



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Physique computationnelle

Par

Arbaoui Khayra

Sur le thème

Etude de transfert de chaleur dans un matériau bicouche

Soutenu le : 01 /07/2021 devant le jury composé de :

Pr. El-keurti Mohamed	Pr	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Président
Dr. Sahabi Toufik	MCB	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Encadreur
Pr. Lasri Boumedienne	Pr	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Examineur

Année Universitaire 2020 - 2021

Table des matières

DEDICASE.....	1
Remerciement.....	2
Liste des figures.....	3
INTRODUCTION GENERALE.....	4
Référence.....	7
CHAPITRE I.....	8
LE TRANSFERT DE CHALEUR.....	8
1.1 Introduction.....	9
1.2 Notions de base.....	9
1.2.1 la température.....	9
1.2.2 la chaleur.....	9
1.3 Transfert de chaleur.....	10
1.4 Modes de transfert de chaleur.....	11
1.4.1 Conduction.....	11
1.4.2 Rayonnement.....	12
1.4.3 Convection.....	12
1.5 Flux thermique.....	13
1.6 Caractéristiques des différents modes.....	14
1.6.1 Expression générale de la transmission de chaleur en conduction et... convection.....	15
1.6.2 Transmission de chaleur par convection.....	15
1.6.3 L'absorption de chaleur par rayonnement.....	17
Références.....	18
CHAPITRE 2.....	19
l'équation de chaleur.....	19
2.1 Introduction.....	20
2.3 Formulation mathématiques.....	20
2.3.1 Équation de chaleur en coordonnées cartésiennes.....	20
2.3.2 Équation de diffusion thermique en coordonnées cylindriques.....	20
2.3.3 Équation de diffusion thermique en coordonnées sphériques.....	20

2.4 Résolution de l'équation de chaleur.....	21
2.4.1 Méthodes analytique.....	22
2.4.2 Résolution numérique par la méthode de différent.....	22
2.5 Logiciel de calcul.....	22
2.5.1 L'algorithmique	22
2.5.2 Le Maple.....	22
(a) Définition	23
(b) caractéristiques	23
(c) Bibliothèque	23
(d) Boucles dans Maple.....	23
2.6 La simulation	24
Références.....	26
CHAPITRE 3	27
Etude de transfert de chaleur entre deux couches de matériaux	27
3.1 Introduction.....	28
3.2 Description	28
3.3 Méthode de résolution	28
3.4 Température adimensionnelle.....	33
3.5 Résultats & discussions.....	34
3.6 Programme Maple.....	37
Nomenclature.....	47
Références.....	48
CONCLUSION	49
ملخص.....	50
Résumé.....	50
Abstract.....	50

Liste des figures

Fig.1.1 Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique.

Fig.1.2 Les trois mécanismes de transfert de la chaleur : conduction : transfert dans la masse, rayonnement : transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée, et convection : transfert par transport. A cela, il faut ajouter le changement d'état qui dissipe ou absorbe de la chaleur.

Fig. 1.3 Résistance global au transfert.

Fig. 1.4 Contact et échange de chaleur avec la paroi.

Fig. 1.5 Différentes énergies contenues dans le transfert de chaleurs par rayonnement.

Fig.2.1 Maillage différences finis.



Remerciements

*Je remercie DIEU le tout puissant et
miséricordieux pour la*

*Volonté, la santé et la patience
d'accomplir ce Modeste travail.*

*Je tiens tout d'abord à remercier
chaleureusement mon cadreur
SAHABI Toufik pour avoir suivi
l'évolution de ce travail*

*Et tous les enseignants qui nous ont
aidés le long de notre cursus
universitaire.*

Dédicaces

Je dédie ce travail ...

A mes très chers parents qui m'ont tant aidé

Durant toutes mes études ;

À ma sœur et mon frère ;

À tous les membres de ma grande famille ;

À tous mes amis ;

À tous ceux qui me sont chers







Introduction Générale

Jusqu'au début du vingtième siècle, le transfert de chaleur n'était pas connu comme branche de la physique, telle la mécanique, l'électricité etc. ... il faisait uniquement l'objet d'études ponctuelles quand la nécessité faisait sentir. Ce n'est qu'en 1921 que le premier ouvrage fut imprimé dans ce domaine. Depuis, les champs d'application des sciences ou ingénieurs, physiciens, chimistes, biologistes en manifestent le besoin de leurs connaissances. On distingue trois modes différents du transfert de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement. En pratique ces trois modes sont souvent combinés et constituent les trois fondamentales du transfert de chaleur [1].

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en fin de 19^{iem} siècle. Il modélisa l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Il a ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques [2]

Joseph Fourier est connu pour avoir déterminé, par le calcul, la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente. De telles fonctions sont appelées séries de Fourier. La méthode de calcul permettant de passer, de façon réversible, d'une fonction à la série trigonométrique correspondante est la transformation de Fourier. Cette méthode très féconde est devenue incontournable en théorie du signal, avec des applications majeures pour le traitement et la compression du son et de l'image numérique.

La résolution de l'équation de chaleur se fait d'une manière générale analytiquement par la méthode de séparation de variables [3], et numériquement par la méthode de différence finies et d'autres méthodes [4] pour le cas des matériaux composites ou non [5].

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la résolution de l'équation de chaleur unidimensionnelle pour décrire le transfert de chaleur entre deux couches d'un matériau composite.

Le premier chapitre sera une introduction générale sur la notion de chaleur et ses modes de transfert. Le deuxième chapitre sera un rappel rapide au sujet des équations de chaleur sur quelques formulations mathématiques des équations de chaleur en présentant les types de l'algorithme de discrétisation. Dans le troisième chapitre, le transfert de chaleur par conduction

entre deux couches de matériaux a été étudié par la méthode analytique de séparation de variables. Cela nous a permis de résoudre l'équation de diffusion à une dimension moyennant la résolution de ce qu'on appelle équation de valeurs propres par la méthode de Newton incrémentée dans Maple [6]. On va voir que les résultats expriment deux types d'équilibres : Instantané, et final. Un détail de calcul supporté par l'exposition des graphes sera donné plus concrètement.



Références

- [1] Chadli Hayat, « Résolution numérique de l'équation de chaleur à une dimension », Mémoire de diplôme de Master en Physique Université de Saida, Année 2018/2019.
- [2] Benhamma Salima, « *Équation de la Chaleur en Coordonnées Cartésiennes et en Axisymétrie 3D* », Mémoire du diplôme de Master en Mathématiques Université de Bejaia, Année 2015/2016.
- [3] H. Belghazi, Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2008.
- [4] Eric Goncalvès, Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO, Notes de cours, Institut national polytechnique de Grenoble, sep. 2005.
- [5] Paolo Vannucci. Matériaux composites structuraux : Méthodes d'analyse et de conception. Master. France. 2007. ffccl-01529026f.
- [6] A. J. Marie, A Hofstetter, Notes de cours Maple, LIRMN, INRA LAMETA, Montpellier, Juin 2002.



Chapitre 1

Transfert de chaleur



1.1 Introduction

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et des composants électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs des procédés industriels, etc. l'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objet principal de plusieurs travaux, et pour se faire, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes gérant la convection, l'effet de la nature des systèmes dans lesquels elle a lieu (géométrie spécialement), et les propriétés des impliqués. [1]

Dans ce chapitre, on va aborder quelques notions de bases dans le contexte de transfert de chaleurs telles que le flux thermique et les modes de transfert ainsi que les formulations mathématiques gouvernants.

1.2 Notions de base

1.2.1 La Température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu. Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. On dit alors qu'on a atteint l'équilibre thermique (voir figure 1.1) [2]. La température est une propriété thermodynamique du corps et mesure l'agitation microscopique de la matière. Selon la théorie cinétique, la température d'un corps est fonction de l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules. L'énergie cinétique d'un corps est nulle à une température appelée zéro absolu.

1.2.2 La chaleur

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. L'équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité : le joule. A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température. Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un

corps à un autre corps, s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée. Ce transfert est le fait d'une différence de température entre les deux corps.

La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue le second principe de la thermodynamique. Ce second principe met en évidence la notion d'irréversibilité : la chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail [3].

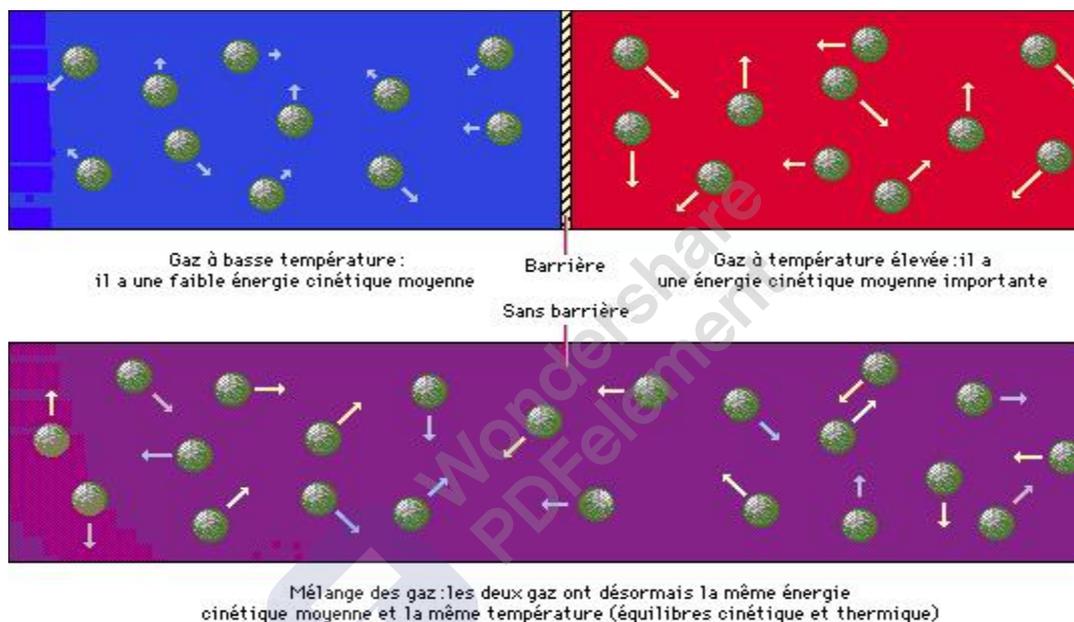


Figure 1.1 Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique.

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur [2]

$$\varphi = \frac{1}{s} * \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1.1)$$

Où s est l'aire de la surface, Q la quantité de chaleur, et le temps.

1.3 Transfert de chaleur

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique (ou

thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final. Un transfert thermique, appelé plus communément chaleur, est un transfert d'énergie microscopique désordonnée. Cela correspond en réalité à un transfert d'agitation thermique entre particules, au gré des chocs aléatoires qui se produisent à l'échelle microscopique [3,4]

1.4 Modes de transfert de chaleur

On distingue trois mécanismes d'échange de chaleur entre milieux matériels. Voir figure 1.2

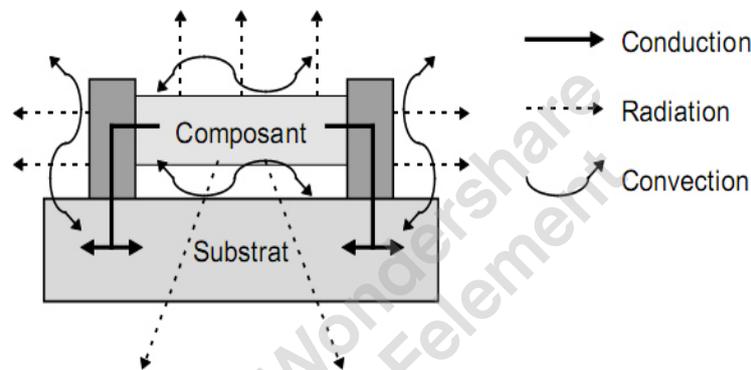


Figure 1.2 Les trois mécanismes de transfert de la chaleur : conduction : transfert dans la masse, rayonnement : transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée, et convection : transfert par transport. A cela, il faut ajouter le changement d'état qui dissipe ou absorbe de la chaleur.

1.4.1 Conduction

La conduction est une transmission de chaleur dans la masse d'un milieu matériel, les zones chaudes cédant de la chaleur à celles qui le sont moins. C'est le cas lorsqu'on chauffe l'extrémité d'une barre. Au plan corpusculaire, l'interprétation est la suivante : une zone chaude est occupée par des particules à vitesse élevée, par définition même de la température. Le mouvement brownien (aléatoires) fait constamment passer des particules d'une zone à l'autre ; mais entre zones à températures inégales, les particules ont des énergies cinétiques différentes ; le brassage a pour effet de transférer de l'énergie cinétique d'agitation, des zones chaudes vers celles qui le sont moins. La manifestation macroscopique en est un transfert de chaleur. C'est donc un mécanisme de chocs qui intervient. [5]

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc. [6]

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur.

1.4.2 Rayonnement

Le rayonnement est un transfert d'énergie sous forme d'ondes ou de particules, qui peut se produire par rayonnement électromagnétique (par exemple : infrarouge) ou par une désintégration (par exemple : radioactivité α). Par conséquent, le transfert peut se réaliser dans le vide. L'exemple caractéristique de rayonnement est celui du soleil dans l'espace.

En physique, le terme radiation ou son synonyme rayonnement désigne le processus d'émission ou de transmission d'énergie sous forme de particules ou d'ondes électromagnétiques les radiations électromagnétiques (ondes radio, infrarouge, lumière, rayons X, rayons gamma) ainsi que les rayonnements particuliers (particules alpha, bêta, neutrons). Le terme de "rayonnement" désigne également l'énergie ainsi émise et propagée, qui est aussi appelée "énergie rayonnante". On parle aussi de rayonnement lumineux, et de rayonnement calorique.

1.4.3 Convection

La convection est le phénomène observé entre un fluide en mouvement et une paroi, phénomène principal dans la plupart des échangeurs de chaleur. La cause profonde est encore une agitation des particules fluides, mais à une échelle beaucoup moins microscopique. Les parcelles de matière au contact de la paroi (chaude par exemple) s'échauffent par conduction ; le mouvement du fluide reporte ces parcelles dans la masse où elles cèdent par mélange une partie de la chaleur reçue ; d'autres les remplacent à la paroi et ainsi de suite.

Quant au mouvement du fluide, il peut avoir deux causes. Ou bien il est imposé de l'extérieur par une machine (pompe, ventilateur, compresseur) ; c'est la convection forcée, ou bien le contact du fluide avec la paroi plus chaude ou plus froide crée des différences de masse

volumique, génératrices de mouvement au sein du fluide ; c'est la convection naturelle. Rigoureusement, même en convection forcée, les différences de densité créent un écoulement parasite, en général insignifiant par rapport à l'écoulement principal. On parle de convection mixte quand les deux phénomènes ont de l'importance [5].

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses. Pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur. La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud. Dans ce qui suit nous considérerons la conduction plus significative que la convection.

1.5 Flux thermique

Les échanges de chaleur dans les procédés industriels sont réalisés le plus souvent dans des appareils tubulaires dont les principales caractéristiques de fonctionnement sont [7] :

- ❖ Le débit de chaleur échangée, noté Q , qui exprime la quantité de chaleur transmise par unité de temps. Il s'agit donc d'une puissance thermique dont l'unité dans le système international est le watt (W)
- ❖ Le débit de chaleur échangée est aussi appelé charge thermique de l'appareil d'échange thermique.
- ❖ La surface d'échange qui correspond à la surface extérieure totale des tubes ou plaques constituant l'appareil. On la note habituellement A et elle s'exprime dans le système international en m^2 . Pour caractériser la mise en œuvre de l'échange de chaleur, on utilise habituellement la notion de flux thermique ϕ (phi) qui mesure le débit de chaleur échangée au travers de $1m^2$ de surface d'échange. On a ainsi

$$\phi = \frac{Q}{A} \quad (1.2)$$

Q : flux thermique en W

A : surface d'échange en m^2

ϕ est la densité de flux thermique s'exprime en W/m^2 (dans le système international)

1.6 Caractéristiques des différents modes

1.6.1 Expression générale de la transmission de chaleur en conduction et convection

Le flux thermique transmis dans l'échange de chaleur entre deux fluides au travers d'une paroi (conduction au travers de la paroi et convection de part et d'autre) dépend des conditions dans lesquelles est réalisé l'échange. Les deux facteurs essentiels qui gouvernent l'échange thermique sont (Figure 1.3) :

- ❖ L'écart de température ΔT qui existe entre le fluide chaud et le fluide froid. Celui-ci constitue l'élément moteur de la transmission de chaleur qui ne peut, bien entendu, avoir lieu que si les températures des fluides sont différentes. On l'appelle aussi potentiel thermique et le flux thermique qui s'établit est d'autant plus grand le potentiel thermique est plus élevé.

Les résistances que la chaleur rencontre dans la circulation entre les deux fluides. Elles sont caractéristiques des modes de transmission de la chaleur : convection pour chacun des fluides et conduction pour la paroi qui les sépare. Regroupées, elles se traduisent par une résistance globale R à la transmission de chaleur et il va de soi que plus la valeur de celle-ci est élevée, plus le flux thermique est faible pour un même potentiel thermique.

On aboutit ainsi à l'expression générale de la transmission de chaleur en conduction et convection

$$\phi = \frac{\Delta T}{R} \quad (1.3)$$

où ϕ est la densité de flux thermique s'exprime en W/m^2 , ΔT : potentiel thermique $^{\circ}C$, et R la résistance à la transmission de chaleur s'exprime en $W/m^2^{\circ}C$.

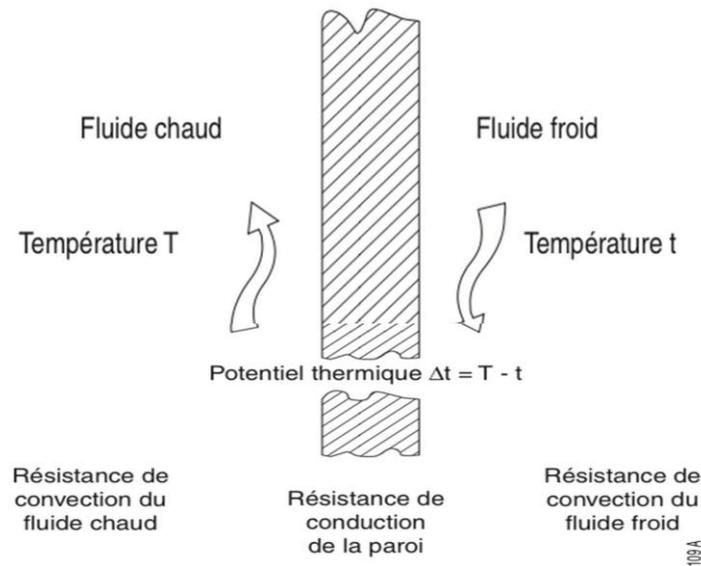


Figure 1.3 Résistance global au transfert.

En considérant l'inverse de la résistance R à la transmission de chaleur $U = 1/R$, appelé coefficient global d'échange, l'expression de l'échange de chaleur s'écrit encore :

$$\phi = U \cdot \Delta T \quad (1.4)$$

U s'exprime en $W/m^2 \cdot ^\circ C$

1.6.2 Transmission de chaleur par convection

Dans une industrie de procédés mettant en œuvre des fluides, comme le raffinage et la pétrochimie, les mécanismes d'échange de chaleur dans les matériels thermiques comportent presque toujours un échange par convection faisant intervenir un fluide et une paroi. Ce mode de transmission peut être décrit par un processus dans lequel interviennent les étapes représentées sur le schéma ci-dessous (Figure 1.4).

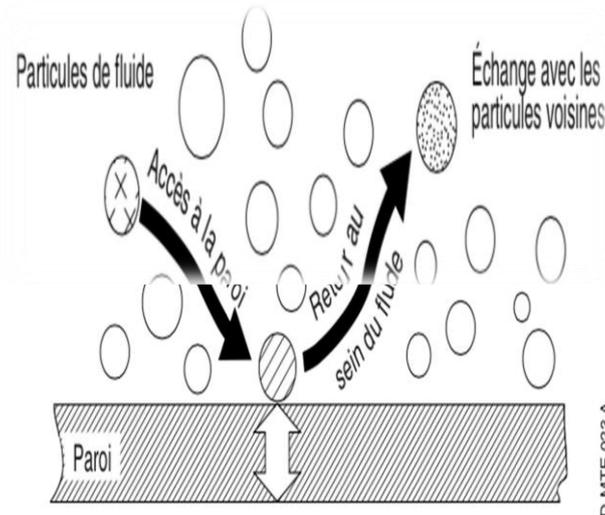


Figure 1.4 Contact et échange de chaleur avec la paroi.

1.6.3 L'absorption de chaleur par rayonnement

D'une manière générale, lorsqu'un corps est exposé au rayonnement, l'énergie qu'il reçoit (énergie incidente) peut-être :

- Absorbée : Cela se traduit par l'acquisition de chaleur par le corps exposé.
- Réfléchi : C'est –à-dire renvoyée par le récepteur : il en est ainsi de lumière parvenant à un miroir.
- Transmise au travers du corps si celui-ci est transparent.

Ces différentes possibilités sont représentées sur le schéma ci-dessous (Figure 1.5).

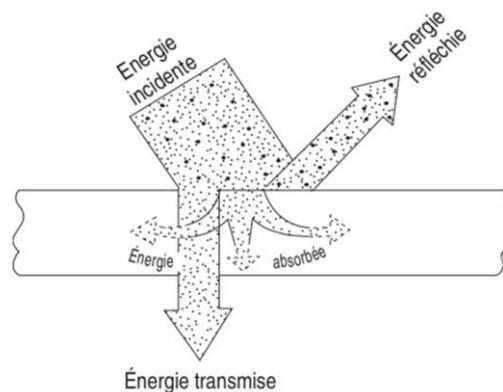


Figure 1 .5 : Différentes énergies contenues dans le transfert de chaleurs par rayonnement [7].

Pour caractériser l'aptitude des matériaux à l'absorption de rayonnement on définit le facteur d'absorption α comme le rapport du débit de chaleur absorbé celui de chaleur incidente.

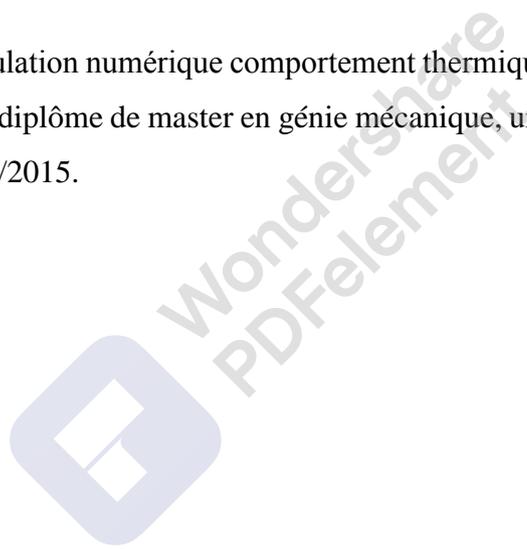
$$\alpha = \frac{\text{débit de chaleur absorbé}}{\text{débit de chaleur incident}} \quad (1.5)$$

Dans la pratique, on constate que les bons émetteurs sont de bons récepteurs du rayonnement, ce qui signifie que les matériaux dont l'émissivité est élevée ont des valeurs du facteur d'absorption. Les matériaux les plus sombres ont les valeurs du facteur d'absorption les plus élevées. Il ne s'agit en fait que d'une conséquence de leur aptitude à l'absorption : exposés à la lumière du soleil, ces matériaux ne réfléchissent qu'une faible part du rayonnement incident et paraissent sombres par opposition à l'argent poli qui en réfléchissant presque intégralement le rayonnement incident a l'aspect blanc du soleil.



Références

- [1] Salmi Somia, Etude numérique d'une convection naturelle en 2D par la méthode de volumes finis, Mémoire du diplôme de Master en Mathématiques et Informatique, Université de M'SILA, Année 2017/ 2018
- [2] Pierre Cormault, Cours de Thermique théorique et pratique, Edition Janvier, 1999.
- [3] Yves Jannot, Transferts thermiques, Ecole des Mines, Nancy, Cours 2^{ème} année, 2012.
- [4] Dominique Marchio et Paul Reboux, Introduction Aux Thermiques, Ecole des mines de Paris, ISBN : 978291176293, 2008.
- [6] René Leleu, Transferts de Chaleur, Techniques de l'Ingénieur, Sciences fondamentales
- [7] Ounnas Nabila, Simulation numérique comportement thermique d'un réservoir de stockage de propane, mémoire du diplôme de master en génie mécanique, université Mouloud Mammeri – tizi-ouzou, année 2014/2015.





Chapitre 2

L'équation de chaleur



2.1 Introduction

L'équation de chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Cette équation est introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier [1], après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Cette étude permet une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entraîné aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, à la fois physique et mathématique, sur plus d'un siècle.

2.2 Formulations mathématiques

2.2.1 Équation de chaleur en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, l'équation de chaleur s'écrit sous la forme

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + S \quad (2.1)$$

Δ étant Laplacien, α la diffusivité, et S est un terme lié à la source de chaleur extérieur.

2.2.2 Equation de chaleur en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, l'équation de chaleur s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + S = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

T représente la fonction de température dépendant des variables sphériques (r, θ, z)

2.2.3 Équation de chaleur en coordonnées sphériques

En coordonnées sphérique, on a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + S = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

k, ρ, et c_p sont respectivement la conductivité, la masse volumique, et la chaleur spécifique de la matière étudiée.

2.3 Résolution de l'équation de chaleur

2.3.1 Méthodes analytique

Ce sont les premières méthodes utilisées, restreint à des géométries simples dans une approche unidimensionnelle, ou quelque fois dans des problèmes bidimensionnels. Elles permettent d'obtenir une solution mathématique exacte du problème. Les méthodes analytiques présentent une difficulté liée à la complexité de traitement des géométries complexes. Elles s'appliquent seulement pour les milieux à propriétés linéaires isotropes et chaque équation aux dérivées partielles nécessite un traitement spécial. La méthode analytique la plus puissante et la plus couramment utilisée pour la résolution des EDP est la méthode de séparation des variables (MSV). Le principe de cette méthode consiste à mettre l'inconnue sous forme d'un produit des fonctions, dont chacune ne dépend que d'une seule variable [2].

Soit en coordonnées cartésiennes, l'inconnue $A_z(x, y)$, qui est écrit comme suit :

$$A_z(x, y) = A_z(x) \cdot A_z(y) \quad (2.4)$$

$A_z(x, y)$: Solution de l'équation aux dérivées partielles.

$A_z(x)$: Est une fonction ne dépend que de x .

$A_z(y)$: Est une fonction ne dépend que de y .

Après avoir remplacé (2.4) dans l'EDP, on obtient autant d'équations que de composantes inconnus totalement indépendantes les unes des autres.

2.4.2 Résolution numérique par la méthode de différences finies

La méthode des différences finie est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences ou chaque dérivée est approchée par une différence valeur de l'inconnue à déterminer en un certain nombre de points du domaine de résolution, ainsi que l'EDP est transformée en équation algébrique en chacun des points. Pour l'approximation on utilise un réseau carré représenté dans la figure 2.1 [3]

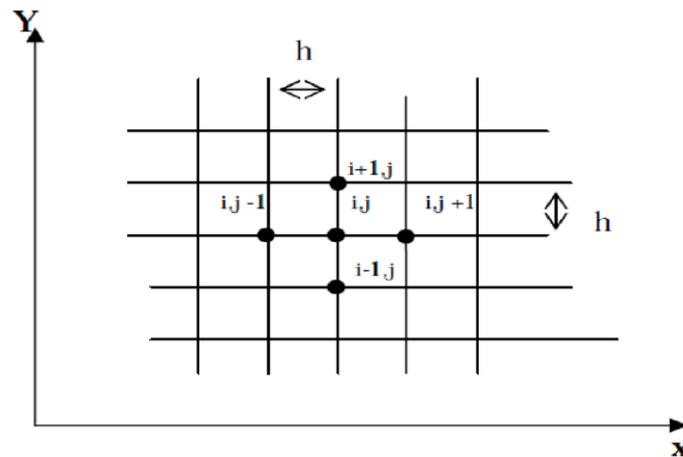


Figure 2.1 Maillage différences finis.

Pour la dérivée d'ordre 1

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right) = \frac{A_{i,j+1} + A_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (2.6)$$

Ainsi l'opérateur Laplacien peut s'écrire en tous les nœuds peut s'écrire en tous les nœuds comme suit :

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \quad (2.7)$$

h est le pas choisi sur les deux axes. Cette méthode non applicable aux matériaux non linéaires, s'adapte mal aux objets à géométries complexes à cause de la rigidité du maillage.

2.5 Logiciel de calcul

2.5.1 L'algorithmique

L'algorithmique est un terme d'origine arabe, hommage à Al Khawarizmi. Un algorithme, c'est une suite d'instructions, qui une fois exécutée correctement, conduit à un résultat donné. Pour fonctionner, un algorithme doit donc contenir uniquement des instructions compréhensibles par l'ordinateur [4]

2.5.2 Le Maple

Puisque on va utiliser le Maple dans notre calcul par suite dans la résolution de l'équation de chaleur, on donne une brève description de ce logiciel

(a) Définition

Maple est un logiciel de mathématiques développé par des chercheurs de l'université de Waterloo au Canada et de l'université ETH de Zurich. Il se distingue par la puissance de son calcul symbolique, numérique et par la représentation graphique des résultats. C'est un logiciel destiné aux scientifiques, ingénieurs, étudiants possédant un bon niveau mathématique. Ce logiciel fait des merveilles dans le calcul à très haute précision, la résolution d'équations réelles, imaginaires, différentielles, intégrales, etc.[4]

(b) Caractéristiques

Le module graphique de base de Maple permet le changement de couleur discontinu et les changements dynamiques des points de vue de graphiques, Cette dernière caractéristique pouvant être très intéressante pour visualiser les surfaces et volumes en 3D. Maple est un langage interprète, contrairement à Pascal et Fortran qui sont des langages compile. Ça veut tout simplement dire que Maple est un interlocuteur toujours attentif et prêt.

D'autres produits analogues à Maple existent, notamment Derive, Mathematica, ou MuPad. Dérive est un produit beaucoup plus simple que Maple et bien moins puissant, mais il demande pour fonctionner des configurations moins évoluées que ses deux concurrents. Mathematica est très puissant mais aussi très novateur : une syntaxe un peu contraignante, ainsi qu'une prise en main plus difficile le rendent moins facile à manipuler que Maple. MuPad est développé par l'université de Paderborn en Allemagne. Il est maintenant muni d'une interface graphique développée en collaboration avec la société sciform. Ses performances sont comparables à celles de Maple et son prix est très attractif. On peut même en télécharger une version light gratuite.

(c) Bibliothèque

Les connaissances de Maple ne sont chargées en mémoire qu'au fur et à mesure des besoins de l'utilisateur. Seule une faible partie, le noyau (kernel), est chargée dès le départ. La plus grande partie du savoir de Maple réside dans sa librairie (library). Quand l'utilisateur emploie pour la première fois depuis le chargement du logiciel, une instruction figurant dans la

librairie, les connaissances relatives à cette instruction sont chargées automatiquement en mémoire et y restent pour toute la durée de la session, sauf redémarrage par restart.

Un autre gisement de connaissances réside dans les packages, qui sont des regroupements de nouvelles fonctionnalités (fonctions, variables, textes d'aide et explications) liés à un domaine donné. Plusieurs packages font partie intégrante du logiciel, à titre d'exemple, voici certains modules :

- Plots : Représentation graphiques
- Detools: Outils pour les Équations Différentielles
- Powseries: Séries formelles.
- Intrans: Transformation intégrales : Laplace, Fourier.
- Stats : Statistiques.
- Linalg: Algèbre linéaire

Cette dernière commande affichera une série de commande pour traiter un grand nombre de notions d'algèbre linéaire. On peut créer ses propres packages, mais cela demande une bonne connaissance du logiciel. Enfin on peut profiter des travaux réalisés par de nombreux utilisateurs expérimentés de Maple en chargeant en mémoire les packages ou feuilles de travail du répertoire exemples

(d) Boucles dans Maple

Soit à calculer la somme. Une façon de procéder est d'affecter la valeur 0 à la variable s , puis d'effectuer la suite d'opérations $s := s + 1, s := s + 2, \dots, s := s + 100$. Après cette dernière s a bien la valeur voulue. Bien sûr, il y a beaucoup trop d'opérations à effectuer pour les écrire toutes.

Cette suite d'instructions signifie exactement : pour i variant de 1 jusqu'à 100, effectuer l'instruction suivante (ou la suite d'instructions) : ajouter i à la variable s . l'instruction `od` indique la fin de la succession d'actions à effectuer (ici, une seule).

2.6 La simulation

La simulation est une technique numérique pour conduire des expériences sur un ordinateur qui peut inclure des caractéristiques stochastiques soit microscopiques soit

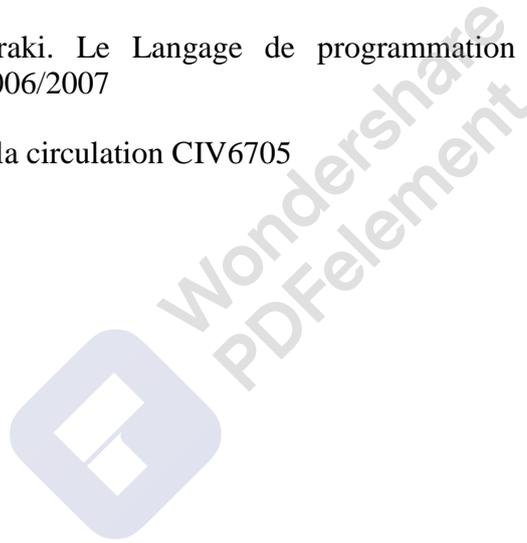
macroscopiques et implique l'utilisation de modèles mathématiques qui décrivent le comportement d'un système de transport sur des périodes étendues de temps réel. La simulation de circulation peut servir dans plusieurs cas [5] :

- ❖ Choisir entre différentes alternatives de conception
- ❖ Tester une nouvelle conception
- ❖ Raffiner une nouvelle conception
- ❖ Être intégré dans d'autres outils (pour l'étude d'optimisation d'un feu par exemple)
- ❖ Entraîner le personnel de surveillance de réseau
- ❖ Étudier la sécurité routière



Références

- [1] Mémoire sur la propagation de chaleur dans les corps solides, connu à travers un abrégé paru en 1808 sous la signature de Siméon Denis Poisson dans le nouveau bulletin des sciences par la société philomathique de paris
- [2] Diche Areziki, « Développement de transformation pour l'étude des capteurs à courant de Foucault », Mémoire de Magistère. 2003
- [3] Abba Faiza et Aliouane Samia, Modélisation électromagnétique par éléments finis 2D d'un générateur linéaire tubulaire utilisé pour la récupération de l'énergie des vagues, Mémoire du diplôme de Master en Électrotechnique, Université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Année 2012/ 2013.
- [4] Mohamed El Marraki. Le Langage de programmation Maple (Cours) Université Mohammed V-Agdal, 2006/2007
- [5] Cours de Théorie de la circulation CIV6705



Chapitre 3

Etude de transfert de chaleur entre deux couches de matériaux

3.1 Introduction

L'objectif principal de ce travail est de donner une application de l'équation de transfert de chaleur pour étudier dans les premiers instants, le flux thermique par conduction à travers des matériaux composites selon l'axe réel (Ox).

Nous donnerons d'abord une étude analytique basée sur la méthode des variables séparées (MSV). Ensuite, à l'aide de programme Maple et en utilisant la méthode de Newton, on arrive à résoudre le problème de valeurs propres. Après, nous discuterons les résultats décrivant le comportement du transfert de chaleur entre deux couches de matériaux en fonction des positions et le temps. Finalement, on représente l'erreur entre la limite théorique et le résultat.

3.2 Description du problème

Dans ce chapitre, nous irons dans le sens d'étudier le problème de transfert par conduction à travers un matériau bicouche. Tout au long de ce travail, nous adopterons les mêmes notations que celles utilisées dans [1] avec quelques petites modifications.

Premièrement, laMSV est utilisée pour résoudre les deux équations de chaleur dans les deux dalles avec les conditions aux limites et initiales associées. La procédure globale est bien détaillée en montrant comment obtenir le problème de valeurs propres dont les solutions appelées racines ou valeur propres sont utilisées pour donner la forme explicite du transfert de chaleur. Ensuite, en utilisant les propriétés orthogonales entre les deux solutions spatiales, nous obtenons les constantes intégrales, et donc, la forme finale des solutions.

Pour simplifier, nous utiliserons dans tous nos calculs des paramètres adimensionnels comme expliqué dans [1]. Ensuite, en fonction des propriétés thermo-physiquechoisis des matériaux, nous pouvons expliquer comment le transfert de chaleur change.

3.3 Méthode de résolution

Considérons un matériau composé de deux couches S_1 , et S_2 de propriétés thermo-physique : conductivité k_i , diffusivité α_i , chaleur spécifique Cp_i , masse volumique ρ_i et l'épaisseur a_i . Les coefficients de convection des deux côtés sont h_i . Tout pour $i = 1,2$ (voir figure 3.1). Les deux couches sont supposés d'être séparées par une surface de contact parfait.

Il sont maintenues respectivement aux deux températures initiales T_{01} , et T_{02} . Pour simplifier l'étude, nous adoptons le changement de variable suivant

$$\theta_i(x, t) = T_{amb} - T_i(x, t) \quad (3.1)$$

où T_{amb} est la température ambiante supposée constante et uniforme, et T_i la température spatio-temporelle des deux couches. Nous omettons la dépendance (x, t) ci-dessous et ce sera automatique. La conduction thermique unidimensionnelle sans source thermique pour les deux couches est donnée par [2]

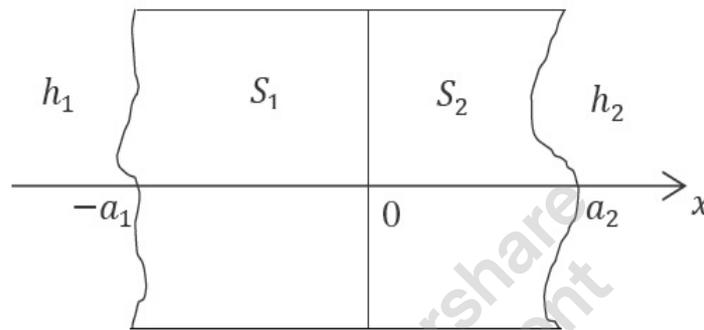


Figure 3.1 Représentation d'un matériau composé de deux couches

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (3.2)$$

avec les conditions aux bords

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=-a_1} + h_1 \theta_1 \Big|_{x=-a_1} = 0 \quad (3.3)$$

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=a_2} + h_2 \theta_2 \Big|_{x=a_2} = 0 \quad (3.4)$$

et sur la surface de contact

$$\theta_2 \Big|_{x=0} = \theta_1 \Big|_{x=0} \quad (3.5)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (3.6)$$

Les conditions initiales sont pour chaque couche s'écrivent

$$\theta_{0i} = T_{amb} - T_{0i} \quad (3.7)$$

Maintenant, nous avons un système résoluble complet construit par les équations (3.2-7). Selon MSV, nous pouvons écrire pour chaque couche i

$$\theta_i(x, t) = X_i(x) \cdot G_i(t) \quad (3.8)$$

En injectant cela dans (3.2), on peut séparer les deux parties pour chaque couche

$$\frac{1}{X_i} \frac{d^2 X_i}{dx^2} = \frac{1}{\alpha_i G_i} \frac{dG_i}{dt} = -\lambda_i^2 \quad (3.9)$$

où nous gardons α_i dans la partie temporelle. Nous avons choisi les constantes négatives $-\lambda_i^2$ par la contrainte de convergence dans $G_i(t)$. Par conséquent, les solutions sont écrites comme

$$X_i(x) = A_i \cos(\lambda_i x) + B_i \sin(\lambda_i x) \quad (3.10)$$

$$G_i(t) = \exp(-\alpha_i \lambda_i^2 t) \quad (3.11)$$

A_i et B_i sont des constantes d'intégration. $t \geq 0$, $-a_1 \leq x \leq 0$ pour la première couche ($i = 1$) et $0 \leq x \leq a_2$ pour la seconde ($i = 2$). Ainsi, nous avons résolu formellement notre problème. Il reste la détermination de toutes les constantes A_i , B_i et λ_i . Pour cela, nous devons utiliser toutes les conditions (3.3-7). Voir les détails dans [3]. Pour réduire le nombre de paramètres, il est utile d'utiliser immédiatement le groupe adimensionnel (sans dimension) défini par

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (3.12)$$

$$\kappa = \frac{k_2}{k_1} \quad (3.13)$$

$$\gamma = \frac{a_2}{a_1} \quad (3.14)$$

et les nombres de Biot

$$Biot_i = \frac{h_i a_1}{k_1} \quad (3.15)$$

Les solutions peuvent s'écrire finalement à des constantes pris B sous les formes

$$X_1(\xi) = B\{P_1(\beta)\cos(\beta\xi) + \sin(\beta\xi)\} \quad (3.16)$$

$$G_1(\tau) = \exp(-\beta^2 \tau) \quad (3.17)$$

$$X_2(\xi) = \frac{B}{\kappa\omega} \{-P_2(\beta)\cos(\omega\beta\xi) + \sin(\omega\beta\xi)\} \quad (3.18)$$

$$G_2(\tau) = \exp(-\beta^2\tau) \quad (3.19)$$

où $P_i(\beta)$ sont des fonctions dépendant de ce qu'on appelle valeurs propres notées β [4]

$$P_i(\beta) = \frac{(\kappa\omega)^{i-1}\beta + Biot_i \operatorname{tg}((\omega\gamma)^{i-1}\beta)}{Biot_i - (\kappa\omega)^{i-1}\beta \operatorname{tg}((\omega\gamma)^{i-1}\beta)} \quad (3.20)$$

ξ et τ sont les deux coordonnées spatiale et temporelle respectivement définies par

$$\xi = \frac{x}{a_1} \quad (3.21)$$

$$\tau = \frac{\alpha_1}{a_1^2} t \quad (3.22)$$

avec $\tau \geq 0$, $-1 \leq \xi \leq 0$ pour la première couche, et $0 \leq \xi \leq \gamma$ pour la seconde. Nous devons donc déterminer les constantes B et β . Pour B , cela peut être fait en utilisant les conditions initiales et la propriété d'orthogonalité [1] de X_i . Pour β , nous pouvons définir un problème propre décrit par l'équation suivante [3]

$$E(\beta) = P_1(\beta) + \frac{P_2(\beta)}{\kappa\omega} = 0 \quad (3.23)$$

Les valeurs non nulles de β vérifiant (3.23) sont appelées valeurs propres. Puisqu'il est mentionné dans [1] que les valeurs propres négatives et positives sont égales en valeurs absolues, nous limiterons notre calcul aux valeurs positives. Dans la figure 3.2, on trace par exemple, 20 premières racines de $E(\beta)$ pour $\omega = 0.5$, $\kappa = 1.5$, $\gamma = 1.5$, $Biot_1 = 1.5$, and $Biot_2 = 2.5$

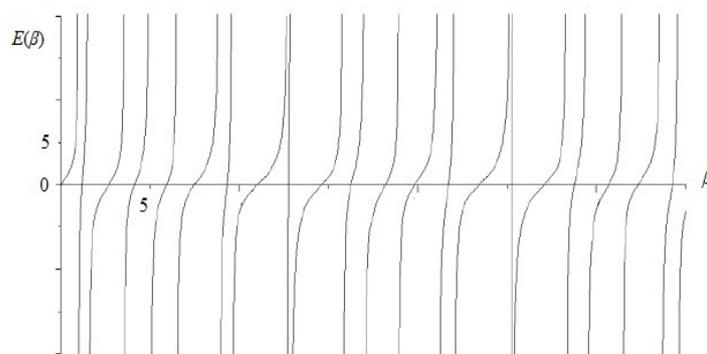


Figure 3.2 La fonction $E(\beta)$

Le tableau 3.1 illustre les racines obtenues en implémentant la méthode de Newton dans le programme Maple avec une tolérance de 10^{-5} , par conséquent, nous obtenons des racines équidistantes (figure 3.3). Par conséquent, nous ajouterons un deuxième indice positif n caractérisant la dépendance bêta $X_i(\xi) \rightarrow X_{i,n}(\xi)$ (et aussi pour G et B), et la solution sera une combinaison linéaire par rapport à n où on isole B de X

$$\theta_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \quad (3.24)$$

Maintenant, nous passons à la détermination des constantes B_n . Tout d'abord, on sait [1] que les fonctions $X_{i,n}(\xi)$ satisfont la relation d'orthogonalité suivante

$$\kappa \int_{-1}^0 X_{1,n}(\xi) X_{1,m}(\xi) d\xi + (\kappa\omega)^2 \int_0^Y X_{2,n}(\xi) X_{2,m}(\xi) d\xi = \delta_{nm} \varphi_n \quad (3.25)$$

or, on obtient la forme des constantes B

$$B_n = \frac{\kappa}{\varphi_n} \left\{ \int_{-1}^0 \theta_{01} X_{1,n}(\xi) d\xi + \kappa\omega^2 \int_0^Y \theta_{02} X_{2,n}(\xi) d\xi \right\} \quad (3.26)$$

n	β_n
1	1.174564997
2	2.670341640
3	4.100755655
4	5.902293511
5	7.463000332
6	9.311800164
7	10.99791545
8	12.76394020
9	14.59650467
10	16.25466773
11	18.18431142
12	19.80816753
13	21.72556781
14	23.42691725
15	25.23379476
16	27.07242465
17	28.75147230
18	30.68935659
19	32.32010618
20	34.24837236

Tableau 3.1 Les vingt premiers racines de la fonction $E(\beta)$

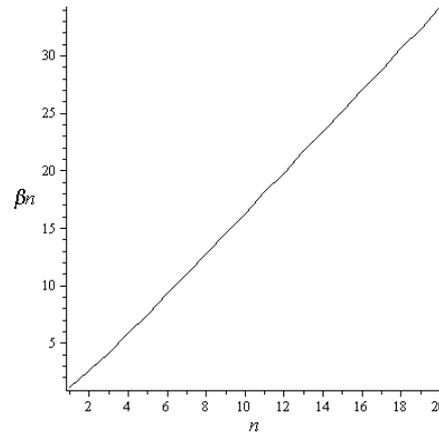


Figure 3.3 Le caractère linéaire des valeurs propres

3.4 Température adimensionnelle

Si on introduit les températures adimensionnelles

$$F = \frac{\theta_{02}}{\theta_{01}} \quad (3.27)$$

et

$$\Theta_i = \frac{\theta_i}{\theta_{01}} = \frac{T_{amb} - T_i}{T_{amb} - T_{0i}} \quad (3.28)$$

alors, nous obtenons explicitement les constantes adimensionnelles résultantes C telles que

$$C_n = \frac{B_n}{\theta_{01}} = \frac{\kappa}{\varphi_n \beta_n} \{ \cos(\beta_n) + P_1(\beta_n) \sin(\beta_n) - 1 + F(1 - \cos(\omega \gamma \beta_n) - P_2(\beta_n) \sin(\omega \gamma \beta_n)) \} \quad (3.29)$$

Enfin, en combinant les deux relations (3.28) et (3.29), on obtient la solution analytique comme

$$\Theta_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \quad (3.30)$$

La température d'équilibre instantané entre les deux couches est donnée par [5]

$$T_{eq} = \frac{\sqrt{k_1 \rho_1 c p_1} T_{01} + \sqrt{k_2 \rho_2 c p_2} T_{02}}{\sqrt{k_1 \rho_1 c p_1} + \sqrt{k_2 \rho_2 c p_2}} \quad (3.31)$$

où Cp_i et ρ_i ($i = 1,2$) sont respectivement la chaleur spécifique et la masse volumique de chaque matériau. Puisque la diffusivité thermique est liée à ces propriétés et k_i par

$$\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i \cdot Cp_i} \quad (3.32)$$

on obtient par simple calcul la température d'équilibre adimensionnelle

$$\begin{aligned} F_{eq} &= \frac{T_{amb} - T_{eq}}{T_{amb} - T_{01}} \\ &= \frac{\kappa\omega F + 1}{\kappa\omega + 1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Après un temps suffisant, toutes les températures tendent vers T_{amb} , et Θ_i tend vers 0. Nous pouvons regrouper les deux températures en une seule expression décrivant l'ensemble du matériau composé de deux couches

$$\Theta(\xi, \tau) = \begin{cases} \Theta_1(\xi, \tau) & \text{if } -1 \leq \xi \leq 0 \\ \Theta_2(\xi, \tau) & \text{if } 0 \leq \xi \leq \gamma \end{cases} \quad (3.34)$$

L'erreur est définie comme la différence relative à l'instant zéro entre la température calculée obtenue par (3.34) et nos conditions initiales (1 pour la première couche et F pour la seconde)

$$\epsilon(\xi) = \begin{cases} 1 - \Theta_1(\xi, 0) & \text{if } -1 \leq \xi \leq 0 \\ \frac{1}{F} (F - \Theta_2(\xi, 0)) & \text{if } 0 \leq \xi \leq \gamma \end{cases} \quad (3.35)$$

Notons que ϵ devient négligeable dès que l'on dépasse la 20ème racine, la raison pour laquelle, on s'arrête dans la somme (3.34) à l'ordre 20.

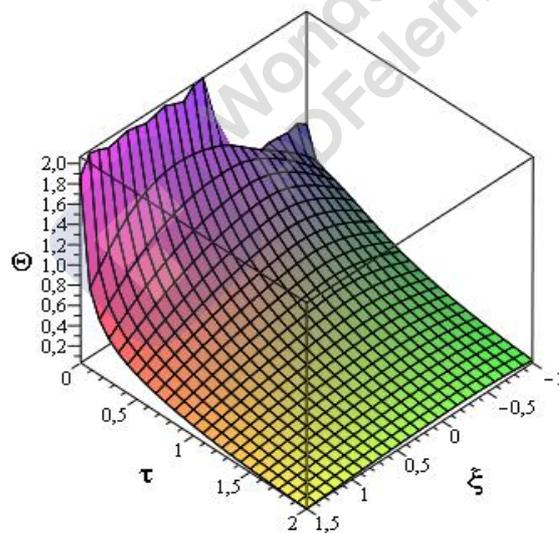
3.5 Résultats & discussions

En prenant l'exemple illustré par le tableau 3.1, et en mettant par exemple $T_{amb} = 300K$, $T_{01} = 400K$, $T_{02} = 500K$, on obtient d'après (3.28) $F = 2$ et $F_{eq} \approx 1.43$. La figure 3.4a montre une représentation 3D de Θ (équation (3.34)). L'équilibre thermique est le refroidissement des couches jusqu'à atteindre la température ambiante, après un temps adimensionnel $\tau = 2$. Si a_1 est à l'ordre de millimètre, alors le temps réel t sera de l'ordre de τ puisque en général α est dans l'ordre 10^{-6} . Sur la figure 3.4b, nous montrons l'évolution de la température par rapport la position adimensionnelle pour différents temps.

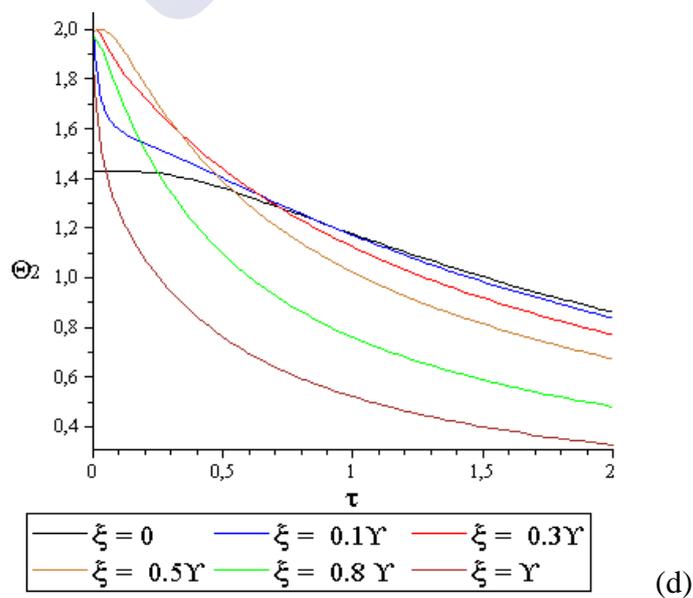
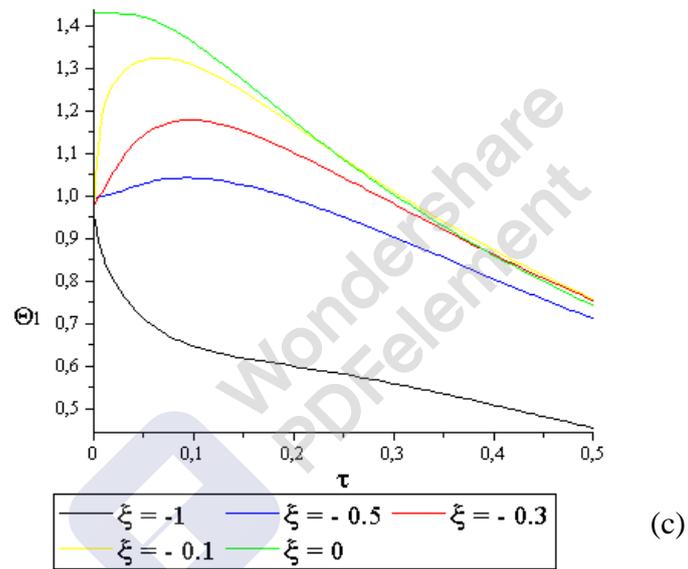
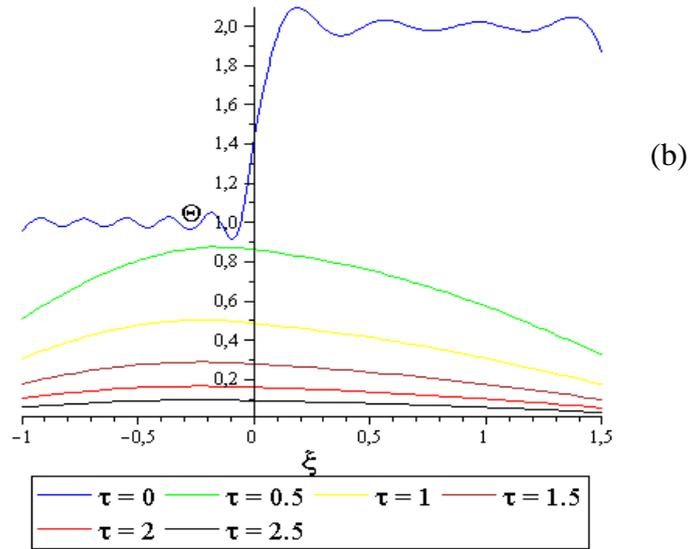
On observe l'équilibre instantané entre les deux couches autour du point (0,1.4) qui est en excellent accord avec F_{eq} . Sur les figures 3.4c et 3.4d, nous représentons le changement de température en termes de temps en des points sélectionnés dans les deux couches. Sur la figure 3.4c, on voit mieux l'équilibre instable et il est naturel de voir que dans la première couche, les températures augmentent avec de petites valeurs appelées sauts de température proportionnels à leurs distances de la surface de contact. Alors elles prennent des temps inversement proportionnels à ses distances pour atteindre l'équilibre thermique final.

Dans la deuxième couche, les températures ponctuelles convergeront vers l'équilibre à un rythme plus lent en raison de son épaisseur qui est supérieure à celle de la première couche. Nous soulignons également que l'équilibre instable est clairement visible sur la courbe du point $\xi = 0$ dans chacun des deux courbes (3.4c et 3.4d), et qu'il n'apparaît pas sur le point $\xi = -1$ car il est loin de la surface de contact.

Enfin, nous représentons sur la figure 3.4e l'erreur pour $T_{01} = T_{02} = 400K$. On peut le considérer comme inférieur à 0,5% d'où l'adéquation de 20 racines dans les sommes (3.30)



(a)



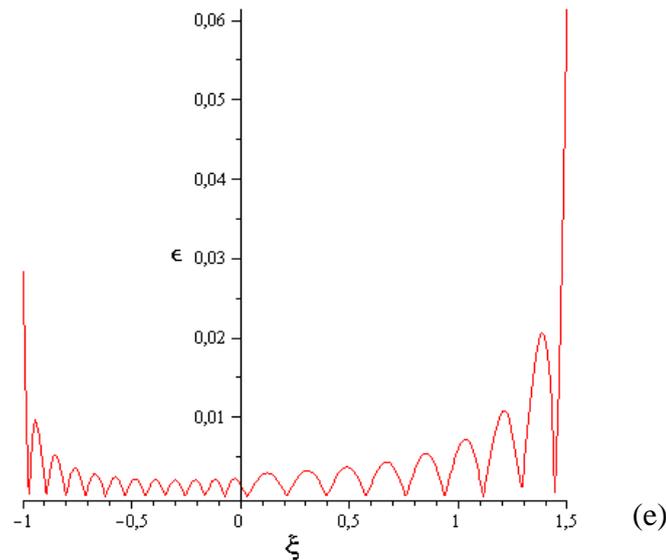


Figure 3.4 Etude de transfert de chaleur entre deux couches : (a) Représentation à 3 D, (b) Les températures en premiers moments, (c) Les températures des points sélectionnés dans la première couche, (d) Les températures des points sélectionnés dans la deuxième couche, (e) Représentation de l'erreur.

3.6 Programme Maple

```

> with(Student[CalculusI]), with(Student[NumericalAnalysis]), with(plots, implicitplot),
  with(linalg), with(RandomTools[MersenneTwister]), with(LinearAlgebra),
  with(Statistics) :

(1) The General Solution And Conditions
> X := (i, n, x) → sin(ωi-1·lambda(n)·x) + (-1)i-1 Π(i, n) · cos(ωi-1·lambda(n)·x)
# Ecriture des solutions
X := (i, n, x) → sin(ωi-1 λ(n) x) + (-1)i-1 Π(i, n) cos(ωi-1 λ(n) x) (1)

> Fi := Tam - T0i; # Les conditions initiales
Fi := Tam - T0i (2)

(3) Eigen Problem Of beta(n) ≡ z
> Π := (i, z) →  $\frac{(\kappa \cdot \omega)^{i-1} \cdot z + Biot[i] \cdot \tan((\omega \cdot Y)^{i-1} \cdot z)}{Biot[i] - (\kappa \cdot \omega)^{i-1} \cdot z \cdot \tan((\omega \cdot Y)^{i-1} \cdot z)}$ ;
Π := (i, z) →  $\frac{(\kappa \omega)^{i-1} z + Biot_i \tan((\omega Y)^{i-1} z)}{Biot_i - (\kappa \omega)^{i-1} z \tan((\omega Y)^{i-1} z)}$  (3)

```

> PI(1, z); PI(2, z)

$$\frac{z + Biot_1 \tan(z)}{Biot_1 - z \tan(z)}$$

$$\frac{\kappa \omega z + Biot_2 \tan(\omega Y z)}{Biot_2 - \kappa \omega z \tan(\omega Y z)} \quad (4)$$

> EqVp := (z) → Π(1, z) + $\frac{1}{\kappa \omega}$ · Π(2, z) # Problème de valeurs propres

$$EqVp := z \rightarrow \Pi(1, z) + \frac{\Pi(2, z)}{\kappa \omega} \quad (5)$$

> EqVp(1)

$$\frac{1 + Biot_1 \tan(1)}{Biot_1 - \tan(1)} + \frac{\kappa \omega + Biot_2 \tan(\omega Y)}{\kappa \omega (Biot_2 - \kappa \omega \tan(\omega Y))} \quad (6)$$

> kappa := 1.5; Y := 1.5; omega := 0.5; Biot[1] := 1.5; Biot[2] := 2.5

κ := 1.5

Y := 1.5

ω := 0.5

Biot₁ := 1.5

Biot₂ := 2.5

(7)

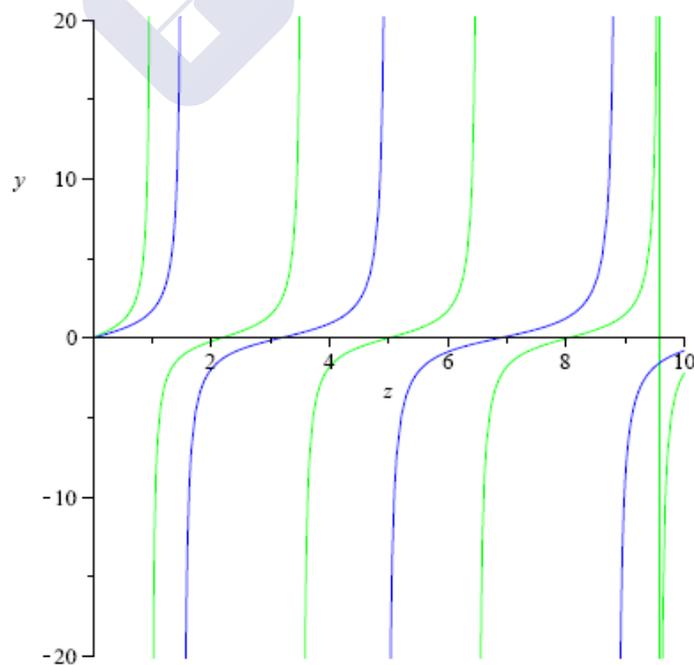
> ord := 2; N := 34

ord := 2

N := 34

(8)

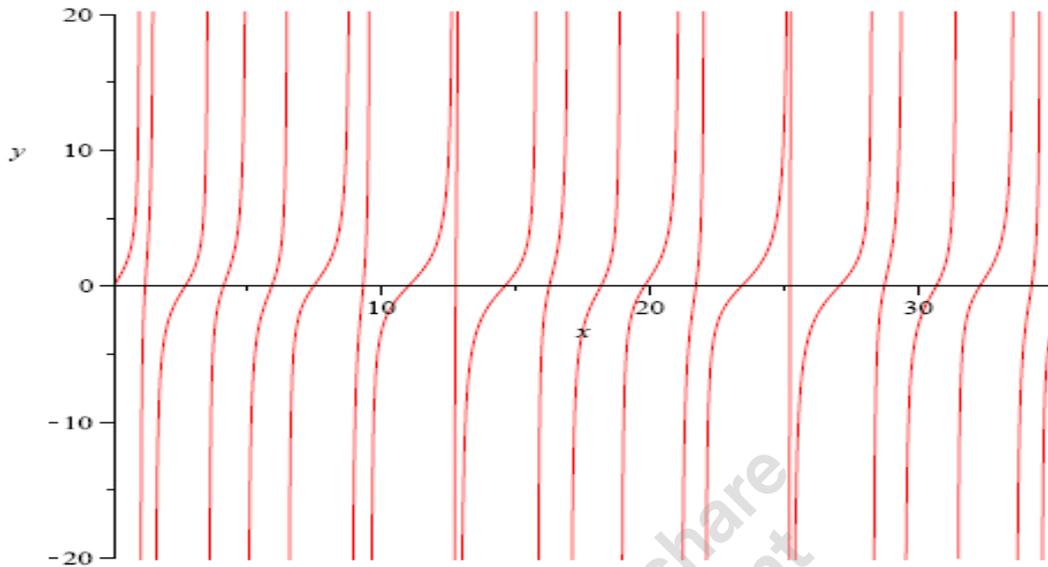
> plot([PI(1, z), PI(2, z)], z=0..10, y=-10..10 ord, color=[green, blue], discount=true)



```

> EqVp(x)
      1.0 x + 1.5 tan(1.0 x)
      ----- + -----
      1.5 - 1.0 x tan(1.0 x)   2.5 - 0.75 x tan(0.75 x)
      1.333333333 (0.75 x + 2.5 tan(0.75 x))
(9)
> plot(EqVp(x), x=0..N+1, y=-10 ord..10 ord, scont=true)# Figure 3.2

```



```

(4) Newton Raphson Resolution
> 60, 10 N;
Tolerance := 10-5; Ni := 10; Nf := 10N
      60, 340
      Tolerance := 1/100000
      Ni := 10
      Nf := 340
(10)
> Sol := {seq(Newton(EqVp(x), x = i/10, tolerance = Tolerance), i = Ni..Nf)}
      Sol := [
      1..331 Vectorcolumn
      Data Type: anything
      Storage: rectangular
      Order: Fortran_order
      ]
(11)
> for i from 1 to Nf - Ni do if Sol(i+1) - Sol(i) ≤ 0.1 then Sol(i+1) := Sol(i) end if end do
> Root := {op([seq(Sol(i), i = 1..Nf - Ni)])}# Table 3.1

```

```

Root := {1.174564997, 2.670341640, 4.100755655, 5.902293511, 7.463000332, 9.311800164,
10.99791545, 12.76394020, 14.59650467, 16.25466773, 18.18431142, 19.80816753,
21.72556781, 23.42691725, 25.23379476, 27.07242465, 28.75147230, 30.68935659,
32.32010618, 34.24837236}
(12)

```

```

> Nr := nops(Root)
      Nr := 20
(13)

```

```
> seq(EqVp(Root[i]), i = 1 ..Nr)
1.5 10-8, -1.6 10-9, 2. 10-9, 2. 10-9, -4. 10-10, -8. 10-9, 3.8 10-9, -0.00000104, -1.20 10-8,
7.0 10-8, -3.6 10-8, -8.3 10-9, -1.5 10-8, -4.2 10-9, -4.0 10-7, -1.6 10-9, -2.9 10-8, 8. 10-9,
2.02 10-8, -2. 10-9
```

(14)

```
> Matrix(2, Nr, [seq(Root[i], i = 1 ..Nr), seq(EqVp(Root[i]), i = 1 ..Nr)])
```

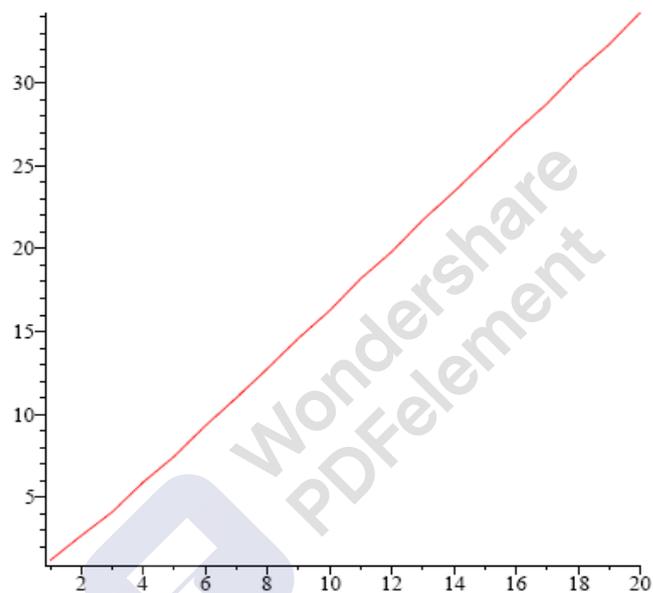
```

      2 x 20 Matrix
      Data Type: anything
      Storage: rectangular
      Order: Fortran_order

```

(15)

```
> plot((seq(i, i = 1 ..Nr))(seq(Root[i], i = 1 ..Nr)))# Figure 3.3
```



```
> for n from 1 to Nr do beta := (n) → Root[n]end do:
```

```
> beta(1)
```

```
1.174564997
```

(16)

(5) Dimensionless Constants

```
> Tamb := 300; T01 := 400; T02 := 500; F :=  $\frac{Tamb - T02}{Tamb - T01}$ 
```

```
Tamb := 300
```

```
T01 := 400
```

```
T02 := 500
```

```
F := 2
```

(17)

$$\begin{aligned}
 > c := (n) \rightarrow \frac{\text{kappa}}{2} \cdot (1 + \text{PI}(1, n)^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{\text{beta}(n)^2}{\text{Biot}[1]} + \text{Biot}[1]} \right) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \text{PI}(2, n)^2) \cdot \left(Y \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\frac{\omega^2 \cdot \text{beta}(n)^2 \cdot \text{kappa}}{\text{Biot}[2]} + \frac{\text{Biot}[2]}{\text{kappa}}} \right)
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 > \Pi := (i, n) \rightarrow \frac{(\text{kappa} \cdot \omega)^{i-1} \cdot \text{beta}(n) + \text{Biot}[i] \cdot \tan((\omega \cdot Y)^{i-1} \cdot \text{beta}(n))}{\text{Biot}[i] - (\text{kappa} \cdot \omega)^{i-1} \cdot \text{beta}(n) \cdot \tan((\omega \cdot Y)^{i-1} \cdot \text{beta}(n))} \\
 \Pi := (i, n) \rightarrow \frac{(\kappa \omega)^{i-1} \beta(n) + \text{Biot}_i \tan((\omega Y)^{i-1} \beta(n))}{\text{Biot}_i - (\kappa \omega)^{i-1} \beta(n) \tan((\omega Y)^{i-1} \beta(n))}
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 > C := (n) \rightarrow \frac{\text{kappa}}{\text{beta}(n) \cdot c(n)} \cdot (\cos(\text{beta}(n)) + \text{PI}(1, n) \cdot \sin(\text{beta}(n)) - 1 + F \cdot (1 - \cos(\omega \cdot Y \cdot \text{beta}(n))) - \text{PI}(2, n) \cdot \sin(\omega \cdot Y \cdot \text{beta}(n))) \\
 C := n \rightarrow \frac{1}{\beta(n) c(n)} (\kappa (\cos(\beta(n)) + \Pi(1, n) \sin(\beta(n)) - 1 + F(1 - \cos(\omega Y \beta(n)) - \Pi(2, n) \sin(\omega Y \beta(n))))
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 > C(1); C(2); \text{beta}(1); \text{beta}(2) \\
 &\quad -0.4017615755 \\
 &\quad 0.5001806372 \\
 &\quad 1.174564997 \\
 &\quad 2.670341640
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 > X := (i, n, \xi) \rightarrow \frac{1}{(\omega \cdot \text{kappa})^{i-1}} \left(\sin(\omega^{i-1} \cdot \xi \cdot \text{beta}(n)) + (-1)^{i-1} \Pi(i, n) \cdot \cos(\omega^{i-1} \cdot \text{beta}(n) \cdot \xi) \right) \\
 X := (i, n, \xi) \rightarrow \frac{\sin(\omega^{i-1} \xi \beta(n)) + (-1)^{i-1} \Pi(i, n) \cos(\omega^{i-1} \xi \beta(n))}{(\kappa \omega)^{i-1}}
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 > X(2, 1, \text{xi}) \\
 &\quad 1.333333333 \sin(0.5872824985 \xi) - 3.640377118 \cos(0.5872824985 \xi)
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 > XX := (i, \xi) \rightarrow \frac{1}{(\Omega \cdot \text{Kappa})^{i-1}} \left(\sin(\Omega^{i-1} \cdot \xi \cdot \text{Beta}) + (-1)^{i-1} \Pi(i) \cdot \cos(\Omega^{i-1} \cdot \xi \cdot \text{Beta}) \right) \\
 XX := (i, \xi) \rightarrow \frac{\sin(\Omega^{i-1} \xi B) + (-1)^{i-1} \Pi(i) \cos(\Omega^{i-1} \xi B)}{(\Omega K)^{i-1}}
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 > XX(1, \text{xi}) \\
 &\quad \sin(\xi B) + \Pi(1) \cos(\xi B)
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 > CC := (n) \rightarrow \frac{\text{Kappa}}{\text{phi}} (\text{int}(F11 \cdot XX(1, \text{xi}), \text{xi} = -1 .. 0) + \text{Kappa} \cdot \Omega^2 \cdot \text{int}(F22 \cdot XX(2, \text{xi}), \text{xi} = 0 .. Y))
 \end{aligned}$$

$$CC := n \rightarrow \frac{K \left(\int_{-1}^0 F11 XX(1, \xi) d\xi + K \Omega^2 \left(\int_0^Y F22 XX(2, \xi) d\xi \right) \right)}{\phi} \quad (26)$$

```
> factor(CC(n))
1
-----
phi B (K (F11 cos(B) + F11 III(1) sin(B) - 1. F11 + 1. F22
- 1. F22 cos(1.500000000 Omega B) - 1. F22 III(2) sin(1.500000000 Omega B)))
```

```
> X(1, 1, xi); PI(1, 1)
1.000000000 sin(1.174564997 xi) - 3.640377103 cos(1.174564997 xi)
- 3.640377103
```

```
> Theta := (i, xi, tau) -> add(C(n) * X(i, n, xi) * exp(-beta(n)^2 * tau), n = 1 .. Nr)
Theta := (i, xi, tau) -> add(C(n) X(i, n, xi) e^{-beta(n)^2 tau}, n = 1 .. Nr)
```

```
> Theta(1, -1, 0); Theta(2, Y, 0); Theta(1, 0, 0); Theta(2, 0, 0)
0.9534351078
1.862891033
1.436657921
1.436657932
```

(6) Equilibrium Temperature Teq Between The Two Slabs

```
> Ce := (kappa.omega)
Ce := 0.75
```

```
> Teq := evalf((Ce * T02 + T01) / (Ce + 1)) # Température d'équilibre
Teq := 442.8571429
```

```
> TEQ := (Tamb - Teq) / (Tamb - T01)
TEQ := 1.428571429
```

(7) Normalized Results Theta ≡ (Tamb - T)/(Tamb - T01)

(a) Theta(1, xi, tau), and Theta(2, xi, tau) # Résultats

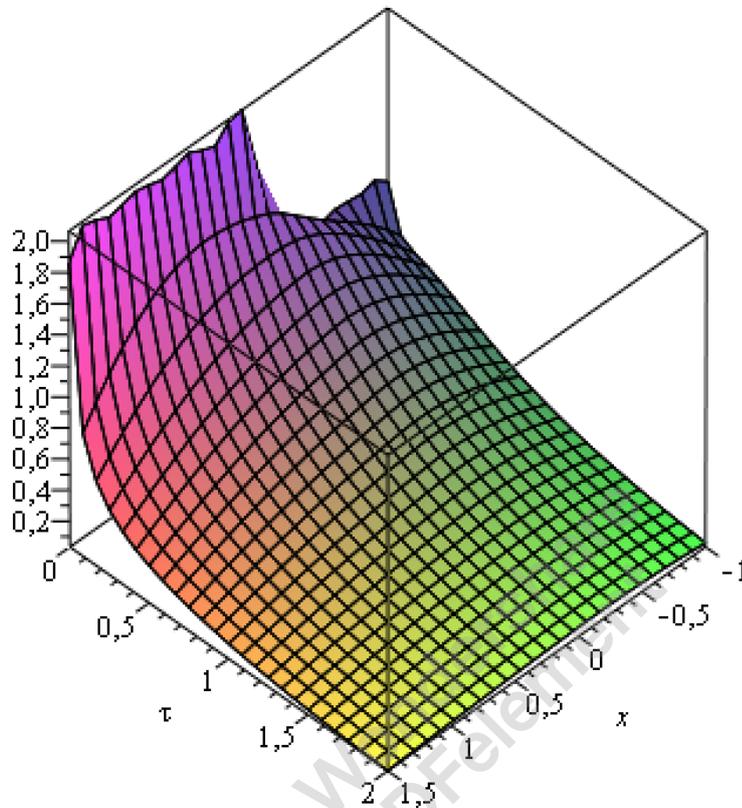
```
> T := (xi, tau) -> piecewise(xi <= 0, Theta(1, xi, tau), xi >= 0, Theta(2, xi, tau))
T := (xi, tau) -> piecewise(xi <= 0, Theta(1, xi, tau), 0 <= xi <= Y, Theta(2, xi, tau))
```

```
> Theta(1, x, tau) : Theta(2, x, tau) : Theta(1, -1, 0); T(-1, 0);
Theta(2, 2, 0); T(2, 0)
0.9534351078
0.9534351078
-0.2407593204
-0.2407593204
```

```
> tau_i := 0; tau_f := 10
tau_i := 0
tau_f := 10
```

```
> a := 5;
```

```
plot3d( T(x, tau), x=-1..Y, tau =  $\frac{\text{taui}}$  ..  $\frac{\text{tauf}}$ , axes = boxed );
a := 5
```



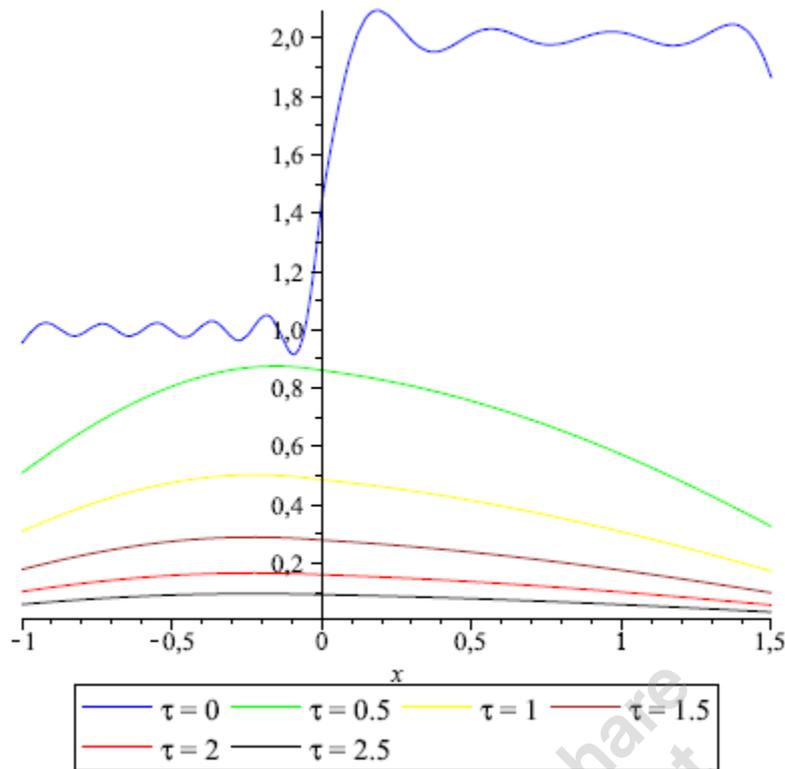
(b) Theta(1,xi), Theta(1,tau), Theta(2,xi), Theta(2,tau)

```
> Col := Vector[row]([ blue, red, green, black, yellow, orange, brown ])
Col := [ blue red green black yellow orange brown ] (37)
```

```
> Line := Vector[row]([ Solid, Dot, Dash, DashDot, LongDash, SpaceDot, SpaceDash ])
Line := [ Solid Dot Dash DashDot LongDash SpaceDot SpaceDash ] (38)
```

```
> a := 5;
a := 5 (39)
```

```
> plot( [ seq( T( x,  $\frac{\text{tau}}$  ), tau = taui ..tauf, 2 ) ], x=-1..Y, color = [ seq( Col( tau mod 7 + 1 ), tau
= taui ..tauf, 2 ) ], linestyle = [ seq( Line(1), tau = taui ..tauf ) ], legend = [ "τ = 0", "τ = 0.5",
"τ = 1", "τ = 1.5", "τ = 2", "τ = 2.5" ]; seq( Col( tau mod 7 + 1 ), tau = taui ..tauf, 2 );
```



blue, green, yellow, brown, red, black

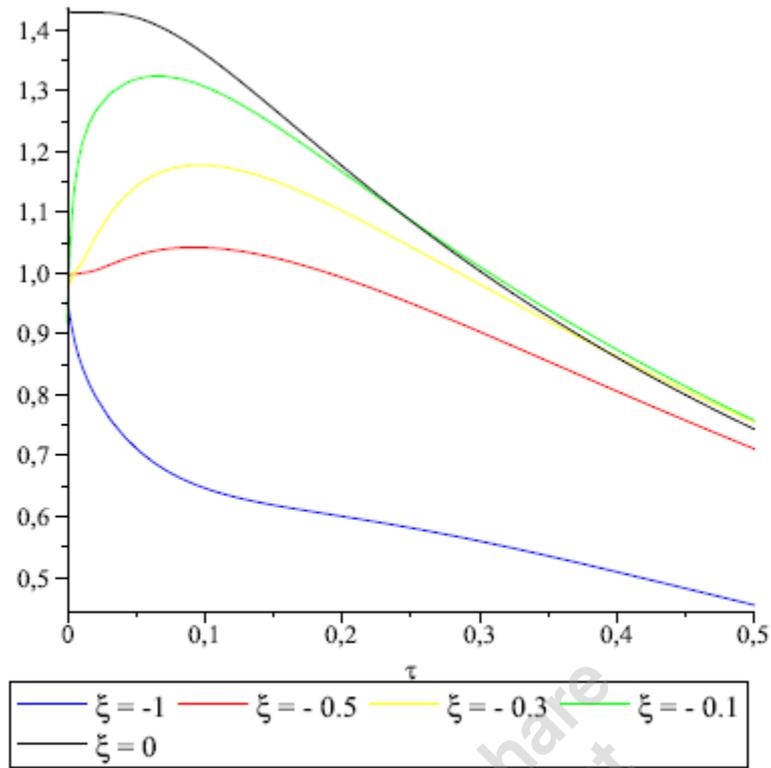
(40)

```

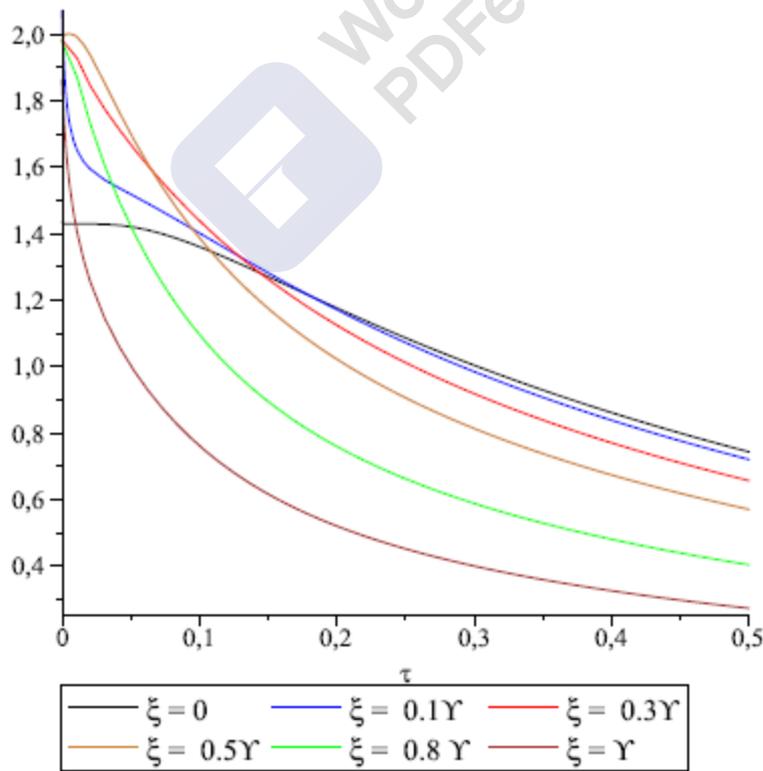
> x := < -1, -0.5, -0.3, -0.1, 0, 0.1 Y, 0.3 Y, 0.5 Y, 0.8 Y, Y > :
> a := 5;
plot([seq(Theta(1, x(x), tau), x = 1 .. 5)], tau =  $\frac{\text{taui}}{a}$  ..  $\frac{\text{tauf}}{4 a}$ , color = [blue, red, yellow,
green, black], linestyle = [seq(Line(1), x = 1 .. 5)], legend = ["xi = -1", "xi = - 0.5",
"xi = - 0.3", "xi = - 0.1", "xi = 0"]); [blue, red, yellow, green, black]; seq(x(i), i = 1 .. 5);
plot([seq(Theta(2, x(x), tau), x = 5 .. 10)], tau =  $\frac{\text{taui}}{a}$  ..  $\frac{\text{tauf}}{4 a}$ , color = [black, blue, red, gold,
green, brown], linestyle = [seq(Line(1), x = 1 .. 5)], legend = ["xi = 0", "xi = 0.1Y",
"xi = 0.3Y", "xi = 0.5Y", "xi = 0.8 Y", "xi = Y"]); [black, blue, red, yellow, green, brown];
seq(x(i), i = 5 .. 10)

```

$a := 5$



[blue, red, yellow, green, black]
-1, -0.5, -0.3, -0.1, 0



[black, blue, red, yellow, green, brown]
0, 0.15, 0.45, 0.75, 1.20, 1.5

(41)

(8) The Error if F = 1

```
> F := 1
```

 $F := 1$

(42)

```
> C := (n) →  $\frac{\text{kappa}}{\text{beta}(n) \cdot c(n)} \cdot (\cos(\text{beta}(n)) + \text{PI}(1, n) \cdot \sin(\text{beta}(n)) - 1 + F \cdot (1 - \cos(\omega \cdot Y \cdot \text{beta}(n)) - \text{PI}(2, n) \cdot \sin(\omega \cdot Y \cdot \text{beta}(n))))$ ;
```

```
X := (i, n, xi) →  $\frac{1}{(\omega \cdot \text{kappa})^{i-1}} \left( \sin(\omega^{i-1} \cdot \xi \cdot \text{beta}(n)) + (-1)^{i-1} \text{PI}(i, n) \cdot \cos(\omega^{i-1} \cdot \xi \cdot \text{beta}(n)) \right)$ ;
```

```
Theta := (i, xi, tau) → add(C(n) · X(i, n, xi) · exp(-beta(n)2 · tau), n = 1 .. Nr);
```

```
C := n →  $\frac{1}{\text{beta}(n) \cdot c(n)} \left( \kappa (\cos(\beta(n)) + \text{PI}(1, n) \sin(\beta(n)) - 1 + F (1 - \cos(\omega Y \beta(n)) - \text{PI}(2, n) \sin(\omega Y \beta(n)))) \right)$ 
```

```
X := (i, n, xi) →  $\frac{\sin(\omega^{i-1} \xi \beta(n)) + (-1)^{i-1} \text{PI}(i, n) \cos(\omega^{i-1} \xi \beta(n))}{(\kappa \omega)^{i-1}}$ 
```

```
Theta := (i, xi, tau) → add(C(n) X(i, n, xi) e-beta(n)2 tau, n = 1 .. Nr)
```

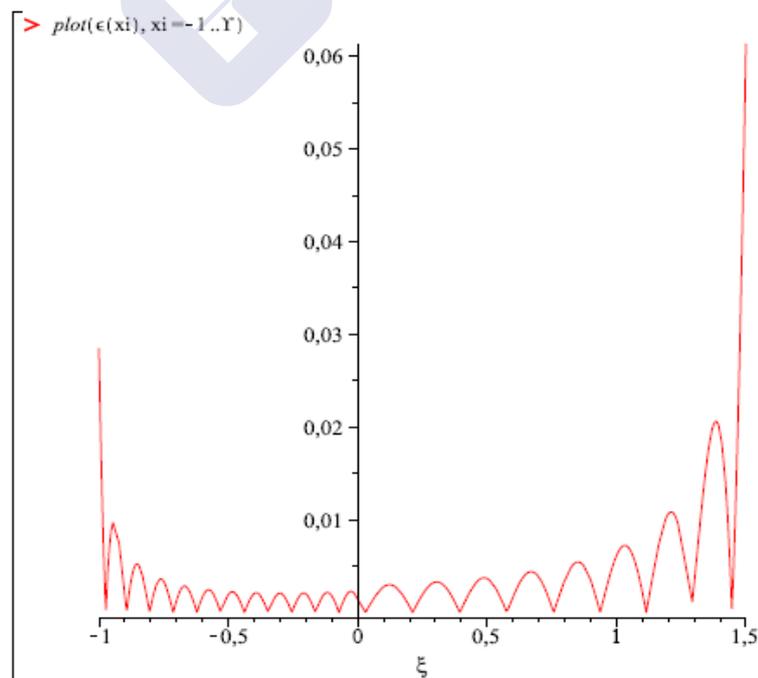
(43)

```
> epsilon := (xi) → piecewise(xi ≤ 0, abs(1 - Theta(1, xi, 0)), xi ≥ 0, abs(1 -  $\frac{1}{F}$  Theta(2, xi, 0)))
```

```
epsilon := xi → piecewise(xi ≤ 0, |1 - Theta(1, xi, 0)|, 0 ≤ xi,  $\left| 1 - \frac{\Theta(2, \xi, 0)}{F} \right|$ )
```

(44)

```
> plot(epsilon(xi), xi = -1 .. Y)
```



Nomenclature

i	L'index de couche ($i = 1,2$)
T_i	Température de la couche i (K)
T_{amb}	Température ambiante (K)
T_{0i}	Température initiale de la couche i (K)
θ_{0i}	Différence initiale de température (K)
θ_i	Différence de température (K)
a_i	Épaisseur de la couche i (m)
k_i	Conductivité ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
α_i	Diffusivité ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
Cp_i	Chaleur spécifique ($\text{J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
ρ_i	Masse volumique (Kg.m^{-3})
h_i	Coefficient de convection ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$)
$\omega = \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}$	Diffusivité adimensionnelle
$\kappa = k_2/k_1$	Conductivité adimensionnelle
$\gamma = a_2/a_1$	Épaisseur adimensionnel
$Biot_i = h_i a_1/k_1$	Nombres de Biot
β	Valeur propre adimensionnelle
$\tau = \alpha_1 t/a_1^2$	Temps adimensionnel
$\xi = x/a_1$	Position adimensionnelle
F	Température initiale adimensionnelle
Θ_i	Température adimensionnelle

Références

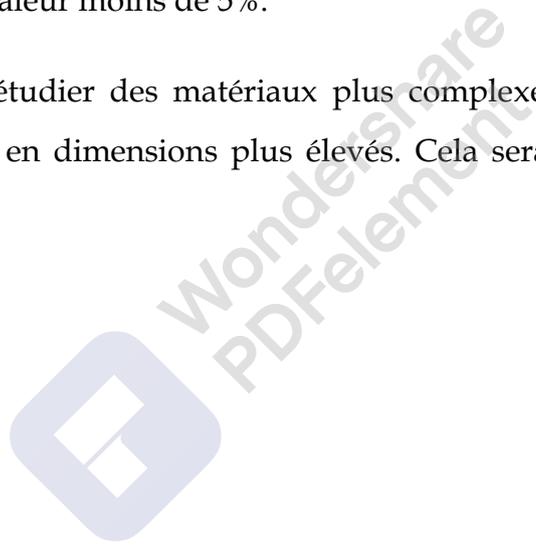
- [1] F. De Monte, Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A ‘natural’ analytic approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000.
- [2] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.
- [3] Toufik Sahabi, Smain Balaska. Analytical one-dimensionless study of unsteady heat transfer in bilayer, and three-layer materials. 2020. (hal-02966165).
- [4] F. De Monte, [An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media](#), *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1333-1343, 2002.
- [5] H. Belghazi, Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2008.

Conclusion

On a vu dans ce travail que le transfert de chaleur par conduction à travers d'un matériau composé de deux couches se fait en deux régimes : transitoire qui est l'équilibre instantané traduisant par des sauts des températures des différents points dans la couche froide, un régime stationnaire qui se traduit par l'équilibre thermique des deux couches en tous points.

On signale aussi que la résolution de l'équation aux valeurs propres par la méthode de Newton nous permis de calculer tous les valeurs propres appartenant dans les solutions finale, et d'autre part, 20 racines étaient largement suffisant pour diminuer l'erreur au valeur moins de 5%.

On propose d'étudier des matériaux plus complexe de sens de nombre de couches et également en dimensions plus élevés. Cela sera peut-être un titre d'un future travail.



ملخص

في هذه المذكرة تمت دراسة انتقال الحرارة بالتوصيل بين طبقتين من المادة بطريقة تحليلية و هي طريقة فصل المتغيرات التي سمحت لنا بحل معادلة الانتشار أحادية البعد بطريقة نيوتن و بمساعدة برنامج مابل. لقد وجدنا أن الحل لكل طبقة تتكون من دالتين: أسية زمانية وجيبية مكانية كل منهما مرتبطان بما يسمى القيم الذاتية. ورأينا كذلك أن هناك توازنًا أفوريًا في شكل قفزات لدرجة الحرارة في الطبقة الباردة ثم يتطور النظام الكامل إلى التوازن الحراري النهائي و هو درجة حرارة المحيط.

Résumé

Le transfert de chaleur par conduction entre deux couches de matériau a été étudié dans ce mémoire par une méthode analytique qui est la méthode de séparation de variables qui nous a permis de résoudre l'équation de diffusion à une dimension moyennant la résolution de ce qu'on appelle équation de valeurs propres par la méthode de Newton incrémentée dans Maple. On a trouvé que les solutions pour chaque couche présentent des termes : temporelle exponentielle et spatial sinusoïdale. Ainsi, on a vu qu'il existe un équilibre instantané sous formes des sauts de températures de la couche froide puis le système a évolué à l'équilibre thermique final qui est la température ambiante.

Abstract

The heat transfer by conduction between two layers of material has been studied in this thesis by an analytical method, which is the method of separation of variables, which allowed us to solve the one-dimensional diffusion equation by solving the Eigen problem. We used Maple program to calculate the Eigen values by Newton method. It has been found that the solutions for each layer have two terms: exponential temporal and sinusoidal spatial. In addition, we have seen that there is an unsteady equilibrium in the form of temperature jumps in the cold layer and then the whole system has evolved to the final thermal equilibrium, which is ambient temperature.