Année: 2013 N° attribué par la bibliothèque

Espaces vectoriels symplectiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Licence

Universitaire de Saida

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse

par

Hanane **D**ahmani [1] et **H**ala **B**echaref [2]

Sous la direction de

Encadreur : Mr D.Djebbouri

Soutenue le 01/juin/2013 devant le jury composé de

M. Kadhi	Maître assistant Univ. Saida	Président
D. Djebbouri	Maître assistant Univ. Saida	Directeur de mémoire
R. Nasri	Maître de conférence Univ. Saida	Examinateur

1. DAH.HANANE @gmail.com
2. hbecharef2013@gmail.com

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents qui m'ont enfantent, m'ont encouragé à suivre mes études ;
A mes frères, et spécialement à mon frère Mohamed ;
A mes chers soeurs et leurs mariés et leurs enfants Sara , Mohamed , Oussama et Abed el razak ;
A ma tente Malika, et spécialement à Asmaa ;
A mon binôme Hala et tous leurs familles ;
A tout la promotion 3 lmd 2012 \ 2013 ;
A tout qui prend une place dans mon coeur.

Hanane

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents qui m'ont enfantent, m'ont encouragé à suivre mes études ;

A mes frères, et spécialement à mon frère Mokhtar ;

A mes chers soeurs et leurs mariés et leurs enfantes (Nihad , Abed El Illeh , Fatima) ;

A mes amis (Imane , Ikram , Hassna , Khaira , Mokhtaria) Et spécialement à Asmaa ;

A mon binôme Hanane et tous leurs familles ;

A tout la promotion 3 lmd 2012 \ 2013 ;

A tout qui prend une place dans mon coeur.

Hala

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions dieu tout puissant pour sa bénédiction, de nous avoir donné le privilège d'étudier et de suivre le chemin de la science.
Nous remercions notre encadreur Mr D.Djebbouri qui nous a sacrifié beaucoup de son temps, ainsi pour ses précieux conseils et son grand patience.
Nous tenons à remercier les membres du jury pour l'amabilité de jury notre travail.
Nous tenons à remercier tout le personnel d'Université Dr.Moulay Tahar et en particulier ceux du département de mathématique.
Enfin nous remercions également tout ceux qui nous ont aidé, de prés ou de loin, à élaborer ce modeste travail.

Hanane et Hala

Table des matières

Introduction

En algèbre linéaire, un espace vectoriel est une structure algebrique permettant au pratique d'éffectuer des combinaisons linéaires pour une introduction au concept de vecteur.

Un espace vectoriel devient symplectique quand on le munit d'une forme bilinéaire anti-symétrique et non dégénérée. L'étude de ces espaces vectoriels présente quelques ressemblances avec l'étude des espaces préhilbertiens réels puisqu'on y définit également la notion d'orthogonalité. Mais il y a différences, ne serait-ce que parce que tout vecteur est orthogonal à lui même.

Les espaces vectoriels symplectiques servent de modèles pour définir les variétés symplectiques, étudiées en géométrie symplectique. Ces dernières sont le cadre naturel de la mécanique hamiltonienne.

Un espace vectoriel préhilbertien complexe est automatiquement muni d'une structure symplectique en tant qu'espace vectoriel réel. En termes de variétés, l'analogue est la notion de variété Kälilérienne.

Ce travail est partagé en trois chapitre ;

Dans le premier chapitre, nous allons étudier plus en détail les applications multilinéaires alternées, leurs produits extérieurs et leurs propriétés. A la fin de ce chapitre on étudie surtout la notion de formes bilinéaires et on introduit les isomorphismes canoniques entre l'espace vectoriel et son dual, qui nous intéresse au troisième chapitre.

Le deuxième chapitre consacré à l'étude de la notion de la dualité, et formes bilinéaires canoniques, c'est une plate forme pour l'étude des applications linéaires adjointes dans les espaces Euclidiennes, hermitiennes, Minkowski et espaces symplectiques.

Le troisième chapitre c'est le but de ce travail, on s'intéresse à la notion de la métrique.

On introduit la définition d'espaces Euclidiens, hermitiens, Minkowski et espaces symplectiques dont la dimension est finie, et si on le munit d'une base, ces conditions se transcrivent sur la matrice représentative de la forme bilinéaire w ; il faut qu'elle soit anti-symétrique et inversible, et on sait que le déterminant d'une matrice anti-symétrique d'ordre impaire est nul, donc cela impose que la dimension de l'espace est paire.
En fin une courte bibliographie des ouvrages de base pour ce travail.

Chapitre 1

Algébre exterieure

1.1 Applications multilinéaires alternées

Soient E, F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimension n et m respectivement. Où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.1.1. *Une application $p-$ linéaire ϕ de E dans F, est une application de E^p dans F c'est-à-dire :*

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E \times E \times \cdots \times E & \to & F \\ & (x_1, \cdots, x_p) & \mapsto & \phi(x_1, \cdots, x_p) \end{array}$$

linéaire en chaque de ses p coordonneés. C'est-à-dire : $\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\phi\ (x_1, \cdots, x_i + y_i, \cdots, x_p) = \phi\ (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_p) + \phi\ (x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_p)$.
2. $\phi\ (x_1, \cdots, \lambda x_i, \cdots, x_p) = \lambda\ \phi\ (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_p)$.

Définition 1.1.2. *Une application $p-$ linéaire est dite alternée ssi la permutation de deux variable change le signe c'est-à-dire : $\forall i \neq j$:*

$$\phi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = -\phi(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_p).$$

Remarque 1.1.1. *Dans le cas où deux variables prennent la même valeur, l'image est le vecteur nul c'est-à-dire : $\forall i \neq j$,*

$$x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = 0_F.$$

Exemple 1.1.1. *Un exemple d'application bilinéaire, sur $\mathbb{R}^3$, alternée est donneé par le produit vectoriel, que l'on notera x. En effet :*

$$(\lambda\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \times \overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{w}).$$

et

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}.$$

Remarque 1.1.2. *On montre que si f est alternée et $\{x_1, \cdots, x_p\}$ est une famille liée des vecteurs de E alors $f(x_1, \cdots, x_p) = 0_F$ en effet :*

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_p) &= f(x_1, \cdots, \textstyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j, \cdots, x_p) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Car d'aprés la remarque précédante : $\forall j = 1, \cdots, p$.

$$f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = 0_F.$$

Par suite si f est alternée et $p > n$ alors $f \equiv 0$.

1.2 Formes $p - linaires$ alternées

Définition 1.2.1. *Une application $p -$ linéaire alternée est dite $p - forme$ linéaire (ou $p - forme$) si elle prend ses valeurs dans le corps $\mathbb{K}$. c'est-à-dire :*

$$f : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p-fois} \to \mathbb{K}$$

Notations 1.2.1. *On note par :*
$\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$: l'ensemble des formes $p - linéaires$ sur E.
$\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$: l'ensemble des formes $p - linéaires$ alternées sur E.

Remarque 1.2.1. *Si f et g sont deux formes $p - linaires$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on definit $f + g$, λf par :*

$$\begin{aligned} (f + g)(x_1, \cdots, x_p) &= f(x_1, \cdots, x_p) + g(x_1, \cdots, x_p). \\ (\lambda f)(x_1, \cdots, x_p) &= \lambda f(x_1, \cdots, x_p). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble $\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie, $dim\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K}) = n^p$.
Et l'ensemble $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{K})$ est un sous $-$ espace vectoriel de $\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$ de dim C_n^p.

Définition équivalente 1.2.1. *(Formes $p-$ linéaires alternées)*
On note S_p le groupe symétrique, c'est-à-dire l'ensemble des permutations de $\{1,2,\cdots,p\}$. D'aprés la définition de $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{K})$, $\forall(x_1,\cdots,x_p)\in E^p$, $\forall\sigma\in S_p$.

$$f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1,\cdots,x_p).$$

Où $\varepsilon(\sigma)$ le signateur de σ.

Remarque 1.2.2. *Si $(e_1,\cdots,e_n)$ est une base de E, une forme $p-linéaire$ alternée est entilièrement déterminée par les C_n^p nombres $f(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})$ où $\{i_1,\cdots,i_p\}$ est une suite croissante extraite de $\{1,\cdots,n\}$, donc f est alternée si et seulement si.*

$$f_{i_1,\cdots,i_r,\cdots,i_k,\cdots,i_p} = -f_{i_1,\cdots,i_k,\cdots,i_r,\cdots,i_p}$$

c'est-à-dire les coefficients de f sont anti-symétriques.
Dans ce cas on a $f_{i_1,\ldots,i_p} = 0$ dès que $\exists k,r$ tel que $i_k = i_r$.

Exemple 1.2.1. *$f\in\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ c'est-à-dire :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & f(x_1,x_2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= f(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3,\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3) \\ &= \alpha_1f(e_1,\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3)+\alpha_2f(e_2,\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3) \\ &\quad +\alpha_3f(e_3,\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3) \\ &= \alpha_1\beta_1f(e_1,e_1)+\alpha_1\beta_2f(e_1,e_2)+\alpha_1\beta_3f(e_1,e_3) \\ &+ \alpha_2\beta_1f(e_2,e_1)+\alpha_2\beta_2f(e_2,e_2)+\alpha_2\beta_3f(e_2,e_3) \\ &+ \alpha_3\beta_1f(e_3,e_1)+\alpha_3\beta_2f(e_3,e_2)+\alpha_3\beta_3f(e_3,e_3) \\ &= (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)f(e_1,e_2)+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)f(e_1,e_3) \\ &+ (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)f(e_2,e_3). \end{aligned}$$

1.3 Produit extrieur des formes linéaires

Soient $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires sur E.

Définition 1.3.1. *Le produit extérieur de p formes linéaires $f_1, ..., f_p$ est une forme $p-$linaire alternée, notée $f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_p$, sur E definie par :*

$$\begin{aligned} f_1 \wedge \ldots \wedge f_p : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{p-fois} &\to \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_p) &\mapsto (f_1 \wedge \ldots \wedge f_p)(x_1, \ldots, x_p) = \det(f_i(x_j))_{i=1\ldots p}^{j=1\ldots p} \\ &= \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p(x_1) & \ldots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Il est clair que cette application est $p-$*linéaire* alternée (definition d'un déterminant).

Exemple 1.3.1. *Si f_1, f_2 sont deux formes linéaires sur E.*
$f_1 \wedge f_2$ est definie par :

$$\begin{aligned} (f_1 \wedge f_2)(x_1, x_2) &= \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{vmatrix} \\ &= f_1(x_1)f_2(x_2) - f_2(x_1)f_1(x_2) \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1. *Si $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E et $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ la base duale de B.*
$\{i_1, \cdots, i_p\}$ une suite croissante de p nombre extraite de $\{1, \cdots, n\}$ alors :

$$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*(x_1, \cdots, x_p) = \begin{vmatrix} x_{i_1 1} & \cdots & x_{i_1 p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_p 1} & \cdots & x_{i_p p} \end{vmatrix}$$

où $x_{i_k r}$ designe la i_k- ème coordonnée du vecteur x_r sur la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ car :

$$e_{i_k}^*(x_r) = x_{i_k r}.$$

Supposons $(j_1, \cdots, j_p)$ une suite croissante d'entier de $\{1, \cdots, n\}$. On a :

$$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1, \cdots, i_p) = (j_1, \cdots, j_p) \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

D'où la proposition :

Proposition 1.3.1. *Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, $(e^*_1, \cdots, e^*_n)$ sa base duale et $1 \leq p \leq n$. Les C^p_n formes $p-$ linéaires alternée $e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_p}$, telle que $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ forment une base de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$.*

Preuve 1.3.1. *Montrons d'abord que ces $p-$formes sont linéairement independantes. Soit $\lambda_{i_1,\cdots,i_p} \in \mathbb{K}$.*

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \lambda_{i_1,\cdots,i_p} e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p} = 0_{\mathcal{A}_p(E,\mathbb{K})}.$$

Alors pour toute suite croissante $(j_1, \cdots, j_p)$ on a :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \lambda_{i_1,\cdots,i_p} e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}(e_{j_1}, \cdots, e_{j_p}) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Cela implique que $\lambda_{j_1,\cdots,j_p} = 0 \ \forall (j_1, \cdots, j_p)$, donc les $\lambda_{i_1,\cdots,i_p}$ sont nuls.
D'òu la famille $\{e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$ est libre.
Montrons, maintenant, que ces $p-$ formes engendrent l'ensemble $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$ c'est-à-dire. Toute forme $p-$ linéaire alternée f est combinaison des $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}$.
Nous savons que pour tout $f \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$.

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}) e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}.$$

D'òu $\{e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$.

Remarque 1.3.2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $\{e_1, \cdots, e_n\}$, en identifient e^*_i par dx_i alors $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}$ est noté $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$.*

Notations 1.3.1. $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K}) = \wedge_p E^* \simeq E^* \wedge \cdots \wedge E^*$.
Toute forme $p-$ linéaire alternée s'écrit de maniére unique.

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

1.4 Produit exterieur d'une forme p−linéaire alternée avec une forme q−linéaire alternée

Soient $f \in \wedge_p E^*$, $g \in \wedge_q E^*$

Définition 1.4.1. *On appelle produit exterieur de f et g la forme $(p+q)-$ linéaire alternée, noté $f \wedge g$, definie par :*

$$f \wedge g = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n,} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n} f_{i_1 \cdots i_p} g_{j_1 \cdots j_q} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \cdots dx_{j_q}$$

Où

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

$$g = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} g_{j_1 \cdots j_p} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

Proposition 1.4.1. *(proprieteés du produit exterieur)*
Si f et g sont des formes p et $q-$ linéaire alternée alors :

1. $f \wedge g = (-1)^{p+q}\, g \wedge f$ *alternée ;*
2. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$ *associativite ;*
3. $f \wedge (g_1 + \lambda g_2) = (f \wedge g_1) + \lambda(f \wedge g_2)$ *bilinéairité.*

Remarque 1.4.1. *On a, donc, $dx \wedge dx = 0$.*

Exemple 1.4.1. *1. $E = \mathbb{R}^2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $e_1^* = dx$, $e_2^* = dy$. Soit*

$$f = \alpha dx + \beta dy \in \wedge_1 E^*.$$

et

$$g = \gamma dx + \delta dy \in \wedge_1 E^*.$$

Le produit exterieur

$$f \wedge g = (\alpha\delta - \beta\gamma) dx \wedge dy \in \wedge_2 E^*.$$

2. $E = \mathbb{R}^3$.

$$f = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz \in \wedge_1 E^* = E^* = (\mathbb{R}^3)^*.$$

$$g = a dx + b dy + c dz \in \wedge_1 E^* = E^* = (\mathbb{R}^3)^*.$$

$f \wedge g \in \wedge_2 E^*$.

$$f \wedge g = (\alpha b - \beta a) dxdy + (\alpha c - \gamma a) dxdz + (\beta c - \gamma b) dydz.$$

La base de $\wedge_2 E^*$ *est* $\{dxdy, dxdz, dydz\}$.

Notation 1.4.1. *Soit E un espace vectoriel de dim n, E^* le dual de E.On pose :*

$$\begin{aligned} \oplus_{p \in \mathbb{N}^*} \wedge_p E^* &= \{\text{formes } p\text{- linéaire alternées sur } E \text{ où } p \in \mathbb{N}^*\} \\ &= \oplus_{p \in \{0,n\}} \wedge_p E^* \simeq \wedge E^* \end{aligned}$$

$\wedge E^*$ *est un espace vectoriel gradué.*
$\wedge E^*$ *est muni du produit exterieur* $(\wedge E^*, +, ., \wedge)$ *est une algébre graduée sur* $\mathbb{K}$.

1.5 Formes bilinéaires et sesquilinéaires

Dans tous ce qui suit, on s'intéresse au cas où $p = 2$ et $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

1.5.1 Formes bilinéaires

Définition 1.5.1. *Soient E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $\varphi : E \times F \to G$ une application. On dit que φ est bilinéaire, si on a :*

1. *Pour tout $x \in E$ fixé, l'application partielle :*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1(x) : & F & \to & G \\ & y & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

2. *Pour tout $y \in F$ fixé, l'application partielle :*

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_2(y): & E & \to & G \\ & x & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

c'est-à-dire qu'on a : $\forall (x_1, x_2, x) \in E^3, \forall (y_1, y_2, y) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{cases} \varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = & \lambda\varphi(x, y_1) + \mu\varphi(x, y_2) \\ \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = & \lambda\varphi(x_1, y) + \mu\varphi(x_2, y). \end{cases}$$

De plus si $G = \mathbb{K}$, on dit que φ est une forme bilinéaire.

Notation 1.5.1. *On notera $\mathfrak{B}(E, F; G)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G.*

Exemples 1.5.1. 1. *L'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & x \cdot y \end{array} \quad \text{est bilinéaire.}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$. Soit $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ donnée par :*

$$\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

alors φ est bilinéaire.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$ ou $n = 3$ on obtient le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

3. *Pour un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, on a l'application :*

$$\begin{array}{rcl} E \times E^* & \to & \mathbb{K} \\ (x,f) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est une forme bilinéaire.

4. *Si* f_1 *et* f_2 *sont linéaires, et* φ *bilinéaires, alors l'application ;*

$$(x, y) \mapsto \varphi(f_1(x), f_2(y))$$

est bilinéaire.

5. E *et* F *des espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$.
Si $f \in E^*, g \in E^*$, *alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & f(x).g(y) \end{array}$$

est bilinéaire notée $f \otimes g$.

6. *Si* f *est linéaire et* φ *bilinéaire, alors l'application* $\psi : (x, y) \mapsto f(\varphi(x, y))$ *est bilinéaire.*

7. *Soit* $E = M(n \times n, \mathbb{K})$, *l'application*

$$\begin{array}{cccc} \psi : & E \times E & \to & \mathbb{K} \\ & (AB) & \mapsto & Trace({}^tBA). \end{array}$$

est bilinéaire.

Proposition 1.5.1. *(Expression dans des bases de* E *et* F*).*
Soient E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* n *de base* $e_1, ..., e_n$, F *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* m *et de base* $f_1, ..., f_m$.

1. *Si* $\varphi \in \mathfrak{B}(E, F; \mathbb{K})$. *Alors on a :* $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{K}^m$.

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j f_j) = \sum_{i=1...n, j=1...m} x_i y_j \varphi(e_i, f_j).$$

2. *Pour toute famille* $(a_{ij})_{i \in \{1...n\}, j \in \{1...m\}}$ *d'élément de* $\mathbb{K}$, *il existe un unique élément* φ *de* $\mathfrak{B}(E, F; \mathbb{K})$ *tel qu'on ait :* $\forall i, j$

$$\varphi(e_i, f_j) = a_{ij}.$$

3. *On a :*

$$dim\mathfrak{B}(E,F;\mathbb{K}) = mn.$$

Preuve 1.5.1. 1. *On a :*

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j f_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\varphi(e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j f_j)}_{\sum_{j=1}^{m} y_j \varphi(e_i, f_j)}.$$

2. *Réciproquement si la famille (a_{ij}) est donnée, on définit φ par la formule :*

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j f_j) = \sum_{i,j} x_i . y_j a_{ij}.$$

Il est immédiat que φ est bilinéaire et que c'est l'unique forme bilinéaire sur $E \times F$ telle que $\forall i, j$

$$\varphi(e_i, f_i) = a_{ij}.$$

3. *L'application $\varphi \mapsto (a_{ij})_{i,j}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{B}(E,F;\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^{mn}$ d'où le résultat.*

Définition 1.5.2. *Avec les notations précédantes, la matrice*

$$A = (\varphi(e_i, f_j))_{i \in \{1 \cdots n\}}^{j \in \{1 \cdots m\}}.$$

S'appelle la matrice de φ pour les bases $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_m)$.

Exemples 1.5.2. 1. *On peut démontrer de façon analogue qu'on a un isomorphisme*

$$\mathfrak{B}(E,F;G) \simeq G^{mn}$$

pour G espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2. *Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = F = \mathbb{R}^2$.*
Une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ s'exprime donc en utilisant 4 coeficients $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$:

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

en particulier, le produit scalaire usuel exprimé sous la forme $x_1y_1+x_2y_2$ *a pour matrice*

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conséquences 1.5.1. *Soit* $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire où* E *de dimention* m *et* F *de dimension* n*. Donc elle induite deux applicatios linéaires* $\widetilde{\varphi}_1$ *et* $\widetilde{\varphi}_2$ *definie par*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi}_1 : E & \to & F^* \\ x & \mapsto & \widetilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x). \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi}_2 : F & \to & E^* \\ y & \mapsto & \widetilde{\varphi}_2(y) = \varphi_2(y). \end{array}$$

Avec les notations de la définition, si A *est la matrice de* φ *dans les bases* $(e_i)_{i=1\cdots m}$*,* $(f_j)_{j=1\cdots n}$*. Un calcul simple nous permer de conclure que la matrice de* $\widetilde{\varphi}_1 \in \mathcal{L}(E, F^*)$ *pour les bases* (e_i)*,* (f_j^*) *est* ${}^{\perp}A$*, et la matrice de* $\widetilde{\varphi}_2 \in \mathcal{L}(F, E^*)$ *pour les bases* (f_i)*,* (e_j^*) *est* A*.*

Proposition 1.5.2. *(Expression matricielle de* φ*)*
Soient E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de base* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$*,* F*un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de base* $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_m)$ *et* $\varphi \in \mathfrak{B}(E, F; \mathbb{K})$ *de matrice* A *pour ces bases.*
Soit $X \in E$ *de composantes* $(x_1, ..., x_n)$ *pour* $\mathcal{B}$ *et* $Y \in F$ *de composantes* $(y_1, ..., y_m)$ *pour* $\mathcal{B}'$*.*
Alors on a :

$$\varphi(x, y) =^t XAY$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Preuve 1.5.2. *On a :*

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x,y) & = & \sum_{i=1}^{n} x_i(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j) \text{ pour} & A = \ (a_{ij}) \\ & = & (x_1,...,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj}y_j \end{pmatrix}}_{A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}} & = \ {}^tXAY \end{array}$$

Remarque 1.5.1. *Avec les mêmes notations, si $B \in M(n \times m, \mathbb{K})$ et si on a :*
$\forall X \in M(n \times 1, \mathbb{K}), \forall Y \in M(m \times 1, \mathbb{K})$

$$ {}^tXAY \ = \ {}^tXBY \ ,$$

alors on obtient, en posant

$$B = (a_{ij})$$

$\forall (x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) \in \mathbb{K}^{n+m}$

$$\sum_{i,j} x_iy_j, a_{ij} = \sum_{i,j} x_iy_jb_{ij}$$

et, donc, on a

$$A = B.$$

Proposition 1.5.3. *(Formule de changement de bases)*

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de bases $\begin{cases} (e_1,...,e_n) \\ et \\ (e_1^{'},...,e_n^{'}) \end{cases}$ *avec $P = Pass((e_i),(e_i^{'}))$.*

Soit F espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de bases $\begin{cases} (f_1,...,f_m) \\ et \\ (f_1^{'},...,f_m^{'}) \end{cases}$ *avec $Q = Pass((f_i),(f_i^{'}))$.*

Soit $\varphi \in \mathfrak{B}(E,F;\mathbb{K})$ de matrices :A pour les bases (e_i) et (f_j) et $A^{'}$ pour les bases

$(e_i^{'})$ *et* $(f_j^{'})$.
Alors on a :

$$A^{'} \;=\; {}^tPAQ.$$

Preuve 1.5.3. *Avec des notations évidentes on a :* $\forall(x, y)$

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= {}^tXAY \\ &= {}^tX'({}^tPAQ)Y' \\ &= {}^tX' \cdot A' \cdot Y'. \setminus PX' = X, QY' = Y.\end{aligned}$$

D'où $\quad A^{'} = \;{}^tPAQ$.

Corollaire et définition 1.5.1. *Le rang de la matrice de* φ *est indépendant du choix des bases de* E *et* F *: c'est le rang de* φ.

Remarque 1.5.2. *On aurait pu démontrer ce résultat en remarquant que,*

$$rangA = rang\widetilde{\varphi}_1 = rang\widetilde{\varphi}_2$$

et $\widetilde{\varphi}_1$ *et* $\widetilde{\varphi}_2$ *indépendantes du choix des bases.*

1.5.2 Orthogonalité

Définitions-notations 1.5.1. *Soient* E *et* F *des espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$.
$\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire.*

1. *Soit* $(x, y) \in E \times F$ *tel que* $\varphi(x, y) = 0$ *on dira que* x *est orthogonal à* y *pour* φ, *on notera* $x \perp y$.
2. *Soit* $A \subseteq E$. *On pose*

$$A^{\perp} = \{y \in F / \forall a \in A, \varphi(a, y) = 0\}. \text{ (l'orthogonalité à droite)}$$

   et $A^{\perp}$ *appellée* A *l'orthogonale.*
3. *Soit* $B \subseteq F$. *On pose*

$${}^{\perp}B = \{x \in E / \forall b \in B, \varphi(x, b) = 0\}. \text{ (l'orthogonalité à gouche)}$$

et ${}^{\perp}B$ *appellé l'orthogonale de* B.

Proposition 1.5.4. *Soient* E *et* F *des espaces vectoriels et sur* $\mathbb{K}$
$\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire.*

1. *Si* $A \subseteq E$, *alors* $A^{\perp}$ *est un sous espace vectoriel de* F.

$$A^{\perp} = (Vect(A))^{\perp}.$$

2. *Si* $A \subseteq B \subseteq E$ *alors* $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
3. *Si* $A \subseteq E$ *alors* $A \subseteq {}^{\perp}(A^{\perp})$.
4. *Si* E_1 *et* E_2 *sont des espaces vectoriels de* E *alors on a :*

$$(E_1 + E_2)^{\perp} = E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp}.$$

$1')2')3')4')$ *: on peut énoncer les propriétés analogues pour l'orthogonalité à gauche.*

Remarque 1.5.3. *Si* $E^{'} = Vect(\{e_1, ..., e_n\})$ *on à donc*

$$E^{'\perp} = (\mathbb{K}e_1)^{\perp} \cap \cdots \cap (\mathbb{K}e_r)^{\perp} = \{e_1\}^{\perp} \cap \cdots \cap \{e_r\}^{\perp}.$$

1.6 Formes bilinéaires symétriques alternées

Soit φ une forme bilinéaire sur E. Si φ est reflexive c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E \times E : \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y, x) = 0$$

. Alors $\forall A \subseteq E,\ A^{\perp} \ = \ {}^{\perp}A$. (Cas du produit scalaire par exemple).
Or, on peut démontrer que si $dimE$ est finie, alors φ est réflexive si et seulement si :

$$\begin{cases} \textit{soit} & \varphi \text{ est symétrique} \\ \textit{soit} & \varphi \text{ est anti-symétrique.} \end{cases}$$

Définition 1.6.1. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *et soit* $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ *bilinéaire.*

1. *On dit que φ est symétrique si on a :* $\forall (x, y) \in E \times E$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

2. *On dit que φ est anti-symétrique si on a :* $\forall (x, y) \in E \times E$

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

3. *On dit que φ est alternée si on a :* $\forall x \in E$

$$\varphi(x, x) = 0.$$

Proposition 1.6.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension n et de base $(e_1, ..., e_n)$.*
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ bilinéaire de matrice A dans la base $(e_1, ..., e_n)$. Alors φ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulament si A est symétrique : ${}^tA = A$ (resp A est antisymétrique : ${}^tA = -A$).

Preuve 1.6.1.
1. *Si φ est symétrique on a* $\forall i, j$

$$\begin{array}{rcl} \varphi(e_i, e_j) & = & \varphi(e_j, e_i) \\ a_{ij} & = & a_{ji}. \end{array}$$

2. *Réciproquement, supposons* $A = {}^tA$ *, c'est-à-dire* $\forall i, j$

$$\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i).$$

Soit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,$$

et

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in E.$$

On a :

$$\begin{array}{rcl}\varphi(x,y) & = & \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i,e_j) \\ & = & \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_j,e_i) \\ & = & \varphi(y,x).\end{array}$$

Donc φ est symétrique.

Remarque 1.6.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caracteristique défférent de 2 et E espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.*
Posons $\mathcal{S}$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur E. Nous savons que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{B}(E,F;\mathbb{K})$, de dimensions $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$ respectivement et on a :

$$\mathfrak{B}(E,F;\mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

1.6.1 Orthogonalité (Cas réflexif)

On suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et que φ est une forme bilinéaire sur E symétrique ou antisymétrique.

Définition 1.6.2. *On appelle noyau de φ, l'espace $E^{\perp} \;=\; {}^{\perp}E$.*

Remarque 1.6.2. *Le noyau de φ est donc l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux à E.*

Définition 1.6.3. *On dit que φ est non dégénérée si on a $E^{\perp} = \{0\}$.*

Remarque 1.6.3. *φ est donc non dégénérée si et seulement si l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccl}\widetilde{\varphi}_1 : & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \widetilde{\varphi}(x) : y \mapsto \widetilde{\varphi}_1(x)(y) = \varphi(x,y)\end{array}$$

est injective.

Exemples 1.6.1. *1. Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*,* $E = \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{cccl} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2), (y_1, y_2) & \mapsto & \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2. \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} E^{\perp} & = & \{(y_1, y_2) / \forall (x_1, x_2) x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0\} \\ & = & \{(0,0)\}. \end{array}$$

Donc φ *est non dégénérée.*

2. *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*,* $E = \mathbb{R}^3$*.* $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ *et donnée par :*

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} E^{\perp} & = & \{(y_1, y_2, y_3) / \forall (x_1, x_2, x_3) x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0\} \\ & = & \{0\} \times \{0\} \times E. \end{array}$$

Donc ψ *est dégénérée.*

Proposition 1.6.2. *On suppose* $dimE = n$*. Alors on a :*

1. $dimE^{\perp} = n - rang\varphi$*.*
2. φ *est non dégénérée si et seulement si la matrice de* φ *dans une base quelconque de* E *est inversible.*

Preuve 1.6.2. *- On sait que le rang de* φ *égal le rang de* $\widetilde{\varphi}_1$ *et* $\widetilde{\varphi}_2$*,* $E^{\perp} = \ker \widetilde{\varphi}_1$*. Donc*

$$\begin{array}{rcl} \dim E^{\perp} & = & \dim E - rg\widetilde{\varphi}_1 \\ & = & \dim E - rg\varphi \\ & = & n - rg\varphi \end{array}$$

Remarque 1.6.4. *Si on reprend les exemples précédents* φ *et* ψ

φ *de matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est non dégénérée.*

ψ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est dégénérée.*

Remarque 1.6.5. *La propriété,*

$$dimF^{\perp} = n - dimF.$$

N'implique pas,

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Proposition 1.6.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. Soit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ bilinéaire symétrique ou antisymétrique.*
Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
2. $E = F \oplus F^{\perp}$.
3. $\varphi/F \times F$ *est non dégénérée.*

Preuve 1.6.3. *Les implications : 2$\Longrightarrow$1 et 1$\Longleftrightarrow$3 sont immédiates.Démontrons 1$\Longrightarrow$2.*
On a :

$$dim(F + F^{\perp}) = dimF + dimF^{\perp}.$$

car

$$F \cap F^{\perp} = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} dim(F + F^{\perp}) &\geq dimF + (n - dimF) \\ &= dimE \end{aligned}$$

d'où

$$F + F^{'} = E.$$

Définition 1.6.4. *1. Soit F un sous espace vectoriel de E vérifiant les propriétés équivalentes précédentes, alors on dit que F est non isotrope (sinon F est isotrope).*

2. *Soit $x \in E$, on, dit que x est isotrope si $\varphi(x,x) = 0$, (c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathbb{K}x$ est isotrope ou nul).*

Exemples 1.6.2. 1. *Soit $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{K}$ donné par :*

$$\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Alors φ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, donc est non dégénérée.
Soit $F = \mathbb{C}(1,i)$.
On a donc :

$$dim F^{\perp} = 2 - 1 = 1.$$

Comme on a :

$$\varphi((1,i),(1,i)) = 1 - 1 = 0,$$

on a donc :

$$F^{\perp} = \mathbb{C}(1,i).$$

Donc F est isotrope.

2. *Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par*

$$\psi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Alors ψ est dégénérée, et évidemment

$$F = Vect\{(1,0,0),(0,1,0)\}$$

est non istrope.

1.6.2 Bases orthogonales (cas symétrique)

Définition 1.6.5. *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.*

1. *On dit qu'elle est orthogonale pour φ si on a : $\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2$*

$$i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0.$$

2. *On dit qu'elle est orthogonale pour φ (ou orthonormée) si elle est orthogonale et si de plus on a :$\forall i \in \{1, ..., n\}$*

$$\varphi(e_i, e_i) = 1.$$

Remarque 1.6.6. 1. *Dire que la base $(e_1, ..., e_n)$ est orthogonale revient à dire que la matrice de φ dans cette base est diagonale* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ *ou*

- que φ s'exprime dans la base par une formule du type :

$$\varphi(\sum_i^n x_i e_i, \sum_j^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i y_i.$$

2. *Pour qu'il existe une base orthogonale il est évidemment nécessaire que φ soit symétrique, et la réciproque est vraie. Dans le cas où φ alternée, on sait également construire certaines "bonnes" bases.*

Proposition 1.6.4. *Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E de dimension quelconque.*
Soit $(e_1, ..., e_r)$ une famille d'éléments deux à deux orthogonaux, non isotropes de E. Alors la famille $(e_1, ..., e_r)$ est libre.

Preuve 1.6.4. *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ dans $\mathbb{K}$ tels que*

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = 0.$$

Soit $j \in \{1, ..., r\}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i, e_j) &= \lambda_j \varphi(e_j, e_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme e_j est non isotrope, on obtient $\lambda_j = 0$.

Proposition 1.6.5. *(Existence d'une base orthogonale).*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique $\neq 2$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ bilinéaire symétrique.Alors E admet une base orthogonale pour φ.

Preuve 1.6.5. *On raisonne par récurrence sur $n = dimE$.*

1. *$n = 1$. Toute base convient.*
2. *$n > 1$. Supposons le résultat démontré pour les espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension $< n$.*
   1^{er} *cas $\varphi = 0$.Toute base convient.*
   2^{me} *cas $\varphi \neq 0$. Alors $\exists e_1 \in E$ tel que $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$ (en effet sinon φ est alternée, donc antisymétrique, donc on a :$\forall (x, y) \in E \times E$*

$$\begin{aligned} \varphi(y,x) &= -\varphi(x,y) \\ &= \varphi(x,y) \\ 2\varphi(x,y) &= 0, \end{aligned}$$

   cela implique $\varphi(x, y) = 0$).

Comme $\mathbb{K}e_1$ est non isotrope, en appliquant la théorème précédant sur l'orthogonalité on obtient :

$$E = \mathbb{K}e_1 \oplus (\mathbb{K}e_1)^{\perp}.$$

On applique l'hypothése de récurrence à $(\mathbb{K}e_1)^{\perp}$, muni de la restriction de φ, pour construire $(e_2, ..., e_n)$ base orthogonale de $(\mathbb{K}e_1)^{\perp}$.Alors $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthogonale de E.

Remarque 1.6.7. *La démonstration ne fournit pas une méthode trés pratique de construction effective de la base.*

Corollaire 1.6.1. *(Traduction matricielle)*
Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$, une matrice symétrique. Alors il existe $P \in M(n \times n, \mathbb{K})$, inversible tel que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Preuve 1.6.6. *Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, ..., e_n)$ sur $\mathbb{K}$. Soit φ bilinéaire symétrique de matrice A, et soit $(f_1, ..., f_n)$ une base orthogonale de E.*
On a

$$^tPAP = D.$$

Avec

$$D \text{ diagonale} = \text{matrice de } \varphi \text{ dans } (f_1, ..., f_n)$$

et

$$P = Pass((e_i), (f_j)).$$

Remarque 1.6.8.
1. *Ne pas confondre cette formule, avec dans le cas où A est diagonalisable $Q^{-1}AQ$ diagonale.*
2. *Les matrices A et ^tPAP sont dites congruentes.*

Corollaire 1.6.2. *On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient E un espace vectoriel de dimendion n sur $\mathbb{C}$, et $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ bilinéaire symétrique. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Preuve 1.6.7. *D'aprés le proposition, si $\varphi \neq 0$ il existe une base $(e_1^{'}, ..., e_n^{'})$ dans laquelle la matrice de φ est :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } r \geq 1, \lambda_i \neq 0 \forall i.$$

$\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\exists \mu_i \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\mu_i^2 = \lambda_i.$$

On a

$$\varphi(\frac{e_i'}{\mu_i}, \frac{e_i'}{\mu_i}) = 1.$$

La base $(\frac{e_1'}{\mu_1}, ..., \frac{e_r'}{\mu_i}, e_{r+1}', ..., e_n')$ *répond à la question.*

Remarque 1.6.9. *Il ya donc dans* $M(n \times n, \mathbb{C})$ *autant de classes de congruence que de choix de* r *: c'est-à-dire* $n + 1$*classes.*

Corollaire 1.6.3. *(Théorème d'inertie de Sylvester)*
On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
E *espace vectoriel de dimension* n *sur* $\mathbb{R}$.
$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ *bilinéaire symétrique.*
Alors :

1. *Il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* φ *est du type*

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq p \leq n, \ 0 \leq q \leq n.$$

2. *Le couple* (p, q) *est indépendant du choix de la base laquelle la matrice de* φ *a la forme cherchée :* (p, q) *est la signature de* φ.

Démonstration 1.6.1. 1. *Soit* $(e_1', ..., e_n')$ *une base dans laquelle la matrice de* φ *est du type :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_p & & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mu_q & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} \forall i \in \{1, ..., p\} & \lambda_i > 0 \\ \forall j \in \{1, ..., q\} & \mu_j < 0 \end{array}$$

Pour tout $i \in \{1, ..., p\}$.
Soit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\alpha_i^2 = \lambda_i.$$

Soit $e_i = \frac{e_i^{'}}{\alpha_i}$ *on a :*

$$\varphi(e_i, e_i) = 1.$$

Pour tout $j = \{1, ..., q\}$.
Soit $\beta_j \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\beta_i^2 = -\mu_j.$$

Soit $e_{p+j} = \frac{e_{p+j}^{'}}{\beta_j}$ *on a :*

$$\varphi(e_{p+j}, e_{p+j}) = -1.$$

Alors la base $(e_1, ..., e_{p+q}^{'}, e_{p+q+1}^{'}, ..., e_n^{'})$ *réponde à la question.*
On posera $e_k = e_k^{'}$ *pour* $k \in \{p+q+1, ..., n\}$.

2. *Soit* $(f_1, ..., f_n)$ *une autre base dans laquelle la matrice de* φ *est du même type :*

$$\begin{pmatrix} I_{p'} & & \\ & -I_{q'} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } 0 \leq p^{'} \leq n,\ 0 \leq q^{'} \leq n.$$

Soit $\begin{cases} x \in Vect(e_1, ..., e_p) \setminus \{0\}, & \text{on a } \varphi\ (x,\ x) > 0 \\ x \in Vect(f_{p'+1}, ..., f_n), & \text{on a } \varphi\ (x,\ x) \leq 0. \end{cases}$

On obtient donc de façon analogue $p^{'} \leq p$ *et donc* $p = p^{'}$ *; et comme on a :*

$$\begin{aligned} p + q &= p^{'} + q^{'} \\ &= rang de \varphi. \end{aligned}$$

On obtient aussi

$$q = q^{'}.$$

Remarque et exemple 1.6.1. - *On obtient donc autant de classes de congruence dans* $M(n \times n, \mathbb{R})$ *que de choix de couples* (p, q) *avec* $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$,

$0 \leq p+q \leq n$, *c'est-à-dire* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *choix.*

- Soit φ *de matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *dans la base* (e_1, e_2).

Soit $f_1 \in E$ *tel que* $\varphi(f_1, f_2) > 0$. *Alors on a :*

$$E = \mathbb{K}f_1 \oplus (\mathbb{K}f_1)^{\perp}.$$

Soit (f_2) *une base quelconque de* $(\mathbb{K}f_1)^{\perp}$. *Alors la base* (f_1, f_2) *premet de construire une base du type du théorème et donc on a nécessairement* $\varphi(f_1, f_2) < 0$.

Exercice 1.6.1. *Cas des formes alternées. Supposons card* $\mathbb{K} \neq 2$. *Montrer que si* $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ *alternée bilinéaire sur* E *espace vectoriel de dimension* n, *alors il existe une base dans laquelle la matrice de* φ *est du type :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(une telle base est dite symplectique).

1.7 Formes sesquilinéaires

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ le corps des nombres complexe.

Définition 1.7.1. *Soient* E *et* F *des espaces vectoriels sur* $\mathbb{C}$ *et soit* $f : E \to F$ *une application. On dit que* f *est semi-linéaire si on a*

1. $\forall (x, y) \in E \times E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall x \in E$, $\forall y \in \mathrm{C}$, $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Exemple 1.7.1.

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$$

est semi-linéaire.

$$f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

définie à partir de $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ *par :*

$$\forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n, f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overline{z_i}$$

est une forme semi-linéaire.

Remarque 1.7.1. *Si à tout* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* F *on associe le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* F' *obtenu en conservant l'ensemble* F *et l'addition et en posant :*

$$\forall x \in F', \forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda * x = \overline{\lambda} \cdot x$$

telle que "" est une loi externe dans* F' *et "* $\cdot$ *" est une loi externe dans* F*. Alors :*
- Une application semi-linéaire de E *dans* F *est une application linéaire de* E *dans* F'
- Si $G = G' \subseteq F$ *; alors* G *sous espace de* F *si et seulement si* G' *sous espace vectoriel de* F' *et* $\dim G = \dim G'$.

Définition 1.7.2. *Soient* E , F , G *des sous espaces vectoriels sur* $\mathbb{C}$*. Soit* $\varphi : E \times F \rightarrow G$ *une application. On dit que* φ *est sesquilinéaire si on a :*

1. $\forall x \in E$ *fixé, l'application partielle*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1(x) & : & F & \rightarrow & G \\ & & y & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \quad \textit{est semi-linéaire}$$

2. $\forall y \in E$ *fixé, l'application partielle*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_2(y) & : & E & \rightarrow & G \\ & & x & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \quad \textit{est linéaire.}$$

Si de plus on a $G = \mathbb{K}$, alors φ est une forme sesquilinéaire.

Remarque 1.7.2. *Soit $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire alors $\varphi : E \times F' \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire.*

Exemples 1.7.1. *- Soit $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ donnée par :*

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \forall (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

$$\varphi((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$

(produit scalaire hermitien usuel).
Alors φ est sesquilinéaire (d'autre part il n'existe pas d'isotrope non nul).
- Soit $E = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} / f continue\}$ et Soit φ une application donnée par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E \times E & \to & \mathbb{C} \\ & & (f, g) & \mapsto & \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \end{array}$$

alors φ est sesquilinéaire.

Commentaire *On a considéré la semi-linéaire par rapport à la seconde variable, certains auteurs la prennent par rapport à la première variable.*

Définition 1.7.3. *Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$, $(f_1, \cdots, f_m)$ une base d'un espace vectoriel F sur $\mathbb{C}$ et $\varphi : E \times F \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. Alors la matrice de φ pour ces deux bases est la matrice A donnée par :*

$$A = [\varphi(e_i, f_j)]_{(i,j)}$$

telle que $i \in \{1, \cdots, n\}$, $j \in \{1, \cdots, m\}$ avec i est indice de ligne et j est indice de colonne.

Proposition 1.7.1. *Avec les notations de la définition, on a :*

$$\varphi(x, y) = {}^tXA\overline{Y}$$

. Où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Proposition 1.7.2. *Avec les notations précédentes, posons* $(e'_1, \cdots, e'_n)$ *est une autre base de* E *avec* $P = Pass((e_i), (e'_i))$ *et* $(f'_1, \cdots, f'_n)$ *est une autre base de* F *avec* $Q = Pass((f_i), (f'_i))$.
Si A' *est la matrice de* φ *pour les bases* (e'_i) *et* (f'_i) *alors on a :*

$$A' =^t PA\overline{Q}.$$

Remarques 1.7.1. *Comme pour les formes bilinéaire, on peut definir les notions suivantes :*
- rang $\varphi = rangA = rangA'$.
- La notions d'orthogonalité relativement a φ*, et on obtient des propriétés analogues au cas bilinéaire et en remarquent que* φ *est bilinéaire de* $E \times F'$ *dans* $\mathbb{C}$.

1.8 Formes hermitiennes, anti-hermitiennes

Définition 1.8.1. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *et soit* $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ *sesquilinéaire. On dit que :*
- φ *est hermitienne si on a :*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)} \text{ (propriété de symétrie hermitienne).}$$

- φ *est anti-hermetienne si on a :*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \varphi(y, x) = -\overline{\varphi(x, y)}.$$

Proposition 1.8.1. *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$*, de base* $(e_1, \cdots, e_n)$*, et* $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ *sesquilinéaire, de matrice* A *pour la base* $(e_i)_i$ *de* E*. Alors on a :*

- φ *hermetienne* $\Leftrightarrow$ ${}^tA = \overline{A}$ *(matrice hermetienne)*
- φ *anti-hermitienne* $\Leftrightarrow$ ${}^tA = -\overline{A}$ *(matrice antihermetienne).*

Preuve 1.8.1. *C'est une demonstration analogue au cas bilinéaire.*

Remarque 1.8.1. *Si φ une forme hermetienne alors :*

$$\begin{cases} a_{ii} \in \mathbb{R}, & \forall i = 1, \cdots, n \\ a_{ji} = \overline{a_{ij}}, & \forall i, j \quad avec \quad i < j. \end{cases}$$

Exemple 1.8.1. *Un exemple de forme hermetienne est donnée par :*

$$\varphi(x, y) = x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + 3x_3\overline{y_3}.$$

Contrairement à ce qui se passe dans le cas bilinéaire, on a :

$$\varphi \text{ hermitienne} \Leftrightarrow i\ \varphi \text{ anti-hermitienne.}$$

L 'étude des formes sesquilinéaires antihermitiennes se ramène donc au cas hermitien. Les propositions suivantes se démontrent comme dans le cas bilinéaire symétrique.

Proposition 1.8.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire hermitienne non dégénérée (rang $\varphi = \dim E$). Soit F un sous espace vectoriel de E, alors on a :*

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

Proposition 1.8.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$, sesquilinéaire hermitienne. Soit F un sous espace vectoriel de E. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

$$F \cap F^{\perp} = \{0\} \ et \ E = F \oplus F^{\perp}$$

Définition 1.8.2. *Une base orthogonale pour φ est une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale, ou encore, on a :*

$$\varphi(\textstyle\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i\overline{y}_j \ ou \ encore \ i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0$$

Proposition 1.8.4. *Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$ et φ une forme sesquilinéaire hermitienne sur E. Alors :*
- Il existe une base orthogonale $(e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de φ est du type :

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- De plus le couple (p, q) ne dépend que de φ : c'est la signature de φ.

Démonstration 1.8.1. *On démontre comme dans la cas bilinéaire symétrique, en utilisant le théorème 2 que E admet une base $(e'_1, \cdots, e'_n)$ orthogonale pour φ. On a :*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \varphi(e'_i, e'_i) \in \mathbb{R} \ (\varphi sesquilinaire).$$

- Si $\varphi(e'_i, e'_i) = \lambda_i > 0$ soit $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$ on pose $e_i = \frac{e'_i}{\mu_i}$ on a $\varphi(e_i, e_i) = 1$.
- Si $\varphi(e'_i, e'_i) = \lambda_i < 0$ soit $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_i^2 = -\lambda_i$ on pose $e_i = \frac{e'_i}{\mu_i}$ on a $\varphi(e_i, e_i) = -1$.
- Si $\varphi(e'_i, e'_i) = 0$ on pose $e_i = e'_i$.
En modifiant éventuellement l'ordre sur les éléments $(e_1, \cdots, e_n)$ on obtient une base répondant à la question.
Démonstration analogue au cas bilinéaire symétrique.

Corollaire 1.8.1. *(traduction matricielle) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ une matrice hermitienne*

$$({}^t\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}).$$

Alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$, P inversible tel que ${}^t\mathrm{P}\mathrm{A}\overline{\mathrm{P}}$ soit du type

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Elements du calcul tensoriel

2.1 Dualité

2.1.1 Espace dual

Soit E un espase vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle une forme linéaire sur E,ou covecteur de E, toute application linéaire de E a vleur dans le corps $\mathbb{K}$.

Définition 2.1.1. *L'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est appelé dual de l'espace E, et est noté E^*.*

Remarques 2.1.1. - *Un élément $w \in E^*$ est appelé covecteur de E ou vecteur dual et est aussi vecteur covariant ou pseudo$-$vecteur en physique.*

- *Un vecteur $x \in E$ est appelé par fois vecteur contravariant.*
- *Les notations des formes linéaires est importante en théorie des fonctions (appellée "analyse foncionelle").*

Exemple 2.1.1. *Sur l'espace vectoriel $E = C^{\infty}(\mathbb{R})$, soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et soit :*

$$\delta_x : \phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R}.$$

Alors $\delta_x \in E^*$ est une forme linéaire appelée " distribution de Dirac en x "

Pour tout $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de E, on a :

1. Le noyau d'un forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous espace vectoriel de E de codimension 1.
2. Pour tout hyperplan H de E et pour tout vecteur e de E n'appartenant pas à H, il existe une forme linéaire unique w sur E nulle sur H, telle que $w(e) = 1$, en particulier on a $Imw = \mathbb{K}$.
3. Deux formes linéaires w_1 et w_2 sur E ayant le même noyau si et seulement si elle sont proportionnelles, c'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{K} - (0)$ telle que $w_1 = \lambda w_2$.

On rappelle la définition du symbole de kronecker :

$$\delta_{ij} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \; si & \mathrm{i} = \mathrm{j}\,; \\ 0 \; si & \mathrm{i} \neq \mathrm{j}. \end{cases}$$

Proposition 2.1.1. *Soit* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une base de* E. *On décompose un vecteur :* $x = \sum_i x^i e_i \in E$. *Pour* j *fixé on définit :*

$$\begin{array}{cccc} e_j^* : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x^j. \end{array}$$

Alors $e_j^* \in E^*$ *est une forme linéaire et* $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ *est une base de* E^* *appellée base duale. Elle vérifie :*

$$e_j^*(e_i) = \delta_i^j$$

donc

$$dim(E^*) = dim(E) = n.$$

Une forme linéaire $\alpha \in E^*$ *s'écrit dans cette base :*

$$\alpha = \sum_i \alpha_i e_i^*$$

avec $\alpha_i = \alpha(e_i) \in \mathbb{R}$ *ses composantes.*

Preuve 2.1.1. *Si* $\alpha \in E^*$ *alors*

$$\alpha(x) = \alpha(\sum_i x^i e_i) = \sum_i x^i \alpha(e_i) = \sum_i e_i^*(x)\alpha(e_i) = \sum_i \alpha(e_i) e_i^*(x).$$

donc

$$\alpha = \sum_i \alpha_i e^{*i}$$

avec

$$\alpha_i = \alpha(e_i)$$

Remarque 2.1.1. *-La correspondance :*

$$vecteursdebasee_i \Leftrightarrow vecteursdebasedualee_j^*$$

est "collective" et non individuelle si on modifie un vecteur (par exemple e_i*,) cela modifie tous les vecteurs duaux* e_j^**. On verra plus loin une correspondance individuelle différente qui existe lorsqu'il y a une métrique sur* E*.*
-Si $(e_1, \cdots, e_n)$ *est une base de* E*, si* $\alpha \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ *(considérée comme une application linéaire), comme* $1 \in \mathbb{R}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}$*, on exprime* α *par rapport à ces bases par une matrice* $1 \times n$*, c-à-d un vecteur ligne :*

$$\alpha \equiv_{base_e} (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

où $\alpha_j = \alpha(e_j)$*. En particulier si* $x = \sum_i x^i e_i \in E$ *on a :*

$$\alpha(x) = \sum_i \alpha_i x^i$$

le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne.
-Si E *un espace vectoriel, telle que* $(E^*)^* \equiv E$ *et que c'est un isomorphisme canonique. On notera aussi* $E^{**} = (E^*)^*$*.*

2.2 Formes bilinéaires canoniques

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Définition 2.2.1. *On appelle forme bilinéaire canonique, l'application bilinéaire*

$$(x, w) \mapsto w(x)$$

de $E \times E^*$ *dans* $\mathbb{K}$. *Et le scalaire* $\langle x/w \rangle = \langle x, w \rangle = w(x)$ *est appelé produit scalaire du vecteur* x *par le covecteur* w.

La forme bilinéaire canonique sur $E^* \times E$ est non dégénérée, en effet, par definition, la seule forme linéaire nulle sur E est la forme nulle. Le noyau à droite est donc réduit à la forme nulle.
Un vecteur qui annule toute les formes linéaires appartient a touts les hyperplans ; c'est donc le vecteur nul ; ce qui montre que le noyau à gauche est aussi réduit àu vecteur nul.

Remarque 2.2.1. *On peut voir une forme bilinéaire canonique comme application de* $E^* \times E$ *dans* $\mathbb{K}$ *donnée par :*

$$(w, x) \mapsto w(x) = \langle w/x \rangle = \langle w, x \rangle.$$

Le chois ici est justifier par les physiciens.

2.2.1 Orthogonalité

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E^* son espace dual.

1. Deux éléments $x \in E$ et $w \in E^*$ sont dits orthogonaux si :

$$\langle x, w \rangle = 0.$$

2. Deux parties $A \subseteq E$ et $B \subseteq E^*$ sont dits orthogonaux si :

$$\langle x, w \rangle = 0$$

   pour tous $x \in A$ et $w \in B$.
3. Soit $A \subseteq E$. On appelle annulateur de A, que l'on note $Ann(A)$, l'ensemble :

$$Ann(A) = \{w \in E^* \setminus \langle x, w\rangle = 0, \text{ pour tout } x \in A\}$$

$Ann(A)$ est un sous espace vectoriel de E^* et l'on à :

$$Ann(A) = Ann(Vect(A)).$$

4. Soit $B \subseteq E^*$. On appelle orthogonal de B, que l'on note $^\perp B$, l'ensemble

$$^\perp B = \{x \in E \backslash \langle x, w\rangle = 0,\text{pour tout } w \in B\}.$$

$^\perp B$ est un sous espace vectoriel de E et l'on a :

$$^\perp B =^\perp (Vect(B)).$$

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $(e_i)i \in I$ une base de E et J une partie de I. Alors pour qu'un élément x soit dans l' orthogonal $\{e^j \backslash j \in J\}^\perp$ de $\{e^j \backslash j \in J\}$, il est nécessaire et suffisant que $\langle x, e^j\rangle = 0$ pour tout $j \in J$, si et seulement si les coordonnées x^j $(j \in J)$ de x sont nulles, ce qui est équivalent à dire que
$x \in Vect(e_i \backslash i \in I - J)$, ainsi,
$\{e^i \backslash j \in I\}^\perp = Vect(e_i \backslash i \in I - J)$.
Supposons que $I - J$ soit fini. Pour qu'une forme linéaire w sur E soit dans l'annulateur $Ann\{e_j \backslash j \in J\}$ de la partie $e_j \backslash j \in J\}$, il faut et il suffit, $\langle e_j, w\rangle = 0$ pour tout $j \in J$. Considérons la forme linéaire

$$\sigma = w - \sum_{i \in I-J} \langle e_i, w\rangle e^i,$$

cette forme linéaire est nulle, et par conséquent

$$w = \sum_{i \in I-J} \langle e_i, w\rangle e^i \in Vect(e^i \backslash i \in I - J).$$

Soit maintenant $w \in Vect(e^i \backslash i \in I - J)$. Il existe des scalaires $(\lambda_i)_{i \in I-J}$ telle que

$$w = \sum_{i \in I-J} \lambda_i e^i,$$

et donc, pour tout $j \in J$,

$$\langle e_j, w\rangle = \sum_{i\in I-J} \lambda_i \langle e_j, e^i\rangle = \sum_{i\in I-J} \lambda_i \delta^i_j = 0$$

donc $w \in Ann\{e_j \backslash j \in J\}$, on a donc

$$Ann\{e_j \backslash j \in J\} = Vect(e^i \backslash i \in I - J).$$

On déduit, que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, alors pour tout sous espace vectoriel F et E et pour tout sous espace vectoriel G de E^* on a

1. $\dim_{\mathbb{K}}(Ann(F)) = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} F$,
2. $\dim_{\mathbb{K}} G^{\perp} = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} G$.
   Et pour tout sous espace vectoriel F de E, on a :

$$(E \backslash F)^* \simeq Ann(F).$$

En particulier si E de dimension finie, alors
$\dim_{\mathbb{K}}(E\backslash F) = \dim_{\mathbb{K}}(Ann(F)) = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} F$.
De même on a :

$$E^* \backslash Ann(F) \simeq F^*.$$

Définition 2.2.2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E^* son espace dual. On appelle bidual de E le dual $(E^*)^*$ de E^*, on le note E^{**}.*

Considérons l'application $\varphi_E \;:\; E \;\to\; E^{**}$,
telle que pour tout $x \in E$, $\varphi_E(x) = \widetilde{x}$ est la forme linéaire sur E^*, donnée par :

$$\widetilde{x}(w) = \langle x, w\rangle$$

quel que soit $w \in E^*$, est un homomorphisme injectif de $\mathbb{K}$-espace vectoriels.

Proposition 2.2.1. *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ bilinéaire.*
Soit $E^{'}$ sous espace vectoriel de E.

On suppose $E^{'}$ et F de dimensions finies.
Alors on a :

$$dim(E^{'})^{\perp} \geq dimF - dimE^{'}.$$

Preuve 2.2.1. $\varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ *et* $E' \subset E$

$$\begin{aligned} E'^{\perp} &= \{y \in F \setminus \varphi(x,y) = 0 \ \forall x \in E'\} \\ &= \{y \in F \setminus \widetilde{\varphi}_1(x)(y) = 0 \ \forall x \in E'\} \\ &= \{y \in F \setminus \langle y, \widetilde{\varphi}_1(x) \rangle = 0 \ \forall x \in E'\} \\ &= \{\widetilde{\varphi}_1(x) \setminus x \in E'\} \subset F \end{aligned}$$

Orthogonalité au sens du la dualité. D'autre part on a

$$F =^{\perp} \{\widetilde{\varphi}_1(x) \setminus x \in E'\} \oplus \{\widetilde{\varphi}_1(x) \setminus x \in E'\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \dim F &= \dim E'^{\perp} + \dim \widetilde{\varphi}_1(E') \\ &= \dim E'^{\perp} + \dim(\widetilde{\varphi}_1(e_1), \cdots, \widetilde{\varphi}_1(e_r)) \text{ où } r \text{ et la dimension de } E'. \end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned} \dim E'^{\perp} &= \dim F - \dim(\widetilde{\varphi}_1(e_1), \cdots, \widetilde{\varphi}_1(e_r)) \\ &\leq \dim F - r \\ &= \dim F - \dim E'. \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.1. *Si $E = F$ de dimention finie et $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ bilinéaire alors* $\dim E^{\perp} = \dim^{\perp} E$

Proposition 2.2.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, Soit φ forme bilinéaire symétrique ou anti-symétrique non dégénérée sur E .*
Soit F un sous espace vectoriel de E. Alors on a :

$$dimF^{\perp} = n - dimF$$

Preuve 2.2.2. *On a :*

$$\begin{aligned} Ona : F^{\perp} &= \{y \in E / \forall x \in F \varphi(y,x) = 0\} \\ &= \{y \in E / \forall x \in F (\varphi_2(x))(y) = 0\} \\ &= {}^{\perp}\{\varphi_2(x)/x \in F\} \end{aligned}$$

(orthogonale au sens de la dualité).
Donc, par dualité, on a :

$$dimF^{\perp} = n - dim\varphi_2(F).$$

Comme φ est non dégénérée, l'application linéaire $\varphi_2 : E \to E^*$ est injective et donc on a :

$$dim\varphi_2(F) = dimF.$$

Corollaire 2.2.2. *Sous les hypothéses du théorème précédent on a :*

1. *Si F est un sous espace vectoriel de E,*

$$(F^{\perp})^{\perp} = F.$$

2. *Si F et G sont des sous espaces vectoriels de E, on a :*

$$F \subseteq G \Leftrightarrow G^{\perp} \subseteq F^{\perp}.$$

3. *Si F et G sont des sous espaces vectoriels de E, on a :*

$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}.$$

Preuve 2.2.3. 1. *On a $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$ (propriété générale de l'orthogonalité).*
De plus,

$$dimF^{\perp} = n - dimF,$$

d'où

$$dim(F^{\perp})^{\perp} = dimF.$$

2. *On a :*
$$F \subseteq G \Rightarrow G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$$
(propriété général de l'orthogonalité)
et :
$$G^{\perp} \subseteq F^{\perp} \Rightarrow F = (F^{\perp})^{\perp} \subseteq (G^{\perp})^{\perp} = G.$$
3. *Pour démontrer l'égalité il siffi donc de montrer qu'on a :*
$$F \cap G = (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp}.$$
Or on a :
$$\begin{aligned}(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} &= (F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp} \\ &= F \cap G.\end{aligned}$$
(propriété général de l'orthogonalité)

Proposition 2.2.3. *φ_E est un isomorphisme si et seulement si E est de dimension finie.*

2.2.2 Transposition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. À toute application linéaire $u : E \to F$, on peut l'associer une unique application linéaire ${}^t u : F^* \to E^*$, appelée transposée de u, définie par :
$${}^t u(w) = wou,$$
c'est-à-dire, pour tout $x \in E$ et $w \in F^*$, on a :
$$\langle x, {}^t u(w)\rangle = \langle u(x), w\rangle.$$

Exemple 2.2.1. *Soient F un sous espace vectoriel de E, $i : x \mapsto x$ de F dans E l'injection canonique de F dans E et $p : x \mapsto \overline{x} = x + F$ de E sur E/F,la surjection canonique. Alors*

1. *${}^t i(w) = woi = w_{\setminus F}$ est la restriction de la forme linéaire w au sous espace vectoriel F, pour tout $w \in E^*$,*

2. ${}^tp \ : \ (E/F)^* \ \rightarrow \ E^*$

$$ {}^tp(w)(x) = w(\overline{x}) $$

où $\overline{x} = x + F$ *et la classe modulo* F *du vecteur* x.

Proposition 2.2.4. *Dans les hypothèses et notations ci dessus on a :*

1. *L'application* $u \mapsto^t u$ *de* $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ *à valeurs dans* $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F^*, E^*)$ *est* $\mathbb{K}$*-linéaire.*
2. ${}^tid_E = id_{E^*}$
3. *Soit* G *un troisième espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ *et* $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$, *alors*
$$ {}^t(vou) = {}^tuo^tv. $$
4. *Si* $u \in GL_{\mathbb{K}}(E)$, *alors* ${}^tu \in GL_{\mathbb{K}}(E^*)$ *et l'on a :*
$$ ({}^tu)^{-1} = {}^t(u^{-1}). $$

De même on a :

Proposition 2.2.5. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$ *et* $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.*On a les relations suivantes :*

1. $Im\ {}^tu = Ann(\ker u)$,
2. $\ker\ {}^tu = Ann(Imu)$,
3. *le rang de* ${}^tu$ *est fini si et seulement si, le rang de* u *est fini et l'on a :*

$$ rg({}^tu) = rg(u) $$

Proposition 2.2.6. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$ *et* $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. *Alors le diagramme suivant*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \varphi_E & & \\
 & E & \rightarrow & E^{**} & \\
u & \downarrow & & \downarrow & u^{tt} \\
 & F & \rightarrow & F^{**} & \\
 & & \varphi_F & &
\end{array}
$$

est commutatif :

$$^{tt}uo\varphi_E = \varphi_F ou,$$

ici $^{tt}u = {}^t({}^tu)$.

Proposition 2.2.7. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, F un sous espace vectoriel de E et G un sous espace vectoriel de E^*. Alors :*

1. $(AnnF)^{\perp} = F$
2. *dim F est finie si et seulement si dim($AnnF$) et finie et l'on a :*

$$codim(F) = dim(AnnF),$$

3. *dim$G$ et finie si et seulement si dim($G^{\perp}$) est finie et l'on a :*

$$G = Ann(G^{\perp}).$$

Proposition 2.2.8. *Soit u une application de E dans F où dim $E = m$, dim $F = n$, et A la matrice associé a u suivant les bases canoniques de E et F. Alors la matrice associé à l' application ${}^tu$ suivant les bases canoniques de F^* et E^* est ${}^tA$.*

Preuve 2.2.4. *Posons $A = (a_{ij})$ tq $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., m$ et $B = (b_{\alpha\beta})$ tq*
$\alpha = 1, ..., m$
$\beta = 1, ..., n$
Alors nous savons que

$$\begin{aligned} {}^tu(f^*_\alpha) &= \Sigma^m_{\beta=1} b_{\beta\alpha}\ e^*_\beta. \\ f^*_\alpha ou^t &= \Sigma^m_{\beta=1} b_{\beta\alpha}\ e^*_\beta. \end{aligned}$$

Alors d'une part on a :

$$\begin{aligned} f^*_\alpha ou^t(e_k) &= f^*_\alpha({}^tu(e_k)) \\ &= f^*_\alpha(\Sigma^n_{l=1} f_e) \\ &= \Sigma^n_{l=1} a_{lk} f^*_\alpha(f_l) \\ &= \Sigma^n_{l=1} a_{lk} b_{lk} \\ &= a_{lk} \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\Sigma_{\beta=1}^{m} e_{\beta}^{*}(e_k) = \Sigma_{\beta=1}^{m} \delta_{\beta k} = b_{kl}$$

d'où : $b_{kl} = a_{lk}$.

Chapitre 3

Espaces vectoriels symplectiques

3.1 Métriques sur un espace vectoriel

3.1.1 Métriques Euclidiennes

Définition 3.1.1. *Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, un produit scalaire Euclidien ou métrique Euclidienne sur E notée $g(.,.)$ est une application :*

$$g \quad : \quad (x, y) \in E \times E \quad \mapsto \quad g(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Verifier les propriétés suivantes :

1. *Linéaire par rapport à x c'est-à-dire $\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,*

$$g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 g(x_1, y) + \alpha_2 g(x_2, y);$$

2. *Symétrique c'est-à-dire $g(x, y) = g(y, x), \forall x, y \in E$;*
3. *Positive c'est-à-dire $\forall x \in E, g(x, x) \geq 0$;*
4. *Non dégénéré c'est-à-dire $\forall x \in E, g(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

On dit que (E, g) est un espace Euclidien.

On notera :

$$\|x\| = \sqrt{g(x, x)} \text{ (norme du vecteur } x\text{).}$$

Conséquences 3.1.1. *Une métrique Euclidienne est linéaire en y. C'est-à-dire, c'est une forme bilinéaire.*

Remarque 3.1.1. *Le produit scalaire se note aussi*[1] *avec ou* $\langle \cdot \backslash \cdot \rangle$ *:*

$$\langle x \backslash y \rangle = g(x, y).$$

Soit g une métrique Euclidienne sur E, donc on peut la considérer comme une application linéaire :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{g} & : & E & \to & E^* \\ & & x & \mapsto & \widetilde{g}(x) = g_1(x). \end{array}$$

Le vecteur dual $\widetilde{g}(x) = g_1(x) \in E^*$ est appelé vecteur dual métrique de x.
Avec les notations plus précises mentionnées précédement, la forme bilinéaire canonique est donnée par :

$$\begin{array}{rcccl} E \times E^* & \to & \mathbb{R} & & \\ (y, \widetilde{g}(x)) & \mapsto & \langle y, \widetilde{g}(x) \rangle & = & (\widetilde{g}(x))(y) \\ & & & = & g(x, y). \end{array}$$

- L'hypothèse g est symétrique s'écrit comme suit :

$$\widetilde{g} = \widetilde{g}^*$$

Où

$$\begin{array}{rrcl} \widetilde{g}^* : & E^{**} = E & \to & E^* \\ & y & \mapsto & \widetilde{g}^*(y) = g_2(y) \end{array}$$

En effet : soit $x \in E$, alors

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{g}(x) = \widetilde{g}^*(x) & \Leftrightarrow & g_1(x) = g_2(x) \\ & \Leftrightarrow & g_1(x)(y) = g_2(x)(y) \ \forall y \in E \\ & \Leftrightarrow & g(x, y) = g(y, x). \end{array}$$

- L'hypothèse g non dégénérée signifie que $\widetilde{g} : E \to E^*$ est inversible. En effet

1. On pourrait aussi noter $\langle x \backslash y \rangle_E$ pour ne pas confondre avec la contraction $\langle \cdot \backslash \cdot \rangle_{E \times E^*}$

$$\begin{aligned} \ker(\widetilde{g}) &= \{x, g_1(x) = 0\} \\ &= \{x/g(x,y) = 0, \forall y\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Donc $\widetilde{g}$ est injective donc bijective (c'est un isomorphisime). On note son inverse

$$\widetilde{g}^{-1} : E^* \to E.$$

C'est-à-dire, si $\alpha \in E^*$ on a $\widetilde{g}^{-1}(\alpha) \in E$.

- Grâce à l'isomorphisme $\widetilde{g} : E \to E^*$, le produit scalaire sur E noté $\langle \cdot \backslash \cdot \rangle_E$ définit un produit scalaire sur E^* aussi noté $\langle \cdot \backslash \cdot \rangle_{E^*}$:

$$\langle \alpha \backslash \beta \rangle_{E^*} = \langle \widetilde{g}^{-1}(\alpha) \backslash \widetilde{g}^{-1}(\beta) \rangle_E \text{ telle que } \alpha, \beta \in E^*$$

(aussi noté $g^{-1}(\alpha, \beta)$) qui est aussi symétrique, non dégénéré et positif.

Définition 3.1.2. *Une base orthonormée (b.o.n.) est une base $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que*

$$g(e_i, e_j) = \delta_{i,j} \ \forall i, j = 1, \cdots, n$$

(autrement dit $\langle e_i \backslash e_j \rangle = \delta_{i,j}$).

Dans un espace vectoriel, toujour, il existe une base orthonormée. D'où

3.1.2 Construction de Gram-Schmidt

Partant d'une base $(b_1, \cdots, b_n)$ quelconque de E (pas forcément orthonormée), on pose

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

qui est normalisé ($\|e_1\| = \frac{\|b_1\|}{\|b_1\|} = 1$).

On considère l'espace $E_2 = Vect(b_1, b_2) = Vect(e_1, b_2)$ de dimension 2. On pose

$$\widetilde{e}_2 = b_2 + \lambda_1 e_1 \text{ avec } \lambda_1 \text{ telle que } \langle e_1 \setminus \widetilde{e}_2 \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \langle e_1 \setminus b_2 \rangle + \lambda_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -\langle e_1 \setminus b_2 \rangle \end{aligned}$$

On pose

$$e_2 = \frac{\widetilde{e}_2}{\|\widetilde{e}_2\|}.$$

qui est normalisé. Alors $\{e_1, e_2\}$ est une base o.n. de E_2. On poursuit de même par récurrence, si on a obtenu $e_1, \cdots, e_{j-1}$, on considère

$$E_j = Vect(b_1, b_2, \cdots, b_j) = Vect(e_1, e_2, \cdots, e_{j-1}, b_j)$$

de dimension j. On pose $\widetilde{e}_j = b_j + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{j-1} e_{j-1}$ telle que $\langle e_i \setminus \widetilde{e}_j \rangle = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, j-1$, soit $\langle e_i \setminus b_j \rangle + \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = -\langle e_i \setminus b_j \rangle$. On pose $e_j = \frac{\widetilde{e}_j}{\|\widetilde{e}_j\|}$ qui est normalisé. Alors $(e_1, e_2, \cdots, e_j)$ est une b.o.n. de E_j. Par récurrence, on obtient une b.o.n. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de $E_n = E$.

Remarque 3.1.2. *Cette construction dépend de la base $(b_1, \cdots, b_n)$ de départ mais aussi de l'ordre des vecteurs $(b_j)_j$. Retenons que la base o.n. obtenue est caractérisée par le fait que*

$$E_j = Vect(b_1, \cdots, b_j) = Vect(e_1, \cdots, e_j), \forall j = 1, \cdots, n.$$

Ces espaces sont emboités :

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E.$$

3.1.3 Construction symétrique d'une base orthonormée (*)

Voici une autre construction. On part d'une base $(b_1, \cdots, b_n)$ quelconque de E (pas forcément orthonormée). Posons :

$$B_{i,j} = \langle b_i \setminus b_j \rangle.$$

La matrice $B = (B_{i,j})_{i,j}$ est appelée matrice de **Gram** de la base $(b_i)_i$. C'est une matrice symétrique, définie positive, c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$,

$\langle u \setminus Bu\rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$. En effet on pose $U = \sum_i u^i b_i \in E$, et on a :

$$0 < \langle U \setminus U\rangle_E = \sum_{i,j} u^i u^j \langle b_i \setminus b_j\rangle = \langle u \setminus Bu\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Donc la matrice B se diagonalise :

$$B = UDU^{-1}.$$

Où U est une matrice orthogonale ($U^{-1} = U^T$) contenant les vecteurs propres de B en colonnes, et $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ sont les valeurs propres de B, avec
$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$. On pose

$$\widetilde{d_j} = \frac{1}{\sqrt{d_j}}, \widetilde{D} = diag(\widetilde{d_1}, \cdots, \widetilde{d_n}).$$

Et

$$C = \widetilde{D}U^T = (C_{\alpha,i})_{\alpha,i=1\cdots n} : \text{matrice } n \times n.$$

Posons :

$$e_\alpha = \sum_{j=1}^{n} C_{\alpha,j} b_j \in E, \alpha = 1, \cdots, n.$$

Alors

$$\langle e_\alpha \setminus e_\beta\rangle = \sum_{k,l} C_{\alpha,k} C_{\beta,l} \langle b_k \setminus b_l\rangle = \sum_{k,l} C_{\alpha,k} B_{k,l} (C^T)_{l,\beta} = (CBC^T)_{\alpha,\beta} =$$

$$\begin{array}{rcl}
\langle e_\alpha \setminus e_\beta\rangle & = & \sum_{k,l} C_{\alpha,k} C_{\beta,l} \langle b_k \setminus b_l\rangle \\
& = & \sum_{k,l} C_{\alpha,k} B_{k,l} (C^T)_{l,\beta} \\
& = & (CBC^T)_{\alpha,\beta} \\
& = & (\widetilde{D}\underbrace{U^T BU}\widetilde{D})_{\alpha,\beta} \\
& = & (I)_{\alpha,\beta} \\
& = & \delta_{\alpha,\beta}
\end{array}$$

telle que $U^T BU = D$, donc $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Remarque 3.1.3. *Si au départ $(b_1, \cdots, b_n)$ est déjà une b.o.n. , alors $B = I$, $C = I$ et donc $e_\alpha = b_\alpha$.*

3.1.4 Application linéaire adjointe

Si $A : E \to E$ est une application linéaire, rappelons que l'application duale est

$$A^* : E^* \to E^*.$$

Définit par $\langle x \setminus A^*\alpha\rangle = \langle Ax \setminus \alpha\rangle$. Si g est une métrique Euclidienne, on a vu que cela définit un isomorphisme

$$\widetilde{g} : E \to E^*.$$

Cette identification permet de "ramener" A^* sur l'espace E d'après le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & A^* & & \\ & E^* & \to & E^* & \\ \widetilde{g} & \uparrow & & \uparrow & \widetilde{g} \\ & E & \to & E & \\ & & A^+ & & \end{array}$$

l'application résultante $A^+ : E \to E$ est appelée l'application adjointe de A. Cela s'écrit simplement

$$\forall x, y \in E, g(x, A^+y) = g(Ax, y).$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} A^+y = \widetilde{g}^{-1}(A^*(\widetilde{g}(y))) &\Leftrightarrow \widetilde{g}(A^+(y)) = A^*(\widetilde{g}(y)) \\ &\Leftrightarrow \langle x, \widetilde{g}(A^+(y))\rangle = \langle x, A^*(\widetilde{g}(y))\rangle \\ &\Leftrightarrow g(x, A^+y) = g(Ax, y). \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\forall x, y \in E, \langle x, A^+y\rangle = \langle Ax, y\rangle$$

qui ressemble à la notation

$$\langle x, A^*\alpha\rangle = \langle Ax, \alpha\rangle.$$

Remarque 3.1.4. *Dans une base orthonormée, si A est reprsentée par une matrice $A = (A_i^j)_{i,j}$, on peut montrée que A^+ est représenté par la matrice transposée :*

$$(A^+)_j^i = A^T = A_i^j.$$

Remarque 3.1.5. *Si on avait voulu une présentation plus rapide de l'opérateur adjoint, en se passant de l'espace dual et d'opérateur dual, il aurait suffit de donner l'équation*

$$\forall x, y \in E, \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^+ y \rangle,$$

comme définition. Notre présentation qui est plus sophistiquée, plus complexe au premier abord, sera utile pour présenter les tenseurs. Il est important de remarquer que la notion d'espace dual existe sans qu'il y ait une métrique . Et que la donnée d'une métrique permet d'identifier E^* et E (d'une façon qui dépend de la métrique).

3.1.5 Application linéaires qui préservent la métrique

Définition 3.1.3. *Sur un espace vectoriel Euclidien (E, g), une application linéaire*

$$A : E \to E,$$

est appelée transformation orthogonale si :

$$\forall x, y \in E, g(Ax, Ay) = g(x, y).$$

(on dit que A "préserve la métrique")

Remarque 3.1.6. *- Avec les notations qu'on a utilisé précidement : $\langle Ax \setminus Ay \rangle = \langle x \setminus y \rangle$.*
- En faisant $x = y$ on a $\langle Ax \setminus Ax \rangle = \langle x \setminus x \rangle$ soit $\|Ax\| = \|x\|$ ce qui signifie que A préserve la norme $\|x\|$ et distance entre vecteurs $d(x, y) = \|x - y\|$. On dit que A est une isométrie.

Proposition 3.1.1. *Si A est une transformation orthogonale, alors*

1. *A est un isomorphisme ;*
2. *A^{-1} est une transformation orthogonale ;*
3. *A transforme une base o.n. en une base o.n.*

Preuve 3.1.1. - *Une application orthogonale est un isomorphisme, donc A est inversible. En effet, il suffit de montrer qu'elle est injective, soit $\ker(A) = \{0\}$: On a $x \in \ker(A) \Rightarrow \|Ax\| = 0$, or $\|Ax\| = \|x\|$ donc $x = 0$*

- A^{-1} *est aussi une transformation orthogonale, car*
  $\langle Ax \setminus AY \rangle = \langle x \setminus y \rangle \Leftrightarrow \langle x' \setminus y' \rangle = \langle A^{-1}x' \setminus A^{-1}y' \rangle$, *en posant* $x' = Ax$, $y' = Ay$.
- *Une transformation orthogonale transforme une base o.n. en une base o.n. en effet*
  si $f_j = A(e_j)$ *alors* $\langle f_i \setminus f_j \rangle = \langle A(e_i) \setminus A(e_j) \rangle = \langle e_i \setminus e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Proposition 3.1.2. *Sur un e.v Euclidien* (E, g), *si une application linéaire* $A : E \to E$ *préserve la norme, c'est-à-dire* $\|Au\| = \|u\|$, *alors* A *est une transformation orthogonale.*

Preuve 3.1.2. *On utilise la technique de "polarisation" : en remplace* $u = v + w$ *dans la relation* $\|Au\| = \|u\| \Leftrightarrow \langle Au \setminus Au \rangle = \langle u \setminus u \rangle$, *ce qui donne (en developpant et utilisant la symétrie)*

$$\langle Av + Aw \setminus Av + Aw \rangle = \langle v + w \setminus v + w \rangle \Leftrightarrow \langle Av \setminus Aw \rangle = \langle v \setminus w \rangle.$$

Donc A *est orthogonale.*

Proposition 3.1.3. *Sur un e.v Euclidien* (E, g), $A : E \to E$ *est une application orthogonale si et seulement si :*

$$A^{+} = A^{-1}$$

Preuve 3.1.3. *Si* A *est orthogonale, et d'après*

$$\forall u, v \in E, \langle Au \setminus v \rangle = \langle u \setminus A^{+}v \rangle.$$

On a pour

$$\forall u, v \in E, \langle Au \setminus Av \rangle = \langle u \setminus v \rangle \Leftrightarrow \langle u \setminus A^{+}Av \rangle = \langle u \setminus v \rangle.$$

Ce qui implique que $A^{+}A = I$ *donc* $A^{+} = A^{-1}$.

Remarque 3.1.7. *Dans une base o.n. la matrice de* A *vérifie donc*

$$A^{T} = A^{-1}.$$

3.2 Métriques Hermitiennes

Définition 3.2.1. *Si E est un espace vectoriel complexe de dimension n, un produit scalaire hermitien ou métrique Hermitienne sur E notée $h(.,.)$*

$$h : (x, y) \in E \times E \mapsto h(x, y) \in \mathbb{C}.$$

Est une application verifier les propriétés suivantes :

1. *Linéaire en x c'est-à-dire $\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$,*

$$h(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 h(x_1, y) + \alpha_2 h(x_2, y);$$

.

2. *Symétrique hermitienne c'est-à-dire $\forall x, y \in E, h(y, x) = \overline{h(x, y)}$;*
3. *Positive c'est-à-dire $\forall x \in E, h(x, x) \geq 0$;*
4. *Non dégénérée c'est-à-dire $\forall x \in E, h(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

On notera :

$$\|u\| = \sqrt{h(u, u)} \quad \text{: norme d'un vecteur } u \in E.$$

On dit que (E, h) est un espace Hermitien ou espace de Hilbert.

Conséquences 3.2.1. *Une métrique hermitienne est anti-linéaire en y c'est-à-dire c'est une forme sesquilinéaire.*

Remarque 3.2.1. - *Si note aussi :*

$$\langle u, v\rangle = h(u, v)$$

le produit scalaire.

- Tout ce que l'on a définit pour une métrique euclidienne se définit de manière analogue pour une métrique Hermitienne. Il y a quelques différences :
- Attention, l'application $\widetilde{h} : E \to E^*$ définit par $\widetilde{h}(x) = h_1(x)$ est maintenant anti-linéaire.
- Si $A : E \to E$ est une application linéaire, on définit comme

$$\forall x, y \in E, \langle Ax \setminus y\rangle = \langle x, A^+ y\rangle$$

l'opérateur adjoint A^+ relativement à la métrique Hermitienne. C' est un opérateur linéaire (on a utilisé deux fois $\widetilde{h}$). Dans une base o.n. la matrice de A^+ est la matrice transposée conjuguée de la matrice de A.

- Une application que préserve la métrique Hermitienne,

$$\langle Ax \setminus Ay\rangle = \langle x \setminus y\rangle$$

est appelée transformation unitaire. Elle vérifie $A^+ = A^{-1}$ - En dimention infinit, l'espace doit être complet pour la norme $\|\cdot\|$ (Espace de Banach, espace de Hilbert).

Exemples 3.2.1. *- Sur $E = \mathbb{C}$, si $x = (x^1, \cdots, x^n)$ et $y = (y^1, \cdots, y^n)$, on pose*

$$\langle x \setminus y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{v}^i.$$

- Si $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, espace de dimention infinie, contenant des suites infinies $x = (x^1, x^2, \cdots)$. On pose de même

$$\langle x \setminus y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x^i \overline{v}^i,$$

pour des vecteurs tels que $\|y\|^2 = \langle x \setminus x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \mid x \mid^2 < \infty$

3.3 Métriques de Lorentz

Définition 3.3.1. *Si E est un espace vectoriel réel de dimension n (exemple $\mathbb{R}^4$ en relativité restreinte, qui modèlise l'espace-temps), une métrique de Lorentz sur E est un produit scalaire symétrique, non dégénéré (c'est-à-dire $\widetilde{L}$ inversible). de signature $(-1, +1, \cdots, +1)$, c'est-à-dire il existe une base o.n $(\underbrace{e_0}_{temps}, \underbrace{e_1, e_2, \cdots, e_n}_{espace})$ de E telle que*

$$L(e_0, e_0) = -1 \ , \ L(e_i, e_i) = +1, \ si \ i \geq 1$$

$$L(e_i, e_j) = 0 \ si \ i \neq j.$$

On dit que (E, L) est un espace de Minkowski.

Remarque 3.3.1. - *Dans une base o.n. la matrice de la métrique $L_{ij} = L(e_i, e_j)$ est diagonale :*

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de norme car $L(x, x)$ peut être positif, négatif ou nul selon le vecteur $x \in E$.

- Une transformation linéaire $A : E \to E$ qui préserve la métrique de Lorentz, c'est-à-dire

$$\langle Ax \setminus Ay \rangle = \langle x \setminus y \rangle,$$

s'appelle transformation de Lorentz.

3.4 Schémas dans l'espace-temps de Minkowski $E = \mathbb{R}^2$

On considère l'espace de dimension 1, donc l'espace-temps $E = \mathbb{R}^2$ avec la métrique L dont la matrice dans la base canonique (e_0, e_1) de $\mathbb{R}^2$ est

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire $L(e_0, e_0) = -1$, etc$\cdots$ c'est une base o.n). On décompose un vecteur $u \in E$ par rapport à cette base :

$$u = te_0 + xe_1.$$

Ses composantes sont (t, x) par rapport à cette base. Alors on utilisant la linéarité de L on déduit que

$$g(u, u) = x^2 - t^2.$$

Ainsi les vecteurs u, tels que $L(u,u) = a \in \mathbb{R}$ est fixé, sont situés sur la courbe d'équation

$$x^2 - t^2 = a,$$

qui forme deux hyperboles. Les vecteurs u tels que

$$L(u,u) = 0 \Leftrightarrow \mid x \mid = \mid t \mid$$

sont appelés de "type lumière", et situés sur le "cône de Lumière" (ici, on travaille sans unité, la vitesse de la lumière est ramenée à $e = 1$). Les vecteurs tels que $L(u,u) < 0$ (respect. > 0) sont appelés de "type temps" (respect. espace), et situés sur dans le "cône de Lumière" (respect. à l'extérieur).

3.5 Métriques symplectiques

La notion de métrique symplectique est utile en mécanique analytique pour écrire les équations de mouvement de Hamilton, indépendement du système de coordonnées. On peut sauter cette partie en première lecture.

Définition 3.5.1. *Une métrique symplectique w sur un espace vectoriel E de dimension finie est une application*

$$\begin{array}{rccl} w & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (U,V) & \mapsto & w(U,V) \end{array}$$

qui est linéaire en U et V, antisymétrique $(w(U,V) = -w(V,U))$ et non dégénérée $(w(U,V) = 0, \forall V \Rightarrow U = 0)$. On dit que (E,w) est un espace vectoriel symplectique.

Remarque 3.5.1. - *Pour tout $u \in E$, on a $w(u,u) = -w(u,u)$ donc $w(u,u) = 0$ c'est-à-dire tout vecteur est orthogonal à lui même. Voici un résultat important qui montre la forme normale*[2]

2. En gros la "forme normale" d'un objet est l'expression la plus simple que puisse prendre cet objet dans un système de coordonnées approprié

3.5.1 Dimension de l'espace vectoriel symplectique

Si E est de dimension finie et si on le munit d'une base, ces conditions se transcrivent sur la matrice représentative de la forme bilinéaire w : il faut qu'elle soit anti-symétrique et inversible.
On sait que le déterminant d'une matrice anti-symétrique d'ordre impaire est nul, donc cela impose que la dimension de l'espace est paire.

3.5.2 Application linéaire adjointe symplectique

Si $A : E \to E$ est une application linéaire et w est une métrique symplectique sur E, on définit A^w par :

$$\begin{array}{ccccc} & & A^* & & \\ & E^* & \to & E^* & \\ \widetilde{w} & \uparrow & & \uparrow & \widetilde{w} \\ & E & \to & E & \\ & & A^w & & \end{array}$$

c'est-à-dire $A^w(x) = \widetilde{w}^{-1}(A^*(\widetilde{w}(x)))$. Comme précédement, cela donne :

$$w(A^w(x), y) = w(x, A(y)), \forall x, y \in E.$$

Proposition 3.5.1. *Dans une base canonique e, si on note $\phi_e(A) = A$ la matrice qui représente A, alors A^w est représente par la matrice :*

$$A^w = \phi_e(A^w) = -JA^TJ, avec J = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

(On a $J^{-1} = J^T = -J et J^2 = -I$).

Preuve 3.5.1. *Dans une base canonique, si $u \equiv U = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ et $v \equiv V$ alors*

$$JU = \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix}$$

Donc

$$w(u,v) = \langle JU \setminus V\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle U \setminus -JV\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$$

Donc

$$\begin{aligned} w(A^w(u),v) = w(u,A(v)) &\Leftrightarrow \langle JA^wU \setminus \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle JU \setminus AV\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} \\ &\Leftrightarrow \langle JA^wU \setminus V\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle A^TJU \setminus V\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} \\ &\Leftrightarrow JA^w = A^TJ \\ &\Leftrightarrow A^w = J^{-1}A^TJ \\ &\Leftrightarrow A^w = -JA^TJ \end{aligned}$$

3.5.3 Application linéaire qui préserve la métrique symplectique w

Définition 3.5.2. *Sur un espace vectoriel symplectique (E,w), une application linéaire $A : E \to E$ est appelée transformation symplectique linéaire ou transformation canonique linéaire si*

$$\forall u,v \in E, w(Au,Av) = w(u,v)$$

Remarque 3.5.2. *Une transformation symplectique transforme une base canonique en une base canonique.*

Proposition 3.5.2. *$A \in \mathcal{L}(E,E)$ est une transforme symplectique linéaire si et seulement si*

$$A^w = A^{-1}.$$

Dans une canonique, la matrice A qui représente A vérifie :

$$-JA^TJ = A^{-1}.$$

Preuve 3.5.2. *On a, pour tous $x,y \in E$*

$$\begin{aligned} w(Au,Av) = w(u,v) &\Leftrightarrow w(A^wAu,v) = w(u,v) \\ &\Leftrightarrow A^wA = I \\ &\Leftrightarrow A^w = A^{-1} \end{aligned}$$

et donc

$$-JA^TJ = A^{-1}.$$

D'après ci-dessus.

Remarque 3.5.3. *La notation de matrice représentative d'une forme symplectique n'est pas identique à la notation de matrice symplectique.*

Bibliographie

- A . AWANE sur une généralisation des strucures symplectique. Strasbourg (1984).
- C . GODBILLON FEUILETAGES. Etude géométrique. Birkhäuser (1991).
- Mc . AUDIN-P.IGLESIAS La géomitrie symplectique. LARECHERCHE - 38 France. Décembre 1994.
- P-LIBERMANN et G.M.MARLE Géométrie symplectique Bases théorique de la mécanique classique. Tomes 1, 2, 3, U.E.R. Le mathématiques, L.A.212 et ER.A.944, 1020, 1021 du C.N.R.S.