

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : **PHYSIQUE**

Option : **Physique Computationnelle**

Par

DERGHAL SOUMIA

Sur le thème

Etude des sauts & chutes de températures dans un matériau bicouche lors de l'équilibre thermique instantané

Soutenu le : 01/07/2021 devant le jury composé de :

Pr. Amara Kada	Pr	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Président
Dr. Sahabi Toufik	MCB	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Encadreur
Pr. Abada Ahmed	MCA	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Examineur

Année Universitaire 2020 - 2021

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Remerciements	
Dédicaces	
INTRODUCTION GENERALE.....	1
Références.....	3
Chapitre I : Equation de chaleur	
I.1 Introduction.....	4
I.2 Rappel sur les équations différentielles partielles	4
I.3 Définition	4
I.4 Applications	5
I.5 Formulations des équations de la Chaleur.....	5
I.5.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes.....	5
I.5.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques.....	6
I.5.3 Equation de la chaleur en coordonnées sphériques.....	6
I.6 Différentes formes de l'équation de la chaleur.....	6
I.6.1 Cas d'un milieu sans sources internes.....	6
I.6.2 Cas d'un milieu avec sources internes, en régime permanent.....	7
I.6.3 Cas d'un milieu sans sources internes, en régime variable.....	7
I.7 Différentes méthodes de résolution de l'équation de chaleur.....	7
I.7.1 Solutions Analytiques.....	7
a. Méthode utilisant les séries de Fourier.....	8
b. Méthode de transformation.....	8
c. Méthode du Modèle Compact.....	8
d. Méthode de séparation des variables	8

I.7.2 Solutions numériques.....	9
a. Méthodes des différences finies.....	9
b. Méthodes des éléments finis.....	9
c. Eléments de frontières.....	9
d. Méthodes dynamique des fluides.....	10
I.7.3 Solutions électrothermiques.....	10
a. Méthode directe (Fully Coupled Method).....	10
b. Méthode de relaxation.....	10
I.6.4 Méthodes de mesures de température pratiques.....	11
Références.....	12

Chapitre II : Etude de transfert de chaleur

II.1 Introduction	14
II.2 Modes de transfert de chaleur.....	14
II.2.1 La conduction.....	14
II.2.2 Rayonnement.....	15
II.2.3 Convection.....	16
a) La convection naturelle ou libre.....	16
b) La convection forcée.....	17
II.3 Propriétés thermo-physiques des matériaux.....	17
II.3.1 Définition.....	17
II.3.2 Interprétation physique.....	18
II.4 Certaines propriétés.....	18
II.4.1 Capacité thermique (C).....	18
II.4.2 Conductivité thermique (k).....	19

II.4.3 Diffusivité thermique (α).....	19
II.4.4 Effusivité thermique(b).....	19
II.4.5 Propriété radiative: l'émissivité(ϵ).....	20
Références.....	21

Chapitre III : Etude de l'équilibre instantané entre deux couches dans un matériau

III.1 Introduction.....	23
III.2 Equation de chaleur à une dimension pour un matériau bicouche.....	23
III.3 Résolution analytique par la méthode de séparation de variables.....	24
III.4 Calcul adimensionnelle.....	27
III.5 Résultats & discussions.....	28
III.6 Programme Maple.....	31
Références.....	44
CONCLUSION.....	46
ملخص.....	47
Résumé.....	47
Abstract.....	47

Liste des figures

Chapitre II

Figure II.1 : Les trois types de Transfer de chaleur.....	15
Figure II.2 : Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par conduction thermique.....	15
Figure II.3 : Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par Rayonnement.....	16
Figure II.4 : Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par convection.....	17

Chapitre III

Figure 3.1 Représentation d'un matériau bicouche.....	24
Fig. 3.2 <i>La fonction $E(\beta)$</i>	26
Figure 3.3 <i>Le transfert de chaleur dans un matériau bicouche</i>	28
Figure 3.4 <i>Le comportement de température dans la première couche</i>	29
Figure 3.5 <i>Le comportement de température dans la deuxième couche</i>	30

Liste des Tableaux

Chapitre III

Table 3.1 <i>Les racines de la fonction $E(\beta)$</i>	26
Table 3.2 <i>Etude des sauts et des chutes (S/C) des températures des deux couches lors de l'équilibre instantané</i>	30

Remerciements

Avant tout je remercie Allah le tout puissant, de m'avoir guidées toutes ces années d'études et nous avoir données la volonté, la patience et le courage pour terminer notre travail.

Nous voudrions tout d'abord exprimer notre profonde reconnaissance à monsieur « sahabi toufik » notre encadreur, qui diriger notre travail ; ses conseils et ses commentaires précieux nous ont permis de surmonter nos difficultés et de se progresser dans notre mémoire de fin d'étude.

En suite nous tenons à remercier les membres du jury Pr. Amara Kada , Pr. Abada Ahmed Qui nous ont fait l'honneur d'accepter de lire ce mémoire et de l'évaluer.

Nous adressons aussi nos vifs remerciements à tous nos enseignants (es).

Merci pour tous les gens qui ont contribué de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

A nos collègues de la promotion de master : protection

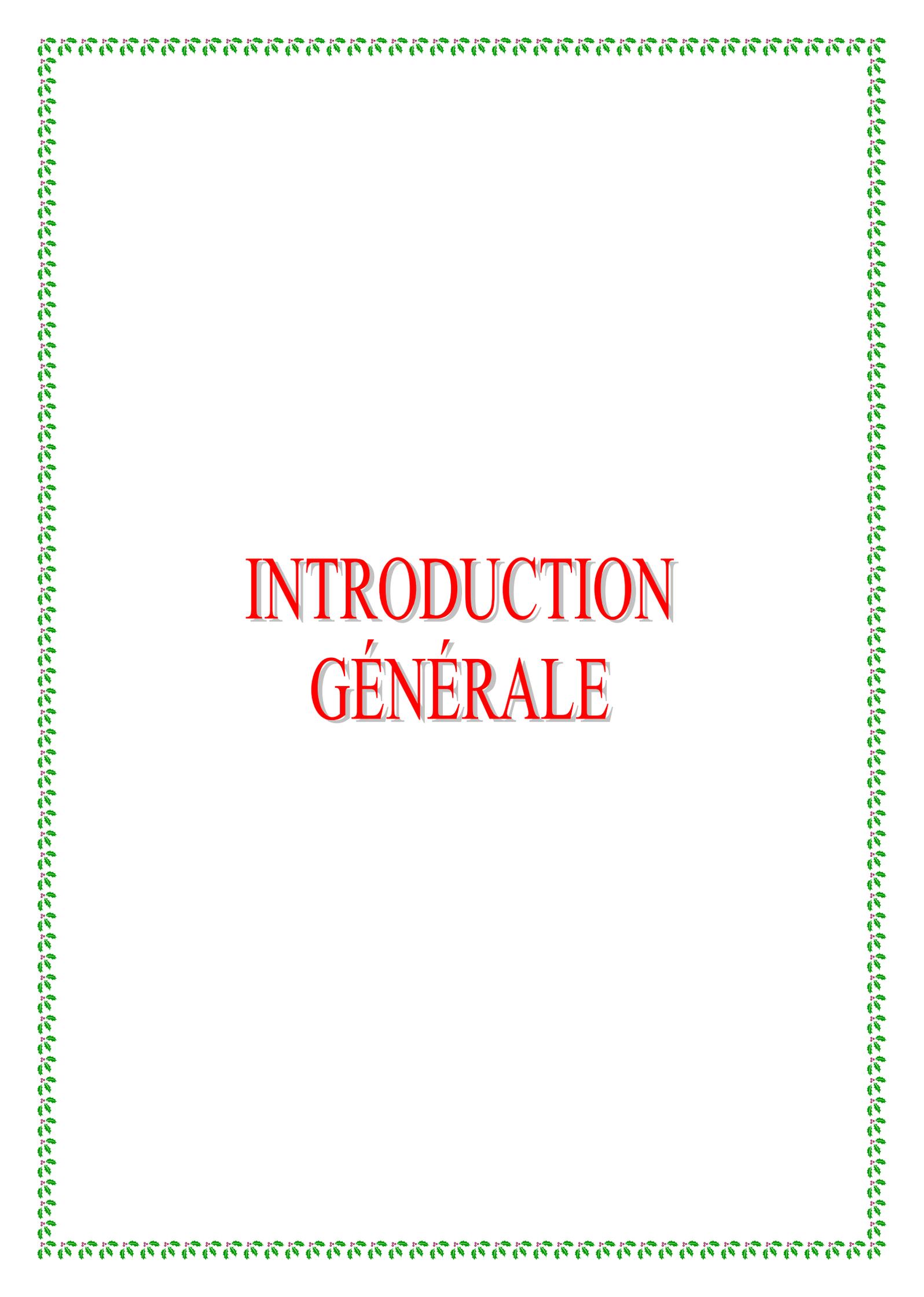
Derghal Soumia

Dédicace

*Je remercie Allah, le tout puissant, le
miséricordieux, de m'avoir appris ce que
j'ignorais, de avoir donné la santé et tout ce
dont j'avais besoin pour réaliser le travail
imposé et rédiger ce mémoire.*

*A l'âme pure de ma mère, que Allah lui fasse miséricorde
A l'âme pure de mon père, que Allah lui fasse miséricorde
Je dédie mon diplôme à celui qui a bu la coupe vide
pour me donner une goutte d'amour, à celui qui a récolté des
épines sur mon chemin, pour ouvrir le chemin de la
connaissance pour moi, mon cher époux : Taibi Moustapha*

*A mes chers frères, Mohamed, Abdelkader, Taifour
A mes chères sœurs fatima, Omelkhir, Amina, khadidja,
Zohra pour leurs encouragements permanents,
A mes amis (Sitti, khaira , zahra)
A toute la famille DERGHAL pour leurs soutiens tout au
long de mon parcours d'études,
A toute la famille TAIBI, en particulier mon cher frère
Oussama
Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui
étaient toujours à mes côtés,
Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant
allégués, et le fruit de votre soutien infaillible, Merci d'être
toujours là pour moi.*



INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction Général

Le thermique est le domaine de la physique qui traite des échanges thermiques (transferts de quantité de chaleur) dans un système ou entre systèmes, qui entraînent ou non une transformation du matériau, et par ses applications, s'intéresse à la génération de l'énergie thermique (chauffage ou refroidissement), son stockage et sa transmission. Dans toutes les mesures thermiques, la mesure de la température (T) est une mesure de base [1].

Par définition, un transfert de chaleur ou transfert thermique entre deux corps est une interaction énergétique qui résulte d'une différence de température entre les deux corps. Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies[2]. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et des composantes électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs des procédés industriels, etc.

De point de vue mathématique, le transfert de chaleur par conduction se décrit par une équation aux dérivées partielles parabolique connue sous le nom : Equation de chaleur ou équation de diffusion[3]. Introduite initialement en 1807 par J. Fourier après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier.

Le concept de la science des matériaux est né de la nécessité d'acquérir la maîtrise du comportement des matériaux par la connaissance des lois fondamentales qui déterminent leurs propriétés. La science des matériaux a pour objectif d'établir les relations existantes entre la composition et l'organisation atomique ou moléculaire, la microstructure et les propriétés macroscopiques des matériaux (thermiques, électriques, magnétiques,...etc.). Cette science est complétée par le génie des matériaux qui s'occupe des procédés de fabrication, de transformation et de mise en forme [4].

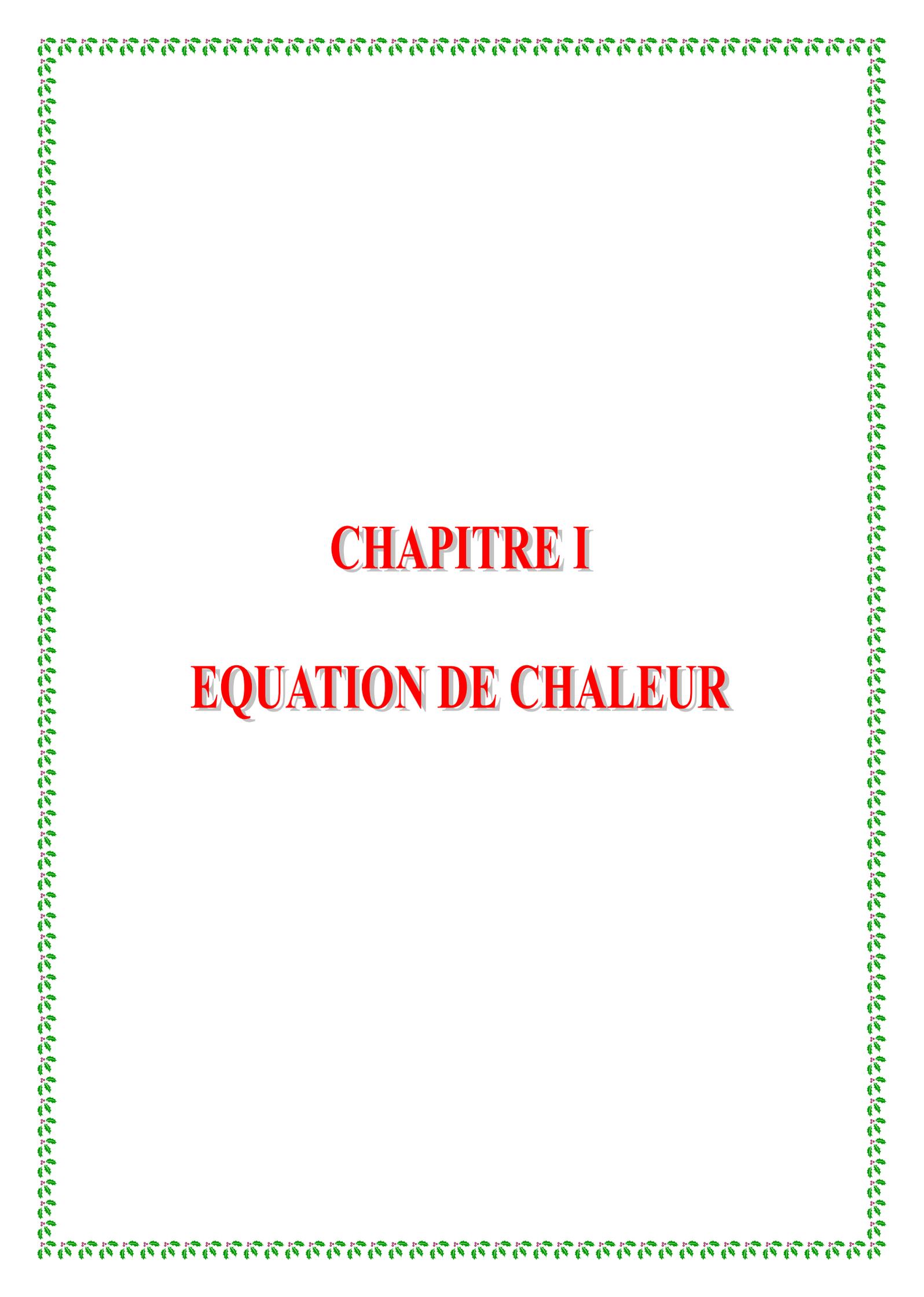
L'objectif du présent travail est d'étudier, d'après la résolution analytique de l'équation de chaleur, le transfert de chaleur dans un matériau bicouche de caractéristiques quelconques, en particulier l'équilibre thermique instantané lors des premiers moments de contact. Pour cela, on va donner une brève description des équations de chaleur dans le premier chapitre, puis le deuxième chapitre sera un rappel rapide au sujet de la notion de chaleur et ses modes de transfert où on parle des propriétés thermo-physiques des matériaux, ainsi que le

INTRODUCTION GÉNÉRAL

programme de calcul Maple. Le troisième chapitre décrit en détail comment la chaleur se transforme entre les deux couches en contact au cours de temps et en fonction des positions sélectionnées à une dimension. Cela se fait d'après la résolution de l'équation de chaleur unidimensionnelle et à l'aide du programme Maple, on a fait des calculs et dessiner les graphes de températures adimensionnelles [5]

Références

- [1] Bouazza Mimoune, Discrétisation explicite de l'équation de chaleur pour une plaque carrée, Mémoire master, 2019/2020. Université de saïda.
- [2] Achouri Ismail et Benkhaled Redouane, Equations différentielles ordinaires et applications, Mémoire de licence (L.M.D), session 2012-2013.
- [3] [H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.
- [4] May, Abdelghani, Cours de Science Des Matériaux, Laboratoire Génie des matériaux/EMP 2017.
- [5] H. Belghazi, Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2008.



CHAPITRE I

EQUATION DE CHALEUR

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

I.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va traiter brièvement le sujet des équations de chaleur. Après un rappel sur les équations différentielles et leurs types, on va donner la définition de l'équation de chaleur, puis, on va citer les applications de ces équations. Puis leurs formulations en coordonnées cartésiennes, en coordonnées cylindriques, et en coordonnées sphériques sera exposée. Puis on va brièvement passer aux formes les plus connues, et finalement, on expliquera les méthodes de résolution de l'équation de chaleur.

I.2 Rappel sur les équations différentielles partielles

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles. D'une manière générale, la modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution d'équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP. Ces équations correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique

- ✓ Mécanique des fluides : équations de Navier-Stokes
- ✓ Electromagnétisme : équations de Maxwell
- ✓ Thermique : équation de la chaleur
- ✓ Mécanique quantique : équation de Schrödinger

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables s'écrit sous la forme

$$F(x, u(x), Du(x), \dots, D^p u(x)) = 0 \quad (\text{I.1})$$

telle que: $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction inconnue avec n et p des entiers strictement positifs donnés et F est une fonction donnée, l'entier p est appelé l'ordre de l'EDP

I.3 Définition

En mathématique et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier [1] après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier,

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

permettant une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entraîné aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses. Véritable révolution à la fois physique et mathématique, sur plus d'un siècle.

I.4 Applications

Une variante de cette équation est très présente en physique sous le nom générique d'équation de diffusion. On la retrouve dans la diffusion de masse dans un milieu binaire ou de charge électrique dans un conducteur, le transfert radiatif, etc. elle est également liée à l'équation de Burgers et à l'équation de Schrodinger. [2]

I.5 Formulations des équations de la Chaleur

I.5.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes

Dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général [3]

$$pc \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q \quad (I.2)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $q = 0$
- c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Les hypothèses (a) + (b) + (c) permettent d'écrire

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dt} \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dz} \right)^2 \right] = pc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.3)$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.4)$$

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

Le rapport $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace

$$\nabla^2 T = 0 \quad (I.5)$$

I.5.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques

Elle s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.6)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de z, l'équation (I.6) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.7)$$

$\frac{\dot{q}}{k} = 0$ (Sans source de chaleur). Donc l'équation devient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \quad (I.8)$$

I.5.3 Equation de la chaleur en coordonnées sphériques

En coordonnée sphérique, on a

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} \quad (I.9)$$

I.6 Différentes formes de l'équation de la chaleur

Selon la nature des problèmes examinés, l'équation de la chaleur prend des formes différentes [3]

I.6.1 Cas d'un milieu sans sources internes

En régime permanent, l'équation de la chaleur se réduit alors à

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I.10})$$

C'est l'équation de Laplace.

I.6.2 Cas d'un milieu avec sources internes, en régime permanent

Dans ce cas, on a

$$\Delta T + \frac{S}{k} = 0 \quad (\text{I.11})$$

C'est l'équation de Poisson.

I.6.3 Cas d'un milieu sans sources internes, en régime variable

En régime variable, on a

$$\Delta T = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I.12})$$

C'est l'équation de Fourier.

I.7 Différentes méthodes de résolution de l'équation de chaleur

La résolution de l'équation de chaleur est étudiée depuis fort longtemps mais trouver une technique ou un outil d'aide à la conception simple et efficace, est toujours d'actualité. Des méthodes numériques de modélisation basées sur les différences finies ou les éléments finis existent mais sont incomplètes ou complexes. La solution analytique des fois n'existe pas pour des systèmes complexes. Les méthodes analogiques sont une alternative intéressante car le sens physique est maintenu [4].

I.7.1 Solutions Analytiques

Plusieurs méthodes analytiques pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur ont été développées, chacun possédant des caractéristiques particulières avantageuses suivant les types particuliers de problèmes à résoudre. Les méthodes les plus utilisées sont :

(a) Méthode utilisant les séries de Fourier

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

Cette méthode a trouvé une popularité considérable pour le cas de circuits intégrés, hybride, et les modules électroniques intégrant des systèmes de refroidissement de chaleur au cours des dernières décennies. Dans ce procédé, l'équation à résoudre est l'équation différentielle partielle de chaleur en régime permanent avec une conductivité thermique constante dans chaque couche. Cette méthode FSM est un outil très utile pour la prédiction facile de structures planes et simples [4].

(b) Méthode de transformation

Elle est basée sur l'utilisation de la forte similitude mathématique de l'équation de Laplace pour le problème thermique multicouche à l'état stationnaire [5]. Cette méthode de transformation (TM) permet d'éliminer les coordonnées x , y et t et transforme l'équation de la chaleur en une équation différentielle classique ne dépendant que de la variable z et les transformations requises sont effectuées à l'aide d'algorithmes de transformée de Fourier. Pour cela, seules les structures simples peuvent être facilement décrites.

(c) Méthode du Modèle Compact

Un modèle compact (CM) est un réseau de résistance thermique simple contenant pas plus de dix ou vingt nœuds. Le CM a été utilisé pour prédire la température d'un dispositif électronique en boîtier. La plupart des documents présentés ont discuté de l'utilisation de ce modèle pour l'analyse de la performance thermique [6]. Le CM peut engendrer un nombre limité de résistances thermiques pour établir une connexion directe entre les nœuds surface-surface et des nœuds internes supplémentaires. Cependant, la résistance à la CM n'est pas la vraie résistance thermique, et la forme de la CM ne reflète pas les grandes voies d'écoulement de la chaleur dans les boîtiers.

(d) Méthode de séparation des variables

Elle constitue l'une des méthodes importantes de la résolution des équations différentielles ceci en réécrivant les équations de formes de deux variables distinctes et indépendantes. Elle est plus pratique à appliquer en dimensions finies. Les solutions analytiques de l'équation de transfert de chaleur ne peuvent être obtenues sans hypothèses simplificatrices pour la géométrie, les propriétés des matériaux et les conditions aux limites (voir chapitre 3). Pour l'analyse thermique de problèmes pratiques, de telles simplifications ne sont pas généralement possibles. Par conséquent, les méthodes numériques avec la flexibilité dans le

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

traitement des géométries complexes font une approche idéale pour la solution de ces problèmes de transfert de chaleur.

I.7.2 Solutions numériques

La modélisation numérique offre la possibilité d'obtenir des résultats précis en donnant une analyse des systèmes complexes ou les techniques d'analyse et de mesure n'existaient même pas. Plusieurs méthodes de modélisation numérique pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur ont été développés tels que

(a) Méthodes des différences finies

Le principe de cette méthode consiste en une discrétisation du domaine de définition des variables espace et temps. La division en petits volumes du milieu à étudier est à la fois fonction de sa structure et des conditions aux limites. Dans le cas de la résolution de l'équation de la chaleur dans un milieu quelconque, chaque nœud résultant de la discrétisation est caractérisé par une valeur discrète de la température. L'équation de la chaleur est alors appliquée aux nœuds sous sa forme discrète. Il en découle un système d'équations algébriques (souvent formé d'un grand nombre des équations) qu'il faut résoudre par des logiciels informatique.

(b) Méthodes des éléments finis

Cette méthode a été développée initialement pour la résolution de problèmes d'élasticité et de résistance des matériaux, elle s'applique aussi aux problèmes de conduction tridimensionnelle en régime stationnaire ou transitoire. Alors que la méthode des différences finies remplace l'équation différentielle par une équation aux différences par approximation algébrique, la méthode des éléments finis est une méthode d'approximation aussi qui présente l'avantage sur celle des différences finies de mieux s'adapter aux formes irrégulières, et d'autre part aux problèmes où les conditions aux limites ne sont pas constantes.

(c) Eléments de frontières

Une alternative aux méthodes basées sur les éléments finis consiste à considérer des domaines délimités par des surfaces fermées dans lesquelles on résout l'équation de diffusion de la chaleur, en imposant les conditions de frontière prescrites du problème, un système d'équation algébrique linéaire est alors obtenu. La solution de ce système d'équations peut être

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

trouvée en utilisant des méthodes directes ou itératives. A partir des valeurs des différentes caractéristiques thermiques aux frontières, il est possible de calculer les températures et les flux dans n'importe quel point du domaine défini. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que le calcul en régime dynamique est plus compliqué que les deux autres méthodes.

(d) Méthodes dynamique des fluides

Au cours des dernières années, la méthode CFD (Computational Fluide Dynamics) a été développée pour les systèmes électroniques pour aider à réduire la dépendance à l'expérimentation vaste et coûteux, car les simulations par CFD seraient utilisés pour prévoir les températures des appareils électroniques et des interactions de transfert de chaleur en circuits. Cependant, une grande variabilité dans la longueur des échelles exigent un temps de calcul énorme et les simulations CFD exigent également une connaissance en informatique pour utiliser le logiciel.

I.7.3 Solutions électrothermiques

L'utilisation de solutions électrothermiques pour résoudre les problèmes de chaleur n'est pas nouvelle, et plusieurs procédés électrothermiques destinés à résoudre les problèmes de transfert de chaleur ont été développés tels que

(a) Méthode directe (Fully Coupled Method)

Cette méthode est basée sur la modélisation du comportement des circuits électroniques par un seul outil de simulation spécifique. La simulation peut être traitée par circuits et systèmes simulateurs comme Saber, ELDO ou Spectre. Le problème de cette méthode est dans la complexité des modèles à simuler

(b) Méthode de relaxation

Cette méthode de relaxation a été basée sur le couplage de l'effet thermique avec le simulateur de circuits électriques. Généralement, le procédé de modélisation de la méthode de relaxation n'est pas si compliqué, parce que les simulateurs spéciaux sont déjà conçus pour un problème particulier thermique ou électrique. Un point essentiel de la méthode de relaxation est la façon de réaliser le transfert des données, la synchronisation, le contrôle de la convergence. Les simulateurs devraient avoir fixés à recevoir et à envoyer des valeurs

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

calculées à un autre simulateur de sauvegarde de données. Par conséquent, l'arrière-plan mathématique du mécanisme de couplage est nécessaire.

I.7.4 Méthodes de mesures de température pratiques

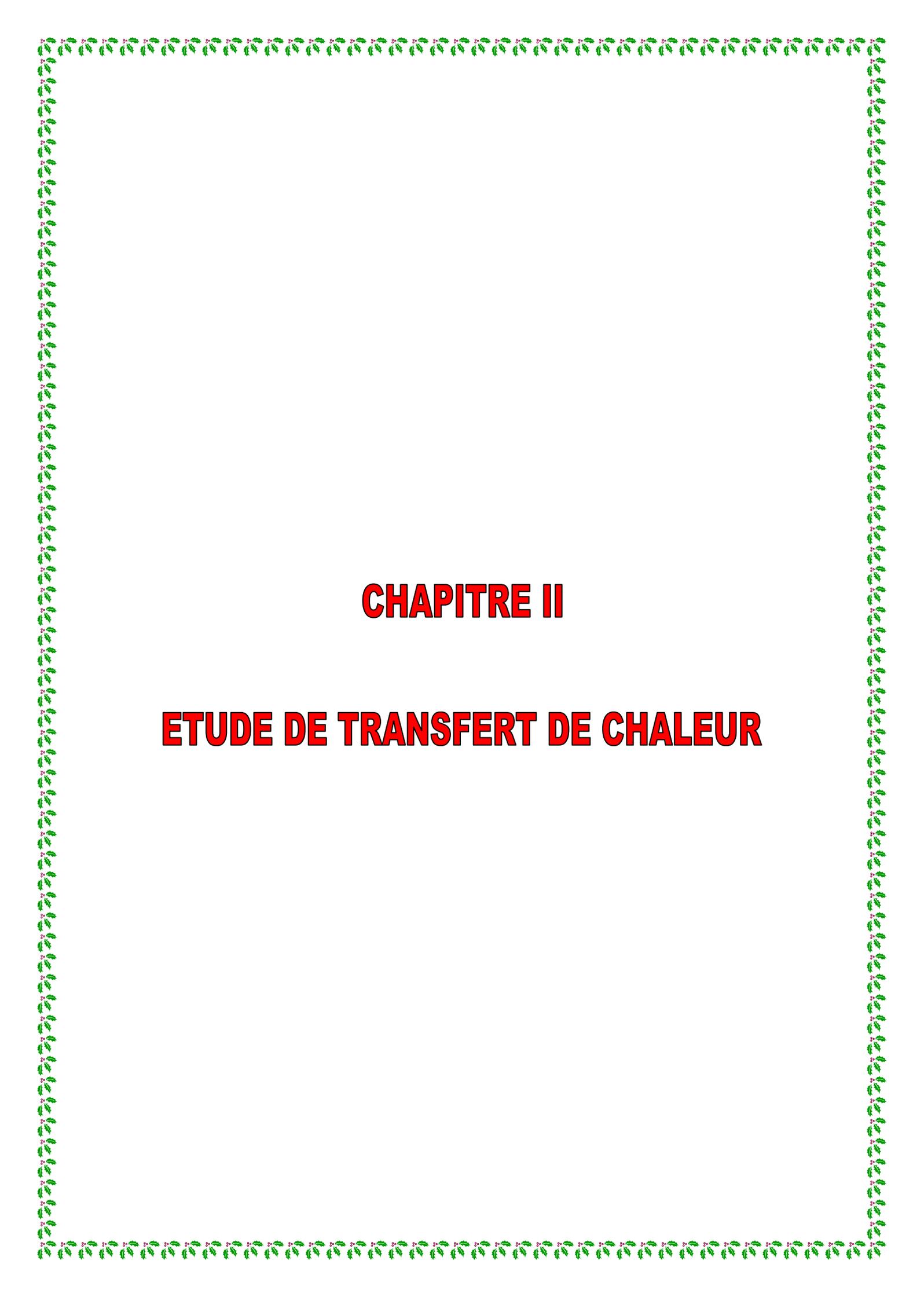
Les méthodes de mesures pratiques de température se basent sur la détermination de l'impédance thermique. Cette technique nécessite la connaissance précise des caractéristiques de fonctionnement électrique du module électronique spécifié et ne fournit aucune information sur la distribution de la température sur ses régions actives. Cette méthode présente de graves inconvénients celle de dépasser la puissance maximale de fonctionnement du dispositif lui-même et elle nécessite à chaque test une excitation d'impulsions différentes de chaleur et son refroidissement à la température ambiante.

Une des techniques la plus utilisée est l'infrarouge (IR) microscope. C'est un système de vidéo thermique (TVS) balaie toute la surface en vue et mesure la lumière infrarouge provenant de chaque emplacement de point chauds. Il est non-intrusif et fournit un profil de température de surfaces à gammes de températures différentes. Ainsi, des points chauds localisés et des gradients élevés de température sont facilement détectés. Cependant, la limitation de la méthode IR dépend de la résolution de la TVS.

CHAPITRE I : EQUATION DE CHALEUR

Références

- [1] Achouri Ismail et Benkhaled Redouane, Equations différentielles ordinaires et applications, Mémoire de licence (LMD), session 2012-2013.
- [2] Nagadi chahra zad, *Résolution numérique de l'équation de chaleur stationnaire à deux dimensions, mémoire de master .session 2018-2019*
- [3] Bouazza Mimoune, Discrétisation explicite de l'équation de chaleur pour une plaque carré, Mémoire master, 2019/2020. Université de saïda.
- [4] Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, Joseph Fourier (1768-1830)
- [5] KORICHI Wennassa, Simulation numérique d'une plaque bidimensionnelle avec source de chaleur, Mémoire de Master, Université Mohamed khider– BISKRA (2014).
- [6] Eric Goncalvès, Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO, institut national polytechnique de Grenoble September 2005



CHAPITRE II

ETUDE DE TRANSFERT DE CHALEUR

II. 1 Introduction

On va aborder dans ce chapitre, les différents types de transfert de chaleurs et les lois fondamentales gouvernants, ainsi que certaines propriétés thermo-physiques des matériaux participants au comportement thermique de ceux-ci.

II.2 Modes de transfert de chaleur

Le transfert de chaleur est défini par la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de températures. Le transfert de chaleur est régi, non seulement par une relation unique, mais, plutôt par une combinaison de différentes lois physique indépendantes. On distingue, généralement, trois modes de transfert (cf. Fig. II.1) [1]

* **Conduction** : Transfert dans la masse

* **Rayonnement** : Transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée.

* **Convection** : Transfert par transport.

II.2.1 La conduction

La conduction est définie comme tant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne). Provoquée par une différence de température entre deux milieux solides, en contact physique. Ainsi, le corps à température plus élevée donne de l'énergie thermique à celui dont la température est plus faible, sans qu'il y fasse transfert de matière. La différence de température entre deux corps provoque les transferts thermiques à l'intérieur même de chacun des corps. On obtient un système dynamique dans la conduction, l'énergie(Chaleur) se propage par contact direct des molécules sans un déplacement appréciable des Molécules.

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc...

Chapitre II : ETUDE DE TRANSFERT DE CHALEUR

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur.

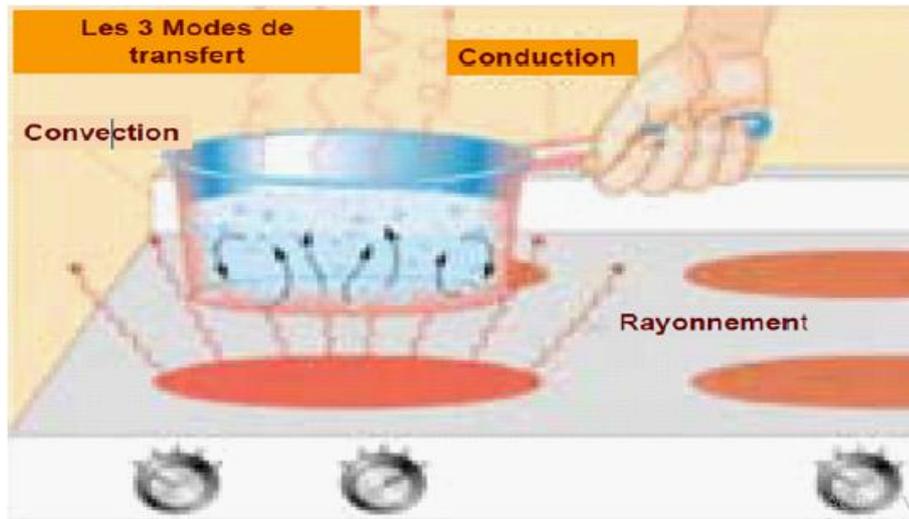


Figure II.1 Les trois types de *Transfer de chaleur*

Si les faces intérieure et extérieure d'une vitre d'une maison sont à des températures différentes il y a conduction thermique dans l'épaisseur de la vitre. En hiver par exemple, si la température de la face extérieure est de -10°C et celle de la face intérieure est de 20°C , le transfert de chaleur se fait de l'intérieur à l'extérieur. (cf. Fig. II.2)

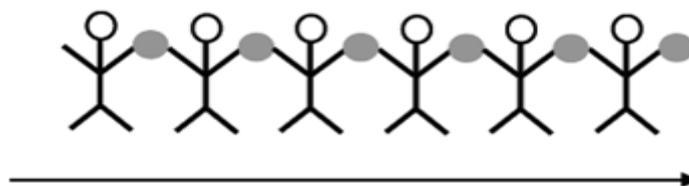


Figure II.2: Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par conduction thermique

II.2.2 Rayonnement

C'est un mode de transfert de chaleur qui nous est familier : L'hiver devant un bon feu ou l'été sur la plage au soleil. La chaleur passe d'un corps à haute température vers un corps à basse température sous forme d'un rayonnement électromagnétique (photon) ; les deux corps devant être dans un milieu transparent (comme l'air ou le vide). Voir Fig. II.3

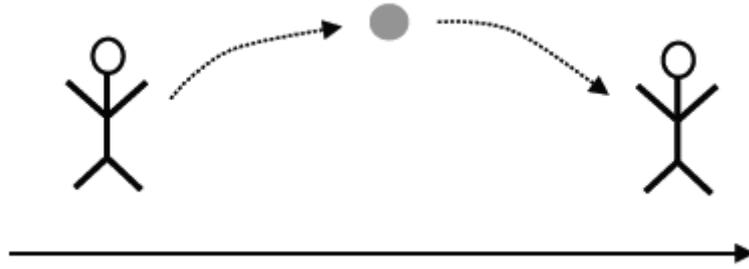


Figure II.3: Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par rayonnement

II.2.3 Convection

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes (fig. II.4).

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. La quantité de chaleur échangée par unité de temps dépend de plusieurs paramètres :

- La différence de température entre la paroi et le fluide.
- La vitesse du fluide.
- La capacité thermique massique du fluide.
- La surface d'échange.
- L'état de surface du solide.
- Sa dimension...etc.

Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide, on distingue :

a) La convection naturelle ou libre

Pour laquelle le mouvement provient de l'action simultanée de différences de température existant au sein du milieu, et d'un champ de force massique.

Chapitre II : ETUDE DE TRANSFERT DE CHALEUR

b) La convection forcée

Pour laquelle le mouvement est imposé par une action extérieure (pompe, ventilateur...).

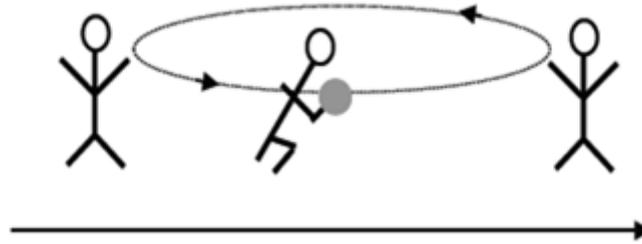


Figure II.4 : Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par convection.

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur.

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud. [2]

II.3 Propriétés thermo-physiques des matériaux

II.3.1 Définition

Les propriétés thermiques des matériaux sont des grandeurs qui caractérisent le comportement des matériaux en présence d'un ou plusieurs types d'échange thermique. Elles expriment le comportement du matériau soumis aux transferts stationnaires. Les propriétés régissant les transferts par conduction et convection sont aussi appelées « Propriétés de transport » car elles sont liées à l'agitation des atomes et des molécules du milieu qui « transportent » la chaleur.[3]

II.3.2 Interprétation physique

Les propriétés thermiques se rapportent aussi à la capacité du matériau à absorber de l'énergie thermique. Cette énergie thermique peut être absorbée pour élever la température du matériau ou pour le transformer (changement des propriétés physiques ou d'état du matériau) capacité thermique, en thalpie de fusion (ou autre transformation), coefficient de dilatation thermique.

Toutes les propriétés thermiques des matériaux sont dépendantes de la nature du corps et sa température. La mesure de ces propriétés est donc indissociable de la mesure de la température et de la connaissance de la nature du matériau (au moins de la connaissance de son caractère homogène et isotrope). Les valeurs de chaque propriété sont donc affichées en donnant la nature du matériau et la température de mesure ou la relation de la grandeur en fonction de la température.[3]

II.4 Certaines propriétés

II.4.1 Capacité thermique(C_p)

La capacité thermique traduit l'aptitude du matériau à absorber une quantité de chaleur (Q) et à s'échauffer (élévation de sa température) de ΔT

$$C_p = \frac{Q}{\Delta T} \quad (\text{II.1})$$

Dans la pratique, et pour définir une propriété du matériau indépendante de sa masse(m), on utilise la capacité thermique massique c qui s'exprime en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

$$C = \frac{C_p}{m} \quad (\text{II.2})$$

Cette grandeur était anciennement appelée chaleurs pécifique ou capacité calorifique. Pour la mesurer, différents processus thermodynamiques peuvent être mis en œuvre ; les plus usuels sont l'échauffement du matériau à pression constante : mesure de C_p (capacité thermique à pression constante), et l'échauffement à volume constant : mesure de C_v (capacité thermique à volume constant). Ces deux grandeurs obtenues différemment sont reliées entre elles par le volume molaire V , le coefficient d'expansion volumique a et le coefficient de compressibilité isotherme b , pour le matériau considéré à la température T par la relation[4]

$$C_p = C_v \frac{\alpha^2 \cdot V \cdot T}{\beta} \quad (\text{II.3})$$

II.4.2 Conductivité thermique (k)

La conductivité thermique est le flux de chaleur traversant un matériau d'épaisseur un mètre, pour une différence de température de un kelvin entre les deux faces entrante et sortante. Elle s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Sa valeur permet de quantifier le pouvoir du matériau à conduire la chaleur (en termes d'amplitude). Plus elle est faible, plus le matériau est isolant (conduction faible).

II.4.3 Diffusivité thermique (α)

La diffusivité thermique est une propriété dynamique du matériau car elle intervient dans les transferts en régime transitoire de température. Elle caractérise l'aptitude d'un matériau à transmettre la chaleur (en termes de vitesse). Elle s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Ce paramètre est directement contenu dans l'équation de la chaleur simplifiée

II.4.4 Effusivité thermique (b)

L'effusivité thermique est la racine carrée du produit de la conductivité thermique k , de la masse volumique ρ , et de la capacité thermique massique C_p

$$b = \sqrt{k \cdot \rho \cdot C_p} \quad (\text{II.4})$$

Elle s'exprime en $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1/2}$. Sa valeur permet de quantifier l'aptitude d'un matériau à changer de température (plus ou moins rapidement) lorsqu'il reçoit un apport d'énergie thermique distribué de manière non uniforme (par exemple pour un cube, contact par une seule de ses faces à un autre corps à une température plus élevée). Deux phénomènes se conjuguent alors simultanément l'énergie est absorbée localement en fonction de la capacité thermique du matériau et cette énergie est transférée aux régions voisines en fonction de la conductivité thermique du matériau. Cette grandeur était appelée autre fois coefficient d'arrachement thermique.

La mesure se fait par des méthodes d'apport d'énergie par contact ou sans contact (énergie d'un rayonnement). Un exemple d'application : la sensation de chaud ou de froid, ressentie lors du toucher d'un matériau, est directement liée à l'effusivité de ce matériau. Cela indique l'importance de cette grandeur pour toutes les applications nécessitant la prise en compte de la perception sensorielle d'un objet par le toucher.

II.4.5 Propriété radiative: l'émissivité(ϵ)

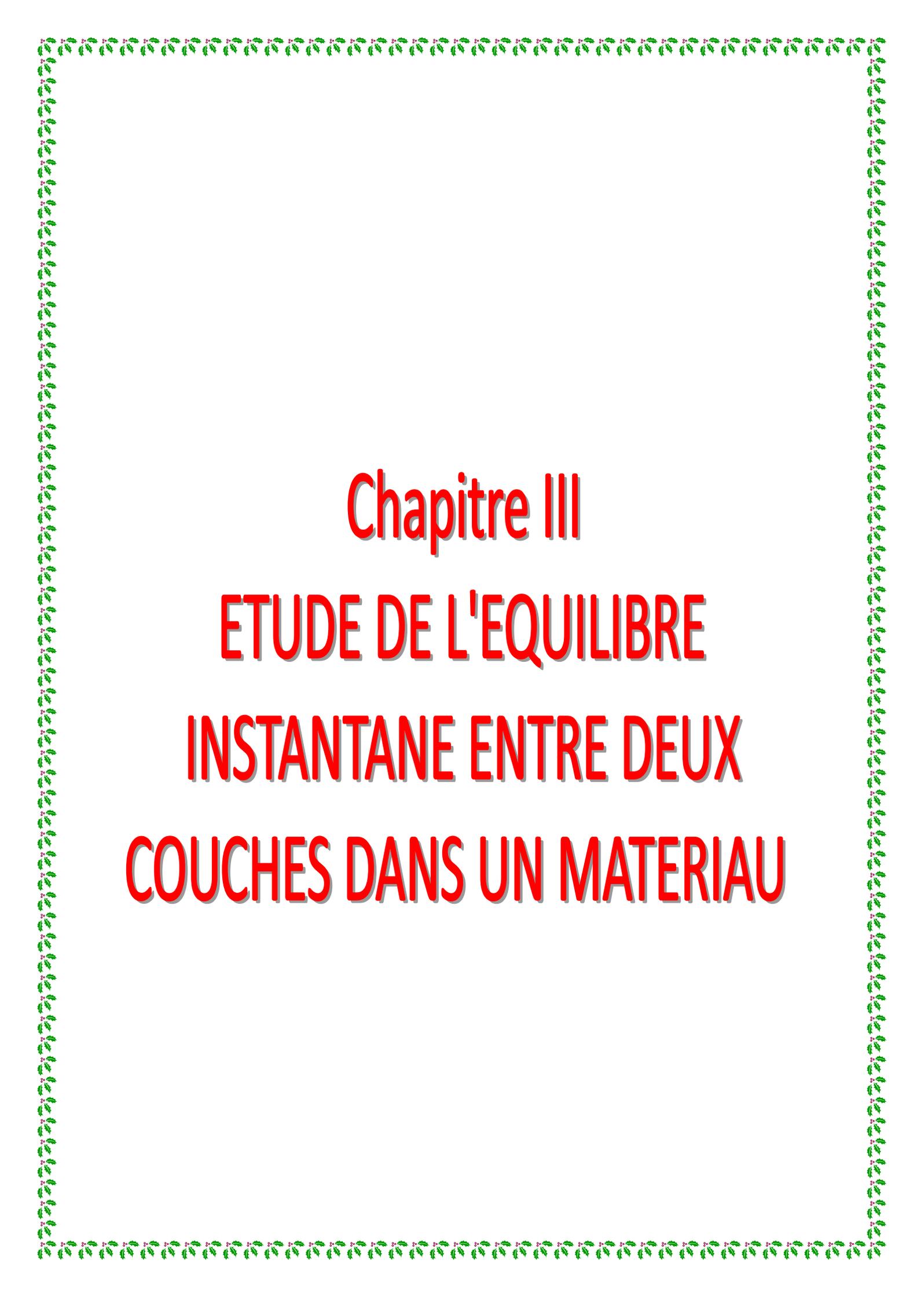
L'émissivité d'un matériau (d'une surface) renseigne sur son aptitude à émettre un rayonnement. Elle s'exprime sous la forme du rapport entre la quantité d'énergie émise par la surface (luminance L) et l'énergie émise par un corps noir (luminance L_0) porté à la même température

$$\epsilon = \frac{L}{L_0} \text{(II.5)}$$

L'émissivité dépend de la longueur d'onde et de la direction de mesure du rayonnement.

Références

- [1] Arif Ali. "Thèse de Magister : Modélisation d'une installation à plasma inductif basse fréquence". Université de Biskra.
- [2] René Leleu. "Transferts De Chaleur J 1 080, Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences fondamentales", 2,4, 10.
- [3] José-Philippe Pérez, éd. Dunod, Paris 2001, Thermodynamique, fondements et applications.
- [4] Pierre Cormault. "Cours de Thermique théorique et pratique", Janvier 1999.



Chapitre III
ETUDE DE L'EQUILIBRE
INSTANTANE ENTRE DEUX
COUCHES DANS UN MATERIAU

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

3.1 Introduction

Le transfert de chaleur entre deux couches d'un matériau composite peut se décrire par la résolution analytique de l'équation de chaleur. En utilisant la méthode de séparation de variables, on va démontrer qu'on arrive à une équation de valeurs propres dont la résolution numérique par la méthode de Newton nous donne explicitement selon la tolérance relative fixé les valeurs propres apparentes dans les formules des solutions finales. On note qu'on va réduire les paramètres et les variables utilisés en définissant un groupe adimensionnel formé par les rapports associés. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les sauts et les chutes de températures d'une de deux couches en fonction des conditions initiales lors de l'équilibre instantané du matériau.

3.2 Equation de chaleur à une dimension pour un matériau bicouche

L'équation de chaleur à une dimension prend la forme [1]

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (3.1)$$

où on a utilisé le changement de variable [2]

$$\theta_i(x, t) = T_{amb} - T_i(x, t) \quad (3.2)$$

T_{amb} , et $T_i(x, t)$ sont respectivement la température ambiante et la température temporelle. L'équation (3.1) peut décrire le transfert de chaleur par conduction et à une dimension dans un matériau composé de deux couches S_1 , et S_2 (Fig. 3.1), et de propriétés thermo-physique : conductivité k_i , diffusivité α_i , chaleur spécifique Cp_i , masse volumique ρ_i et l'épaisseur a_i . Les coefficients de convection des deux côtés sont h_i . Tout pour $i = 1, 2$

Les deux couches sont supposés d'être séparées par une surface de contact parfait. Il sont maintenues respectivement aux deux températures initiales T_{01} , et T_{02} . Les conditions physiques sont composés des conditions aux bords, sur la surface de contact, et initiales [2] :

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=-a_1} + h_1 \theta_1 \Big|_{x=-a_1} = 0 \quad (3.3)$$

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=a_2} + h_2 \theta_2 \Big|_{x=a_2} = 0 \quad (3.4)$$

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

$$\theta_2|_{x=0} = \theta_1|_{x=0} \quad (3.5)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (3.6)$$

$$\theta_{0i} = T_{amb} - T_{0i} \quad (3.7)$$

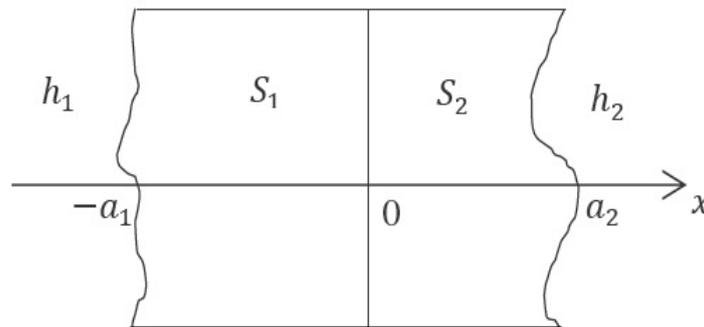


Figure 3.1 Représentation d'un matériau bicouche

3.3 Résolution analytique par la méthode de séparation de variables

La résolution analytique de l'équation (3.1) se fait par la méthode de séparation de variables où on écrit la solution sous la forme

$$\theta_i(x, t) = X_i(x) \cdot G_i(t) \quad (3.8)$$

pour chaque couche d'indice i . Par injection dans (3.1), on obtient les solutions préliminaires suivantes [4], [5]

$$X_i(x) = A_i \cos(\lambda_i x) + B_i \sin(\lambda_i x) \quad (3.9)$$

$$G_i(t) = \exp(-\alpha_i \lambda_i^2 t) \quad (3.10)$$

A_i , B_i et λ_i sont des constantes à déterminer. On définit le groupe adimensionnel par les rapports [5]

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (3.11)$$

$$\kappa = \frac{k_2}{k_1} \quad (3.12)$$

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

$$\gamma = \frac{a_2}{a_1} \quad (3.13)$$

et les nombres de Biot

$$Biot_i = \frac{h_i a_1}{k_1} \quad (3.14)$$

et également les deux variables spatiotemporelle par

$$\xi = \frac{x}{a_1} \quad (3.15)$$

$$\tau = \frac{\alpha_1}{a_1^2} t \quad (3.16)$$

Dans cette version, on peut avoir les formes finales des solutions exprimant le transfert de chaleur entre les deux couches

$$X_1(\xi) = B\{P_1(\beta)\cos(\beta\xi) + \sin(\beta\xi)\} \quad (3.17)$$

$$G_1(\tau) = \exp(-\beta^2\tau) \quad (3.18)$$

$$X_2(\xi) = \frac{B}{\kappa\omega} \{-P_2(\beta)\cos(\omega\beta\xi) + \sin(\omega\beta\xi)\} \quad (3.19)$$

$$G_2(\tau) = \exp(-\beta^2\tau) \quad (3.20)$$

Les fonction $P_i(\beta)$ sont définies par

$$P_i(\beta) = \frac{(\kappa\omega)^{i-1}\beta + Biot_i \operatorname{tg}((\omega\gamma)^{i-1}\beta)}{Biot_i - (\kappa\omega)^{i-1}\beta \operatorname{tg}((\omega\gamma)^{i-1}\beta)} \quad (3.21)$$

dépendant de ce qu'on appelle valeurs propres notées β . On a $\tau \geq 0$, $-1 \leq \xi \leq 0$ pour la première couche, et $0 \leq \xi \leq \gamma$ pour la seconde. Nous devons donc déterminer les constantes B et β . Pour B , cela peut être fait en utilisant les conditions initiales et la propriété d'orthogonalité de X_i . Pour β , nous pouvons définir un problème propre décrit par l'équation suivante [6]

$$E(\beta) = P_1(\beta) + \frac{P_2(\beta)}{\kappa\omega} = 0 \quad (3.22)$$

On trace dans la figure (3.2) la fonction $E(\beta)$ pour $\omega = 1$, $\kappa = 2$, $\gamma = 2$, $Biot_1 = 1$, et $Biot_2 = 2$.

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

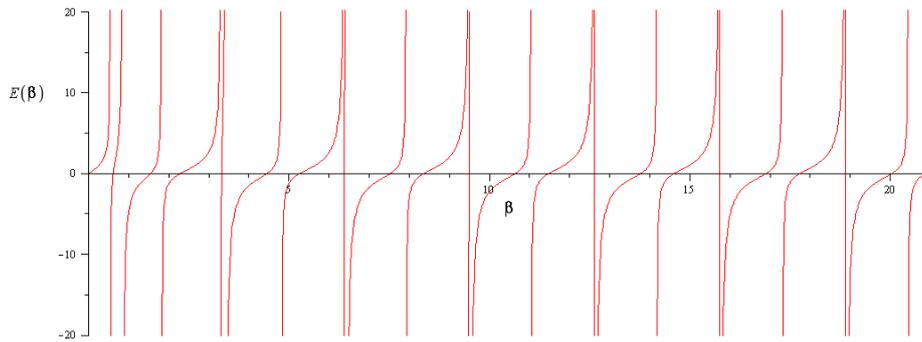


Fig. 3.2 La fonction $E(\beta)$

Les vingt premiers valeurs propres sont collectées dans le tableau (3.1). Ils sont obtenues en implémentant la méthode de Newton [3] dans le programme Maple avec une tolérance relative de 10^{-5} . La solution finale est une combinaison linéaire par rapport les valeurs propres β_n . On s'arrête à $n = 20$ racines qui est un nombre suffisant pour diminuer l'erreur à moins de 0.5% [7]

$$\theta_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \approx \sum_{n=1}^{20} B_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \quad (3.23)$$

Les constantes d'intégration B_n sont obtenues d'après la relation d'orthogonalité satisfaisant les solutions spatiales $X_{i,n}(\xi)$ [8]

n	β_n
1	0.6150667210
2	1.543656970
3	2.284554887
4	3.317342844
5	4.445415022
6	5.265238512
7	6.376532181
8	7.525451730
9	8.358246804
10	9.487788105
11	10.64039750
12	11.47714728
13	12.61383971
14	13.76724715
15	14.60567801
16	15.74601550
17	16.89950431
18	17.73879852
19	18.88130418
20	20.03466146

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

Table 3.1 Les racines de la fonction $E(\beta)$

3.4 Calcul adimensionnelle

On peut enserrer l'intervalle des températures au $[0, 1]$ par la représentation adimensionnelle suivante

$$\Theta_i = \frac{\theta_i}{\theta_{01}} = \frac{T_{amb} - T_i}{T_{amb} - T_{01}} \quad (3.24)$$

Et on définit la fraction qui représente la valeur initiale de la température adimensionnelle de la deuxième couche

$$F = \frac{\theta_{02}}{\theta_{01}} \quad (3.25)$$

Les constantes B_n se transforment aux constantes adimensionnelles suivantes [7]

$$C_n = \frac{B_n}{\theta_{01}} \quad (3.26)$$

On obtient la solution analytique adimensionnelle par

$$\Theta_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{20} C_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \quad (3.27)$$

L'équilibre final s'effectue lorsque toutes les températures tendent vers la température ambiante équivalente à la température adimensionnelle 0 (d'après (3.24)) Avant celui-ci, on observe un équilibre instantané suite de l'échange des deux températures initiales. Cet équilibre se traduit par la relation [9]

$$T_{eq} = \frac{\sqrt{k_1 \rho_1 c_{p1}} T_{01} + \sqrt{k_2 \rho_2 c_{p2}} T_{02}}{\sqrt{k_1 \rho_1 c_{p1}} + \sqrt{k_2 \rho_2 c_{p2}}} \in [T_{01}, T_{02}] \text{ si } T_{01} < T_{02} \quad (3.28)$$

où Cp_i et ρ_i ($i = 1, 2$) sont respectivement la chaleur spécifique et la densité de chaque matériau. La diffusivité thermique est liée à ces propriétés et la conductivité k_i par

$$\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i \cdot Cp_i} \quad (3.29)$$

on obtient alors, la température d'équilibre adimensionnelle

$$F_{eq} = \frac{T_{amb} - T_{eq}}{T_{amb} - T_{01}} = \frac{\kappa \omega F + 1}{\kappa \omega + 1} \quad (3.30)$$

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

Nous pouvons regrouper les deux températures en une seule expression décrivant l'ensemble du matériau composé de deux couches

$$\Theta(\xi, \tau) = \begin{cases} \Theta_1(\xi, \tau) & \text{if } -1 \leq \xi \leq 0 \\ \Theta_2(\xi, \tau) & \text{if } 0 \leq \xi \leq \gamma \end{cases} \quad (3.31)$$

On peut varier les conditions initiales et voir comment l'équilibre instantané se réagit. Plus d'explications est détaillé dans la section suivante.

3.5 Résultats & discussions

Pour illustrer les résultat, on prend l'exemple de la table 3.1, et les conditions initiales sont fixé par les valeurs $T_{amb} = 300K, T_{01} = 400K, T_{02} = 500K$. Alors, on observe un équilibre instantané entre les deux couches à la valeur $F_{eq} \approx 1.67$ (figure (3.3)). On représente aussi dans la figure (3.3) les courbes de températures des deux couches (les points sur l'axe x) dans différents moments. Les courbes tendent vers l'axe horizontal représentant l'équilibre thermique final

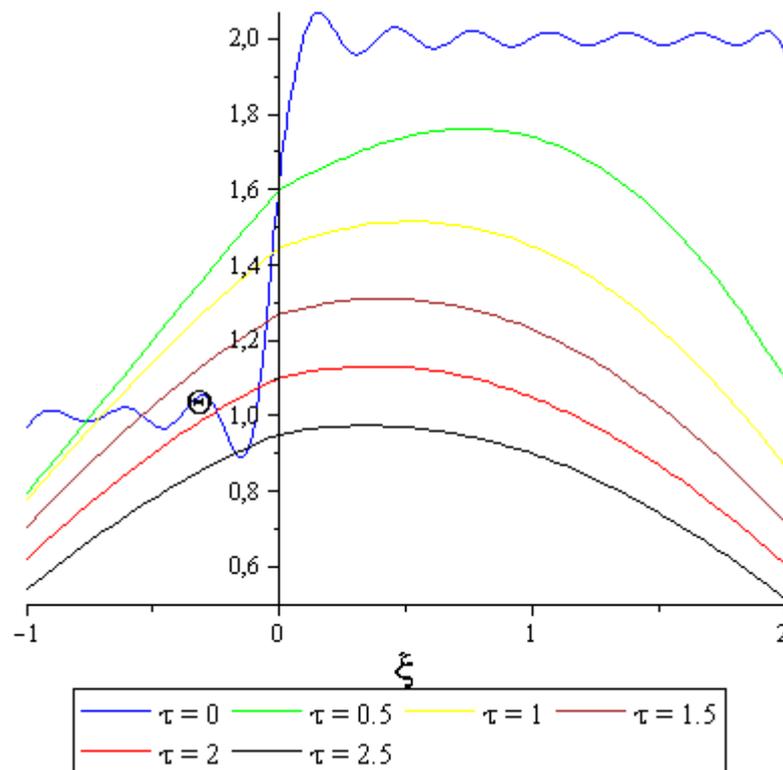


Figure 3.3 Le transfert de chaleur dans un matériau bicouche.

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

Dans la figure (3.4), on voit bien que les températures dans la première couche effectuent des sauts pour atteindre l'équilibre instantané. Ces sauts sont d'autant plus clairs lorsqu'on approche de la surface de contact. Par contre, on n'observe pas ces sauts dans la deuxième couche et les températures tendent vers l'équilibre final après un certain moment (figure (3.5)).

L'équilibre instantané pour un exemple étudié varie d'après la relation (3.28) en fonction des conditions initiales des deux couches. Le tableau 3.2 explique une simple étude où on varie ces conditions et voir les sauts ou les chutes des températures pour atteindre l'équilibre instantané. On a pris 15 cas. Les cinq premiers étudient l'équilibre pour $T_{01} < T_{02} < T_{amb}$, les cinq suivant étudient l'équilibre pour $T_{01} < T_{amb} < T_{02}$, et les cinq derniers pour $T_{amb} < T_{01} < T_{02}$.

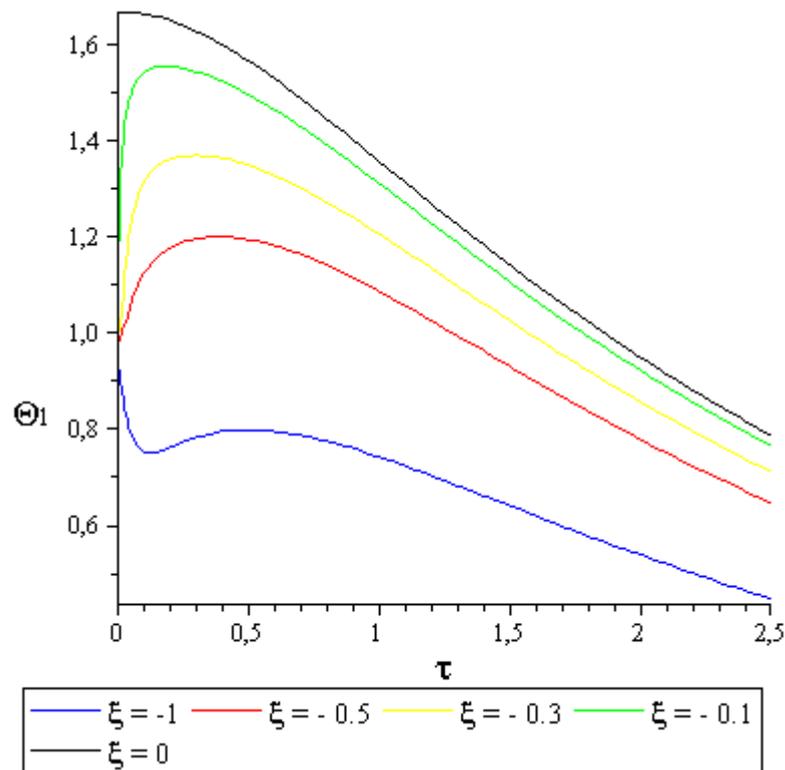


Figure 3.4 Le comportement de température dans la première couche.

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

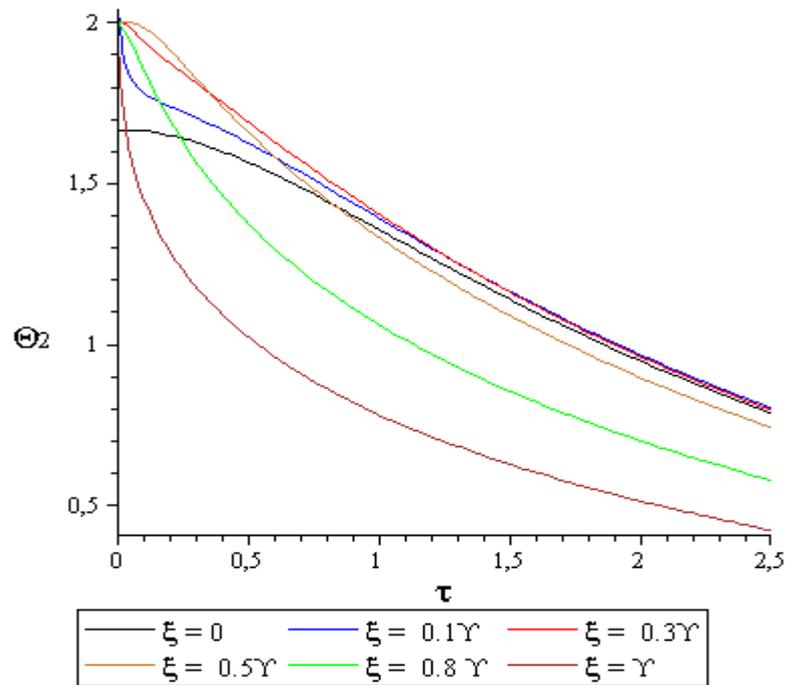


Figure 3.5 Le comportement de température dans la deuxième couche.

$T_{01}(K)$	$T_{02}(K)$	$\approx T_{eq}(K)$	$T_{amb}(K)$	F	$\approx F_{eq}$	Saut/chute
300	400	367	425	0.20	0.47	C ₂
325	425	392	455	0.23	0.49	C ₂
350	450	417	485	0.26	0.51	C ₂
375	475	442	515	0.29	0.52	C ₂
400	500	467	545	0.31	0.54	C ₂
425	525	492	450	- 3	- 1.67	S ₁
450	550	517	480	- 2.33	- 1.22	S ₁
475	575	542	510	- 1.86	- 0.90	S ₁
500	600	567	580	- 0.25	0.17	C ₂
525	625	592	600	- 0.33	0.11	C ₂
550	650	617	525	5	3.67	S ₁
575	675	642	540	3.86	2.90	S ₁
600	700	667	555	3.22	2.48	S ₁
625	725	692	570	2.82	2.21	S ₁
650	750	717	580	2.43	1.95	S ₁

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

Table 3.2 *Etude des sauts et des chutes (S/C) des températures des deux couches lors de l'équilibre instantané.*

Une simple lecture du tableau (3.2) nous permis de conclure qu'on observe des chutes de températures(lors de l'équilibre instantané) de la couche chaude dans le cas où $T_{eq} < T_{amb}$ (couleur bleu). Et on observe des sauts de températures de la couche froide pour le cas inverse $T_{amb} < T_{eq}$ (couleur jaune). On n'observe pas des chutes des températures de la couche froide ni des sauts dans la couche chaude puisque l'équilibre instantané se situe dans la région délimitée par les deux températures.

3.6 Programme Maple

On présente par suite le programme Maple où on a implémenté la méthode de Newton pour le calcul des valeurs propres

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

```

> with(Student[Calculus1]), with(Student[NumericalAnalysis]), with(plots, implicitplot),
  with(linalg), with(RandomTools[MersenneTwister]), with(LinearAlgebra),
  with(Statistics) :

(1) The General Solution And Conditions
> X := (i, n, x) -> sin(omega^(i-1) * lambda(n) * x) + (-1)^(i-1) * Pi(i, n) * cos(omega^(i-1) * lambda(n) * x)
# Ecriture des solutions
X := (i, n, x) -> sin(omega^(i-1) * lambda(n) * x) + (-1)^(i-1) * Pi(i, n) * cos(omega^(i-1) * lambda(n) * x) (1)

> Fi := Tam - T0i; # Les conditions initials
Fi := Tam - T0i (2)

(3) Eigen Problem Of beta(n) = z
> Pi := (i, z) -> (kappa * omega)^(i-1) * z + Biot[i] * tan((omega * Y)^(i-1) * z) /
  Biot[i] - (kappa * omega)^(i-1) * z * tan((omega * Y)^(i-1) * z);
Pi := (i, z) -> (kappa * omega)^(i-1) * z + Biot_i * tan((omega * Y)^(i-1) * z) /
  Biot_i - (kappa * omega)^(i-1) * z * tan((omega * Y)^(i-1) * z) (3)

> PI(1, z); PI(2, z)
z + Biot_1 * tan(z) / Biot_1 - z * tan(z)
kappa * omega * z + Biot_2 * tan(omega * Y * z) / Biot_2 - kappa * omega * z * tan(omega * Y * z) (4)

> EqVp := (z) -> Pi(1, z) + 1 / (kappa * omega) * Pi(2, z) # Problème de valeurs propres
EqVp := z -> Pi(1, z) + Pi(2, z) / (kappa * omega) (5)

> EqVp(1)
(1 + Biot_1 * tan(1)) / (Biot_1 - tan(1)) + (kappa * omega + Biot_2 * tan(omega * Y)) / (kappa * omega * (Biot_2 - kappa * omega * tan(omega * Y))) (6)

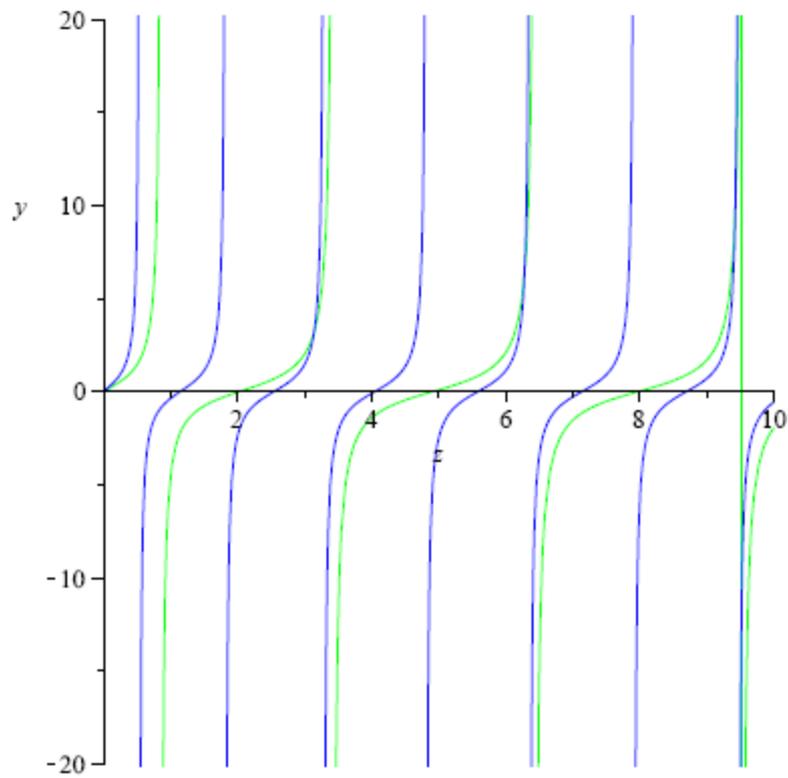
> kappa := 2; Y := 2; omega := 1; Biot[1] := 1; Biot[2] := 2
kappa := 2
Y := 2
omega := 1
Biot_1 := 1
Biot_2 := 2 (7)

> ord := 2; N := 34
ord := 2
N := 34 (8)

> plot([PI(1, z), PI(2, z)], z = 0..10, y = -10..10, ord = 10, color = [green, blue], discont = true)

```

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU



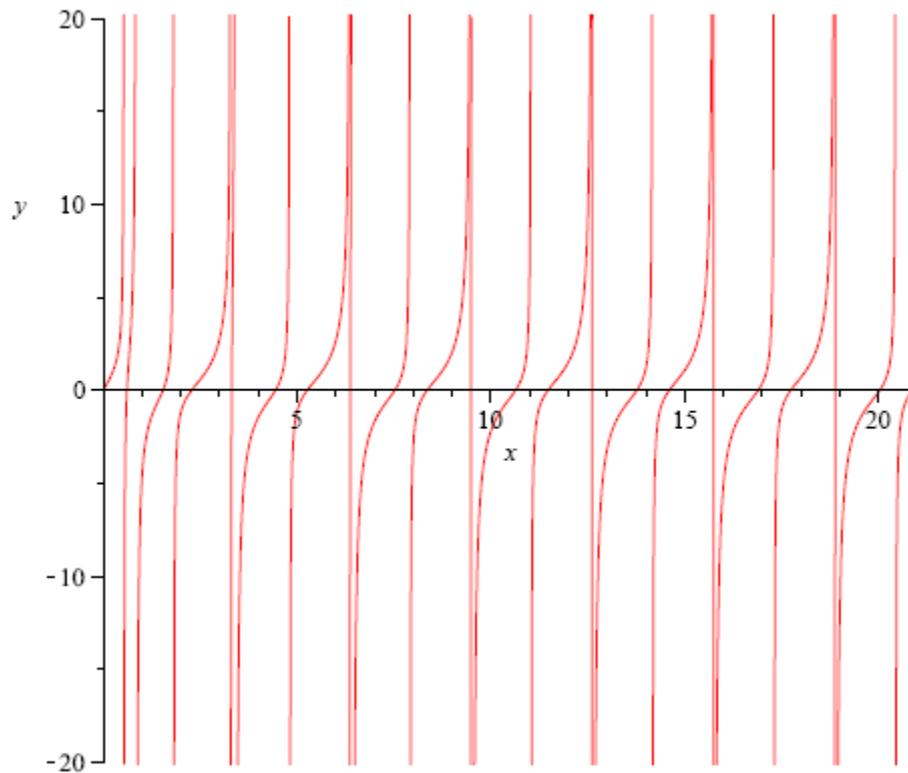
```

> EqVp(x)
      
$$\frac{x + \tan(x)}{1 - x \tan(x)} + \frac{1}{2} \frac{2x + 2 \tan(2x)}{2 - 2x \tan(2x)}$$

> plot(EqVp(x), x=0..21, y=-10 ord..10 ord, scont=true)# Figure 3.2
  
```

(9)

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU



(4) Newton Raphson Resolution

```

> 60, 10 N;
Tolerance := 10-5; Ni := 60; Nf := 100N
        60, 340
        Tolerance :=  $\frac{1}{100000}$ 
        Ni := 60
        Nf := 3400
    
```

(10)

```

> Sol := seq(Newton(EqVp(x), x =  $\frac{i}{100}$ , tolerance = Tolerance), i = Ni .. Nf)
    
```

[

Sol :=

1 .. 3341 Vector_{column}

Data Type: anything

Storage: rectangular

Order: Fortran_order

]

(11)

```

> for i from 1 to Nf - Ni do if Sol(i + 1) - Sol(i) ≤ 0.1 then Sol(i + 1) := Sol(i) end if end do
    
```

```

> Root := {op([seq(Sol(i), i = 1 .. Nf - Ni)])} # Table 3.1
    
```

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

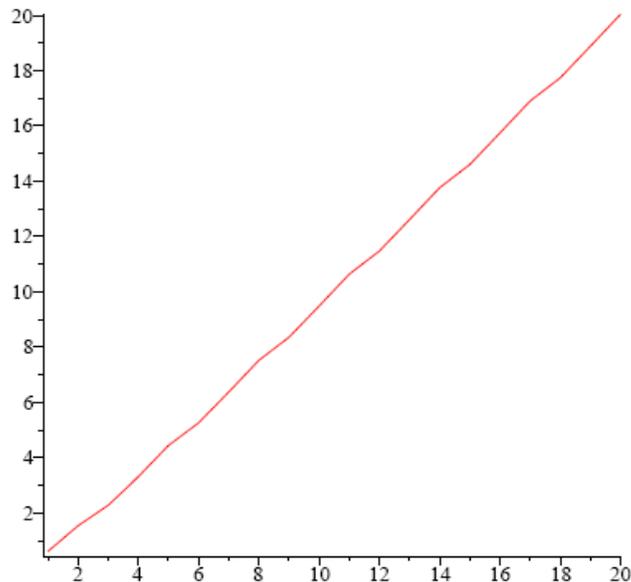
```
Root := {0.6150667210, 1.543656970, 2.284554887, 3.317342844, 4.445415022,
5.265238512, 6.376532181, 7.525451730, 8.358246804, 9.487788105, 10.64039750,
11.47714728, 12.61383971, 13.76724715, 14.60567801, 15.74601550, 16.89950431,
17.73879852, 18.88130418, 20.03466146, 20.87445608, 22.01838007, 23.17155125,
24.01166126, 25.15657609, 26.30955791, 27.14987933, 28.29552941, 29.44832622,
30.28879618, 31.43500030, 32.58763703, 33.42821530}
```

```
> Nr := nops(Root) - 13
Nr := 20
```

```
> seq(EqVp(Root[i]), i = 1 ..Nr)
5. 10-9, 1.5 10-9, 7. 10-10, -5.7 10-8, 4.1 10-9, -2.6 10-9, -0.00000256, 3.6 10-9, -2.8 10-9,
-0.00035366, 2.3 10-9, 2. 10-10, -0.00005674, 1.87 10-8, 4.5 10-9, -0.01831251, 2.15 10-8,
-2.2 10-9, -0.00021536, -2.8 10-9
```

```
> Matrix(2, Nr, [seq(Root[i], i = 1 ..Nr), seq(EqVp(Root[i]), i = 1 ..Nr)])
2 x 20 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order
```

```
> plot((seq(i, i = 1 ..Nr)))(seq(Root[i], i = 1 ..Nr))) # Figure 3.3
```



Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

```

> for n from 1 to Nr do beta := (n) → Root[n] end do:
> beta(1)

```

$$0.6150667210 \quad (16)$$

(5) Dimensionless Constants

```

> Tamb := 425; T01 := 300; T02 := 400; F := evalf( (Tamb - T02) / (Tamb - T01) );

```

$$Tamb := 425$$

$$T01 := 300$$

$$T02 := 400$$

$$F := 0.2000000000 \quad (17)$$

```

> c := (n) → (kappa / 2) * (1 + PI(1, n)^2) * (1 + 1 / (beta(n)^2 / Biot[1] + Biot[1])) + 1/2 * (1 + PI(2, n)^2) * (Y
+ 1 / (omega^2 * beta(n)^2 * kappa / Biot[2] + Biot[2] / kappa))

```

$$c := n \rightarrow \frac{1}{2} \kappa (1 + \Pi(1, n)^2) \left(1 + \frac{1}{\frac{\beta(n)^2}{Biot_1} + Biot_1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Pi(2, n)^2 \right) \left(Y + \frac{1}{\frac{\omega^2 \beta(n)^2 \kappa}{Biot_2} + \frac{Biot_2}{\kappa}} \right) \quad (18)$$

```

> Π := (i, n) → (kappa * omega)^(i-1) * beta(n) + Biot[i] * tan((omega * Y)^(i-1) * beta(n)) /
Biot[i] - (kappa * omega)^(i-1) * beta(n) * tan((omega * Y)^(i-1) * beta(n))
Π := (i, n) → (κ ω)^(i-1) β(n) + Biot_i tan((ω Y)^(i-1) β(n)) /
Biot_i - (κ ω)^(i-1) β(n) tan((ω Y)^(i-1) β(n))

```

$$(19)$$

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

```
> Theta(1, -1, 0); Theta(2, Y, 0); Theta(1, 0, 0); Theta(2, 0, 0)
0.9689509297
1.953085236
1.657302271
1.657305082 (30)
```

(6) Equilibrium Temperature T_{eq} Between The Two Slabs

```
> Ce := kappa.omega
Ce := 2 (31)
```

```
> Teq := evalf( (Ce*T02 + T01) / (Ce + 1) ) # Température d'équilibre instantané
Teq := 466.6666667 (32)
```

```
> Feq := (Tamb - Teq) / (Tamb - T01)
Feq := 1.666666667 (33)
```

(7) Normalized Results $\Theta \equiv (T_{amb} - T)/(T_{amb} - T01)$

(a) $\Theta(1, \xi, \tau)$, and $\Theta(2, \xi, \tau)$ # Résultats

```
> T := (xi, tau) -> piecewise(xi <= 0, Theta(1, xi, tau), xi >= 0, Theta(2, xi, tau))
T := (xi, tau) -> piecewise(xi <= 0, Theta(1, xi, tau), 0 <= xi, Theta(2, xi, tau)) (34)
```

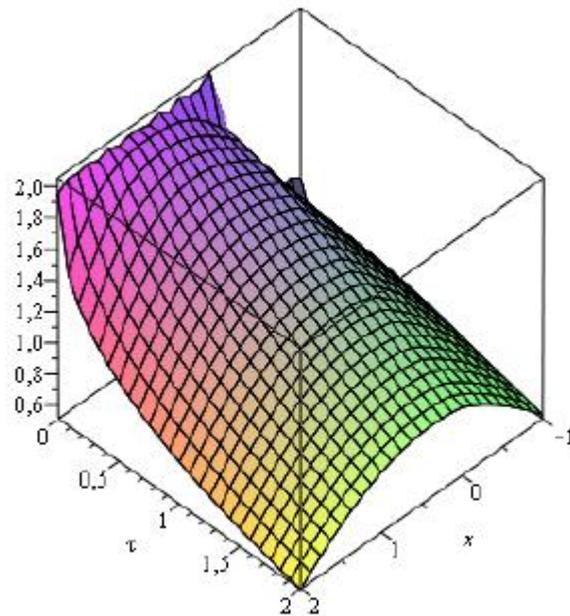
```
> Theta(1, x, tau) : Theta(2, x, tau) : Theta(1, -1, 0); T(-1, 0);
Theta(2, 2, 0); T(2, 0)
0.9689509297
0.9689509297
1.953085236
1.953085236 (35)
```

```
> tau_i := 0; tau_f := 10
tau_i := 0
tau_f := 10 (36)
```

```
> a := 5;
```

```
plot3d( T(x, tau), x = -1 .. Y, tau = tau_i / a .. tau_f / a, axes = boxed );
a := 5
```

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU



```

> Col := Vector[row]([ blue, red, green, black, yellow, orange, brown ])
   Col := [ blue red green black yellow orange brown ] (37)

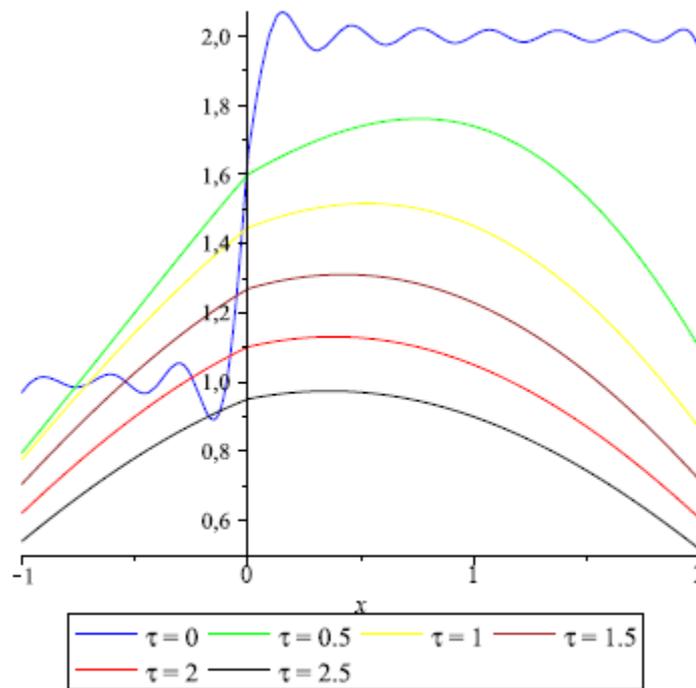
> Line := Vector[row]([ Solid, Dot, Dash, DashDot, LongDash, SpaceDot, SpaceDash ])
   Line := [ Solid Dot Dash DashDot LongDash SpaceDot SpaceDash ] (38)

> a := 5;
   a := 5 (39)

> plot( [ seq( T( x, tau/a ), tau = tau_i..tauf, 2 ) ], x = -1..1, color = [ seq( Col( tau mod 7 + 1 ), tau
= tau_i..tauf, 2 ) ], linestyle = [ seq( Line(1), tau = tau_i..tauf ) ], legend = [ "τ = 0", "τ = 0.5",
"τ = 1", "τ = 1.5", "τ = 2", "τ = 2.5" ] ); seq( Col( tau mod 7 + 1 ), tau = tau_i..tauf, 2);

```

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU



blue, green, yellow, brown, red, black

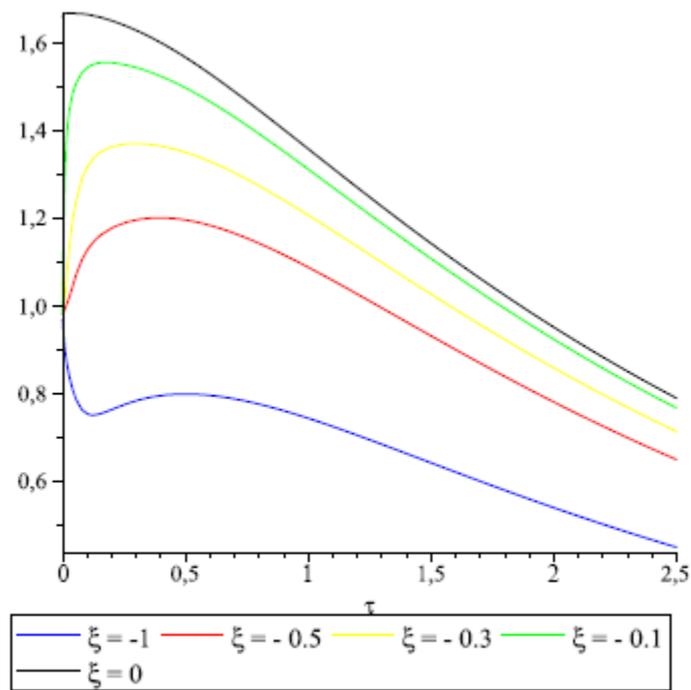
(40)

```

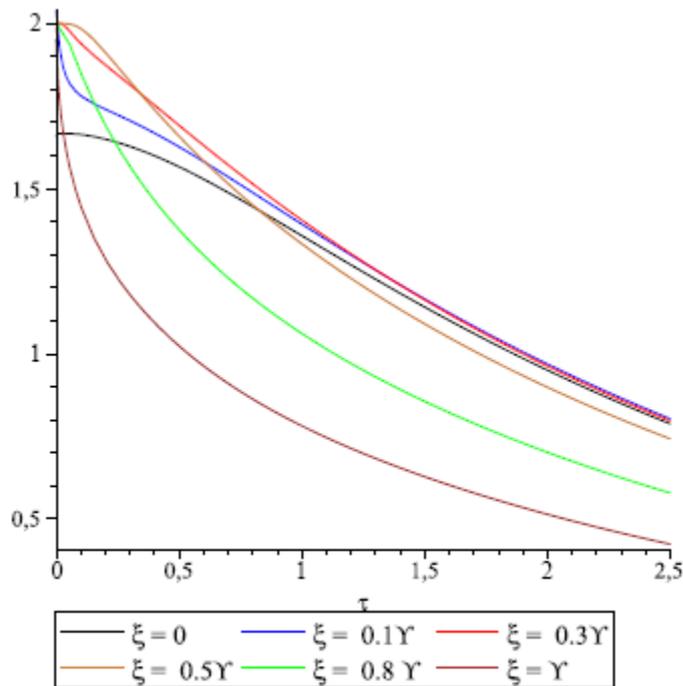
> x := < -1, -0.5, -0.3, -0.1, 0, 0.1 Y, 0.3 Y, 0.5 Y, 0.8 Y, Y > :
> a := 1;
plot([seq(Theta(1, x(x), tau), x = 1 ..5)], tau =  $\frac{\tau_{ui}}{a}$  ..  $\frac{\tau_{uf}}{4 a}$ , color = [blue, red, yellow,
green, black], linestyle = [seq(Line(1), x = 1 ..5)], legend = ["ξ = -1", "ξ = - 0.5",
"ξ = - 0.3", "ξ = - 0.1", "ξ = 0"]); [blue, red, yellow, green, black]; seq(x(i), i = 1 ..5);
plot([seq(Theta(2, x(x), tau), x = 5 ..10)], tau =  $\frac{\tau_{ui}}{a}$  ..  $\frac{\tau_{uf}}{4 a}$ , color = [black, blue, red, gold,
green, brown], linestyle = [seq(Line(1), x = 1 ..5)], legend = ["ξ = 0", "ξ = 0.1Y",
"ξ = 0.3Y", "ξ = 0.5Y", "ξ = 0.8 Y", "ξ = Y"]); [black, blue, red, yellow, green, brown];
seq(x(i), i = 5 ..10)
a := 1

```

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU



[blue, red, yellow, green, black]
-1, -0.5, -0.3, -0.1, 0



[black, blue, red, yellow, green, brown]
0, 0.2, 0.6, 1.0, 1.6, 2

(41)

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

$$\begin{aligned}
 & \text{(8) Study of jumps and drops} \\
 & \left[\begin{array}{l}
 > T01 := \langle 300, 325, 350, 375, 400, 425, 450, 475, 500, 525, 550, 575, 600, 625, 650 \rangle : \\
 > \text{for } i \text{ from } 1 \text{ to } 15 \text{ do } T02(i) := T01(i) + 100 \text{ end do:} \\
 > T02(15)
 \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l}
 > Tamb := \langle 425, 455, 485, 515, 545, 450, 480, 510, 580, 600, 525, 540, 555, 570, 580 \rangle : \\
 > \text{for } i \text{ from } 1 \text{ to } 15 \text{ do } F(i) := \text{evalf}\left(\frac{Tamb(i) - T02(i)}{Tamb(i) - T01(i)}\right) \text{ end do:} \\
 > \text{seq}(F(i), i = 1 .. 15)
 \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l}
 > \text{for } i \text{ from } 1 \text{ to } 15 \text{ do } Teq(i) := \text{evalf}\left(\frac{Ce \cdot T02(i) + T01(i)}{Ce + 1}\right) \text{ end do:} \\
 > \text{for } i \text{ from } 1 \text{ to } 15 \text{ do } Freq(i) := \text{evalf}\left(\frac{Ce \cdot F(i) + 1}{Ce + 1}\right) \text{ end do:} \\
 > \text{seq}([Teq(i), Freq(i)], i = 1 .. 15)
 \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Nomenclature

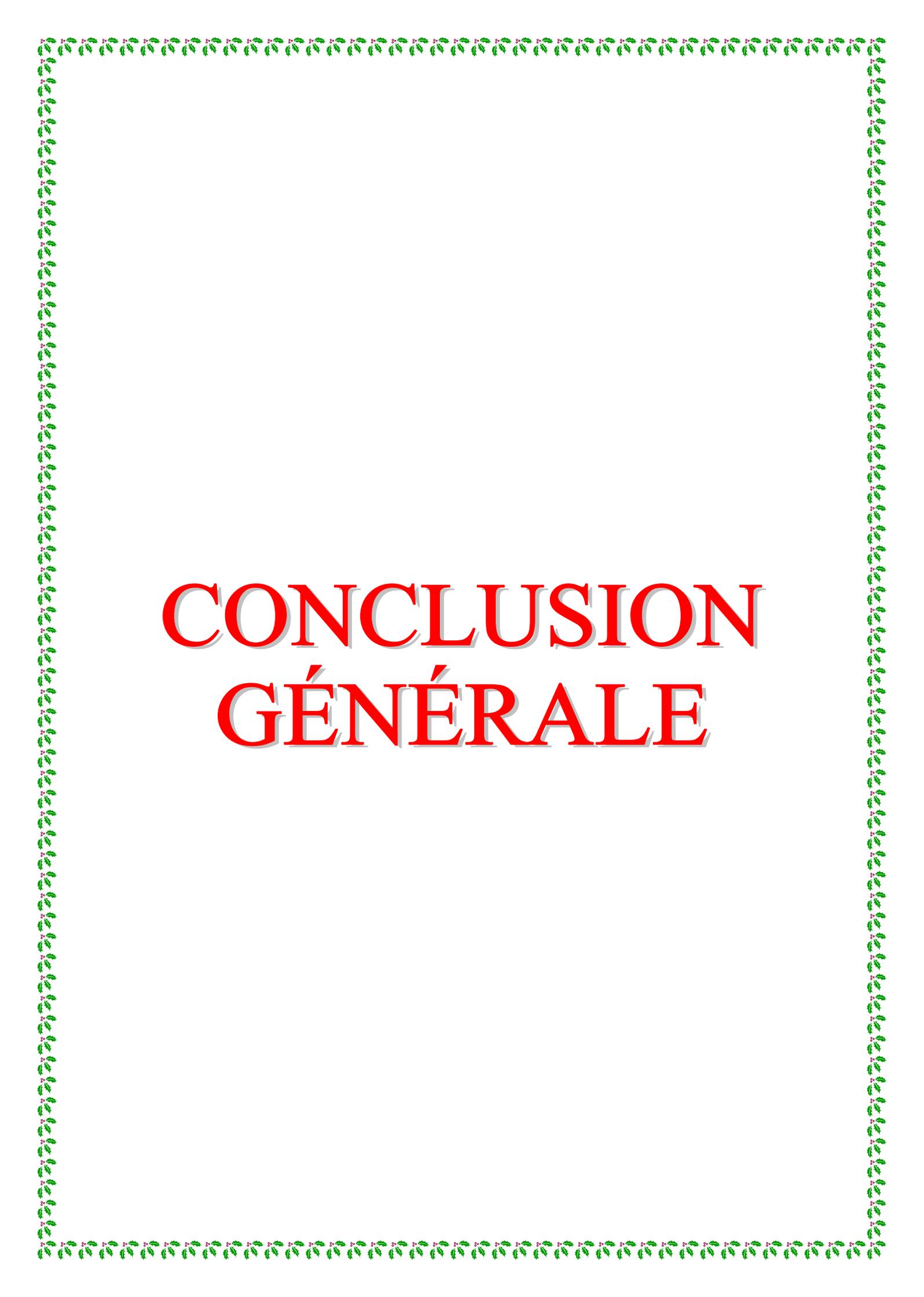
i	L'index de couche ($i = 1, 2$)
T_i	Température de la couche i (K)
T_{amb}	Température ambiante (K)
T_{0i}	Température initiale de la couche i (K)
θ_{0i}	Différence initiale de température (K)
θ_i	Différence de température (K)
a_i	Épaisseur de la couche i (m)
k_i	Conductivité ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
α_i	Diffusivité ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
Cp_i	Chaleur spécifique ($\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
ρ_i	Masse volumique ($\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
h_i	Coefficient de convection ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$)
$\omega = \sqrt{\alpha_1 / \alpha_2}$	Diffusivité adimensionnelle

Chapitre III : ETUDE DE L'EQUILIBRE INSTANTANE ENTRE DEUX COUCHES DANS UN MATERIAU

$\kappa = k_2/k_1$	Conductivité adimensionnelle
$\gamma = a_2/a_1$	Epaisseur adimensionnel
$Biot_i = h_i a_1/k_1$	Nombres de Biot
β	Valeur propre adimensionnelle
$\tau = \alpha_1 t/a_1^2$	Temps adimensionnel
$\xi = x/a_1$	Position adimensionnelle
F	Température initiale adimensionnelle
Θ_i	Température adimensionnelle

Références

- [1] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.
- [2] F. De Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000
- [3] S. Filipov and I. Faragó, *Implicit Euler time discretization and FDM with Newton method in non-linear heat transfer modeling*. International Scientific Journal, Mathematical Modeling, Vol. 2 pp. 94-98, 2018.
- [4] F. De Monte, [An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media](#), International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 45, pp. 1333-1343, 2002.
- [5] F. De Monte, [Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results](#), International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 46, pp. 1455-1469, 2003.
- [6] H. Belghazi, M. El Ganaoui and J. C. Labbe, *Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source*, [International Journal of Thermal Sciences, Vol. 49, Issue 2](#), pp. 311-318, 2010.
- [7] Toufik Sahabi, Smain Balaska. Analytical one-dimensionless study of unsteady heat transfer in bilayer, and three-layer materials. 2020. (hal-02966165).
- [8] F. De Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000.
- [9] H. Belghazi, *Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement*, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2008.



CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion Générale

On a vu dans ce mémoire que le transfert de chaleur par conduction peut être décrit par la résolution de l'équation de chaleur. Après la résolution de cette équation à une dimension par la méthode de séparation de variables on arrive à un problème de valeurs propres apparent dans les solutions. La méthode de Newton est implantée dans le programme Maple pour calculer ces valeurs à une tolérance relative de 10^{-5} .

Les solutions montrent comment les températures des deux couches s'interagissent en arrivant à un équilibre dit instantané de quelques instants puis l'équilibre final s'établit. Selon la température d'équilibre instantané et l'équilibre final, on observe soit des chutes ou des sauts des températures de la couche chaude ou froide respectivement.

On propose d'étudier des systèmes plus complexes en termes de dimension(2 et 3). Cela peut être l'objectif d'un futur travail.

ملخص

في هذه المذكرة تم دراسة التوازن الحراري المؤقت بين طبقتين معدنيتين بحرارتين ابتدائيتين مختلفتين، وذلك بحل المعادلة التفاضلية للحرارة في البعد الأحادي. استعملنا الطريقة التحليلية بفصل المتغيرات، ثم طريقة نيوتن لإيجاد ما سميناه بالقيم الذاتية. وجدنا أن هذا التوازن يكون عبارة عن قفزات مؤقتة لدرجة حرارة الطبقة الباردة، وهذا عندما تكون درجة حرارة الغرفة أقل من درجة حرارة التوازن المؤقت، أو في الحالة الثانية، يكون عبارة عن سقطات مؤقتة لدرجة حرارة الطبقة الساخنة، وهذا عندما تكون درجة حرارة الغرفة أكبر من درجة حرارة التوازن المؤقت.

Abstract

In this work, the unsteady thermal equilibrium between two material layers with two different initial temperatures was studied by solving the differential equation for heat in one dimension. We used the analytical method by separating the variables, and then Newton's method to find what we called the eigenvalues. We found that this equilibrium is a temporary jumps in the temperatures of the cold layer and this is when the ambient temperature is less than the unsteady equilibrium temperature, or in the second case, it is temporary drops in the temperature of the hot layer and this is when the room temperature is greater than the unsteady equilibrium temperature

Résumé

Dans ce mémoire, l'équilibre thermique instantané entre deux couches dans un matériau avec deux températures initiales différentes a été étudié en résolvant l'équation différentielle de la chaleur à une dimension. Nous avons utilisé la méthode analytique en séparant les variables puis la méthode de Newton pour trouver ce qu'on appelle les valeurs propres. Nous avons constaté que cet équilibre est manifesté sous forme des sauts temporaires de la température de la couche froide, et c'est lorsque la température ambiante est inférieure à la température d'équilibre instantané, ou dans le second cas, il s'agit des chutes temporaires de la température de la couche chaude et c'est lorsque la température ambiante est supérieure à la température d'équilibre instantané.