\varphi X,\xi)\\
&= -g(\varphi X,Y)+\eta(Y)\eta(\varphi X)\\
&= -g(\varphi X,Y).
\end{aligned}$$

comme on a, d'aprés le théorème précédent :

$$\begin{aligned}
g(\varphi X,\varphi^2 Y) &= g(X,\varphi Y)-\eta(X)\eta(\varphi Y)\\
&= g(X,\varphi Y),
\end{aligned}$$

alors :

$$g(X,\varphi Y)=-g(\varphi X,Y).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 1.3.2.

Définition 1.3.3 *Une variété métrique presque de contact (M,φ,ξ,η,g) est une variété presque de contact (M,φ,ξ,η) munie d'une métrique riemannienne g telle que cette métrique soit compatible avec la structure presque de contact (φ,ξ,η).*
Dans ce cas, toute variété métrique presque de contact (M,φ,ξ,η,g) admet une base orthonormée locale, $\{X_i,\varphi X_i,\xi\}_{i=1}^n$ appelée $\varphi-$base.

Définition 1.3.4 *Pour chaque structure métrique presque de contact (φ,ξ,η,g) sur M on définit la 2-forme fontdamentale Φ par :*

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y).$$

La 2-forme fondamentale Φ possède les propriétés suivantes :

1. $\Phi(X,Y)=-\Phi(Y,X)$, *c.à.d, Φ est anti-symétrique.*
2. $\Phi(\varphi X,\varphi Y)=\Phi(X,Y)$, *c.à.d, Φ est invariante à φ.*

$\forall X,Y\in\Gamma(TM)$.

Définition 1.3.5 *On dit qu'une variété M^{2n+1} admet une structure presque de contact s'il existe une 1-forme différentielle globale η et une 2-forme différentielle globale Φ sur M telle que,*

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0,$$

où $\Phi^n = \underbrace{\Phi \wedge \Phi \ldots \wedge \Phi}_{nfois}$.

Les structures métrique presque de contact sont regroupées en tros familles comme la structure sasakienne, cosymplectique et la structure de Kenmotsu.
Dans la partie suivante, nous rappelons quelques structures métriques presque de contact.

1.3.1 Structure sasakienne

Définition 1.3.1.1 *Soient (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est une variété sasakienne si $\Phi = d\eta$ et le triplet (φ, ξ, η) est normal.*

Théorème 1.3.1.1 *Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact et soit ∇ la connexion de Levi-Civita sur M. On dit que M est une variété sasakienne si et seulement si pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$,*

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X.$$

Proposition 1.3.1.1 *Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété sasakienne et R le tenseur de courbure riemannienne de la variété M. Alors pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, les relations suivantes sont vérifées :*

1.
$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{1.18}$$

2.
$$R(X,\xi)Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi \tag{1.19}$$

et pour tout champ de vecteurs unitaire X ortohgonal à ξ on a :

3.
$$R(\xi,X)\xi = -X \tag{1.20}$$

4.
$$R(X,\xi)X = -\xi \tag{1.21}$$

Preuve de la proposition 1.3.1.1.

1.
$$\begin{aligned}
R\left(X,Y\right)\xi &= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\
&= \nabla_X\left(-\varphi Y\right) - \nabla_Y\left(-\varphi X\right) + \varphi\left([X,Y]\right) \\
&= -\nabla_X\left(\varphi Y\right) + \nabla_Y\left(\varphi X\right) + \varphi\left(\nabla_X Y\right) - \varphi\left(\nabla_X Y\right) \\
&= \nabla_Y\varphi X - \varphi\left(\nabla_Y X\right) - \nabla_X\varphi Y + \varphi\left(\nabla_X Y\right) \\
&= \left(\nabla_Y\varphi\right)X - \left(\nabla_X\varphi\right)Y \\
&= g\left(X,Y\right)\xi - \eta\left(X\right)Y - g\left(X,Y\right)\xi + \eta\left(Y\right)X \\
&= \eta\left(Y\right)X - \eta\left(X\right)Y.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
g\left(R\left(X,\xi\right)Y,Z\right) &= g\left(R\left(Y,Z\right)X,\xi\right) \\
&= -g\left(R\left(Y,Z\right)\xi,X\right) \\
&= -g\left(\eta\left(Z\right)Y - \eta\left(Y\right)Z,X\right) \\
&= -\eta\left(Z\right)g\left(X,Y\right) + \eta\left(Y\right)g\left(Z,X\right) \\
&= -g\left(g\left(X,Y\right)\xi,Z\right) + g\left(\eta\left(Y\right)X,Z\right) \\
&= g\left(\eta\left(Y\right)X - g\left(X,Y\right)\xi,Z\right)
\end{aligned}$$

alors, $R\left(X,\xi\right)Y = \eta\left(Y\right)X - g\left(X,Y\right)\xi$

3. En remplaçant X par ξ et Y par X dans l'équation (1.18) on trouve :

$$R\left(\xi,X\right)\xi = \eta\left(X\right)\xi - X$$

et comme X est un champ de vecteurs unitaire orthogonal à ξ alors on a $\eta(X) = g\left(X,\xi\right) = 0$, ceci nous conduit à déduire que :

$$R\left(\xi,X\right)\xi = -X$$

4. En remplaçant Y par X dans dans l'équation (1.19) on trouve :

$$R\left(X,\xi\right)X = \eta\left(X\right)X - g\left(X,X\right)\xi$$

et comme X est un champ de vecteurs unitaire orthogonal à ξ alors on a $\eta(X) = g\left(X,\xi\right) = 0$ et $g\left(X,X\right) = 1$, ceci nous conduit à déduire que :

$$R\left(X,\xi\right)X = -\xi$$

Ceci achève la preuve de la proposition 1.3.1.1.

Proposition 1.3.1.2 *([11]) Soient $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété sasakienne, R le tenseur de courbure riemannienne et S le tenseur de courbure de Ricci de la variété M. Alors pour tout $X,Y,Z,W \in \Gamma\left(TM\right)$, les relations suivantes sont vérifées :*

1. $\eta(R(X,Y)Z) = g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)$
2. $$\begin{aligned} g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Z,\varphi W) = & g(R(X,Y)Z,W) - \eta(X)\eta(W)g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\ & + \eta(Y)\eta(W)g(X,Z) + \eta(X)\eta(Z)g(Y,W). \end{aligned}$$
3. $S(X,\xi) = 2n\eta(X)$
4. $S(\varphi X,\varphi Y) = S(X,Y) - 2n\eta(X)\eta(Y)$

Remarque 1.3.1.1 *Une variété sasakienne $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est dite variété Sasaki-Einstein si g est une métrique d'Einstein, autrement dit, $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est une variété Sasaki-Einstein s'il existe une constante $\lambda = 2n$ telle que :*

$$S = \lambda g,$$

Remarque 1.3.1.2 *Une variété sasakienne $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est dite variété η-Einstein s'il existe des constantes a et b telles que g satisfait la relation suivante :*

$$S = ag + b\eta\otimes\eta.$$

Notons que sur une variété η-Einstein les deux constantes a et b sont liées par :

$$a + b = 2n$$

1.3.2 Structure de Kenmotsu

Définition 1.3.2.1 *Une variété métrique presque de contact $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est dite variété de Kenmotsu si*

$$d\eta = 0 \qquad \text{et} \qquad d\Phi = 2\Phi\wedge\eta,$$

et la triplet (φ,ξ,η) est normal.

Théorème 1.3.2.1 *Soit $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété métrique presque de contact et soit ∇ la connexion de Levi-Civita sur M. On dit que M est une variété de Kenmotsu si et seulement si pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$:*

$$(\nabla_X\varphi)Y = -g(X,\varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X.$$

De cette condition on peut déduire que :

$$\nabla_X\xi = X - \eta(X)\xi.$$

Propriétés 1.3.2.1 *([15], [24] et [35]) Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété de Kenmotsu alors pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$ nous avons :*

$$(\nabla_X\eta)Y = g(\varphi X,\varphi Y),$$

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X,$$
$$R(\xi,X)Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi,$$
$$R(\xi,X)\xi = X - \eta(X)\xi$$

et

$$S(X,\xi) = -2n\eta(X)$$

où R désigne le tenseur de courbure riemannienne et S désigne le tenseur de courbure de Ricci.

1.3.3 Structure cosymplectique

Définition 1.3.3.1 *Soient $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété métrique presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que (M,φ,ξ,η) est une variété cosymplectique si Φ et η sont fermées (c'est-à-dire $d\Phi = 0$ et $d\eta = 0$) et le triplet (φ,ξ,η) est normal.*

Théorème 1.3.3.1 *Soit $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété métrique presque de contact et soit ∇ la connexion de Levi-Civita sur M. On dit que M est une variété cosymplectique si et seulement si pour tout $X,Y \in \Gamma(TM)$:*

$$(\nabla_X\varphi)Y = 0.$$

Proposition 1.3.3.1 *Soit $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété cosymplectique, alors pour tout $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$, on a :*

$$(\nabla_X\Phi)(Y,Z) = 0.$$

Preuve de la proposition 1.3.3.1.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\Phi)(Y,Z) &= X\Phi(Y,Z) - \Phi(\nabla_XY,Z) - \Phi(Y,\nabla_XZ) \\
&= Xg(Y,\varphi Z) - g(\nabla_XY,\varphi Z) - g(Y,\varphi\nabla_XZ) \\
&= g(\nabla_XY,\varphi Z) + g(Y,\nabla_X\varphi Z) - g(\nabla_XY,\varphi Z) - g(Y,\varphi\nabla_XZ) \\
&= g(Y,\nabla_X\varphi Z) - g(Y,\varphi\nabla_XZ) \\
&= g(Y,(\nabla_X\varphi)Z),
\end{aligned}$$

et comme $(\nabla_X\varphi)Z = 0$ d'aprés le théorème 1.3.3.1, on déduit alors que :

$$(\nabla_X\Phi)(Y,Z) = 0.$$

Ceci achève la preuve de la proposition 1.3.3.1.

1.3.4 Structure trans-sasakienne

Définition 1.3.4.1 *Soient* $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété métrique presque de contact et* Φ *la 2-forme fondamentale. On dit que* (M, φ, ξ, η) *est une variété trans-sasakienne si elle est normale et* Φ *et* η *sont fermées (c'est-à-dire* $d\Phi = 0$ *et* $d\eta = 0$*) et le triplet* (φ, ξ, η) *est normal et*

$$d\eta = \alpha\Phi, \qquad d\Phi = 2\beta\Phi \wedge \eta,$$

où $\alpha = \frac{1}{2n}\delta\Phi(\xi)$ *et* $\beta = \frac{1}{2n} div\xi$ *sont des fonctions différentiables sur* M *et* $\delta\Phi$ *et* $\delta\eta$ *sont les codifférentielles de* Φ *et* η *respectivement (les divergence) définies par :*

$$\delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\Phi)(\varphi e_i, X)\} - (\nabla_\xi\Phi)(\xi, X)$$

et

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{e_i}\eta) e_i + (\nabla_{\varphi e_i}\eta) \varphi e_i\}$$

avec $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}_{i=1}^n$ *une* φ*-base locale d'un ouvert quelconque de* M.

Théorème 1.3.4.1 *Soit* $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété métrique presque de contact et soit* ∇ *la connexion de Levi-Civita sur* M^{2n+1}*. On dit que* M^{2n+1} *est une variété trans-sasakienne si et seulement si pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *:*

$$(\nabla_X\varphi)Y = \alpha\left(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\right) - \beta\left(g(X,\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi X\right),$$

où α *et* β *sont des fonctions différentiables sur* M^{2n+1}*, et on dit aussi que la structure trans-sasakienne est de type* (α, β).

Remarque 1.3.4.1 *La structure trans-sasakienne de type* (α, β) *est normale.*

En mettant des conditions sur les fonctions α et β, on peut extraire quelques cas particuliers à partir d'une structure trans-sasakienne.

Remarque 1.3.4.2 *La structure trans-sasakienne est dite une structure :*
- ***sasakienne*** *si* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 0$,
- α***-sasakienne*** *si* $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ *et* $\beta = 0$,
- *de* ***Kenmotsu*** *si* $\alpha = 0$ *et* $\beta = 1$,
- β***-Kenmotsu*** *si* $\alpha = 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}^* - \{1\}$,
- ***cosymplectique*** *si* $\alpha = 0$ *et* $\beta = 0$.

Proposition 1.3.4.1 *Soit* $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété trans-sasakienne, alors pour tout* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$*, on a :*

1. $\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X + \beta\left(X - \eta(X)\xi\right),$
2. $(\nabla_X\eta)Y = \alpha g(X, \varphi Y)\xi + \beta\left(g(X,Y)\xi - \eta(X)\eta(Y)\right)$

3. $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = \alpha\left(g(X,Z)\eta(Y) - g(X,Y)\eta(Z)\right) - \beta\left(g(X,\varphi Z)\eta(Y) - g(X,\varphi Y)\eta(Z)\right).$

Preuve de la proposition 1.3.4.1.

1. on a :

$$(\nabla_X \varphi) Y = \alpha\left(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\right) + \beta\left(g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\right),$$

en remplaçant Y par ξ nous trouvons :

$$(\nabla_X \varphi)\xi = \alpha\left(\eta(X)\xi - X\right) - \beta(\varphi X),$$

et d'autre part, nous savons que :

$$(\nabla_X \varphi)\xi = -\varphi(\nabla_X \xi),$$

alors ,

$$-\varphi(\nabla_X \xi) = \alpha\left(\eta(X)\xi - X\right) - \beta(\varphi X),$$

en appliquant φ, nous trouvons :

$$\nabla_X \xi - \eta(\nabla_X \xi)\xi = -\alpha\varphi X - \beta\left(\varphi^2 X\right),$$

et comme :

$$\eta(\nabla_X \xi)\xi = g(\nabla_X \xi, \xi)\xi = 0,$$

nous déduisons que :

$$\nabla_X \xi = -\alpha\varphi X - \beta\left(X - \eta(X)\xi\right),$$

2. On a :

$$\begin{aligned}(\nabla_X \eta) Y &= X\eta(Y) - \eta(\nabla_X Y)\\ &= Xg(Y,\xi) - g(\nabla_X Y, \xi)\\ &= g(Y, \nabla_X \xi)\\ &= g\left(Y, -\alpha\varphi X - \beta\left(X - \eta(X)\xi\right)\right)\\ &= -\alpha g(Y,\varphi X) - \beta g\left(Y, \varphi^2 X\right)\\ &= -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta g\left(Y, -\varphi^2 X\right)\\ &= -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta g(\varphi Y, \varphi X)\\ &= -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta g(Y,X) - \eta(X)\eta(Y)\end{aligned}$$

3. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_X \Phi\right)(Y,Z) &= X\Phi\left(Y,Z\right) - \Phi\left(\nabla_X Y, Z\right) - \Phi\left(Y, \nabla_X Z\right) \\
&= Xg\left(Y,\varphi Z\right) - g\left(\nabla_X Y, \varphi Z\right) - g\left(Y, \varphi \nabla_X Z\right) \\
&= g\left(Y, \nabla_X \varphi Z\right) - g\left(Y, \varphi \nabla_X Z\right) \\
&= g\left(Y, \left(\nabla_X \varphi\right) Z + \varphi \nabla_X Z\right) - g\left(Y, \varphi \nabla_X Z\right) \\
&= g\left(Y, \left(\nabla_X \varphi\right) Z\right) \\
&= g\left(Y, \alpha\left(g\left(X,Z\right)\xi - \eta\left(Z\right)X\right) + \beta\left(g\left(\varphi X, Z\right)\xi - \eta\left(Z\right)\varphi X\right)\right) \\
&= \alpha g\left(Y, g\left(X,Z\right)\xi - \eta\left(Z\right)X\right) + \beta g\left(Y, g\left(\varphi X, Z\right)\xi - \eta\left(Z\right)\varphi X\right) \\
&= \alpha\left(g\left(X,Z\right)\eta\left(Y\right) - g\left(Y,X\right)\eta\left(Z\right)\right) + \beta\left(g\left(\varphi X, Z\right)\eta\left(Y\right) - g\left(Y, \varphi X\right)\eta\left(Z\right)\right) \\
&= \alpha\left(g\left(X,Z\right)\eta\left(Y\right) - g\left(Y,X\right)\eta\left(Z\right)\right) - \beta\left(g\left(X, \varphi Z\right)\eta\left(Y\right) - g\left(X, \varphi Y\right)\eta\left(Z\right)\right).
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 1.3.4.1.
De cette dernière proposition, on peut facilement déduire la remarque suivante :

Remarque 1.3.4.3 *Soit X un champ de vecteurs orthogonal à ξ qui satisfait $g\left(X,X\right) = 1$ alors on a :*

$$\left(\nabla_X \Phi\right)\left(X,\xi\right) = -\alpha, \qquad \left(\nabla_X \eta\right) X = \beta$$
$$\delta\Phi\left(\xi\right) = 2n\alpha, \qquad \delta\eta = -2n\beta.$$

Chapitre 2

Applications harmoniques et applications bi-harmoniques sur le produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique

Le produit des variétés riemanniennes est un moyen de présenter de nouvelles variétés riemanniennes. En 1969 R.L. Bishop et B. O'Neill [9] ont réussi à généraliser cette notion en introduisant la notion du produit tordu de deux variétés riemanniennes, défini comme suit :
Définition. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes et $f : M \to \mathbb{R}^*$ une fonction différentiable positive sur M. Le produit tordu de (M, g) et (N, h) est la variété produit $M \times_f N$ munie de la métrique riemannienne :

$$\widetilde{G} = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \sigma^* h,$$

où π et σ sont les projections canoniques de $M \times_f N$ sur M et N respectivement.
La variété M est dite la base de $M \times_f N$ alors que la variété N est dite la fibre.

En 2012, D.E. Blair [12] a introduit la notion du produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique entre une variété riemannienne et une variété métrique presque de contact définie comme suit :
Définition. Soient (M^m, g) une variété riemannienne et $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété métrique presque de contact. Pour des fonctions $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ $(\alpha\beta \neq 0$ *partout*$)$, on considère $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ le produit d'une variété riemannienne et une variété métrique presque de contact où :

$$\widetilde{G} = g + \alpha h + \alpha(\alpha - 1)\, \eta \otimes \eta.$$

En outre, l'auteur a donné la définition de la métrique tordu $\mathcal{D}$-homothétique doublée sur le produit de deux variétés métriques presque de contact.
Récemment, en 2016 G. Beldjilali et M. Belkhelfa [5] ont introduit la notion de la métrique bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique sur le produit d'une variété riemannienne avec une variété métrique presque de contact.
Ce chapitre est consacré à la construction puis l'étude d'harmonicité et de biharmonicité des applications vers ou depuis des variétés métriques presque de contact.

Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles une application du produit produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique d'une variété riemannienne et d'une variété métrique presque de contact est harmonique ou biharmonique où nous traitons le cas de la première projection et nous donnons quelques exemples concrets.
Nous déterminons aussi les conditions de biharmonicité de la deuxième projection et de l'inclusion dans le cas d'une variété de Kenmotsu.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié en 2020 dans la $2^{ème}$ issue du volume 18 de la revue ***"Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories"*** intitulé **"On the $\mathcal{D}$-Homothetic BI-Warping and Biharmonic Maps"**.

2.1 Produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique

La notion du produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique a été introduite en 2016 par **G. Beldjilali** et **M. Belkhelfa** [5] en se basant sur la notion de la déformation $\mathcal{D}$-homothétique ($2n$-homothétique) introduite par **S. Tanno** en 1968 [38] où les auteurs ont pu généraliser la notion du produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique introduite par **Blair** en 2012 [12].

Définition 2.1.1 *Soient (M^m, g) une variété riemannienne et $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété métrique presque de contact. Pour des fonctions $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ ($\alpha\beta \neq 0$ partout), on considère $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ le produit d'une variété riemannienne et une variété métrique presque de contact où :*

$$\widetilde{G} = g + \alpha^2 h + \alpha^2\left(\beta^2 - 1\right)\eta \otimes \eta.$$

Le couple $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ est dit variété riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique.

Remarque 2.1.0.4 *Notons que :*
- *si $\beta = \pm 1$ on obtient une métrique produit tordu.*
- *si $\beta = \pm\alpha$ on obtient la métrique produit tordu $\mathcal{D}$-homothétique introduite par **Blair** [12].*

Proposition 2.1.1 *Notons ∇, ∇' et $\widetilde{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita sur (M^m, g), $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ et $\left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ respectivement.*
Pour tout $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TN)$, on a :

$$\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0), (Z_1,0)\right) = g\left(\nabla_{X_1}Y_1, Z_1\right),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2), (0,Z_2)\right) &= \alpha^2 h\left(\nabla'_{X_2}Y_2, Z_2\right) + \alpha^2\left(\beta^2-1\right)\eta(Z_2)\,\eta\left(\nabla'_{X_2}Y_2\right)\\ &+ \frac{1}{2}\alpha^2\left(\beta^2-1\right)\eta(X_2)\left\{h\left(\nabla'_{Y_2}\xi, Z_2\right) - h\left(\nabla'_{Z_2}\xi, Y_2\right)\right\}\\ &+ \frac{1}{2}\alpha^2\left(\beta^2-1\right)\eta(Y_2)\left\{h\left(\nabla'_{X_2}\xi, Z_2\right) - h\left(\nabla'_{Z_2}\xi, X_2\right)\right\}\\ &+ \frac{1}{2}\alpha^2\left(\beta^2-1\right)\eta(Z_2)\left\{h\left(\nabla'_{X_2}\xi, Y_2\right) + h\left(\nabla'_{Y_2}\xi, X_2\right)\right\},\end{aligned}$$

$$\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2),(0,Z_2)\right)=\alpha h(Y_2,Z_2)X_1(\alpha)+\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\alpha)$$
$$+\alpha^2\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta),$$
$$\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(Y_1,0),(0,Z_2)\right)=\alpha h(X_2,Z_2)Y_1(\alpha)+\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(X_2)\eta(Z_2)Y_1(\alpha)$$
$$+\alpha^2\beta\eta(X_2)\eta(Z_2)Y_1(\beta),$$
$$\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(Z_1,0)\right)=-\alpha h(X_2,Y_2)Z_1(\alpha)-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(X_2)\eta(Y_2)Z_1(\alpha)$$
$$-\alpha^2\beta\eta(X_2)\eta(Y_2)Z_1(\beta)$$

et

$$\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0),(0,Z_2)\right)=\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2),(Z_1,0)\right)$$
$$=\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(Y_1,0),(Z_1,0)\right)=0$$

En se basant sur les équations de la proposition 2.1.1, nous pouvons obtenir la proposition suivante :

Proposition 2.1.2 *Considérons* $\{e_i\}_{1\le i\le m}$ *et* $\{f_j,\varphi f_j,\xi\}_{1\le j\le n}$ *deux bases orthonormées sur* (M,g) *et* (N,h) *respectivement, alors* $\left\{(e_i,0),\frac{1}{\alpha}(0,f_j),\frac{1}{\alpha}(0,\varphi f_j),\frac{1}{\alpha\beta}(0,\xi)\right\}$ *est une base orthonormée sur* $\left(M\times N,\widetilde{G}\right)$. *Les équations suivantes nous donnent les relations entre* $\widetilde{\nabla}$, ∇ *et* ∇'.

$$\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0)=(\nabla_{X_1}Y_1,0),\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2)=&\left(0,\nabla'_{X_2}Y_2\right)+\frac{(\beta^2-1)}{2}\left\{\eta(X_2)\left(0,\nabla'_{Y_2}\xi\right)+\eta(Y_2)\left(0,\nabla'_{X_2}\xi\right)\right\}\\&-\frac{(\beta^2-1)}{2}\left\{\eta(X_2)\left(0,Tr_h h\left(\nabla'_{\cdot}\xi,Y_2\right)\cdot\right)+\eta(Y_2)\left(0,Tr_h h\left(\nabla'_{\cdot}\xi,X_2\right)\cdot\right)\right\}\\&+\frac{(\beta^2-1)^2}{2\beta^2}\left\{\eta(X_2)h\left(\nabla'_{\xi}\xi,Y_2\right)+\eta(Y_2)h\left(\nabla'_{\xi}\xi,X_2\right)\right\}(0,\xi)\\&+\frac{(\beta^2-1)}{2\beta^2}\left\{h\left(\nabla'_{X_2}\xi,Y_2\right)+h\left(\nabla'_{Y_2}\xi,X_2\right)\right\}(0,\xi)\\&-\alpha h(X_2,Y_2)(grad\alpha,0)-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(X_2)\eta(Y_2)(grad\alpha,0)\\&-\alpha^2\beta\eta(X_2)\eta(Y_2)(grad\beta,0),\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2)=\frac{1}{\alpha}X_1(\alpha)(0,Y_2)+\frac{1}{\beta}\eta(Y_2)X_1(\beta)(0,\xi)\tag{2.3}$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(Y_1,0)=\frac{1}{\alpha}Y_1(\alpha)(0,X_2)+\frac{1}{\beta}\eta(X_2)Y_1(\beta)(0,\xi).\tag{2.4}$$

Pour tout $X_1,Y_1\in\Gamma(TM)$ *et* $X_2,Y_2\in\Gamma(TN)$.

Preuve de la proposition 2.1.2.
Par un simple calcul nous pouvons facilement obtenir les équations (2.1), (2.3) et (2.4). Pour l'équation (2.2), nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2) &= \widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(e_i,0)\right)(e_i,0)+\frac{1}{\alpha^2}\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(0,f_j)\right)(0,f_j)\\
&+\frac{1}{\alpha^2}\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(0,\varphi f_j)\right)(0,\varphi f_j)+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(0,\xi)\right)(0,\xi).
\end{aligned}$$

Nous étudions cette dernière équation terme par terme. D'aprés la proposition 2.1.1, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(e_i,0)\right)(e_i,0) &= -\alpha h(X_2,Y_2)\,e_i(\alpha)(e_i,0)\\
&-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(X_2)\,\eta(Y_2)\,e_i(\alpha)(e_i,0)\\
&-\alpha^2\beta\eta(X_2)\,\eta(Y_2)\,e_i(\beta)(e_i,0)\\
&= -\alpha h(X_2,Y_2)(grad\alpha,0)\\
&-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(X_2)\,\eta(Y_2)(grad\alpha,0)\\
&-\alpha^2\beta\eta(X_2)\,\eta(Y_2)(grad\beta,0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(0,f_j)\right)(0,f_j) &= \frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta(Y_2)\,h\left(\nabla'_{X_2}\xi,f_j\right)(0,f_j)\\
&+\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta(X_2)\,h\left(\nabla'_{Y_2}\xi,f_j\right)(0,f_j)\\
&-\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta(X_2)\,h\left(\nabla'_{f_j}\xi,Y_2\right)(0,f_j)\\
&-\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta(Y_2)\,h\left(\nabla'_{f_j}\xi,X_2\right)(0,f_j)\\
&+\alpha^2 h\left(\nabla'_{X_2}Y_2,f_j\right)(0,f_j),\\
\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2),(0,\varphi f_j)\right)(0,\varphi f_j) &= \frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta(Y_2)\,h\left(\nabla'_{X_2}\xi,\varphi f_j\right)(0,\varphi f_j)\\
&+\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta(X_2)\,h\left(\nabla'_{Y_2}\xi,\varphi f_j\right)(0,\varphi f_j)\\
&+\alpha^2 h\left(\nabla'_{X_2}Y_2,\varphi f_j\right)(0,\varphi f_j)\\
&-\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta(X_2)\,h\left(\nabla'_{\varphi f_j}\xi,Y_2\right)(0,\varphi f_j)\\
&-\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta(Y_2)\,h\left(\nabla'_{\varphi f_j}\xi,X_2\right)(0,\varphi f_j)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}\left(0,Y_2\right),(0,\xi)\right)(0,\xi) &= \alpha^2 h\left(\nabla'_{X_2}Y_2,\xi\right)(0,\xi)+\alpha^2\left(\beta^2-1\right)\eta\left(\nabla'_{X_2}Y_2\right)(0,\xi)\\
&+\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta\left(X_2\right)\left\{h\left(\nabla'_{Y_2}\xi,\xi\right)-h\left(\nabla'_{\xi}\xi,Y_2\right)\right\}(0,\xi)\\
&+\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta\left(Y_2\right)\left\{h\left(\nabla'_{X_2}\xi,\xi\right)-h\left(\nabla'_{\xi}\xi,X_2\right)\right\}(0,\xi)\\
&+\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\left\{h\left(\nabla'_{X_2}\xi,Y_2\right)+h\left(\nabla'_{Y_2}\xi,X_2\right)\right\}(0,\xi)\\
&=\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\left\{h\left(\nabla'_{X_2}\xi,Y_2\right)+h\left(\nabla'_{Y_2}\xi,X_2\right)\right\}(0,\xi)\\
&-\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta\left(X_2\right)h\left(\nabla'_{\xi}\xi,Y_2\right)(0,\xi)\\
&-\frac{\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{2}\eta\left(Y_2\right)h\left(\nabla'_{\xi}\xi,X_2\right)(0,\xi)\\
&+\alpha^2\beta^2 h\left(\nabla'_{X_2}Y_2,\xi\right)(0,\xi).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}\left(0,Y_2\right) &= \left(0,\nabla'_{X_2}Y_2\right)+\frac{\left(\beta^2-1\right)}{2}\left\{\eta\left(X_2\right)\left(0,\nabla'_{Y_2}\xi\right)+\eta\left(Y_2\right)\left(0,\nabla'_{X_2}\xi\right)\right\}\\
&-\frac{\left(\beta^2-1\right)}{2}\left\{\eta\left(X_2\right)\left(0,Tr_h h\left(\nabla'_{\cdot}\xi,Y_2\right)\cdot\right)+\eta\left(Y_2\right)\left(0,Tr_h h\left(\nabla'_{\cdot}\xi,X_2\right)\cdot\right)\right\}\\
&+\frac{\left(\beta^2-1\right)^2}{2\beta^2}\left\{\eta\left(X_2\right)h\left(\nabla'_{\xi}\xi,Y_2\right)+\eta\left(Y_2\right)h\left(\nabla'_{\xi}\xi,X_2\right)\right\}(0,\xi)\\
&+\frac{\left(\beta^2-1\right)}{2\beta^2}\left\{h\left(\nabla'_{X_2}\xi,Y_2\right)+h\left(\nabla'_{Y_2}\xi,X_2\right)\right\}(0,\xi)-\alpha h\left(X_2,Y_2\right)\left(grad\alpha,0\right)\\
&-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)\left(grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)\left(grad\beta,0\right).
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 2.1.2.
Comme conséquence immédiate de la proposition 2.1.2, nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 2.1.1

$$\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}\left(e_i,0\right)=\left(\nabla_{e_i}e_i,0\right),$$

$$\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}\left(0,f_j\right)=\left(0,\nabla'_{f_j}f_j\right)-\frac{\beta^2-1}{\beta^2}\eta\left(\nabla'_{f_j}f_j\right)(0,\xi)-n\alpha\left(grad\alpha,0\right),$$

$$\widetilde{\nabla}_{(0,\varphi f_j)}\left(0,\varphi f_j\right)=\left(0,\nabla'_{\varphi f_j}\varphi f_j\right)-\frac{\beta^2-1}{\beta^2}\eta\left(\nabla'_{\varphi f_j}\varphi f_j\right)(0,\xi)-n\alpha\left(grad\alpha,0\right),$$

$$\widetilde{\nabla}_{(0,\xi)}\left(0,\xi\right)=\beta^2\left(0,\nabla'_{\xi}\xi\right)-\alpha\beta^2\left(grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\left(grad\beta,0\right),$$

$$\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}\left(0,f_j\right)=\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}\left(e_i,0\right)=\frac{1}{\alpha}e_i\left(\alpha\right)\left(0,f_j\right),$$

$$\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(0,\varphi f_j) = \widetilde{\nabla}_{(0,\varphi f_j)}(e_i,0) = \frac{1}{\alpha} e_i(\alpha)(0,\varphi f_j)$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(0,\xi) = \widetilde{\nabla}_{(0,\xi)}(e_i,0) = \frac{1}{\alpha} e_i(\alpha)(0,\xi) + \frac{1}{\beta} e_i(\beta)(0,\xi).$$

En particulier, si $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ est une variété de Kenmotsu la proposition 2.1.2 nous conduit au lemme suivant :

Lemme 2.1.2 *Soit $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété de Kenmotsu, alors on a :*

$$\nabla'_{X_2}\xi = X_2 - \eta(X_2)\xi,\ \nabla'_{Y_2}\xi = Y_2 - \eta(Y_2)\xi \text{ et } \nabla'_{\xi}\xi = 0,$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \eta(X_2)\left(0, \nabla'_{Y_2}\xi\right) + \eta(Y_2)\left(0, \nabla'_{X_2}\xi\right) &= \eta(X_2)(0, Y_2 - \eta(Y_2)\xi) \\ &+ \eta(Y_2)(0, X_2 - \eta(X_2)\xi) \\ &= \eta(X_2)(0, Y_2) + \eta(Y_2)(0, X_2) \\ &- 2\eta(X_2)\eta(Y_2)(0,\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr_h h(\nabla'_{\cdot}\xi, Y_2)\cdot &= h\left(\nabla'_{f_j}\xi, Y_2\right) f_j + h\left(\nabla'_{\varphi f_j}\xi, Y_2\right)\varphi f_j + h\left(\nabla'_{\xi}\xi, Y_2\right)\xi \\ &= h(f_j, Y_2) f_j + h(\varphi f_j, Y_2)\varphi f_j \\ &= Y_2 - \eta(Y_2)\xi, \end{aligned}$$

$$Tr_h h(\nabla'_{\cdot}\xi, X_2)\cdot = X_2 - \eta(X_2)\xi$$

et

$$\begin{aligned} h\left(\nabla'_{X_2}\xi, Y_2\right) + h\left(\nabla'_{Y_2}\xi, X_2\right) &= h(X_2 - \eta(X_2)\xi, Y_2) + h(Y_2 - \eta(Y_2)\xi, X_2) \\ &= 2h(X_2, Y_2) - 2\eta(X_2)\eta(Y_2). \end{aligned}$$

L'équation (2.2) devient alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2) = &\left(0, \nabla'_{X_2}Y_2\right) - \frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}\eta(X_2)\eta(Y_2)(0,\xi) \\ &+ \frac{(\beta^2-1)}{\beta^2} h(X_2,Y_2)(0,\xi) - \alpha h(X_2,Y_2)(grad\alpha, 0) \\ &- \alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(X_2)\eta(Y_2)(grad\alpha,0) \\ &- \alpha^2\beta\eta(X_2)\eta(Y_2)(grad\beta,0). \end{aligned}$$

Le lemme 2.1.2 nous permet de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1 *Soit $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété de Kenmotsu, alors on a :*

$$\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j) = \left(0, \nabla'_{f_j} f_j\right) - n\alpha(grad\alpha, 0) + \frac{n(\beta^2-1)}{\beta^2}(0,\xi),$$

$$\widetilde{\nabla}_{(0,\varphi f_j)}(0,\varphi f_j)=\left(0,\nabla'_{\varphi f_j}\varphi f_j\right)-n\alpha\,(grad\alpha,0)+\frac{n\,(\beta^2-1)}{\beta^2}(0,\xi)$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{(0,\xi)}(0,\xi)=-\alpha\beta^2\,(grad\alpha,0)-\alpha^2\beta\,(grad\beta,0)\,.$$

Théorème 2.1.1 *Soit* $(N^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,h)$ *une variété de Kenmotsu, les relations entre* $\widetilde{R}$, R^M *et* R^N *sont données par les équation suivantes :*

$$\widetilde{R}\,((X_1,0),(Y_1,0))\,(Z_1,0)=\left(R^M(X_1,Y_1)\,Z_1,0\right),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\,((X_1,0),(0,Y_2))\,(0,Z_2)&=-\alpha\beta\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,X_1\,(\beta)\,(grad\alpha,0)\\&-\alpha\beta\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,X_1\,(\alpha)\,(grad\beta,0)-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,(\nabla_{X_1}grad\alpha,0)\\&-\alpha^2\beta\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,(\nabla_{X_1}grad\beta,0)-\alpha h\,(Y_2,Z_2)\,(\nabla_{X_1}grad\alpha,0)\\&-\frac{1}{\beta^3}\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,X_1\,(\beta)\,(0,\xi)+\frac{1}{\beta^3}h\,(Y_2,Z_2)\,X_1\,(\beta)\,(0,\xi)\\&-\frac{1}{\beta}\eta\,(Z_2)\,X_1\,(\beta)\,(0,Y_2)+\frac{1}{\beta}\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,X_1\,(\beta)\,(0,\xi)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\,((0,X_2),(Y_1,0))\,(Z_1,0)&=-\frac{1}{\alpha\beta}\eta\,(X_2)\,Z_1\,(\alpha)\,Y_1\,(\beta)\,(0,\xi)\\&-\frac{1}{\alpha\beta}\eta\,(X_2)\,Y_1\,(\alpha)\,Z_1\,(\beta)\,(0,\xi)-\frac{1}{\beta}\eta\,(X_2)\,g\,(Z_1,\nabla_{Y_1}grad\beta)\,(0,\xi)\\&-\frac{1}{\alpha}g\,(Z_1,\nabla_{Y_1}grad\alpha)\,(0,X_2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\,((0,X_2),(0,Y_2))\,(0,Z_2)&=\left(0,R^N(X_2,Y_2)\,Z_2\right)+\frac{\alpha^2}{\beta}h\,(Y_2,Z_2)\,\eta\,(X_2)\,(grad\beta,0)\\&-\frac{\alpha^2}{\beta}h\,(X_2,Z_2)\,\eta\,(Y_2)\,(grad\beta,0)+\frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}h\,(Y_2,Z_2)\,(0,X_2)\\&-\frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,(0,X_2)-h\,(Y_2,Z_2)\,|grad\alpha|^2\,(0,X_2)\\&-\frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}h\,(X_2,Z_2)\,(0,Y_2)+\frac{(\beta^2-1)}{\beta^2}\eta\,(X_2)\,\eta\,(Z_2)\,(0,Y_2)\\&+h\,(X_2,Z_2)\,|grad\alpha|^2\,(0,Y_2)-\left(\beta^2-1\right)\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,|grad\alpha|^2\,(0,X_2)\\&-\alpha\beta\eta\,(Y_2)\,\eta\,(Z_2)\,d\alpha\,(grad\beta)\,(0,X_2)+\left(\beta^2-1\right)\eta\,(X_2)\,\eta\,(Z_2)\,|grad\alpha|^2\,(0,Y_2)\\&+\alpha\beta\eta\,(X_2)\,\eta\,(Z_2)\,d\alpha\,(grad\beta)\,(0,Y_2)-\frac{\alpha}{\beta}\eta\,(X_2)\,h\,(Y_2,Z_2)\,d\alpha\,(grad\beta)\,(0,\xi)\\&+\frac{\alpha}{\beta}\eta\,(Y_2)\,h\,(X_2,Z_2)\,d\alpha\,(grad\beta)\,(0,\xi)\,.\end{aligned}$$

Preuve du théorème 2.1.1.
soit $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TN)$. L'égalité

$$\widetilde{R}\left(\left(X_1, 0\right), \left(Y_1, 0\right)\right)\left(Z_1, 0\right) = \left(R^M\left(X_1, Y_1\right) Z_1, 0\right)$$

est déduite directement de l'équation (2.1). Pour le terme $\widetilde{R}\left(\left(X_1, 0\right), \left(0, Y_2\right)\right)\left(0, Z_2\right)$, nous avons :

$$\widetilde{R}\left(\left(X_1, 0\right), \left(0, Y_2\right)\right)\left(0, Z_2\right) = \widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\left(0, Z_2\right) - \widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\left(0, Z_2\right).$$

En utilisant l'équation (2.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\left(0, Z_2\right) &= \left(0, \nabla'_{Y_2} Z_2\right) + \frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\beta^2} h\left(Y_2, Z_2\right)(0, \xi) \\
&- \alpha h\left(Y_2, Z_2\right)(grad\alpha, 0) - \alpha\left(\beta^2 - 1\right)\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)(grad\alpha, 0) \\
&- \alpha^2\beta\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)(grad\beta, 0) - \frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\beta^2}\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)(0, \xi).
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\left(0, Z_2\right) &= -\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\alpha\left(\beta^2 - 1\right)(grad\alpha, 0) \\
&- \eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\alpha^2\beta(grad\beta, 0) - h\left(Y_2, Z_2\right)\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\alpha(grad\alpha, 0) \\
&+ \widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\left(0, \nabla'_{Y_2} Z_2\right) + h\left(Y_2, Z_2\right)\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\beta^2}(0, \xi) \\
&- \eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\beta^2}(0, \xi).
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\left(0, Z_2\right) = &-h\left(Y_2, Z_2\right) X_1(\alpha)(grad\alpha, 0) - \left(\beta^2 - 1\right)\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right) X_1(\alpha)(grad\alpha, 0) \\
&- 2\alpha\beta\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right) X_1(\beta)(grad\alpha, 0) - \alpha^2\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right) X_1(\beta)(grad\beta, 0) \\
&- 2\alpha\beta\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right) X_1(\alpha)(grad\beta, 0) - \alpha h\left(Y_2, Z_2\right)\left(\nabla_{X_1} grad\alpha, 0\right) \\
&- \alpha\left(\beta^2 - 1\right)\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)\left(\nabla_{X_1} grad\alpha, 0\right)\alpha^2\beta\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)\left(\nabla_{X_1} grad\beta, 0\right) \\
&- \frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\alpha\beta^2}\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right) X_1(\alpha)(0, \xi) - \frac{\left(\beta^2 + 1\right)}{\beta^3}\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right) X_1(\beta)(0, \xi) \\
&+ \frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\alpha\beta^2} h\left(Y_2, Z_2\right) X_1(\alpha)(0, \xi) + \frac{\left(\beta^2 + 1\right)}{\beta^3} h\left(Y_2, Z_2\right) X_1(\beta)(0, \xi) \\
&+ \frac{1}{\alpha} X_1(\alpha)\left(0, \nabla'_{Y_2} Z_2\right) + \frac{1}{\beta}\eta\left(\nabla'_{Y_2} Z_2\right) X_1(\beta)(0, \xi).
\end{aligned}$$

Calculons maintenant le deuxième terme $\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\left(0, Z_2\right)$; nous avons

$$\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}\left(0, Z_2\right) = \frac{1}{\alpha} X_1(\alpha)\left(0, Z_2\right) + \frac{1}{\beta}\eta\left(Z_2\right) X_1(\beta)(0, \xi),$$

ce qui nous donne :

$$\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Z_2)=\frac{1}{\alpha}X_1(\alpha)\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}(0,Z_2)+\frac{1}{\beta}X_1(\beta)\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\eta(Z_2)(0,\xi).$$

Un calcul similaire nous amène à :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{(0,Y_2)}\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Z_2)&=-h(Y_2,Z_2)X_1(\alpha)(grad\alpha,0)-\left(\beta^2-1\right)\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\alpha)(grad\alpha,0)\\&-\alpha\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(grad\alpha,0)-\alpha\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\alpha)(grad\beta,0)\\&-\alpha^2\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(grad\beta,0)+\frac{(\beta^2-1)}{\alpha\beta^2}h(Y_2,Z_2)X_1(\alpha)(0,\xi)\\&+\frac{1}{\beta}\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,Y_2)-\frac{1}{\beta}\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,\xi)\\&+\frac{1}{\beta}X_1(\beta)\eta\left(\nabla'_{Y_2}Z_2\right)(0,\xi)+\frac{1}{\alpha}X_1(\alpha)\left(0,\nabla'_{Y_2}Z_2\right)\\&-\frac{(\beta^2-1)}{\alpha\beta^2}\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\alpha)(0,\xi)+\frac{1}{\beta}h(Y_2,Z_2)X_1(\beta)(0,\xi)\\&-\frac{1}{\beta}\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,\xi).\end{aligned}$$

Finalement, nous déduisons que :

$$\begin{aligned}&\widetilde{R}((X_1,0),(0,Y_2))(0,Z_2)\\&=-\alpha\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(grad\alpha,0)-\alpha\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\alpha)(grad\beta,0)\\&-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta(Y_2)\eta(Z_2)(\nabla_{X_1}grad\alpha,0)-\alpha^2\beta\eta(Y_2)\eta(Z_2)(\nabla_{X_1}grad\beta,0)\\&-\alpha h(Y_2,Z_2)(\nabla_{X_1}grad\alpha,0)-\frac{1}{\beta^3}\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,\xi)\\&+\frac{1}{\beta^3}h(Y_2,Z_2)X_1(\beta)(0,\xi)-\frac{1}{\beta}\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,Y_2)\\&+\frac{1}{\beta}\eta(Y_2)\eta(Z_2)X_1(\beta)(0,\xi).\end{aligned}$$

Pour le terme $\widetilde{R}((0,X_2),(Y_1,0))(Z_1,0)$, nous avons :

$$\widetilde{R}((0,X_2),(Y_1,0))(Z_1,0)=\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}\widetilde{\nabla}_{(Y_1,0)}(Z_1,0)-\widetilde{\nabla}_{(Y_1,0)}\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(Z_1,0).$$

En utilisant les mêmes méthodes de calcul, nous obtenons :

$$\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}\widetilde{\nabla}_{(Y_1,0)}(Z_1,0)=\frac{1}{\alpha}(\nabla_{Y_1}Z_1)(\alpha)(0,X_2)+\frac{1}{\beta}\eta(X_2)(\nabla_{Y_1}Z_1)(\beta)(0,\xi)$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{(Y_1,0)}\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(Z_1,0)&=\frac{1}{\alpha\beta}\eta(X_2)Z_1(\alpha)Y_1(\beta)(0,\xi)+\frac{1}{\alpha\beta}\eta(X_2)Y_1(\alpha)Z_1(\beta)(0,\xi)\\&+\frac{1}{\beta}\eta(X_2)(\nabla_{Y_1}Z_1)(\beta)(0,\xi)+\frac{1}{\beta}\eta(X_2)g(Z_1,\nabla_{Y_1}grad\beta)(0,\xi)\\&+\frac{1}{\alpha}(\nabla_{Y_1}Z_1)(\alpha)(0,X_2)+\frac{1}{\alpha}g(Z_1,\nabla_{Y_1}grad\alpha)(0,X_2).\end{aligned}$$

Alors, nous concluons que :

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(\left(0,X_2\right),\left(Y_1,0\right)\right)\left(Z_1,0\right) &= -\frac{1}{\alpha\beta}\eta\left(X_2\right)Z_1\left(\alpha\right)Y_1\left(\beta\right)\left(0,\xi\right)-\frac{1}{\alpha\beta}\eta\left(X_2\right)Y_1\left(\alpha\right)Z_1\left(\beta\right)\left(0,\xi\right)\\ &\quad -\frac{1}{\beta}\eta\left(X_2\right)g\left(Z_1,\nabla_{Y_1}grad\beta\right)\left(0,\xi\right)-\frac{1}{\alpha}g\left(Z_1,\nabla_{Y_1}grad\alpha\right)\left(0,X_2\right).\end{aligned}$$

Pour compléter la preuve, nous calculons le terme $\widetilde{R}\left(\left(0,X_2\right),\left(0,Y_2\right)\right)\left(0,Z_2\right)$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(\left(0,X_2\right),\left(0,Y_2\right)\right)\left(0,Z_2\right) &= \widetilde{\nabla}_{\left(0,X_2\right)}\widetilde{\nabla}_{\left(0,Y_2\right)}\left(0,Z_2\right)-\widetilde{\nabla}_{\left(0,Y_2\right)}\widetilde{\nabla}_{\left(0,X_2\right)}\left(0,Z_2\right)\\ &\quad -\widetilde{\nabla}_{\left[\left(0,X_2\right),\left(0,Y_2\right)\right]}\left(0,Z_2\right).\end{aligned}$$

En utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\left(0,X_2\right)}\left(0,Y_2\right) &= \left(0,\nabla'_{X_2}Y_2\right)+\frac{\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}\left\{h\left(X_2,Y_2\right)-\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)\right\}\left(0,\xi\right)\\ &\quad -\alpha h\left(X_2,Y_2\right)\left(grad\alpha,0\right)-\alpha\left(\beta^2-1\right)\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)\left(grad\alpha,0\right)\\ &\quad -\alpha^2\beta\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)\left(grad\beta,0\right),\end{aligned}$$

$$X_2\left(\eta\left(Y_2\right)\right)=h\left(X_2,Y_2\right)-\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)+\eta\left(\nabla'_{X_2}Y_2\right),$$

$$\widetilde{\nabla}_{\left(0,X_2\right)}\left(0,\xi\right)=\left(0,X_2\right)-\eta\left(X_2\right)\left(0,\xi\right)-\alpha\beta^2\eta\left(X_2\right)\left(grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\eta\left(X_2\right)\left(grad\beta,0\right),$$

$$\widetilde{\nabla}_{\left(0,X_2\right)}\left(grad\alpha,0\right)=\frac{1}{\alpha}\left|grad\alpha\right|^2\left(0,X_2\right)+\frac{1}{\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)\eta\left(X_2\right)\left(0,\xi\right)$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{\left(0,X_2\right)}\left(grad\beta,0\right)=\frac{1}{\alpha}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,X_2\right)+\frac{1}{\beta}\left|grad\beta\right|^2\eta\left(X_2\right)\left(0,\xi\right),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\widetilde{R}\left(\left(0,X_2\right),\left(0,Y_2\right)\right)\left(0,Z_2\right)\\ &= \left(0,R^N\left(X_2,Y_2\right)Z_2\right)+\frac{\alpha^2}{\beta}h\left(Y_2,Z_2\right)\eta\left(X_2\right)\left(grad\beta,0\right)\\ &-\frac{\alpha^2}{\beta}h\left(X_2,Z_2\right)\eta\left(Y_2\right)\left(grad\beta,0\right)+\frac{\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}h\left(Y_2,Z_2\right)\left(0,X_2\right)\\ &-\frac{\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)\left(0,X_2\right)-h\left(Y_2,Z_2\right)\left|grad\alpha\right|^2\left(0,X_2\right)\\ &-\frac{\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}h\left(X_2,Z_2\right)\left(0,Y_2\right)+\frac{\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}\eta\left(X_2\right)\eta\left(Z_2\right)\left(0,Y_2\right)\\ &+h\left(X_2,Z_2\right)\left|grad\alpha\right|^2\left(0,Y_2\right)-\left(\beta^2-1\right)\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)\left|grad\alpha\right|^2\left(0,X_2\right)\\ &-\alpha\beta\eta\left(Y_2\right)\eta\left(Z_2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,X_2\right)+\left(\beta^2-1\right)\eta\left(X_2\right)\eta\left(Z_2\right)\left|grad\alpha\right|^2\left(0,Y_2\right)\\ &+\alpha\beta\eta\left(X_2\right)\eta\left(Z_2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,Y_2\right)-\frac{\alpha}{\beta}\eta\left(X_2\right)h\left(Y_2,Z_2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right)\\ &+\frac{\alpha}{\beta}\eta\left(Y_2\right)h\left(X_2,Z_2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right).\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 2.1.1.
Comme conséquences du théorème 2.1.1, nous obtenons les corollaires suivants :

Corollaire 2.1.2 *Soit $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété de Kenmotsu et soit $\widetilde{Ricci}$ le tenseur de Ricci de la variété riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique, on a alors :*

$$\widetilde{R}\left(\left(X_1, 0\right), \left(e_i, 0\right)\right)\left(e_i, 0\right) = \left(Ricci^M\left(X_1\right), 0\right),$$

$$\widetilde{R}\left(\left(X_1, 0\right), \left(0, f_j\right)\right)\left(0, f_j\right) = -n\alpha\left(\nabla_{X_1} grad\alpha, 0\right) + \frac{n}{\beta^3} X_1\left(\beta\right)\left(0, \xi\right),$$

$$\widetilde{R}\left(\left(X_1, 0\right), \left(0, \varphi f_j\right)\right)\left(0, \varphi f_j\right) = -n\alpha\left(\nabla_{X_1} grad\alpha, 0\right) + \frac{n}{\beta^3} X_1\left(\beta\right)\left(0, \xi\right)$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(\left(X_1, 0\right), \left(0, \xi\right)\right)\left(0, \xi\right) = & -\alpha\beta X_1\left(\beta\right)\left(grad\alpha, 0\right) - \alpha\beta X_1\left(\alpha\right)\left(grad\beta, 0\right) \\ & - \alpha\beta^2\left(\nabla_{X_1} grad\alpha, 0\right) - \alpha^2\beta\left(\nabla_{X_1} grad\beta, 0\right).\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}\widetilde{Ricci}\left(X_1, 0\right) = & \left(Ricci^M\left(X_1\right), 0\right) - \frac{2n+1}{\alpha}\left(\nabla_{X_1} grad\alpha, 0\right) + \frac{2n}{\alpha^2\beta^3} X_1\left(\beta\right)\left(0, \xi\right) \\ & - \frac{1}{\alpha\beta} X_1\left(\beta\right)\left(grad\alpha, 0\right) - \frac{1}{\alpha\beta} X_1\left(\alpha\right)\left(grad\beta, 0\right) - \frac{1}{\beta}\left(\nabla_{X_1} grad\beta, 0\right).\end{aligned}$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(\left(0, X_2\right), \left(e_i, 0\right)\right)\left(e_i, 0\right) = & -\frac{1}{\alpha}\left(\Delta\alpha\right)\left(0, X_2\right) - \frac{1}{\beta}\eta\left(X_2\right)\left(\Delta\beta\right)\left(0, \xi\right) \\ & - \frac{2}{\alpha\beta}\eta\left(X_2\right) d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0, \xi\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(\left(0, X_2\right), \left(0, f_j\right)\right)\left(0, f_j\right) = & \left(0, R^N\left(X_2, f_j\right) f_j\right) + \frac{n\alpha^2}{\beta}\eta\left(X_2\right)\left(grad\beta, 0\right) \\ & + \frac{n\left(\beta^2 - 1\right)}{\beta^2}\left(0, X_2\right) - \frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\beta^2} h\left(X_2, f_j\right)\left(0, f_j\right) \\ & + \left|grad\alpha\right|^2 h\left(X_2, f_j\right)\left(0, f_j\right) - n\left|grad\alpha\right|^2\left(0, X_2\right) \\ & - \frac{n\alpha}{\beta}\eta\left(X_2\right) d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0, \xi\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(\left(0, X_2\right), \left(0, \varphi f_j\right)\right)\left(0, \varphi f_j\right) = & \left(0, R^N\left(X_2, \varphi f_j\right)\varphi f_j\right) + \frac{n\alpha^2}{\beta}\eta\left(X_2\right)\left(grad\beta, 0\right) \\ & + \frac{n\left(\beta^2 - 1\right)}{\beta^2}\left(0, X_2\right) - \frac{\left(\beta^2 - 1\right)}{\beta^2} h\left(X_2, \varphi f_j\right)\left(0, \varphi f_j\right) \\ & + \left|grad\alpha\right|^2 h\left(X_2, \varphi f_j\right)\left(0, \varphi f_j\right) - n\left|grad\alpha\right|^2\left(0, X_2\right) \\ & - \frac{n\alpha}{\beta}\eta\left(X_2\right) d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0, \xi\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(\left(0,X_2\right),\left(0,\xi\right)\right)\left(0,\xi\right) = &\left(0,R^N\left(X_2,\xi\right)\xi\right) - \alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,X_2\right)\\ &- \beta^2\left|grad\alpha\right|^2\left(0,X_2\right) + \beta^2\eta\left(X_2\right)\left|grad\alpha\right|^2\left(0,\xi\right)\\ &+ \alpha\beta\eta\left(X_2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right),\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\widetilde{Ricci}\left(0,X_2\right) = &\frac{1}{\alpha^2}\left(0,Ricci^N\left(X_2\right)\right) - \frac{1}{\alpha}\left(\Delta\alpha\right)\left(0,X_2\right) - \frac{2n}{\alpha^2}\left|grad\alpha\right|^2\left(0,X_2\right)\\ &+ \frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^2\beta^2}\left(0,X_2\right) - \frac{1}{\alpha\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,X_2\right) - \frac{1}{\beta}\eta\left(X_2\right)\left(\Delta\beta\right)\left(0,\xi\right)\\ &- \frac{2n+1}{\alpha\beta}\eta\left(X_2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right) + \frac{2n}{\beta}\eta\left(X_2\right)\left(grad\beta,0\right).\end{aligned}$$

Corollaire 2.1.3 *Soit $(N^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,h)$ une variété de Kenmotsu, on a alors :*

$$\begin{aligned}\widetilde{Ricci}\left(X_1,X_2\right) = &\left(Ricci^M\left(X_1\right),\frac{1}{\alpha^2}Ricci^N\left(X_2\right)\right) - \frac{2n+1}{\alpha}\left(\nabla_{X_1}grad\alpha,0\right) - \frac{1}{\beta}\left(\nabla_{X_1}grad\beta,0\right)\\ &+ \frac{2n}{\beta}\eta\left(X_2\right)\left(grad\beta,0\right) - \frac{1}{\alpha\beta}X_1\left(\beta\right)\left(grad\alpha,0\right) - \frac{1}{\alpha\beta}X_1\left(\alpha\right)\left(grad\beta,0\right)\\ &- \frac{1}{\alpha}\left(\Delta\alpha\right)\left(0,X_2\right) - \frac{2n}{\alpha^2}\left|grad\alpha\right|^2\left(0,X_2\right) + \frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^2\beta^2}\left(0,X_2\right)\\ &- \frac{1}{\alpha\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,X_2\right) - \frac{2n+1}{\alpha\beta}\eta\left(X_2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right)\\ &+ \frac{2n}{\alpha^2\beta^3}X_1\left(\beta\right)\left(0,\xi\right) - \frac{1}{\beta}\eta\left(X_2\right)\left(\Delta\beta\right)\left(0,\xi\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{S}\left(\left(X_1,X_2\right),\left(Y_1,Y_2\right)\right) = &S^M\left(X_1,Y_1\right) + S^N\left(X_2,Y_2\right) - \frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)\\ &- \frac{2n+1}{\alpha}g\left(\nabla_{X_1}grad\alpha,Y_1\right) - \frac{1}{\beta}g\left(\nabla_{X_1}grad\beta,Y_1\right) + \frac{2n}{\beta}Y_1\left(\beta\right)\eta\left(X_2\right)\\ &+ \frac{2n}{\beta}X_1\left(\beta\right)\eta\left(Y_2\right) - \frac{1}{\alpha\beta}X_1\left(\beta\right)Y_1\left(\alpha\right) - \frac{1}{\alpha\beta}X_1\left(\alpha\right)Y_1\left(\beta\right)\\ &- \alpha\left(\beta^2-1\right)\left(\Delta\alpha\right)\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right) - 2n\left(\beta^2-1\right)\left|grad\alpha\right|^2\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)\\ &- 2\left(n+1\right)\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right) + \frac{\alpha}{\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right)\\ &- \alpha^2\beta\left(\Delta\beta\right)\eta\left(X_2\right)\eta\left(Y_2\right) - \alpha\left(\Delta\alpha\right)h\left(X_2,Y_2\right) - 2n\left|grad\alpha\right|^2h\left(X_2,Y_2\right)\\ &- \frac{\alpha}{\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)h\left(X_2,Y_2\right) + \frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}h\left(X_2,Y_2\right),\end{aligned}$$

où $\widetilde{Ricci}$ désigne le tenseur de Ricci de la variété riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique et $\widetilde{S}$ désigne le tenseur de courbure de Ricci de la variété riemannienne produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique.

2.2 Applications harmoniques et applications bi-harmoniques sur le produit bi-tordu $\mathcal{D}$-homothétique

2.2.1 Le cas de $\Phi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$

Théorème 2.2.1.1 *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (P^p, k)$ une application de classe C^∞. Le champ de tension et le champ de bi-tension de l'application $\Phi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ définie par $\Phi(x, y) = \phi(x)$ sont donnés par :*

$$\tau(\Phi) = \tau(\phi) + \frac{2n+1}{\alpha} d\phi(grad\alpha) + \frac{1}{\beta} d\phi(grad\beta)$$

et

$$\begin{aligned}
\tau_2(\Phi) &= \tau_2(\phi) - \frac{2n+1}{\alpha} \nabla_{grad\alpha} \tau(\phi) - \frac{1}{\beta} \nabla_{grad\beta} \tau(\phi) \\
&- \frac{2n+1}{\alpha} \left\{ Tr_g \nabla^2 d\phi(grad\alpha) + Tr_g R^P (d\phi(grad\alpha), d\phi) d\phi \right\} \\
&- \frac{1}{\beta} \left\{ Tr_g \nabla^2 d\phi(grad\beta) + Tr_g R^P (d\phi(grad\beta), d\phi) d\phi \right\} \\
&+ \frac{2n+1}{\alpha^2} (\Delta\alpha) d\phi(grad\alpha) + \frac{4n^2-1}{\alpha^3} |grad\alpha|^2 d\phi(grad\alpha) \\
&+ \frac{1}{\beta^2} (\Delta\beta) d\phi(grad\beta) - \frac{1}{\beta^3} |grad\beta|^2 d\phi(grad\beta) \\
&+ \frac{2n+1}{\alpha^2\beta} d\alpha(grad\beta) d\phi(grad\alpha) + \frac{2n+1}{\alpha\beta^2} d\alpha(grad\beta) d\phi(grad\beta) \\
&- \frac{4n^2-1}{\alpha^2} \nabla_{grad\alpha} d\phi(grad\alpha) - \frac{2n+1}{\alpha\beta} \nabla_{grad\alpha} d\phi(grad\beta) \\
&- \frac{2n+1}{\alpha\beta} \nabla_{grad\beta} d\phi(grad\alpha) + \frac{1}{\beta^2} \nabla_{grad\beta} d\phi(grad\beta).
\end{aligned}$$

Preuve du théorème 2.2.1.1.
Par définition de Φ, nous obtenons $d\Phi(X, Y) = d\phi(X)$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$. Le calcul du champ de tension est donné par :

$$\begin{aligned}
\tau(\Phi) &= Tr_{\widetilde{G}} \nabla d\Phi \\
&= \nabla_{(e_i,0)} d\Phi(e_i, 0) - d\Phi\left(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i, 0)\right) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{(0,f_j)} d\Phi(0, f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\Phi\left(\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0, f_j)\right) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{(0,\varphi f_j)} d\Phi(0, \varphi f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\Phi\left(\widetilde{\nabla}_{(0,\varphi f_j)}(0, \varphi f_j)\right) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2\beta^2} \nabla_{(0,\xi)} d\Phi(0, \xi) - \frac{1}{\alpha^2\beta^2} d\Phi\left(\widetilde{\nabla}_{(0,\xi)}(0, \xi)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1.1 et le fait que $\tau(\phi) = \nabla_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)$, nous déduisons alors :

$$\tau(\Phi) = \tau(\phi) + \frac{2n+1}{\alpha} d\phi(grad\alpha) + \frac{1}{\beta} d\phi(grad\beta).$$

Calculons maintenant le champ de bi-tension, nous avons :

$$\begin{aligned}
\tau_2(\Phi) &= -Tr_{\widetilde{G}} \nabla^2 \tau(\Phi) - Tr_{\widetilde{G}} R^P(\tau(\Phi), d\Phi) d\Phi \\
&= -Tr_{\widetilde{G}} \nabla^2 \tau(\phi) - Tr_{\widetilde{G}} R^P(\tau(\phi), d\Phi) d\Phi \\
&- (2n+1) Tr_{\widetilde{G}} \nabla^2 \frac{1}{\alpha} d\phi(grad\alpha) - \frac{2n+1}{\alpha} Tr_{\widetilde{G}} R^P(d\phi(grad\alpha), d\Phi) d\Phi \\
&- Tr_{\widetilde{G}} \nabla^2 \frac{1}{\beta} d\phi(grad\beta) - \frac{1}{\beta} Tr_{\widetilde{G}} R^P(d\phi(grad\beta), d\Phi) d\Phi.
\end{aligned}$$

Un calcul simple nous donne :

$$\begin{aligned}
Tr_{\widetilde{G}} \nabla^2 \tau(\phi) &= \nabla_{(e_i,0)} \nabla_{(e_i,0)} \tau(\phi) - \nabla_{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)} \tau(\phi) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{(0,f_j)} \nabla_{(0,f_j)} \tau(\phi) - \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j)} \tau(\phi) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{(0,\varphi f_j)} \nabla_{(0,\varphi f_j)} \tau(\phi) - \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{\widetilde{\nabla}_{(0,\varphi f_j)}(0,\varphi f_j)} \tau(\phi) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \nabla_{(0,\xi)} \nabla_{(0,\xi)} \tau(\phi) - \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \nabla_{\widetilde{\nabla}_{(0,\xi)}(0,\xi)} \tau(\phi) \\
&= \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \tau(\phi) - \nabla_{\nabla_e e_i} \tau(\phi) - \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j)} \tau(\phi) \\
&- \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{\widetilde{\nabla}_{(0,\varphi f_j)}(0,\varphi f_j)} \tau(\phi) - \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \nabla_{\widetilde{\nabla}_{(0,\xi)}(0,\xi)} \tau(\phi) \\
&= Tr_g \nabla^2 \tau(\phi) + \frac{2n+1}{\alpha} \nabla_{grad\alpha} \tau(\phi) + \frac{1}{\beta} \nabla_{grad\beta} \tau(\phi)
\end{aligned}$$

et

$$Tr_{\widetilde{G}} R^P(\tau(\phi), d\Phi) d\Phi = Tr_g R^P(\tau(\phi), d\phi) d\phi.$$

De même, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Tr_{\widetilde{G}} \nabla^2 \frac{1}{\alpha} d\phi(grad\alpha) &= \frac{1}{\alpha} Tr_g \nabla^2 d\phi(grad\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} (\Delta\alpha) d\phi(grad\alpha) \\
&- \frac{(2n-1)}{\alpha^3} |grad\alpha|^2 d\phi(grad\alpha) + \frac{(2n-1)}{\alpha^2} \nabla_{grad\alpha} d\phi(grad\alpha) \\
&+ \frac{1}{\alpha\beta} \nabla_{grad\beta} d\phi(grad\alpha) - \frac{1}{\alpha^2 \beta} d\alpha(grad\beta) d\phi(grad\alpha),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Tr_{\widetilde{G}}\nabla^2\frac{1}{\beta}d\phi\left(grad\beta\right) &= \frac{1}{\beta}Tr_g\nabla^2 d\phi\left(grad\beta\right) - \frac{1}{\beta^2}\left(\Delta\beta\right)d\phi\left(grad\beta\right) \\
&+ \frac{1}{\beta^3}\left|grad\beta\right|^2 d\phi\left(grad\beta\right) - \frac{1}{\beta^2}\nabla_{grad\beta}d\phi\left(grad\beta\right) \\
&+ \frac{2n+1}{\alpha\beta}\nabla_{grad\alpha}d\phi\left(grad\beta\right) - \frac{2n+1}{\alpha\beta^2}d\alpha\left(grad\beta\right)d\phi\left(grad\beta\right),
\end{aligned}
$$

$$
Tr_{\widetilde{G}}R^P\left(d\phi\left(grad\alpha\right), d\Phi\right)d\Phi = Tr_g R^P\left(d\phi\left(grad\alpha\right), d\phi\right)d\phi
$$

et

$$
Tr_{\widetilde{G}}R^P\left(d\phi\left(grad\beta\right), d\Phi\right)d\Phi = Tr_g R^P\left(d\phi\left(grad\beta\right), d\phi\right)d\phi.
$$

Finalement, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\tau_2\left(\Phi\right) &= \tau_2\left(\phi\right) - \frac{2n+1}{\alpha}\nabla_{grad\alpha}\tau\left(\phi\right) - \frac{1}{\beta}\nabla_{grad\beta}\tau\left(\phi\right) \\
&- \frac{2n+1}{\alpha}\left\{Tr_g\nabla^2 d\phi\left(grad\alpha\right) + Tr_g R^P\left(d\phi\left(grad\alpha\right), d\phi\right)d\phi\right\} \\
&- \frac{1}{\beta}\left\{Tr_g\nabla^2 d\phi\left(grad\beta\right) + Tr_g R^P\left(d\phi\left(grad\beta\right), d\phi\right)d\phi\right\} \\
&+ \frac{2n+1}{\alpha^2}\left(\Delta\alpha\right)d\phi\left(grad\alpha\right) + \frac{4n^2-1}{\alpha^3}\left|grad\alpha\right|^2 d\phi\left(grad\alpha\right) \\
&+ \frac{1}{\beta^2}\left(\Delta\beta\right)d\phi\left(grad\beta\right) - \frac{1}{\beta^3}\left|grad\beta\right|^2 d\phi\left(grad\beta\right) \\
&+ \frac{2n+1}{\alpha^2\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)d\phi\left(grad\alpha\right) + \frac{2n+1}{\alpha\beta^2}d\alpha\left(grad\beta\right)d\phi\left(grad\beta\right) \\
&- \frac{4n^2-1}{\alpha^2}\nabla_{grad\alpha}d\phi\left(grad\alpha\right) - \frac{2n+1}{\alpha\beta}\nabla_{grad\alpha}d\phi\left(grad\beta\right) \\
&- \frac{2n+1}{\alpha\beta}\nabla_{grad\beta}d\phi\left(grad\alpha\right) + \frac{1}{\beta^2}\nabla_{grad\beta}d\phi\left(grad\beta\right).
\end{aligned}
$$

Ceci achève la preuve du théorème 2.2.1.1.

Corollaire 2.2.1.1 *La première projection* $P_1 : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (M, g)$ *est biharmonique si et seulement si :*

$$
\begin{aligned}
&\frac{2n+1}{\alpha}grad\Delta\alpha + \frac{1}{\beta}grad\Delta\beta - \frac{2n+1}{\alpha^2}\left(\Delta\alpha\right)grad\alpha - \frac{1}{\beta^2}\left(\Delta\beta\right)grad\beta \\
&- \frac{4n^2-1}{\alpha^3}\left|grad\alpha\right|^2 grad\alpha + \frac{1}{\beta^3}\left|grad\beta\right|^2 grad\beta + \frac{4n^2-1}{2\alpha^2}grad\left(\left|grad\alpha\right|^2\right) \\
&- \frac{1}{2\beta^2}grad\left(\left|grad\beta\right|^2\right) - \frac{2n+1}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha}d\alpha\left(grad\beta\right)grad\alpha + \frac{1}{\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)grad\beta\right) \\
&+ \frac{2n+1}{\alpha\beta}\left(\nabla_{grad\alpha}grad\beta + \nabla_{grad\beta}grad\alpha\right) + \frac{2\left(2n+1\right)}{\alpha}Ricci^M\left(grad\alpha\right) \\
&+ \frac{2}{\beta}Ricci^M\left(grad\beta\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Exemple 2.2.1.1 *Considérons la première projection* $P_1 : \left(\mathbb{R}\times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (\mathbb{R}, dt^2)$ *definie par* $P_1(t,x) = t$. *En appliquant le corollaire 2.2.1.1, l'application* P_1 *est biharmonique si et seulement si les fonctions* α *et* β *satisfont l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{aligned}&\frac{2n+1}{\alpha}\alpha''' + \frac{2(2n+1)(n-1)}{\alpha^2}\alpha'\alpha'' - \frac{4n^2-1}{\alpha^3}(\alpha')^3 + \frac{1}{\beta}\beta''' - \frac{2}{\beta^2}\beta'\beta'' + \frac{1}{\beta^3}(\beta')^3\\&-\frac{2n+1}{\alpha^2\beta}(\alpha')^2\beta' - \frac{2n+1}{\alpha\beta^2}\alpha'(\beta')^2 + \frac{2n+1}{\alpha\beta}\alpha'\beta'' + \frac{2n+1}{\alpha\beta}\alpha''\beta' = 0.\end{aligned}$$

Cherchons des solutions particulières de type $\alpha(t) = t^a$ *et* $\beta(t) = t^b$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$, *alors* P_1 *est biharmonique si et seulement si* a *et* b *sont des solutions de l'équation algébrique suivante :*

$$(2n+1)^2 a^2 + 2(2n+1)(b-1)a + b^2 - 2b = 0,$$

ceci est équivalent à :

$$\left(a + \frac{b}{2n+1}\right)\left(a + \frac{b-2}{2n+1}\right) = 0.$$

Pour cette équation, nous pouvons distinguer les cas suivants :

1. *Pour* $a = \frac{-b}{2n+1}$, P_1 *est harmonique et donc biharmonique.*
2. *Pour* $a = \frac{2-b}{2n+1}$, *nous obtenons* $\alpha(t) = t^{\frac{2-b}{2n+1}}$ *et* $\beta(t) = t^b$ *pour tout* $b \in \mathbb{R}^*$. *Dans ce cas, la première projection* P_1 *est biharmonique non-harmonique*

Exemple 2.2.1.2 *Considérons la première projection* $P_1 : \left(\mathbb{R}^m\backslash\{0\} \times N^{2n+1}, \widetilde{G}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ $(m \geqslant 2)$ *et supposons que les fonctions* α *et* β *sont radiales* $(\alpha = \alpha(r), \beta = \beta(r), r = |x|$ *pour tout* $x \in R^m\backslash\{0\})$. *D'aprés le corollaire 2.1.1,* P_1 *est biharmonique si et seulement si les fonctions* α *et* β *satisfont l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{aligned}&\frac{2n+1}{\alpha}\alpha''' + \frac{2(n-1)(2n+1)}{\alpha^2}\alpha'\alpha'' + \frac{(m-1)(2n+1)}{r\alpha}\alpha'' - \frac{(m-1)(2n+1)}{r^2\alpha}\alpha'\\&-\frac{(m-1)(2n+1)}{r\alpha^2}(\alpha')^2 - \frac{4n^2-1}{\alpha^3}(\alpha')^3 + \frac{1}{\beta}\beta''' - \frac{2}{\beta^2}\beta'\beta'' + \frac{m-1}{r\beta}\beta''\\&-\frac{m-1}{r^2\beta}\beta' - \frac{m-1}{r\beta^2}(\beta')^2 + \frac{1}{\beta^3}(\beta')^3 + \frac{2n+1}{\alpha\beta}\alpha'\beta'' + \frac{2n+1}{\alpha\beta}\alpha''\beta'\\&-\frac{2n+1}{\alpha^2\beta}(\alpha')^2\beta' - \frac{2n+1}{\alpha\beta^2}\alpha'(\beta')^2 = 0.\end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation, nous présenterons deux cas :

- *Premier cas : Cherchons des solutions particulières de la forme forme* $\alpha(r) = \frac{a}{r}$ *et* $\beta(r) = \frac{b}{r}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$ *; alors,* P_1 *est biharmonique non-harmonique si et seulement si :*

  $$m = n + 3.$$

  Dans ce cas, on déduit que P_1 *est biharmonique non-harmonique si et seulement si* $m = n + 3$ *pour toutes les fonctions de type* $\alpha(r) = \frac{a}{r}$ *et* $\beta(r) = \frac{b}{r}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$.

– *Deuxième cas : Une autre méthode pour résoudre cette équation est de chercher des solutions de la forme* $\alpha(r) = r^a$ *et* $\beta(r) = r^b$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$ *; alors,* P_1 *est biharmonique non-harmonique si et seulement si* a *et* b *sont des solutions de l'équation algébrique suivante :*

$$(2n+1)^2 a^2 + 2(2n+1)(b+m-2)a + \left(b^2 + 2(m-2)b\right) = 0.$$

Pour cette équation, les solutions sont données par :

1. $a = \frac{-b}{2n+1}$, *alors* P_1 *est harmonique d'où biharmonique.*
2. $a = -\frac{b+2m-4}{2n+1}$ $(m \geqslant 3)$, *donc* $\alpha(r) = r^{-\frac{b+2m-4}{2n+1}}$ *et* $\beta(r) = r^b$ *pour tout* $b \in \mathbb{R}^*$. *Dans ce cas, la première projection* P_1 *est biharmonique non-harmonique.*

Remarque 2.2.1.1 *En utilisant le corollaire 2.1.1, nous donnons quelques cas particuliers :*

1. *Si* $\beta = \pm\alpha$, *on trouve la métrique produit tordu* $\mathcal{D}$*-homothetique, et la première projection est biharmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned}&\alpha^2 grad\Delta\alpha - \alpha(\Delta\alpha)\, grad\alpha - 2n\,|grad\alpha|^2\, grad\alpha\\ &+ n\alpha grad\left(|grad\alpha|^2\right) + 2\alpha^2 Ricci^M(grad\alpha) = 0.\end{aligned}$$

2. *Si* $\beta = \pm 1$, *on trouve la métrique produit tordu et dans ce cas la première projection est biharmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned}&\alpha^2 grad\Delta\alpha - \alpha(\Delta\alpha)\, grad\alpha - (2n-1)\,|grad\alpha|^2\, grad\alpha\\ &+ \frac{(2n-1)}{2}\alpha grad\left(|grad\alpha|^2\right) + 2\alpha^2 Ricci^M(grad\alpha) = 0.\end{aligned}$$

3. *Si* α *est une fonction constante, alors la première projection est biharmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned}&\beta^2 grad\Delta\beta - \beta(\Delta\beta)\, grad\beta + |grad\beta|^2\, grad\beta\\ &- \frac{1}{2}\beta grad\left(|grad\beta|^2\right) + 2\beta^2 Ricci^M(grad\beta) = 0.\end{aligned}$$

2.2.2 Le cas de $\Psi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$

Proposition 2.2.2.1 *Soit* $\Psi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ *une application définie par* $\Psi(x, y) = \psi(y)$ *où* $\psi : (N^{2n+1}, h) \longrightarrow (P^p, k)$ *est une application affine. Le champ de tension de l'application* $\Psi : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (P^p, k)$ *est donné par :*

$$\tau(\Psi) = \frac{1}{\alpha^2}\tau(\psi) - \frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2\beta^2}(div\xi)\, d\psi(\xi) + \frac{1 - \beta^2}{\alpha^2\beta^2}\nabla_\xi d\psi(\xi).$$

Preuve de la proposition 2.2.2.1.
Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}
\tau(\Psi) &= Tr_{\widetilde{G}} \nabla d\Psi \\
&= \nabla_{(e_i,0)} d\Psi (e_i, 0) - d\Psi \left(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)} (e_i, 0) \right) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{(0,f_j)} d\Psi (0, f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\Psi \left(\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)} (0, f_j) \right) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{(0,\varphi f_j)} d\Psi (0, \varphi f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\Psi \left(\widetilde{\nabla}_{(0,\varphi f_j)} (0, \varphi f_j) \right) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \nabla_{(0,\xi)} d\Psi (0, \xi) - \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} d\Psi \left(\widetilde{\nabla}_{(0,\xi)} (0, \xi) \right).
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.1.1 nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\tau(\Psi) &= \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{f_j} d\psi (f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\psi \left(\nabla'_{f_j} f_j \right) + \frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2 \beta^2} \eta \left(\nabla'_{f_j} f_j \right) d\psi (\xi) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{\varphi f_j} d\psi (\varphi f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\psi \left(\nabla'_{\varphi f_j} \varphi f_j \right) + \frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2 \beta^2} \eta \left(\nabla'_{\varphi f_j} \varphi f_j \right) d\psi (\xi) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \nabla_\xi d\psi (\xi) - \frac{1}{\alpha^2} d\psi \left(\nabla'_\xi \xi \right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{f_j} d\psi (f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\psi \left(\nabla'_{f_j} f_j \right) + \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{\varphi f_j} d\psi (\varphi f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\psi \left(\nabla'_{\varphi f_j} \varphi f_j \right) \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} \nabla_\xi d\psi (\xi) - \frac{1}{\alpha^2} d\psi \left(\nabla'_\xi \xi \right) + \frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2 \beta^2} \eta \left(\nabla'_{f_j} f_j \right) d\psi (\xi) \\
&+ \frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2 \beta^2} \eta \left(\nabla'_{\varphi f_j} \varphi f_j \right) d\psi (\xi) + \frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} \nabla_\xi d\psi (\xi)
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la définition de $div\xi$ et le fait que :

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) = \nabla_{f_j} d\psi (f_j) - d\psi \left(\nabla'_{f_j} f_j \right) + \nabla_{\varphi f_j} d\psi (\varphi f_j) \\
- d\psi \left(\nabla'_{\varphi f_j} \varphi f_j \right) + \nabla_\xi d\psi (\xi) - d\psi \left(\nabla'_\xi \xi \right),
\end{aligned}$$

nous concluons que :

$$\tau(\Psi) = \frac{1}{\alpha^2} \tau(\psi) - \frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2 \beta^2} (div\xi) \, d\psi (\xi) + \frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} \nabla_\xi d\psi (\xi).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 2.2.2.1.

Corollaire 2.2.2.1 *L'application Ψ est harmonique si et seulement si :*

$$\beta^2 \tau(\psi) - \left(\beta^2 - 1 \right) \{ (div\xi) \, d\psi (\xi) + \nabla_\xi d\psi (\xi) \} = 0.$$

De plus, si ψ est harmonique, alors Ψ est harmonique si et seulement si :

$$\nabla_\xi d\psi (\xi) + (div\xi) \, d\psi (\xi) = 0.$$

En particulier, si ψ est l'application identité, nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.2.2 *Le champ de tension de la deuxième projection est donné par :*

$$\tau(P_2) = \frac{1-\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\{(div\xi)\xi + \nabla_\xi\xi\},$$

donc P_2 est harmonique si et seulement si :

$$\nabla'_\xi\xi + (div\xi)\xi = 0.$$

Dans le cas où $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ est une variété Kenmotsu, le champ de tension de la deuxième projection devient :

$$\tau(P_2) = -\frac{2n(\beta^2-1)}{\alpha^2\beta^2}\xi.$$

Notons que si $\beta \neq \pm 1$, alors la deuxième projection n'est jamais harmonique.

Le résultat suivant nous donne la condition de biharmonicité de la deuxième projection dans le cas où $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ est une variété de Kenmotsu.

Théorème 2.2.2.1 *Soit $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété de Kenmotsu, la deuxième projection $P_2 : \left(M \times N, \widetilde{G}\right) \longrightarrow (N, h)$ est biharmonique si et seulement si les fonctions α et β sont des solutions l'équation suivante :*

$$\begin{aligned}&\frac{2(\beta^2-1)}{\alpha^3\beta^2}(\Delta\alpha) - \frac{2}{\alpha^2\beta^3}(\Delta\beta) + \frac{4(n-1)(\beta^2-1)}{\alpha^4\beta^2}|grad\alpha|^2 + \frac{4}{\alpha^2\beta^4}|grad\beta|^2\\&-\frac{4(n-1)-2\beta^2}{\alpha^3\beta^3}d\alpha(grad\beta) + \frac{4n(\beta^2-1)}{\alpha^4\beta^2} = 0.\end{aligned}$$

Preuve du théorème 2.2.2.1.
D'aprés le corollaire 2.2.2.2, nous obtenons :

$$\tau(P_2) = -\frac{2n(\beta^2-1)}{\alpha^2\beta^2}\xi.$$

Afin de simplifier nos calculs, notons $f = \frac{\beta^2-1}{\alpha^2\beta^2}$. La deuxième projection est alors biharmonique si et seulement si :

$$Tr_{\widetilde{G}}\nabla^2 f\xi + fTr_{\widetilde{G}}R^N(\xi,\cdot)\cdot = 0.$$

Le calul du premier terme $Tr_{\widetilde{G}}\nabla^2 f\xi$ nous donne :

$$\begin{aligned}Tr_{\widetilde{G}}\nabla^2 f\xi &= \nabla_{(e_i,0)}\nabla_{(e_i,0)}f\xi - \nabla_{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)}f\xi\\&+\frac{1}{\alpha^2}\nabla_{(0,f_j)}\nabla_{(0,f_j)}f\xi - \frac{1}{\alpha^2}\nabla_{\widetilde{\nabla}_{\left(0,f_j\right)}(0,f_j)}f\xi\\&+\frac{1}{\alpha^2}\nabla_{(0,\varphi f_j)}\nabla_{(0,\varphi f_j)}f\xi - \frac{1}{\alpha^2}\nabla_{\widetilde{\nabla}_{\left(0,\varphi f_j\right)}(0,\varphi f_j)}f\xi\\&+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\nabla_{(0,\xi)}\nabla_{(0,\xi)}f\xi - \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\nabla_{\widetilde{\nabla}_{(0,\xi)}(0,\xi)}f\xi.\end{aligned}$$

En utilisant les équations du lemme 2.1.1 et le fait que $\nabla'_{\xi}\xi = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Tr_{\widetilde{G}}\nabla^2 f\xi &= e_i\left(e_i\left(f\right)\right)\xi - \left(\nabla_{e_i}e_i\right)\left(f\right)\xi + \frac{f}{\alpha^2}\nabla'_{f_j}\nabla'_{f_j}\xi \\ &- \frac{f}{\alpha^2}\nabla'_{\nabla'_{f_j}f_j}\xi + \frac{2n+1}{\alpha}d\alpha\left(gradf\right)\xi + \frac{1}{\beta}d\beta\left(gradf\right)\xi \\ &+ \frac{f}{\alpha^2}\nabla'_{\varphi f_j}\nabla'_{\varphi f_j}\xi - \frac{f}{\alpha^2}\nabla'_{\nabla'_{\varphi f_j}\varphi f_j}\xi. \end{aligned}$$

Comme $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ est une variété de Kenmotsu, un simple calcul nous donne :

$$\nabla'_{f_j}\nabla'_{f_j}\xi - \nabla'_{\nabla'_{f_j}f_j}\xi = \nabla'_{f_j}f_j - \nabla'_{f_j}f_j + \eta\left(\nabla'_{f_j}f_j\right)\xi = -n\xi$$

et

$$\nabla'_{\varphi f_j}\nabla'_{\varphi f_j}\xi - \nabla'_{\nabla'_{\varphi f_j}\varphi f_j}\xi = -n\xi.$$

Par conséquent :

$$Tr_{\widetilde{G}}\nabla^2 f\xi = \left(\Delta f - \frac{2nf}{\alpha^2} + \frac{2n+1}{\alpha}d\alpha\left(gradf\right) + \frac{1}{\beta}d\beta\left(gradf\right)\right)\xi.$$

Maintenant, pour le terme $fTr_{G_{\alpha,\beta}}R^N\left(\xi,\cdot\right)\cdot$, il est clair que :

$$fTr_{G_{\alpha,\beta}}R^N\left(\xi,\cdot\right)\cdot = \frac{f}{\alpha^2}Ricci^N\left(\xi\right).$$

Nous déduisons alors que P_2 est biharmonique si et seulement si :

$$\left(\Delta f - \frac{2nf}{\alpha^2} + \frac{2n+1}{\alpha}d\alpha\left(gradf\right) + \frac{1}{\beta}d\beta\left(gradf\right)\right)\xi + \frac{f}{\alpha^2}Ricci^N\left(\xi\right) = 0.$$

Un simple calcul nous donne :

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\frac{2\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^3\beta^2}\left(\Delta\alpha\right) + \frac{6\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^4\beta^2}\left|grad\alpha\right|^2 + \frac{2}{\alpha^2\beta^3}\left(\Delta\beta\right) \\ &- \frac{6}{\alpha^2\beta^4}\left|grad\beta\right|^2 - \frac{8}{\alpha^3\beta^3}d\alpha\left(grad\beta\right), \end{aligned}$$

$$d\alpha\left(gradf\right) = -\frac{2\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^3\beta^2}\left|grad\alpha\right|^2 + \frac{2}{\alpha^2\beta^3}d\alpha\left(grad\beta\right)$$

et

$$d\beta\left(gradf\right) = -\frac{2\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^3\beta^2}d\alpha\left(grad\beta\right) + \frac{2}{\alpha^2\beta^3}\left|grad\beta\right|^2.$$

Nous déduisons que la deuxième projection P_2 est biharmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{2\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^3\beta^2}\left(\Delta\alpha\right) - \frac{4\left(n-1\right)\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^4\beta^2}\left|grad\alpha\right|^2 + \frac{2}{\alpha^2\beta^3}\left(\Delta\beta\right) - \frac{4}{\alpha^2\beta^4}\left|grad\beta\right|^2\right)\xi \\ &+ \left(\frac{4\left(n-1\right)-2\beta^2}{\alpha^3\beta^3}d\alpha\left(grad\beta\right) - \frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\alpha^4\beta^2}\right)\xi + \frac{\beta^2-1}{\alpha^4\beta^2}Ricci^N\left(\xi\right) = 0. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que $Ricci^N(\xi) = -2n\xi$, la dernière formule devient :

$$\frac{2(\beta^2-1)}{\alpha^3\beta^2}(\Delta\alpha) - \frac{2}{\alpha^2\beta^3}(\Delta\beta) + \frac{4(n-1)(\beta^2-1)}{\alpha^4\beta^2}|grad\alpha|^2 + \frac{4}{\alpha^2\beta^4}|grad\beta|^2$$
$$-\frac{4(n-1)-2\beta^2}{\alpha^3\beta^3}d\alpha(grad\beta) + \frac{4n(\beta^2-1)}{\alpha^4\beta^2} = 0.$$

Ceci achève la preuve du théorème 2.2.2.1.

Remarque 2.2.2.1 *Notons qu'en appliquant le théorème 2.2.2.1, nous pouvons extraire les cas particuliers suivants :*

1. *Si $\beta = \pm\alpha$, nous obtenons une métrique produit tordu $\mathcal{D}$-homothetique, et dans ce cas, la deuxième projection est biharmonique si et seulement si :*
$$\alpha\left(\alpha^2-2\right)(\Delta\alpha) + \left((2n-1)\alpha^2 - 4n + 6\right)|grad\alpha|^2 + 2n\left(\alpha^2-1\right) = 0.$$
2. *Si $\beta = \pm 1$, la deuxième projection est harmonique donc biharmonique.*
3. *Si $\alpha = 1$, alors la deuxième projection est biharmonique si et seulement si :*
$$\beta(\Delta\beta) - 2|grad\beta|^2 - 2n\beta^2\left(\beta^2-1\right) = 0.$$

2.2.3 Biharmonicité de l'inclusion

Théorème 2.2.3.1 *Soit $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, h)$ une variété de Kenmotsu, l'inclusion $i_{x_0} : N \longrightarrow \left(M \times N, \widetilde{G}\right)$ définie par $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$ est biharmonique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\left(\left(\beta^2+2n\right)^2|grad\alpha|^2 + 2\alpha^2\beta^2|grad\beta|^2 + 3\alpha\beta\left(\beta^2+2n\right)d\alpha(grad\beta)\right)grad\alpha$$
$$+\alpha\left(\alpha^2\beta|grad\beta|^2 + \alpha\left(3\beta^2+2n\right)d\alpha(grad\beta) + 2\beta\left(\beta^2+2n\right)|grad\alpha|^2\right)grad\beta$$
$$-\frac{4n^2(\beta^2-1)(\beta^2+1)}{\beta^2}grad\alpha - \frac{4n^2\alpha(\beta^2-1)^2}{\beta^3}grad\beta$$
$$+\frac{\alpha(\beta^2+2n)^2}{2}grad\left(|grad\alpha|^2\right) + \frac{\alpha^3\beta^2}{2}grad\left(|grad\beta|^2\right)$$
$$+\alpha^2\beta\left(\beta^2+2n\right)\left(\nabla_{grad\alpha}grad\beta + \nabla_{grad\beta}grad\alpha\right) = 0.$$

et

$$\left(\beta^2-1\right)\left(\beta^2+2n\right)|grad\alpha|^2 + \alpha^2\beta^2|grad\beta|^2$$
$$+\alpha\beta\left(2\beta^2+n-1\right)d\alpha(grad\beta) + 2n\left(\beta^2-1\right) = 0.$$

Preuve du théorème 2.2.3.1.

Le champ de tension de i_{x_0} est donné par :

$$\begin{aligned}\tau(i_{x_0}) &= Tr_h\widetilde{\nabla}di_{x_0}\\ &= \widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j) - \nabla_{(0,f_j)}(0,f_j) + \widetilde{\nabla}_{(0,\varphi f_j)}(0,\varphi f_j)\\ &\quad - \nabla_{(0,\varphi f_j)}(0,\varphi f_j) + \widetilde{\nabla}_{(0,\xi)}(0,\xi) - \nabla_{(0,\xi)}(0,\xi)\end{aligned}$$

Par le corollaire 2.1.1, nous obtenons :

$$\tau\left(i_{x_0}\right)=-\alpha\left(2n+\beta^2\right)\left(grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\left(grad\beta,0\right)+\frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}\left(0,\xi\right).$$

Alors i_{x_0} biharmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned}&\alpha\left(2n+\beta^2\right)\left(Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2\left(grad\alpha,0\right)+Tr_h\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}\right)\\&+\alpha^2\beta\left(Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2\left(grad\beta,0\right)+Tr_h\widetilde{R}\left(\left(grad\beta,0\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}\right)\\&-\frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\beta^2}\left(Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2\left(0,\xi\right)+Tr_h\widetilde{R}\left(\left(0,\xi\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}\right)=0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

En utilisant le corollaire 2.1.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2\left(grad\alpha,0\right)=&-\left(2n+\beta^2\right)\left|grad\alpha\right|^2\left(grad\alpha,0\right)-\alpha\beta\left|grad\alpha\right|^2\left(grad\beta,0\right)\\&-\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\alpha,0\right)-\alpha^2d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\beta,0\right)\\&+\frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\alpha\beta^2}\left|grad\alpha\right|^2\left(0,\xi\right)+\frac{2n}{\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2\left(grad\beta,0\right)=&-\left(2n+\beta^2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\alpha,0\right)-\alpha\beta\left|grad\beta\right|^2\left(grad\alpha,0\right)\\&-\alpha^2\left|grad\beta\right|^2\left(grad\beta,0\right)-\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\beta,0\right)\\&+\frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\alpha\beta^2}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right)+\frac{2n}{\beta}\left|grad\beta\right|^2\left(0,\xi\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2\left(0,\xi\right)=&-2n\alpha\left(\beta^2+1\right)\left(grad\alpha,0\right)-2n\alpha^2\beta\left(grad\beta,0\right)\\&-\beta^2\left|grad\alpha\right|^2\left(0,\xi\right)-\alpha^2\left|grad\beta\right|^2\left(0,\xi\right)\\&-2\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right)-\frac{2n}{\beta^2}\left(0,\xi\right)\end{aligned}$$

Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}Tr_h\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}=&\,\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),\left(0,f_j\right)\right)\left(0,f_j\right)\\&+\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),\left(0,\varphi f_j\right)\right)\left(0,\varphi f_j\right)\\&+\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),\left(0,\xi\right)\right)\left(0,\xi\right).\end{aligned}$$

Par le corollaire 2.1.1, un long calcul nous donne :

$$\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),\left(0,f_j\right)\right)\left(0,f_j\right)=-n\alpha\left(\nabla_{grad\alpha}grad\alpha,0\right)+\frac{n}{\beta^3}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right),$$

$$\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),\left(0,\varphi f_j\right)\right)\left(0,\varphi f_j\right)=-n\alpha\left(\nabla_{grad\alpha}grad\alpha,0\right)+\frac{n}{\beta^3}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right)$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),\left(0,\xi\right)\right)\left(0,\xi\right)=&-\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\alpha,0\right)-\alpha\beta\left|grad\alpha\right|^2\left(grad\beta,0\right)\\&-\alpha\beta^2\left(\nabla_{grad\alpha}grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\left(\nabla_{grad\alpha}grad\beta,0\right).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}Tr_h\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}=&-\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\alpha,0\right)-\alpha\beta\left|grad\alpha\right|^2\left(grad\beta,0\right)\\&-\alpha\left(2n+\beta^2\right)\left(\nabla_{grad\alpha}grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\left(\nabla_{grad\alpha}grad\beta,0\right)\\&+\frac{2n}{\beta^3}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right).\end{aligned}$$

D'une manière analogue, nous obtenons :

$$\begin{aligned}Tr_h\widetilde{R}\left(\left(grad\beta,0\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}=&-\alpha\beta\left|grad\beta\right|^2\left(grad\alpha,0\right)-\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\beta,0\right)\\&-\alpha\left(2n+\beta^2\right)\left(\nabla_{grad\beta}grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\left(\nabla_{grad\beta}grad\beta,0\right)\\&+\frac{2n}{\beta^3}\left|grad\beta\right|^2\left(0,\xi\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Tr_h\widetilde{R}\left(\left(0,\xi\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}=Tr_h\widetilde{R}\left(\left(0,\xi\right),\cdot\right)\cdot=&\frac{2n\alpha^2}{\beta}\left(grad\beta,0\right)-2n\left|grad\alpha\right|^2\left(0,\xi\right)\\&-\frac{2n\alpha}{\beta}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right)-\frac{2n}{\beta^2}\left(0,\xi\right).\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}&Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2\left(grad\alpha,0\right)+Tr_h\widetilde{R}\left(\left(grad\alpha,0\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}\\&=-\left(2n+\beta^2\right)\left|grad\alpha\right|^2\left(grad\alpha,0\right)-2\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\alpha,0\right)\\&-2\alpha\beta\left|grad\alpha\right|^2\left(grad\beta,0\right)-\alpha^2d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\beta,0\right)\\&-\alpha\left(2n+\beta^2\right)\left(\nabla_{grad\alpha}grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\left(\nabla_{grad\alpha}grad\beta,0\right)\\&+\frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\alpha\beta^2}\left|grad\alpha\right|^2\left(0,\xi\right)+\frac{2n\left(\beta^2+1\right)}{\beta^3}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right),\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2\left(grad\beta,0\right)+Tr_h\widetilde{R}\left(\left(grad\beta,0\right),di_{x_0}\right)di_{x_0}\\&=-\left(2n+\beta^2\right)d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\alpha,0\right)-2\alpha\beta\left|grad\beta\right|^2\left(grad\alpha,0\right)\\&-\alpha^2\left|grad\beta\right|^2\left(grad\beta,0\right)-2\alpha\beta d\alpha\left(grad\beta\right)\left(grad\beta,0\right)\\&-\alpha\left(2n+\beta^2\right)\left(\nabla_{grad\beta}grad\alpha,0\right)-\alpha^2\beta\left(\nabla_{grad\beta}grad\beta,0\right)\\&+\frac{2n\left(\beta^2-1\right)}{\alpha\beta^2}d\alpha\left(grad\beta\right)\left(0,\xi\right)+\frac{2n\left(\beta^2+1\right)}{\beta^3}\left|grad\beta\right|^2\left(0,\xi\right)\end{aligned}\tag{2.7}$$

et

$$
\begin{aligned}
Tr_h\left(\widetilde{\nabla}\right)^2(0,\xi) + \ Tr_h\widetilde{R}\left((0,\xi),di_{x_0}\right)di_{x_0}& \\
&= -2n\alpha\left(\beta^2+1\right)(grad\alpha,0) - \left(\beta^2+2n\right)|grad\alpha|^2(0,\xi) \\
&- \alpha^2|grad\beta|^2(0,\xi) - \frac{2n\alpha^2\left(\beta^2-1\right)}{\beta}(grad\beta,0) \\
&- \frac{2\alpha\left(\beta^2+n\right)}{\beta}d\alpha(grad\beta)(0,\xi) - \frac{4n}{\beta^2}(0,\xi).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

En remplaçant (2.6), (2.7) et (2.8) dans (2.5), nous déduisons que l'inclusion $i_{x_0} : N \longrightarrow \left(M\times N,\widetilde{G}\right)$ est biharmonique si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\beta^2+2n\right)^2|grad\alpha|^2 + 2\alpha^2\beta^2|grad\beta|^2 + 3\alpha\beta\left(\beta^2+2n\right)d\alpha(grad\beta)\right)grad\alpha \\
&+\alpha\left(\alpha^2\beta|grad\beta|^2 + \alpha\left(3\beta^2+2n\right)d\alpha(grad\beta) + 2\beta\left(\beta^2+2n\right)|grad\alpha|^2\right)grad\beta \\
&- \frac{4n^2\left(\beta^2-1\right)\left(\beta^2+1\right)}{\beta^2}grad\alpha - \frac{4n^2\alpha\left(\beta^2-1\right)^2}{\beta^3}grad\beta \\
&+ \frac{\alpha\left(\beta^2+2n\right)^2}{2}grad\left(|grad\alpha|^2\right) + \frac{\alpha^3\beta^2}{2}grad\left(|grad\beta|^2\right) \\
&+ \alpha^2\beta\left(\beta^2+2n\right)\left(\nabla_{grad\alpha}grad\beta + \nabla_{grad\beta}grad\alpha\right) = 0
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\left(\beta^2-1\right)\left(\beta^2+2n\right)|grad\alpha|^2 + \alpha^2\beta^2|grad\beta|^2 \\
&+\alpha\beta\left(2\beta^2+n-1\right)d\alpha(grad\beta) + 2n\left(\beta^2-1\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Ceci achève la preuve du théorème 2.2.3.1.

2.2.4 Harmonicité de l'application identité $Id : \left(M\times N,\widetilde{G}\right) \longrightarrow (M\times N, G)$

Proposition 2.2.4.1 *L'application identité* $Id : \left(M\times N,\widetilde{G}\right) \longrightarrow (M\times N,G)$ *est harmonique si et seulement si :*

$$
\left\{
\begin{array}{c}
(2n+1)\beta grad\alpha + \alpha grad\beta = 0 \\
et \\
\nabla'_\xi\xi + (div\xi)\xi = 0.
\end{array}
\right.
$$

Preuve de la proposition 2.2.4.1.
Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}\tau(Id) &= \nabla_{(e_i,0)}(e_i,0) - \widetilde{\widetilde{\nabla}}_{(e_i,0)}(e_i,0) \\ &+ \frac{1}{\alpha^2}\nabla_{(0,f_j)}(0,f_j) - \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{(0,f_j)}(0,f_j) \\ &+ \frac{1}{\alpha^2}\nabla_{(0,\varphi f_j)}(0,\varphi f_j) - \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{(0,\varphi f_j)}(0,\varphi f_j) \\ &+ \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\nabla_{(0,\xi)}(0,\xi) - \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\widetilde{\widetilde{\nabla}}_{(0,\xi)}(0,\xi).\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1.1, nous déduisons que :

$$\tau(Id) = \frac{2n+1}{\alpha}(grad\alpha,0) + \frac{1}{\beta}(grad\beta,0) + \frac{1-\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(0,\nabla'_\xi\xi\right) - \frac{\beta^2-1}{\alpha^2\beta^2}(div\xi)(0,\xi).$$

Il s'ensuit que l'application identité $Id : \left(M\times N,\widetilde{G}\right) \longrightarrow (M\times N,G)$ est harmonique si et seulement si :

$$\begin{cases} (2n+1)\,\beta grad\alpha + \alpha grad\beta = 0 \\ \text{et} \\ \nabla'_\xi\xi + (div\xi)\,\xi = 0. \end{cases}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 2.2.4.1.

Remarque 2.2.4.1 *En particulier, Si $(N^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,h)$ est une variété de Kenmotsu, le champ de tension de l'application identité Id est donné par :*

$$\tau(Id) = \frac{2n+1}{\alpha}(grad\alpha,0) + \frac{1}{\beta}(grad\beta,0) - \frac{2n(\beta^2-1)}{\alpha^2\beta^2}(0,\xi).$$

Nous distinguons deux cas :

1. *Si $\beta=\pm1$, alors l'application identité $Id : \left(M\times N,\widetilde{G}\right) \longrightarrow (M\times N,G)$ est harmonique si et seulement si α est une fonction constante.*
2. *Si $\beta\neq\pm1$, alors l'application identité $Id : \left(M\times N,\widetilde{G}\right) \longrightarrow (M\times N,G)$ n'est jamais harmonique.*

Chapitre 3

Applications harmoniques et la déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée

Les structures métriques presque de contact admettent plusieurs types de déformations. Dans ce contexte, en 1968 S.Tanno [38] a introduit une notion connue par la déformation $\mathcal{D}$-homothétique ($2n$-homothétique) sur les variétés métriques de contact donnée par la définition suivante :

Définition. Soit $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique de contact et a une constante strictement positive, et soit la déformation donnée par :

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = a\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \qquad \overline{g} = ag + a\,(a-1)\,\eta \otimes \eta,$$

alors $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est aussi une variété métrique de contact.

Cette derrnière notion a été généralisée en 1974 par S. Suguri et S. Nakayama [37] en remplaçant a par une fonction α qui est une fonction positive sur M. Cette notion est dite une déformation D-conforme.

Ensuite, en 2011 P. Alegre et A. Carriazo [2] ont trouvé un moyen d'introduire une notion plus générale connue par la déformation D-conforme généralisée ; cette notion a été obtenue en introduisant deux fonctions α et β.

Récemment en 2019, et afin de simplifer les calculs fastidieux, N. Özdemir, S. Aktay et M. Solgun [33] ont obtenu des nouvelles dérivées covariantes des structures métriques presque de contact déformées où ils ont séparé trois cas particuliers différents.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux déformations $\mathcal{D}$-conforme généralisées des structures métriques presque de contact.

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons la relation entre $\nabla_X Y$ et $\overline{\nabla}_X Y$ les connexions de Levi-Civita sur $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ et $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ respectivement.

La deuxième partie de ce chapitre est dédiée à l'étude de l'harmonicité de l'application identitité $Id_M : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \to \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$.

Après avoir déformé la métrique d'arrivée g en $\overline{g} = \beta g + (\alpha^2 - \beta)\,\eta \otimes \eta$, nous donnons les expressions des champs de tension de l'application identité dans le cas d'une variété métrique presque de contact comme dans le cas d'une variété de Kenmotsu.

Dans la dernière partie de ce chapitre, en déformant la métrique de départ par une déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée, nous donnons les expressions des champs de tension de l'application identité quand la variété $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété métrique presque de contact ou lorsqu'elle est une variété de Kenmotsu.

3.1 Déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée

Étant donné une variété métrique presque de contact $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, considérons la déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée donnée par :

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = \alpha\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \qquad \overline{g} = \beta g + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta \otimes \eta,$$

où α et β sont des fonctions strictement positives sur M^{2m+1} ; on peut facilement vérifier que $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est aussi une variété métrique presque de contact.

Proposition 3.1.1 *Soit $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact et soit $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée de $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$. On a alors :*

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) = {} & \beta g\left(\nabla_X Y, Z\right) + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_X Y\right) + \alpha\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\alpha\right) \\
& + \alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\alpha\right) - \alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\alpha\right) - \frac{1}{2}\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\beta\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(X\right)g\left(\nabla_Y \xi, Z\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(X\right)g\left(\nabla_Z \xi, Y\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_X \xi, Z\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_Z \xi, X\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(Z\right)g\left(\nabla_X \xi, Y\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(Z\right)g\left(\nabla_Y \xi, X\right) \\
& - \frac{1}{2}\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\beta\right) + \frac{1}{2}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\beta\right) + \frac{1}{2}g\left(Y, Z\right)X\left(\beta\right) \\
& + \frac{1}{2}g\left(X, Z\right)Y\left(\beta\right) - \frac{1}{2}g\left(X, Y\right)Z\left(\beta\right).
\end{aligned}$$

Preuve de la proposition 3.1.1.
En utilisant la formule de Koszul, nous avons :

$$\begin{aligned}
2\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) = {} & X\left(\overline{g}\left(Y, Z\right)\right) + Y\left(\overline{g}\left(X, Z\right)\right) - Z\left(\overline{g}\left(X, Y\right)\right) \\
& + \overline{g}\left(\left[X, Y\right], Z\right) + \overline{g}\left(\left[Z, X\right], Y\right) - \overline{g}\left(X, \left[Y, Z\right]\right),
\end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma\left(TM\right)$. Comme $\overline{g} = \beta g + (\alpha^2 - \beta)\eta \otimes \eta$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
2\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) = {} & X\left(\beta g\left(Y, Z\right) + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)\right) + Y\left(\beta g\left(X, Z\right) + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)\right) \\
& - Z\left(\beta g\left(X, Y\right) + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right) + \beta g\left(\left[X, Y\right], Z\right) \\
& + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(\left[X, Y\right]\right)\eta\left(Z\right) + \beta g\left(\left[Z, X\right], Y\right) \\
& + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(\left[Z, X\right]\right)\eta\left(Y\right) - \beta g\left(X, \left[Y, Z\right]\right) \\
& - \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta\left(X\right)\eta\left(\left[Y, Z\right]\right).
\end{aligned}$$

Pour le terme $X\left(\beta g\left(Y,Z\right)+\left(\alpha^{2}-\beta\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)\right)$, un long calcul nous donne :

$$\begin{aligned}X\Big(\beta g\left(Y,Z\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)\Big) &= X\left(\beta g\left(Y,Z\right)\right)+X\Big(\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)\Big)\\ &= \beta g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)+\beta g\left(Y,\nabla_{X}Z\right)+g\left(Y,Z\right)X\left(\beta\right)\\ &+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)g\left(\nabla_{X}\xi,Y\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_{X}Y\right)\\ &+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_{X}\xi,Z\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)\eta\left(\nabla_{X}Z\right)\\ &+2\alpha\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\alpha\right)-\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\beta\right).\end{aligned}$$

Par un calcul similaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned}Y\Big(\beta g\left(X,Z\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)\Big) &= \beta g\left(\nabla_{Y}X,Z\right)+\beta g\left(X,\nabla_{Y}Z\right)+g\left(X,Z\right)Y\left(\beta\right)\\ &+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)g\left(\nabla_{Y}\xi,X\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_{Y}X\right)\\ &+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)g\left(\nabla_{Y}\xi,Z\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)\eta\left(\nabla_{Y}Z\right)\\ &+2\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\alpha\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\beta\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Z\Big(\beta g\left(X,Y\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\Big) &= \beta g\left(\nabla_{Z}X,Y\right)+\beta g\left(X,\nabla_{Z}Y\right)+g\left(X,Y\right)Z\left(\beta\right)\\ &+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_{Z}\xi,X\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)\eta\left(\nabla_{Z}X\right)\\ &+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)g\left(\nabla_{Z}\xi,Y\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)\eta\left(\nabla_{Z}Y\right)\\ &+2\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\alpha\right)-\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\beta\right).\end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(\left[X,Y\right]\right)\eta\left(Z\right)=\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_{X}Y\right)-\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_{Y}X\right),$$

$$\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(\left[Z,X\right]\right)\eta\left(Y\right)=\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)\eta\left(\nabla_{Z}X\right)-\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)\eta\left(\nabla_{X}Z\right)$$

et

$$\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)\eta\left(\left[Y,Z\right]\right)=\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)\eta\left(\nabla_{Y}Z\right)-\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)\eta\left(\nabla_{Z}Y\right).$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{g}\big(\overline{\nabla}_{X}Y,Z\big) &= \beta g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)+\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_{X}Y\right)+\alpha\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\alpha\right)\\ &+\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\alpha\right)-\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\alpha\right)-\frac{1}{2}\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\beta\right)\\ &+\frac{1}{2}\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)g\left(\nabla_{Y}\xi,Z\right)-\frac{1}{2}\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(X\right)g\left(\nabla_{Z}\xi,Y\right)\\ &+\frac{1}{2}\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_{X}\xi,Z\right)-\frac{1}{2}\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_{Z}\xi,X\right)\\ &+\frac{1}{2}\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)g\left(\nabla_{X}\xi,Y\right)+\frac{1}{2}\big(\alpha^{2}-\beta\big)\eta\left(Z\right)g\left(\nabla_{Y}\xi,X\right)\\ &-\frac{1}{2}\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\beta\right)+\frac{1}{2}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\beta\right)+\frac{1}{2}g\left(Y,Z\right)X\left(\beta\right)\\ &+\frac{1}{2}g\left(X,Z\right)Y\left(\beta\right)-\frac{1}{2}g\left(X,Y\right)Z\left(\beta\right).\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 3.1.1.
En appliquant la proposition 3.1.1, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, la relation entre $\overline{\nabla}_X Y$ et $\nabla_X Y$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \frac{\alpha}{\beta}\eta(X)\eta(Y)\,grad\alpha + \frac{1}{2\beta}\eta(X)\eta(Y)\,grad\beta - \frac{1}{2\beta}g(X,Y)\,grad\beta \\
&+ \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha\beta}\eta(X)\eta(Y)\xi(\alpha)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2\beta}\eta(X)\eta(Y)\xi(\beta)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2\beta}g(X,Y)\xi(\beta)\xi \\
&+ \frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta(Y)\nabla_X\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta(X)\nabla_Y\xi + \frac{1}{2\beta}X(\beta)Y + \frac{1}{2\beta}Y(\beta)X \\
&- \frac{1}{2\beta}\eta(X)Y(\beta)\xi - \frac{1}{2\beta}\eta(Y)X(\beta)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta(X)Tr_g g(\nabla.\xi,Y)\cdot \\
&+ \frac{(\alpha^2-\beta)^2}{2\alpha^2\beta}\eta(X)g(\nabla_\xi\xi,Y)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta(Y)Tr_g g(\nabla.\xi,X)\cdot \\
&+ \frac{(\alpha^2-\beta)^2}{2\alpha^2\beta}\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi,X)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta(Y)X(\alpha)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta(X)Y(\alpha)\xi \\
&+ \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2}g(\nabla_X\xi,Y)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2}g(\nabla_Y\xi,X)\xi,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$Tr_g g(X,\nabla.\xi)\cdot = g(X,\nabla_{e_i}\xi)e_i + g(X,\nabla_{\varphi e_i}\xi)\varphi e_i + g(X,\nabla_\xi\xi)\xi.$$

Preuve du théorème 3.1.1.
Si nous considérons une base orthonormée $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}_{i=1}^m$ sur la variété métrique presque de contact $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, alors une base orthonormée sur $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est donnée par :

$$\left\{\overline{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\beta}}e_i, \overline{\varphi e}_i = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\varphi e_i, \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi\right\}_{i=1}^m.$$

Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons :

$$\overline{\nabla}_X Y = \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{e}_i\right)\overline{e}_i + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\varphi e}_i\right)\overline{\varphi e}_i + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\xi}\right)\overline{\xi}.$$

Par la proposition 3.1.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{e}_i\right)\overline{e}_i &= g(\nabla_X Y, e_i)e_i - \frac{\alpha}{\beta}\eta(X)\eta(Y)e_i(\alpha)e_i + \frac{1}{2\beta}\eta(X)\eta(Y)e_i(\beta)e_i \\
&- \frac{1}{2\beta}g(X,Y)e_i(\beta)e_i + \frac{(\alpha^2-\beta)}{2\beta}\eta(Y)g(\nabla_X\xi, e_i)e_i \\
&+ \frac{(\alpha^2-\beta)}{2\beta}\eta(X)g(\nabla_Y\xi, e_i)e_i + \frac{1}{2\beta}X(\beta)g(Y,e_i)e_i \\
&+ \frac{1}{2\beta}Y(\beta)g(X,e_i)e_i - \frac{(\alpha^2-\beta)}{2\beta}\eta(X)g(\nabla_{e_i}\xi, Y)e_i \\
&- \frac{(\alpha^2-\beta)}{2\beta}\eta(Y)g(\nabla_{e_i}\xi, X)e_i.
\end{aligned}$$

Le même calcul nous donne :

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\varphi e_i}\right)\overline{\varphi e_i} &= g\left(\nabla_X Y, \varphi e_i\right)\varphi e_i - \frac{\alpha}{\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\left(\varphi e_i\right)\left(\alpha\right)\varphi e_i + \frac{1}{2\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\left(\varphi e_i\right)\left(\beta\right)\varphi e_i \\
&\quad - \frac{1}{2\beta}g\left(X,Y\right)\left(\varphi e_i\right)\left(\beta\right)\varphi e_i + \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)}{2\beta}\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_X\xi, \varphi e_i\right)\varphi e_i \\
&\quad + \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)}{2\beta}\eta\left(X\right)g\left(\nabla_Y\xi, \varphi e_i\right)\varphi e_i + \frac{1}{2\beta}X\left(\beta\right)g\left(Y, \varphi e_i\right)\varphi e_i \\
&\quad + \frac{1}{2\beta}Y\left(\beta\right)g\left(X, \varphi e_i\right)\varphi e_i - \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)}{2\beta}\eta\left(X\right)g\left(\nabla_{\varphi e_i}\xi, Y\right)\varphi e_i \\
&\quad - \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)}{2\beta}\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_{\varphi e_i}\xi, X\right)\varphi e_i
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\xi}\right)\overline{\xi} &= g\left(\nabla_X Y, \xi\right)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta\left(Y\right)X\left(\alpha\right)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta\left(X\right)Y\left(\alpha\right)\xi - \frac{1}{\alpha}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\alpha\right)\xi \\
&\quad - \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)}{2\alpha^2}\eta\left(X\right)g\left(\nabla_\xi\xi, Y\right)\xi - \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)}{2\alpha^2}\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_\xi\xi, X\right)\xi \\
&\quad + \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)}{2\alpha^2}g\left(\nabla_X\xi, Y\right)\xi + \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)}{2\alpha^2}g\left(\nabla_Y\xi, X\right)\xi \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha^2}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\beta\right)\xi - \frac{1}{2\alpha^2}g\left(X,Y\right)\xi\left(\beta\right)\xi,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \frac{\alpha}{\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)grad\alpha + \frac{1}{2\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)grad\beta - \frac{1}{2\beta}g\left(X,Y\right)grad\beta \\
&\quad + \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\alpha\right)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2\beta}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\beta\right)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2\beta}g\left(X,Y\right)\xi\left(\beta\right)\xi \\
&\quad + \frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta\left(Y\right)\nabla_X\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta\left(X\right)\nabla_Y\xi + \frac{1}{2\beta}X\left(\beta\right)Y + \frac{1}{2\beta}Y\left(\beta\right)X \\
&\quad - \frac{1}{2\beta}\eta\left(X\right)Y\left(\beta\right)\xi - \frac{1}{2\beta}\eta\left(Y\right)X\left(\beta\right)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta\left(X\right)Tr_g g\left(\nabla_.\xi, Y\right)\cdot \\
&\quad - \frac{\alpha^2-\beta}{2\beta}\eta\left(Y\right)Tr_g g\left(\nabla_.\xi, X\right)\cdot + \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)^2}{2\alpha^2\beta}\eta\left(X\right)g\left(\nabla_\xi\xi, Y\right)\xi \\
&\quad + \frac{\left(\alpha^2-\beta\right)^2}{2\alpha^2\beta}\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_\xi\xi, X\right)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta\left(Y\right)X\left(\alpha\right)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta\left(X\right)Y\left(\alpha\right)\xi \\
&\quad + \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2}g\left(\nabla_X\xi, Y\right)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2}g\left(\nabla_Y\xi, X\right)\xi.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.1.1.
En considérant les éléments des bases orthonormées de $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ et $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$, le théoreme 3.1.1 nous permet de déduire les formules suivantes :

Corollaire 3.1.1 *Pour la base orthonormée* $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}_{i=1}^m$ *de la variété métrique presque de contact* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$*, nous avons :*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{e_i} e_i &= \nabla_{e_i} e_i - \frac{m}{2\beta} grad\beta + \frac{m\left(\alpha^2 - \beta\right)}{2\alpha^2\beta}\xi\left(\beta\right)\xi \\ &+ \frac{1}{\beta} e_i\left(\beta\right) e_i - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2}\eta\left(\nabla_{e_i} e_i\right)\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\varphi e_i} \varphi e_i &= \nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i - \frac{m}{2\beta} grad\beta + \frac{m\left(\alpha^2 - \beta\right)}{2\alpha^2\beta}\xi\left(\beta\right)\xi \\ &+ \frac{1}{\beta}\left(\varphi e_i\right)\left(\beta\right)\varphi e_i - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2}\eta\left(\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i\right)\xi\end{aligned}$$

et

$$\overline{\nabla}_\xi \xi = \frac{\alpha^2}{\beta}\nabla_\xi \xi - \frac{\alpha}{\beta} grad\alpha + \frac{\alpha^2 + \beta}{\alpha\beta}\xi\left(\alpha\right)\xi.$$

De la même façon, pour la base orthonormée $\left\{\overline{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e_i, \overline{\varphi e}_i = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\varphi e_i, \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi\right\}_{i=1}^m$*, nous obtenons :*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\overline{e_i}} \overline{e_i} &= \frac{1}{\beta}\nabla_{e_i} e_i - \frac{m}{2\beta^2} grad\beta + \frac{m\left(\alpha^2 - \beta\right)}{2\alpha^2\beta^2}\xi\left(\beta\right)\xi \\ &+ \frac{1}{2\beta^2} e_i\left(\beta\right) e_i - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2\beta}\eta\left(\nabla_{e_i} e_i\right)\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}} \overline{\varphi e_i} &= \frac{1}{\beta}\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i - \frac{m}{2\beta^2} grad\beta + \frac{m\left(\alpha^2 - \beta\right)}{2\alpha^2\beta^2}\xi\left(\beta\right)\xi \\ &+ \frac{1}{2\beta^2}\left(\varphi e_i\right)\left(\beta\right)\varphi e_i - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2\beta}\eta\left(\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i\right)\xi\end{aligned}$$

et

$$\overline{\nabla}_{\overline{\xi}} \overline{\xi} = \frac{1}{\beta}\nabla_\xi \xi - \frac{1}{\alpha\beta} grad\alpha + \frac{1}{\alpha\beta}\xi\left(\alpha\right)\xi.$$

D'aprés le théorème 3.1.1, si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.2 *Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu, en utilisant le fait que :*

$$\nabla_X \xi = X - \eta\left(X\right)\xi, \qquad \nabla_Y \xi = Y - \eta\left(Y\right)\xi, \qquad \nabla_\xi \xi = 0$$

et

$$Tr_g g\left(X, \nabla_{.}\xi\right)\cdot = X - \eta\left(X\right)\xi, \qquad Tr_g g\left(Y, \nabla_{.}\xi\right)\cdot = Y - \eta\left(Y\right)\xi,$$

l'équation (3.1) devient :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y &- \frac{\alpha}{\beta}\eta(X)\eta(Y)\,grad\alpha + \frac{1}{2\beta}\eta(X)\eta(Y)\,grad\beta - \frac{1}{2\beta}g(X,Y)\,grad\beta \\
&+ \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha\beta}\eta(X)\eta(Y)\xi(\alpha)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2\beta}\eta(X)\eta(Y)\xi(\beta)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha^2\beta}g(X,Y)\xi(\beta)\xi \\
&- \frac{1}{2\beta}\eta(X)Y(\beta)\xi - \frac{1}{2\beta}\eta(Y)X(\beta)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta(Y)X(\alpha)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta(X)Y(\alpha)\xi \\
&+ \frac{1}{2\beta}X(\beta)Y + \frac{1}{2\beta}Y(\beta)X - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}\eta(X)\eta(Y)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}g(X,Y)\xi.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

En particulier, nous déduisons que :

$$\overline{\nabla}_{e_i}e_i = \nabla_{e_i}e_i - \frac{m}{2\beta}grad\beta + \frac{m(\alpha^2-\beta)}{2\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi + \frac{1}{\beta}e_i(\beta)e_i + \frac{m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2}\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i} = \frac{1}{\beta}\nabla_{e_i}e_i - \frac{m}{2\beta^2}grad\beta + \frac{m(\alpha^2-\beta)}{2\alpha^2\beta^2}\xi(\beta)\xi + \frac{1}{2\beta^2}e_i(\beta)e_i + \frac{m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2\beta}\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\varphi e_i}\varphi e_i = \nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i - \frac{m}{2\beta}grad\beta + \frac{m(\alpha^2-\beta)}{2\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi + \frac{1}{\beta}(\varphi e_i)(\beta)\varphi e_i + \frac{m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2}\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i} = \frac{1}{\beta}\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i - \frac{m}{2\beta^2}grad\beta + \frac{m(\alpha^2-\beta)}{2\alpha^2\beta^2}\xi(\beta)\xi + \frac{1}{2\beta^2}(\varphi e_i)(\beta)\varphi e_i + \frac{m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2\beta}\xi,$$

$$\overline{\nabla}_\xi \xi = -\frac{\alpha}{\beta}grad\alpha + \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi(\alpha)\xi$$

et

$$\overline{\nabla}_{\overline{\xi}}\overline{\xi} = -\frac{1}{\alpha\beta}grad\alpha + \frac{1}{\alpha\beta}\xi(\alpha)\xi.$$

3.2 Applications harmoniques et la déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée

3.2.1 Harmonicité de l'application identité $Id_M : \left(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g\right) \longrightarrow \left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$

Théorème 3.2.1.1 *Soit $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété métrique presque de contact et soit $\left(\overline{\varphi}=\varphi,\overline{\xi}=\frac{1}{\alpha}\xi,\overline{\eta}=\alpha\eta,\overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée définie sur M, où $\overline{g}=\beta g+(\alpha^2-\beta)\,\eta\otimes\eta$.*
Le champ de tension de l'application identité $Id_M : (M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g) \longrightarrow \left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\tau(Id) = &-\frac{\alpha}{\beta}grad\alpha - \frac{m-1}{\beta}grad\beta + \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi(\alpha)\xi \\
&+ \frac{(m-1)\alpha^2-m\beta}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}(div\xi)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{\beta}\nabla_\xi\xi.
\end{aligned}$$

En particulier, si $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est une variété de Kenmotsu, le champ de tension de l'application identité $Id_M:(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)\longrightarrow\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ devient :

$$\begin{aligned}\tau(Id)&=-\frac{\alpha}{\beta}grad\alpha-\frac{m-1}{\beta}grad\beta+\frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi(\alpha)\xi\\&+\frac{(m-1)\alpha^2-m\beta}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi+\frac{2m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2}\xi.\end{aligned}$$

Preuve du théorème 3.2.1.1.
Par définition, nous avons :

$$\tau(Id)=\overline{\nabla}_{e_i}e_i-\nabla_{e_i}e_i+\overline{\nabla}_{\varphi e_i}\varphi e_i-\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i+\overline{\nabla}_\xi\xi-\nabla_\xi\xi.$$

En utilisant le corollaire 3.1.1, nous obtenons :

$$\overline{\nabla}_{e_i}e_i-\nabla_{e_i}e_i=-\frac{m}{2\beta}grad\beta+\frac{m(\alpha^2-\beta)}{2\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi+\frac{1}{\beta}e_i(\beta)e_i+\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}g(\nabla_{e_i}\xi,e_i)\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\varphi e_i}\varphi e_i-\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i=-\frac{m}{2\beta}grad\beta+\frac{m(\alpha^2-\beta)}{2\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi+\frac{1}{\beta}(\varphi e_i)(\beta)\varphi e_i+\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}g(\nabla_{\varphi e_i}\xi,\varphi e_i)\xi$$

et

$$\overline{\nabla}_\xi\xi-\nabla_\xi\xi=\frac{\alpha^2-\beta}{\beta}\nabla_\xi\xi-\frac{\alpha}{\beta}grad\alpha+\frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi(\alpha)\xi,$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\tau(Id)&=-\frac{\alpha}{\beta}grad\alpha-\frac{m}{\beta}grad\beta+\frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi(\alpha)\xi+\frac{m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi\\&+\frac{1}{\beta}e_i(\beta)e_i+\frac{1}{\beta}(\varphi e_i)(\beta)\varphi e_i+\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}g(\nabla_{e_i}\xi,e_i)\xi\\&+\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}g(\nabla_{\varphi e_i}\xi,\varphi e_i)\xi+\frac{\alpha^2-\beta}{\beta}\nabla_\xi\xi\end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$div\xi=Tr_g g(\nabla.\xi,\cdot)=g(\nabla_{e_i}\xi,e_i)+g(\nabla_{\varphi e_i}\xi,\varphi e_i),$$

nous déduisons que :

$$\begin{aligned}\tau(Id)&=-\frac{\alpha}{\beta}grad\alpha-\frac{m-1}{\beta}grad\beta+\frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi(\alpha)\xi\\&+\frac{(m-1)\alpha^2-m\beta}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi+\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2}(div\xi)\xi+\frac{\alpha^2-\beta}{\beta}\nabla_\xi\xi\end{aligned}$$

Si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu, alors $div\xi = 2m$ et $\nabla_\xi \xi = 0$ et dans ce cas, le champ de tension de l'application identité Id_M devient

$$\begin{aligned} \tau(Id) &= -\frac{\alpha}{\beta} grad\alpha - \frac{m-1}{\beta} grad\beta + \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}\xi(\alpha)\xi \\ &+ \frac{(m-1)\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi + \frac{2m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2}\xi. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.2.1.1.

Corollaire 3.2.1.1 *L'application identité* $Id_M : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *est harmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned} &\alpha^3 grad\alpha + (m-1)\alpha^2 grad\beta - \alpha\left(\alpha^2+\beta\right)\xi(\alpha)\xi - \left((m-1)\alpha^2 - m\beta\right)\xi(\beta)\xi \\ &-\left(\alpha^2-\beta\right)\beta(div\xi)\xi - \alpha^2\left(\alpha^2-\beta\right)\nabla_\xi\xi = 0. \end{aligned}$$

De plus, si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété de Kenmotsu, nous concluons que* Id_M : $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *est harmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned} &\alpha^3 grad\alpha + (m-1)\alpha^2 grad\beta - \alpha\left(\alpha^2+\beta\right)\xi(\alpha)\xi \\ &-\left((m-1)\alpha^2 - m\beta\right)\xi(\beta)\xi - 2m\left(\alpha^2-\beta\right)\beta\xi = 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1.1 *Si les fonctions* α *et* β *dépendent seulement de la direction de* ξ*, nous concluons que l'application identité* $Id_M : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *est harmonique si et seulement si :*

$$\alpha\beta\xi(\alpha)\xi - m\beta\xi(\beta)\xi + \left(\alpha^2-\beta\right)\beta(div\xi)\xi + \alpha^2\left(\alpha^2-\beta\right)\nabla_\xi\xi = 0.$$

Dans le cas où $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété de Kenmotsu, la condition d'harmonicité de l'application identité* Id_M : $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *est donnée par l'équation suivante :*

$$\alpha\xi(\alpha) - m\xi(\beta) + 2m\left(\alpha^2-\beta\right) = 0.$$

Exemple 3.2.1.1 *([36]) Considérons la variété* $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\right\}$*. La métrique riemannienne sur* M *est définie par :*

$$g = \frac{1}{z^2}dx^2 + \frac{1}{z^2}dy^2 + \frac{1}{z^2}dz^2,$$

et la base orthonormée est donnée par : $e_1 = z\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = z\frac{\partial}{\partial y}$ *et* $e_3 = z\frac{\partial}{\partial z}$*. Les champs de vecteurs* e_1*,* e_2 *et* e_3 *satisfont à :*

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_1}e_1 = e_3, & \nabla_{e_1}e_2 = 0, & \nabla_{e_1}e_3 = -e_1, \\ \nabla_{e_2}e_1 = 0, & \nabla_{e_2}e_2 = e_3, & \nabla_{e_2}e_3 = -e_2, \\ \nabla_{e_3}e_1 = 0, & \nabla_{e_3}e_2 = 0, & \nabla_{e_3}e_3 = 0. \end{array}$$

Si nous supposons que les fonctions α et β dépendent seulement de z, nous déduisons que le champ de tension de l'application identité $Id_M : (M,\varphi,\xi,\eta,g) \longrightarrow \left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ est donné par

$$\tau(Id) = \frac{1}{\alpha^2}\left(z\alpha\alpha' - z\beta' - 2\left(\alpha^2 - \beta\right)\right)\xi.$$

L'application identité Id_M est alors harmonique si et seulement si les fonctions α et β sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$z\alpha\alpha' - z\beta' - 2\left(\alpha^2 - \beta\right) = 0.$$

Pour résoudre cette dernière équation, nous donnons quelques solutions particulières :

1. *Cherchons des solutions particulières de la forme $\alpha = k_1 z^a$ et $\beta = k_2 z^{2a}$ $(a, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^*, k_1, k_2 > 0\ )$. L'application identité Id_M est harmonique si et seulement si :*
$$a = \frac{2\left(k_1^2 - k_2\right)}{k_1^2 - 2k_2}.$$
Par exemple, si $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$, nous trouvons $a = 3$, alors $\alpha = 2z^3$ et $\beta = z^6$.
2. *D'autres solutions particulières sont données par $\alpha = C_1 z^2$ et $\beta = C_2 z^2$ où $C_1, C_2 > 0$.*

Exemple 3.2.1.2 *([25]) Considérons la variété $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \right\}$. La métrique riemannienne sur M est définie par :*

$$g = \frac{1}{e^{2z}}dx^2 + \frac{1}{e^{2z}}dy^2 + dz^2$$

et la base orthonormée est donnée par $e_1 = e^z\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = e^z\frac{\partial}{\partial y}$ et $e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$. Les champs de vecteurs e_1, e_2 et e_3 satisfont à :

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_1}e_1 = e_3, & \nabla_{e_1}e_2 = 0, & \nabla_{e_1}e_3 = -e_1, \\ \nabla_{e_2}e_1 = 0, & \nabla_{e_2}e_2 = e_3, & \nabla_{e_2}e_3 = -e_2, \\ \nabla_{e_3}e_1 = 0, & \nabla_{e_3}e_2 = 0, & \nabla_{e_3}e_3 = 0. \end{array}$$

Si nous supposons que les fonctions α et β dépendent seulement de z, nous déduisons que l'application identité $Id_M : (M,\varphi,\xi,\eta,g) \longrightarrow \left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ est harmonique si et seulement si :

$$\alpha\alpha' - \beta' + 2\left(\alpha^2 - \beta\right) = 0.$$

Pour résoudre cette dernière équation, nous donnons quelques solutions particulières :

1. *Comme des solutions particulières nous avons : $\alpha = C_1 e^{-2z}$ et $\beta = C_2 e^{-2z}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R}^*, C_1, C_2 > 0\ )$.*
2. *Cherchons des solutions particulières de la forme $\alpha = C_1 e^{az}$ et $\beta = C_2 e^{bz}$, nous obtenons $b = 2a$ et $(a+2)\,C_1^2 - 2\,(a+1)\,C_2 = 0$. Alors $\alpha(z) = C_1 e^{az}$ et $\beta(z) = \frac{(a+2)}{2(a+1)}C_1^2 e^{2az}$.*

Exemple 3.2.1.3 *([22]) Considérons la variété* $M = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5\}$, *où* (x, y, z, u, v) *sont les coordonnées standard dans* $\mathbb{R}^5$. *Une base orthonormée est donnée par* $e_1 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial y}$, $e_3 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial z}$, $e_4 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial u}$ *et* $e_5 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial v}$.
Prenant $e_5 = \xi$ *et en utilisant la formule de Koszul, nous obtenons ce qui suit :*

$$\begin{array}{lllll}
\nabla_{e_1}e_1 = -e_5, & \nabla_{e_1}e_2 = 0, & \nabla_{e_1}e_3 = 0, & \nabla_{e_1}e_4 = 0, & \nabla_{e_1}e_5 = e_1 \\
\nabla_{e_2}e_1 = 0, & \nabla_{e_2}e_2 = -e_5, & \nabla_{e_2}e_3 = 0, & \nabla_{e_2}e_4 = 0, & \nabla_{e_2}e_5 = e_2 \\
\nabla_{e_3}e_1 = 0, & \nabla_{e_3}e_2 = 0, & \nabla_{e_3}e_3 = -e_5, & \nabla_{e_3}e_4 = 0, & \nabla_{e_3}e_5 = e_3 \\
\nabla_{e_4}e_1 = 0, & \nabla_{e_4}e_2 = 0, & \nabla_{e_4}e_3 = 0, & \nabla_{e_4}e_4 = -e_5, & \nabla_{e_4}e_5 = e_4 \\
\nabla_{e_5}e_1 = 0, & \nabla_{e_5}e_2 = 0, & \nabla_{e_5}e_3 = 0, & \nabla_{e_5}e_4 = 0, & \nabla_{e_5}e_5 = 0.
\end{array}$$

Si nous supposons que les fonctions α *et* β *dépendent uniquement de* v, *l'application identité* Id_M *est harmonique si et seulement si les fonctions* α *et* β *sont des solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$e^{-v}\alpha\alpha' + 4\alpha^2 - 2e^{-v}\beta' - 4\beta = 0.$$

Pour résoudre cette dernière équation, nous donnerons quelques solutions particulières :

1. *Un simple calcul prouve que les fonctions* $\alpha = k_1 e^{-4e^v}$ *et* $\beta = k_2 e^{-2e^v}$ $(k_1, k_2 > 0)$ *sont des solutions de la dernière équation différentielle.*
2. *Cherchons des solutions particulières de la forme* $\alpha = k_1 e^{ae^v}$ *et* $\beta = k_2 e^{be^v}$ $(a, b, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^*, k_1, k_2 > 0$ *), nous obtenons* $\alpha = k_1 e^{ae^v}$ *et* $\beta = k_2 e^{2ae^v}$, *où* $a = \frac{4\left(k_2 - k_1^2\right)}{k_1^2 - 4k_2}$.
Par exemple, si $k_1 = k_2 = 2$, *nous trouvons* $a = 2$ *et* $b = 4$, *alors* $\alpha = 2e^{2e^v}$ *et* $\beta = 2e^{4e^v}$.

Exemple 3.2.1.4 *([34]) Considérons* $m \in \mathbb{N}^*$ *et la variété* $M = \mathbb{R}^{2m+1}$. *La métrique riemannienne sur* M *est définie par :*

$$g = e^{2(z+e^z)}dx_i^2 + e^{-2(z-e^z)}dy_i^2 + e^{2z}dz^2,$$

et la base orthonormée est donnée par :

$$X_i = e^{-(z+e^z)}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y_i = e^{z-e^z}\frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad \xi = e^{-z}\frac{\partial}{\partial z}, i = 1, \ldots, m.$$

Les champs de vecteurs X_i, Y_i *et* ξ *satisfont à :*

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{X_i}X_j = -\left(1 + e^{-z}\right)\delta_{ij}\xi, & \nabla_{X_i}Y_j = 0, & \nabla_{X_i}\xi = \left(1 + e^{-z}\right)X_i, \\
\nabla_{Y_i}Y_j = -\left(1 - e^{-z}\right)\delta_{ij}\xi, & \nabla_{Y_i}X_j = 0, & \nabla_{Y_i}\xi = \left(1 - e^{-z}\right)Y_i, \\
\nabla_{\xi}X_i = 0, & \nabla_{\xi}Y_i = 0, & \nabla_{\xi}\xi = 0.
\end{array}$$

Si nous supposons que les fonctions α *et* β α *et* β *dépendent seulement de* z, *nous déduisons que l'application identité* $Id_M : (M = \mathbb{R}^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M = \mathbb{R}^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *est harmonique si et seulement si les fonctions* α *et* β *sont des solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$e^{-z}\alpha\alpha' + 2\alpha^2 - me^{-z}\beta' - 2\beta = 0.$$

Des solutions particulières de cette dernière équation sont données par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} e^{-z}\alpha' + 2\alpha = 0 \\ me^{-z}\beta' + 2\beta = 0 \end{array} \right.$$

ce qui nous conduit à :

$$\alpha = C_1 e^{2e^{-z}} \text{ et } \beta = C_2 e^{\frac{2}{m}e^{-z}} \text{ où } C_1, C_2 > 0.$$

3.2.2 Harmonicité de l'application identité $Id_M : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g\right)$

Théorème 3.2.2.1 *Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété métrique presque de contact et soit* $\left(\overline{\varphi} = \varphi, \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \overline{\eta} = \alpha\eta, \overline{g}\right)$ *une déformation $\mathcal{D}$-conforme généralisée définie sur M, où* $\overline{g} = \beta g + (\alpha^2 - \beta)\,\eta \otimes \eta$.
Le champ de tension de l'application identité $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est donné par :*

$$\begin{aligned} \tau\left(Id\right) = {} & \frac{1}{\alpha\beta} grad\alpha + \frac{m-1}{\beta^2} grad\beta - \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha^3\beta}\xi\left(\alpha\right)\xi \\ & - \frac{\left(m-1\right)\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta^2}\xi\left(\beta\right)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\left(div\xi\right)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\nabla_\xi\xi. \end{aligned}$$

En particulier, si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété de Kenmotsu, le champ de tension de l'application identité devient :*

$$\begin{aligned} \tau\left(Id\right) = {} & \frac{1}{\alpha\beta} grad\alpha + \frac{m-1}{\beta^2} grad\beta - \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha^3\beta}\xi\left(\alpha\right)\xi \\ & - \frac{\left(m-1\right)\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta^2}\xi\left(\beta\right)\xi - \frac{2m\left(\alpha^2-\beta\right)}{\alpha^2\beta}\xi. \end{aligned}$$

Preuve du théorème 3.2.2.1.
Par définition, nous avons :

$$\tau\left(Id\right) = \nabla_{\overline{e_i}}\overline{e_i} - \overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i} + \nabla_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i} - \overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i} + \nabla_{\overline{\xi}}\overline{\xi} - \overline{\nabla}_{\overline{\xi}}\overline{\xi}.$$

Un simple calcul nous donne :

$$\nabla_{\overline{e_i}}\overline{e_i} = \frac{1}{\beta}\nabla_{e_i}e_i - \frac{1}{2\beta^2}e_i\left(\beta\right)e_i,$$

$$\nabla_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i} = \frac{1}{\beta}\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i - \frac{1}{2\beta^2}\left(\varphi e_i\right)\left(\beta\right)\varphi e_i$$

et

$$\nabla_{\overline{\xi}}\overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\nabla_\xi\frac{1}{\alpha}\xi = \frac{1}{\alpha^2}\nabla_\xi\xi - \frac{1}{\alpha^3}\xi\left(\alpha\right)\xi.$$

alors :

$$\nabla_{\overline{e_i}}\overline{e_i} - \overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i} = \frac{m}{2\beta^2} grad\beta - \frac{1}{\beta^2} e_i(\beta) e_i - \frac{m(\alpha^2-\beta)}{2\alpha^2\beta^2}\xi(\beta)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\eta(\nabla_{e_i}e_i)\xi,$$

$$\nabla_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i} - \overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i} = \frac{m}{2\beta^2} grad\beta - \frac{1}{\beta^2}(\varphi e_i)(\beta)\varphi e_i - \frac{m(\alpha^2-\beta)}{2\alpha^2\beta^2}\xi(\beta)\xi + \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\eta(\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i)\xi$$

et

$$\nabla_{\bar{\xi}}\bar{\xi} - \overline{\nabla}_{\bar{\xi}}\bar{\xi} = \frac{1}{\alpha\beta} grad\alpha - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\nabla_\xi\xi - \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha^3\beta}\xi(\alpha)\xi.$$

Nous déduisons alors que :

$$\begin{aligned}\tau(Id) &= \frac{1}{\alpha\beta} grad\alpha + \frac{m-1}{\beta^2} grad\beta - \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha^3\beta}\xi(\alpha)\xi \\ &\quad - \frac{(m-1)\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta^2}\xi(\beta)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}(div\xi)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\nabla_\xi\xi.\end{aligned}$$

Si $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est une variété de Kenmotsu, alors $div\xi = 2m$ et $\nabla_\xi\xi = 0$ et le champ de tension de l'application identité Id devient :

$$\begin{aligned}\tau(Id) &= \frac{1}{\alpha\beta} grad\alpha + \frac{m-1}{\beta^2} grad\beta - \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha^3\beta}\xi(\alpha)\xi \\ &\quad - \frac{(m-1)\alpha^2 - m\beta}{\alpha^2\beta^2}\xi(\beta)\xi - \frac{2m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2\beta}\xi.\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.2.2.1.

Remarque 3.2.2.1 *Si les fonctions α et β dépendent uniquement de la direction de ξ, alors le champ de tension de l'application identité $Id : (M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}) \longrightarrow (M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ prend la forme suivante :*

$$\tau(Id) = -\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi + \frac{m}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}(div\xi)\xi - \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2\beta}\nabla_\xi\xi,$$

et dans le cas où $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est une variété de Kenmotsu, le champ de tension de l'application identité est donné par la formule suivante :

$$\tau(Id) = -\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi + \frac{m}{\alpha^2\beta}\xi(\beta)\xi - \frac{2m(\alpha^2-\beta)}{\alpha^2\beta}\xi.$$

Exemple 3.2.2.1 *([15]) Considérons la variété $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\}$. La métrique riemannienne sur M est définie par :*

$$g = \frac{1}{z^2}dx^2 + \frac{1}{z^2}dy^2 + \frac{1}{z^2}dz^2,$$

et la base orthonormée est donnée par : $e_1 = z\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = z\frac{\partial}{\partial y}$ *et* $e_3 = -z\frac{\partial}{\partial z}$. *Les champs de vecteurs* e_1, e_2 *et* e_3 *satisfont à :*

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_1}e_1 = 0, & \nabla_{e_1}e_2 = 0, & \nabla_{e_1}e_3 = e_1, \\ \nabla_{e_2}e_1 = 0, & \nabla_{e_2}e_2 = 0, & \nabla_{e_2}e_3 = e_2, \\ \nabla_{e_3}e_1 = 0, & \nabla_{e_3}e_2 = 0, & \nabla_{e_3}e_3 = 0. \end{array}$$

Si nous supposons que les fonctions α *et* β *dépendent uniquement de* z, *nous déduisons que l'application identité* $Id : \left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est harmonique si et seulement si les fonctions* α *et* β *sont des solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$z\beta\alpha' - z\alpha\beta' - 2\alpha^3 + 2\alpha\beta = 0.$$

Cherchons des solutions particulières de type $\alpha = k_1 z^a$ *et* $\beta = k_2 z^{2a}$ *où* $(k_1, k_2 > 0)$. *L'application identité* Id *est harmonique si et seulement si* $k_2 = \frac{2}{2-a}k_1^2, a < 2$, *ce qui nous donne* $\alpha = k_1 z^a$ *et* $\beta = \frac{2}{2-a}k_1^2 z^{2a}$ *où* $a < 2$. *Par exemple, si nous prenons* $a = -2$, *nous obtenons* $\alpha = \frac{k_1}{z^2}$ *et* $\beta = \frac{k_1^2}{2z^4}$.

Exemple 3.2.2.2 *([34]) Considérons la variété* $M = \{(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, t) \in \mathbb{R}^{2m+1}, z > 0\}$ *avec des coordonnées standard* $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, t)$. *Prenons :*

$$\xi = -t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_i = t\left(1 + t^2\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + t^3\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad Y_i = -t^3\frac{\partial}{\partial x_i} + t\left(1 - t^2\right)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

comme une base globale sur M. *Si nous supposons que les fonctions* α *et* β *dépendent seulement de* t, *nous en déduisons que l'application identité* $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est harmonique si et seulement si les fonctions* α *et* β *sont des solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$t\beta\alpha' - mt\alpha\beta' - 2m\alpha^3 + 2m\alpha\beta = 0.$$

Pour cette équation, nous pouvons donner quelques solutions particulières :

1. *En tant que premières solutions particulières, nous obtenons :* $\alpha = \sqrt{\frac{C}{m}}t$ *et* $\beta = Ct^2$ $(C > 0)$.
2. *D'autres solutions particulières sont* $\alpha = Ct^{-2m}$ *et* $\beta = \frac{C^2}{2m}t^{-4m}$ $(C > 0)$.

Bibliographie

1. M. E. Abbes et S. Ouakkas, On the $\mathcal{D}$-Homothetic BI-Warping and Biharmonic Maps, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, Vol. 18 (2), 281-309 (2020).
2. P. Alegre et A. Carriazo, Generalized Sasakian space forms and conformal change of metric, Results Math., Vol. 59, 485-493 (2011).
3. P. Baird et J. Eells, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds, Oxford Sciences Publications, 2003.
4. G. Beldjilali, Produit de deux variétés munies de quelques structures, thèse de doctorat, Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen (2017).
5. G. Beldjilali et M. Belkhelfa, Kählerian structure and $\mathcal{D}$-Homothetic bi-warping, J. Geom. Symmetry Phys, Vol. 42, 1-13 (2016).
6. A. Benkartab, Géométrie des applications harmoniques, thèse de doctorat, Université Mustapha Stambouli - Mascara (2020).
7. A. Bennouar, Applications harmoniques et applications biharmoniques sur certaines structures, thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed-Boudiaf (2018).
8. A. Bennouar et S. Ouakkas, Some constructions of biharmonic maps on the warped product manifolds, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 58 (4), 481-500 (2017).
9. R. L. Bishop et B. O'Neill, Manifolds of negative curvature, Trans. A.M.S., Vol. 145, 1-49 (1969).
10. D.E. Blair, Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509 (2), 17-35, Springer, (1976).
11. D.E. Blair, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics, Vol. 203, Birkhauser, Boston, (2002).
12. D.E. Blair, $\mathcal{D}$-Homothetic warping and applications to geometric structures and cosmology, African Diaspora Journal of Mathematics, Vol. 14 (2), 134-144 (2012).
13. C. P. Boyer, K. Galicki et P. Matzeu, On Eta-Einstein Sasakian Geometry, Comm.Math. Phys., Vol. 262 (3-4), 177-208 (2006).
14. U.C. De et A. K. Mondal, On 3-dimensional normal almost contact metric manifolds satisfying certain curvature conditions, Commun. Korean Math. Soc., Vol. 24 (2), 265-275 (2009).
15. A. De, On Kenmotsu manifold, Commun. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 2 (3), 1-6 (2010).
16. J. Eells et L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc, Vol. 10 (1), 1-68 (1978).
17. J. Eells et L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, CBMS Regional Conference Series of the National Sciences Foundation, Vol. 50, (1983).

18. J. Eells et L. Lemaire, Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc, Vol. 20, 385-524 (1988).
19. J. Eells et J. H. Sampson, Harmonic mappings of riemannian manifolds, American Journal of Mathematics, Vol. 86 (1), 109-160 (1964).
20. H. El Hendi, Géométrie harmonique des fibrés tangents, thèse de doctorat, Université d'Oran 1 Ahmed Ben Bella (2015).
21. E. Ghandour, Applications semi-conformes et solitons de Ricci, thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale - Brest (2018).
22. G. Ghosh et U. C. De, Kenmotsu manifolds with generalized Tanaka-Webster connection, Publications de l'Institut Mathematique-Beograd, Vol. 102, 221-230 (2017).
23. G. Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, Chinese Ann. Math. Ser. A, Vol. 7 (4), 389-402 (1986).
24. K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math journal. II Ser, Vol. 24, 93-103 (1972).
25. D. L. Kiran Kumar, H. G. Nagaraja et K. Venu, D-homothetically deformed Kenmotsu metric as a Ricci soliton, Annales Mathematicae Silesianae, Vol. 33, 143-152 (2019).
26. J. C. Marrero, The local structure of trans-Sasakian manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 162 (1), 77-86 (1992).
27. A. Mohammed Cherif, Géométrie harmonique des variétés, thèse de doctorat, Université Mustapha Stambouli - Mascara (2014).
28. A. Nadjma, Harmonic maps on Kenmotsu manifolds, An. St. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 21 (3), 197-208 (2013).
29. R. Nasri, Sur la géométrie riemannienne des structures de poisson et les applications f-biharmoniques, thèse de doctorat, Université de Saida-Dr.Moulay Tahar (2010).
30. S. Ouakkas, Applications biharmoniques : déformations conformes et théorèmes de Liouville, thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale - Brest (2008).
31. S. Ouakkas et D. Djebbouri, Conformal maps, biharmonic maps, and the warped product, Mathematics, Vol. 4 (1) (2016).
32. J. A. Oubiña, New classes of almost contact metric structures, Publ. Math. Debrecen, Vol. 32 (3-4), 187-193 (1985).
33. N. Özdemir, S. Aktay et M. Solgun, On generalized D-conformal deformations of certain almost contact metric manifolds, Mathematics, Vol. 7 (2), 168 (2019).
34. A.M. Pastore et V. Saltarelli, Generalized nullity distributions on almost Kenmotsu manifolds, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 4 (2), 168-183 (2011).
35. V. S. Prasad, A study on Kenmotsu manifolds and their submanifolds, thèse de doctorat, Université de Kuvempu (1999).
36. M.D. Siddiqi, η-Ricci solitons in 3-dimensional normal almost contact metric manifolds, Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III : Mathematics, Informatics, Physics, Vol. 11 (2), 215-234 (2018).

37. S. Suguri et S. Nakayama, D-conformal deformations on almost contact metric structure, Tensor N.S., Vol. 28, 125-129 (1974).

38. S. Tanno, The topology of contact Riemannian manifolds, Illinois J. Math., Vol. 12, 700-717 (1968).

39. Y. Wang, Harmonic maps on almost Kenmotsu manifolds, Math. Reports, Vol. 20 (2), 215-225 (2018).

40. A. Zagane et S. Ouakkas, Biharmonic maps on Kenmotsu manifolds, New trends in mathematical sciences, Vol. 4 (3), 129-139 (2016).

41. K. Zegga, Géométrie harmonique des variétés, thèse de doctorat, Université Djillali LIABES-Sidi Bel Abbès (2016).

« التوافق و التوافق الثنائي في البنيات التلامسية تقريبا »

ملخص:

تندرج هذه الأطروحة في إطار دراسة وبناء التطبيقات التوافقية وثنائية التوافقية في هياكل التلامس تقريبًا.

في الجزء الأول، أدخلنا بنية الجداء ثنائي الالتفاف -(2n) تحاكي حيث قمنا بتوصيف التوافقية والتوافقية الثنائية المرتبطة بهذه البنية.

الجزء الثاني مخصص لتوصيف التطبيقات التوافقية من خلال إدخال مفهوم التشوه (2n)- توافقي المعمم، وهذا ما سمح لنا ببناء أمثلة جديدة.

كلمات مفتاحية: التطبيقات التوافقية – التطبيقات ثنائية التوافقية – المنوعات التلامسية تقريبًا – منوعة كينموتسو- الجداء ثنائي الالتفاف (2n)- تحاكي – التشوه (2n)-توافقي المعمم.

« L'harmonicité et la biharmonicité dans les structures presque de contact. »

Résumé :

Cette thèse entre dans le cadre de l'étude et la construction des applications harmoniques et biharmoniques dans les structures presque de contact.

Dans la première partie, on a introduit la structure du produit bi-tordu *D*-homothétique où on a caractérisé l'harmonicité et la biharmonicité associées à cette structure.

La deuxième partie est consacrée à la caractérisation des applications harmoniques en introduisant la notion de la déformation *D*-conforme généralisée, ce qui nous a permis de construire de nouveaux exemples.

Mots clés : Applications harmoniques – Applications biharmoniques – Variétés presque de contact – Variété de Kenmotsu – Produit bi-tordu *D*-homothétique – Déformation *D*-conforme généralisée.

« The harmonicity and the biharmonicity in almost contact structures.»

Abstract :

This thesis is a part of the study and construction of harmonic and biharmonic maps in almost contact structures.

In the first part, the structure of the D-homothetic bi-warped product was introduced, where the harmonicity and the biharmonicity associated whithin this structure were characterized.

The second part is devoted to the characterization of harmonic maps by introducing the notion of generalized D-conformal deformation, which allowed us to build new examples.

Key words: Harmonic maps – Biharmonic maps – Almost contact manifolds – Kenmotsu manifold – *D*-homothetic bi-warped product – Generalized *D*-conformal deformation.