Année: 2013 Né attribué par la bibliothéque

Algèbres Tensorielles

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplome de

Licence

Université Dr : Tahar Moulay de Saida

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse fonctionnelle

par

Tayyib **B**enmansour et **M**ohamed **A**ibout

Sous la direction de

Encadreur : M^r **D.Djebbouri**

Soutenue le 10/juin/2013 devant le jury composé de
Messieurs :

M. Kadhi	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Président
D. Djebbouri	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Directeur de thèse
R. Nasri	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Examinateur

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes parents pour leur dévouement, leur compréhension et leur grande tendresse. Je souhaite que Dieu leur préserve une longue vie.

A mes frères et mes soeurs "Samir, Nadjet, Cheik, Sitti,Ali et Sihem" pour leur encouragement et leur affection.

Sons oublier ma grande mère, mes ancles et mes tantes grâce à leur bénédiction.

A mes adorables "Benmansour Tayyib".

A la famille Aibout et Bouzouira "au sens large".

Et le dernièr dédicace passe à mes amis "Benhamada Nour eldine, Moh la vie, Dahah, A.Mostafa,Abbas ,Reda,Haddje, kadiro, D.Amine, D.Haddje , A.khalifa, Shoule , Mokhtar, Sadik, Amara, pedro, Hanane, Zohra, Hala, Fatima,Ouda,Frayha,Ahlam, Tayab". Pour leur gentillesse et leur soutien.

Finalement je dédie ce travail à toute la promotion 2012/2013.

Aibout Mohamed

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes parents pour leur dévouement, leur compréhension et leur grande tendresse. Je souhaite que Dieu leur préserve une longue vie.

A mes frères et mes soeurs "Nesredin, Massoud, Khadidj, Houda" pour leur encouragement et leur affection.

A mes ancles, mes tentes et mes cousins "Hadje Tayeb, Hadje Mokhtar, Mohamed, Elhadje, Hadje Mhamad, Ali, Abdelkader, Mehidi, Mohamed, Amer, Abdalla, Ossama, Abdelbasset, Mokhtar".

A mes amies " T.Nedjadi, M.Bossoltan, A.Abdelkader, A.Bachir, A.Hamid, D.Tayeb, T.Mohamed, B.Mokhtar, B.Morade, B.Omar ".

A mes collegues "Lakhder, Shoule, Mokhtar, Abdalla, Hassanalbasri, Sadik, Amara, Hanane, Zohra, Hala, Fatima, Ouda, Frayha, Ahlam "

Le dernier dédicace, le plus important, va à ma trés chere amie "Aibout Mohamed" pour son soutien et son affection.

Finalement je dédie ce modeste travail aux les deux familles "Benmansour" et "Benouis"et ceux qui ont contribués de prêt ou de loin l'aboutissement de mon travail.

Benmansour Tayyib

Remerciements

En premier lieu, on tient à remercier notre " Dieu " qui nous à donner le courage et la volonté pour réaliser ce travail.
Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à notre directeur de mémoire monsieur "Djebbouri Djelloul", pour la confiance qu'il nous avons témoignée en nous accueillons au sein de son laboratoire et de nous avoir proposées ce sujet de mémoire dont les cours et les travaux ont été pour nous une source d'inspiration. Nous voudrions également lui exprimer nos remerciements pour la direction de ce travail et les moyens mîmes à notre disposition pour terminer notre mémoire. Nous le remercions profondément pour sa disponibilité, ses orientations et ses remarques fructueuses. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.
Nos remerciements s'adressent également à monsieur "M.Kadhi", maître assistant à l'université "Dr.Tahar Moulay" de Saida, pour nous avoir honorées de sa présence et pour l'intérêt qu'il a accordé à ce travail en acceptant de présider le jury.

Nous avons très sensiblons à l'honneur que nous avons fait monsieur "R.Nasri" maître assistant à l'université "Dr.Tahar Moulay" de Saida, pour nous avoir honoré de sa présence en acceptant d'être examinateur de ce travail et de le juger.

Nous remercions profodément monsieur "S.Ouakkas" maître de conférences à l'université "Dr.Tahar Moulay" de Saida, Pour ses efforts en matière d'éducation.

Nous tenons à remercier à titre individuel nos enseignants : S.Ouakkas, S.Abbas, K.Djerfi, M.Belmekki, A.Azzouz, A.Kandouci, F.Hathout, O.Bennihi, A.Kaddouri, H.Dida, F.Mokhtari, M^{elle}.Benziadi, F.Benziadi, M^{elle}.Abasse. A toutes et à tous nous leur disons merci.

Saida,...... 2013.

Table des matières

1 Produits scalaires généralisés **13**

1.1 Définition et premières propriétés 13

1.2 Angles et orthogonalité 18

1.2.1 Angle formé par deux vecteurs 19

1.3 Bases orthogonales et méthode de Gram-Schmidt 24

1.4 Matrices orthogonales 31

1.4.1 Définition et Propriétés 31

1.4.2 Changement de bases orthonormées 32

1.4.3 Décomposition Q-R : 33

2 Applications multilinéaires et tenseurs **37**

2.1 Formes linéaires 37

2.1.1 Formes linéaires sur V : tenseurs d'ordre$(0,1)$ 37

2.1.2 Espace dual, bases duales 38

2.1.3 Formes linéaires sur V* : tenseurs d'ordre $(1,0)$ 40

2.2 Formes multilinéaires sur V : tenseurs d'ordre $(0,m)$ 41

2.2.1 Formes bilinéaires sur V : tenseurs d'ordre $(0,2)$ 41

2.2.2 Tenseurs d'ordre $(0,m)$ 43

2.2.3 Quelques interprétations physiques 44

2.3 Formes multilinéaires sur V* ;tenseurs d'ordre$(m,0)$ 44

2.3.1 Une remarque sur les tenseurs d'ordre $(1,0)$ 44

2.3.2 Formes bilinéaires sur V* :tenseurs d'ordre $(2,0)$ 45

2.3.3 Tenseurs d'ordre $(m,0)$ 46

3 Tenseurs mixtes d'ordre (p,q) 47
3.1 Tenseurs d'ordre (p,q) . . . 47
3.1.1 Exemple des tenseurs d'ordre $(1,1)$ . . . 47
3.2 Opérations sur les tenseurs . . . 49
3.3 Changement de bases . . . 50
3.3.1 Cas des tenseurs d'ordre $(1,0)$ (vecteurs de V) . . . 51
3.3.2 Cas des tenseurs d'ordre $(0,1)$(formes linéaires surV) . . . 51
3.3.3 Cas des tenseurs $(0,2)$(formes bilinéaires sur V) . . . 53
3.3.4 Cas des tenseurs $(2,0)$ (formes bilinéaires sur V^*) . . . 53
3.3.5 Cas des tenseurs d'ordre $(1,1)$ . . . 54
3.3.6 Cas des tenseurs d'ordre (p,q) . . . 54
3.4 Champs tensoriels . . . 54
3.4.1 Définitions . . . 54
3.4.2 Changements de coordonnées . . . 55
3.4.3 Cas d'un champ tensoriel d'ordre $(1,0)$ (champ vectoriel) . . . 56
3.4.4 Cas d'un champ tensoriel d'ordre $(0,1)$ . . . 56
3.4.5 Cas d'un champ quelconque . . . 57

Introduction

En mathématiques, plus précisément en algèbre multilinéaire et en géométrie différentielle, un tenseur désigne un objet très général, dont la valeur s'exprime dans un espace vectoriel. On peut l'utiliser entre autres pour représenter des applications multilinéaires ou des multivecteurs. On pourrait abusivement considérer qu'un tenseur est une généralisation à n indices du concept de matrice carrée (la matrice possède un indice ligne et un indice colonne - un tenseur peut posséder un nombre arbitraire d'indices inférieurs, covariants, et d'indices supérieurs, contravariants, à ne pas confondre avec des exposants), mais la comparaison s'arrête là car une matrice n'est qu'un simple tableau de nombres qui peut être utilisé pour représenter des objets abstraits, alors que le tenseur est, comme les vecteurs et les applications multilinéaires, un objet abstrait dont les coordonnées changent lorsqu'on passe d'une représentation dans une base donnée à celle dans une autre base.
Dans tous ces cas, le terme tenseur est souvent utilisé par extension, pour désigner un champ de tenseurs, c'est-à-dire une application qui associe à chaque point d'un espace géométrique un tenseur différent. En physique et en sciences de l'ingénieur, les tenseurs sont utilisés pour décrire et manipuler diverses grandeurs et propriétés physiques comme le champ électrique, la permittivité, lesdéformations, les contraintes etc. La première utilisation de la notion et du terme de tenseur s'est faite dans le cadre de la mécanique des milieux continus, en relation avec la nécessité de décrire les contraintes et les déformations subies par les corps étendus, à partir de laquelle fut formalisée la mécanique rationnelle. En particulier, le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sont utilisés dans la science des constructions pour définir l'état de tension et de déformation en tout point d'une structure. Outre la mécanique

des fluides et mécanique du solide, les tenseurs sont utilisés dans de nombreux autres domaines de la physique, tels que l'électromagnétisme. Ils sont également largement utilisés en relativité générale, pour décrire rigoureusement l'espace-temps comme variété courbe quadri-dimensionnelle.

Dans le premier chapitre, nous allons étudier plus en détail la notion du produit scalaire généralisé et leurs propriétés. Ainsi orthogonalisation par la méthode de Gram-Schmidt.

Le deuxième chapitre consacré à l'étude de la notion du tenseur, on a vu deux types de tenseur ; tenseurs d'ordre $(0, m)$ et tenseurs d'ordre $(m, 0)$. On s'intéresse dans premier temps aux tenseurs de types $(0, 1)$, $(1, 0)$ et d'ordre $(0, 2)$. En fin quelques interprétations physiques.

Le troisième chapitre, on s'intéresse aux tenseurs mixtes d'ordre (p, q) et on donne des exemples, puis nous allons faire les opérations, l'addition et la multiplication par un scalaire, pour avoir une structure d'espace vectoriel. A la fin de ce chapitre on définit la notion du champ tensoriel.

En fin une courte bibliographie des ouvrages de base pour ce travail.

Chapitre 1

Produits scalaires généralisés

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1.1. *Soit V un espace vectoriel. Alors un produit scalaire généralisé sur V est par définition une application*

$$\begin{array}{rcccl} <,> & : & \mathbf{V} \times \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \mapsto & <u,v> \end{array}$$

ayant les propriétés

1. $<u,v>=<v,u>$ *symétrie*
2. $<u+v,w>=<u,w>+<v,w>$ *additivité*
3. $<\lambda u,v>=\lambda<u,v>$ *homogénéïté*
4. $<v,v>\geq 0$ *positivité*
5. $<v,v>=0 \Leftrightarrow v=0$

pour tout $u,v,w \in \mathbf{V}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemple 1.1.1. *Produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. Dans cet exemple, on a*

$$\mathbf{V}=\mathbb{R}^n$$

et

$$<u,v>=u \bullet v$$

ou $\bullet$ *est le produit scalaire sur le plan*

le produit scalaire euclidien (produit scalaire habituel) de $\mathbb{R}^n$*. Les propriétés (1) - (5) sont vérifiées dans cet exemple.*

Exemple 1.1.2. *Soient* $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *. Posons*

$$< u, v >= 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

Alors $<,>$ *est un produit scalaire généralisé sur* $\mathbb{R}^2$*. Vérifions les propriétés (1) - (5) :*
(1) On a

$$\begin{aligned} < u, v > &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \\ &= 3v_1u_1 + 2v_2u_2 \\ &= < v, u > . \end{aligned}$$

(2) Soit $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$*. Alors*

$$\begin{aligned} < u + v, w > &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= < u, w > + < v, w > . \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} < \lambda u, v > &= 3(\lambda u_1)v_1 + 2(\lambda u_2)v_2 \\ &= \lambda(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\ &= \lambda < u, v > . \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} < v, v > &= 3v_1v_1 + 2v_2v_2 \\ &= 3v_1^2 + 2v_2^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} < v, v > &= 3v_1^2 + 2v_2^2 \quad = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v_1 = 0 \qquad v_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v = 0. \end{aligned}$$

Définition 1.1.2. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$ *. Alors on définit la norme (ou longueur) d'un vecteur* $v \in \mathbf{V}$ *par la formule*

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

La distance entre $u, v \in \mathrm{V}$ *est même par définition*

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Exemple 1.1.3. *Norme et distance dans* $\mathbb{R}^n$*. Lorsque* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^n$ *et* $<,>$ *est le produit scalaire habituel* $< u, v >= u \bullet v$*, on retrouve les notions habituelles de norme et de distance dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 1.1.4. *Soit* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$*. On obtient des notions de norme et de distance différentes selon le produit scalaire généralisé choisi. Soient* $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*.*
Si l'on choisit le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^2$*, on a*

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ &= \sqrt{1+0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| \\ &= \| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \| \\ &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Si l'on choisit le produit scalaire généralisé $< u, v >= 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ *on obtient*

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{< u, u >} \\ &= \sqrt{3u_1^2 + 2u_2^2} \\ &= \sqrt{3+0} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \|u-v\| \\ &= \sqrt{<\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}>} \\ &= \sqrt{3+2} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Définition 1.1.3. *(Cercle unité (ou sphère unité)). Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$ *. Alors le cercle unité, ou sphère unité de* V *est par définition l'ensemble des* $u \in \mathrm{V}$ *tels que*

$$\|u\| = 1.$$

Ce sont les éléments de V *dont la distance à l'origine est égale à 1.*

Exemple 1.1.5. *Soit* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$ *et* $<,>$ *le produit scalaire habituel. Soit* $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Alors*

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et l'équation du cercle unité est alors $\sqrt{x^2+y^2} = 1$ *ou*

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Exemple 1.1.6. *Soit* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$ *muni du produit scalaire généralisé*

$$< u, v >= 3u_1v_1 + 2u_2v_2.$$

soit $w = (x, y)$*. Alors*

$$\|w\| = \sqrt{3x^2 + 2y^2}$$

ce qui donne $\sqrt{3x^2+2y^2} = 1$ *ou*

$$3x^2 + 2y^2 = 1$$

comme équation pour le cercle unité. Le graphe de cette équation est une ellipse.

Définition 1.1.4. *Soit* A *une matrice de taille* $n \times n$ *inversible. Le produit scalaire généralisé associé à* A *est, par définition, le produit scalaire sur* $\mathbb{R}^n$ *qui à* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *associe*

$$\mathrm{A}u \bullet \mathrm{A}v$$

(le produit scalaire habituel de Au et de Av).

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ *représentés comme vecteurs colonne, et on a*

$$\mathrm{A}u \bullet \mathrm{A}v = (\mathrm{A}v)^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u$$

et ceci conduit à une nouvelle formulation de ce produit scalaire généralisé :

$$< u, v >= v^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u.$$

Notons que lorsque $\mathrm{A} = \mathrm{I}$, *on obtient le produit scalaire habituel* $< u, v >= u \bullet v$.

Exemple 1.1.7. *Soit*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors le produit scalaire généralisé associé à A *est*

$$\begin{aligned} < u, v > &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le produit scalaire de l'exemple (1.1.2).

Proposition 1.1.1. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$. *Alors, pour tout* u, v *et* $w \in \mathrm{V}$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

(a) $< 0, v >=< v, 0 >= 0$

(b) $< u, \lambda v >= \lambda < u, v >$

(c) $< u, v + w >=< u, v > + < u, w >$.

Démonstration *: Ceci découle immédiatement des propriétés du produit scalaire :*

(a) $< 0, v >= 0 < 0, v >= 0$ *et* $< v, 0 >=< 0, v >= 0$.

(b) $< u, \lambda v >=< \lambda v, u >= \lambda < v, u >= \lambda < u, v >$.

(c) $< u, v + w >=< v + w, u >=< v, u > + < w, u >=< u, v > + < u, w >$.

1.2 Angles et orthogonalité

Proposition 1.2.1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<, >$ *. Soient* $u, v \in \mathrm{V}$*. Alors on a*

$$| < u, v > | \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Démonstration *: Si* $u = 0$*, alors on a*

$$< u, v >= 0,$$

donc l'affirmation est vraie. Supposons que $u \neq 0$*, et posons*

$$\begin{aligned} a &= \ < u, u > \\ b &= 2 < u, v > \\ c &= \ < v, v > . \end{aligned}$$

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned} 0 \leq < tu + v, tu + v > &=< u, u > t^2 + 2 < u, v > t + < v, v > \\ &= at^2 + bt + c. \end{aligned}$$

Donc

$$at^2 + bt + c \geq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$*. Ceci implique que le polynôme quadratique*

$$a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$$

a soit une racine double, soit aucune racine réelle.

Son discriminant est donc négatif ou nul :

$b^2 - 4ac \leq 0$. *Remplaçant* a *par* $< u, u >$, b *par* $2 < u, v >$ *et* c *par* $< v, v >$, *on obtient*

$$4 < u, v >^2 - 4 < u, u >< v, v > \leq 0$$

ce qui implique

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v >$$

donc

$$|< u, v >| \leq \sqrt{< u, u >< v, v >} = \|u\| \cdot \|v.\|$$

Proposition 1.2.2. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$. *Alors on a, pour tout* $u, v \in$ V *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) $\|u\| \geq 0$

(b) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

(c) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$

(d) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *inégalité du triangle*

Démonstration *: La démonstration est verification immediat en appliquant les propriétes au produit scalaire*

Corollaire 1.2.1. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé. Alors, pour tout* u, v *et* $w \in$ V *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

(a) $d(u, v) \geq 0$

(b) $d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$

(c) $d(u, v) = d(v, u)$

(d) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ *inégalité du triangle*

Démonstration *: Ceci est une conséquence immédiate des définitions et du proposition précédente.*

1.2.1 Angle formé par deux vecteurs

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé $<,>$. Soient $u, v \in$ V. Alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a si $u \neq 0$ et $v \neq 0$

$$\left(\frac{<u,v>}{\|u\| \cdot \|v\|} \right)^2 \leq 1$$

donc

$$-1 \leq \frac{< u, v >}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Il existe donc un unique angle θ, avec $0 \leq \theta \leq \pi$, tel que

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

On appelle θ l'angle formé par les vecteurs u et v.

Définition 1.2.1. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$. *Soient* $u, v \in \mathrm{V}$. *On dit que* u *et* v *sont orthogonaux si et seulement si*

$$< u, v >= 0.$$

Exemple 1.2.1. *Soit* $\mathcal{P}_2$ *l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus 2. On définit un produit scalaire généralisé sur* $\mathcal{P}_2$ *en posant*

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

pour tout $p, q \in \mathcal{P}_2$. *Les axiomes du produit scalaire généralisé sont faciles à vérifier. On a, par exemple, la positivité : pour tout* $p \in \mathcal{P}_2$, *on a*

$$< p, p >= \int_{-1}^{1} p^2(x)\,dx \geq 0.$$

Soient

$$p(x) = x$$

et

$$q(x) = x^2$$

alors p *et* q *sont orthogonaux. En effet*

$$\begin{aligned} < p, q > &= \textstyle\int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx \\ &= \textstyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.3. *(Théorème de Pythagore généralisé). Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé. Soient $u, v \in \mathrm{V}$, et supposons que u et v soient orthogonaux. Alors*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Démonstration *: Comme u et v sont orthogonaux, on a*

$$< u, v >= 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= < u+v, u+v > \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v > \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Exemple 1.2.2. *Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus* 2, *muni du produit scalaire généralisé défini dans l'exemple* 1.2.1.

Soient $p(x) = x$ et $q(x) = x^2$. Nous avons vu que p et q sont orthogonaux. Calculons $\|p\|^2, \|q\|^2$, et $\|p+q\|^2$:

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &=< p, p > \\ &= \int_{-1}^{1} x^2\,dx \\ &= \tfrac{2}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|q\|^2 &=< q, q > \\ &= \int_{-1}^{1} x^4\,dx \\ &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|p+q\|^2 &=< p+q, p+q > \\ &= \int_{-1}^{1} (x+x^2)(x+x^2)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^4+2x^3+x^2)\,dx \\ &= \tfrac{16}{15} \end{aligned}$$

On a bien

$$\|p\|^2 + \|q\|^2 = \|p+q\|^2$$

Définition 1.2.2. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé, et soit* W *un sous-espace vectoriel de* V. *On dit que $u \in \mathrm{V}$ est orthogonal à* W *si u est orthogonal à tout élément de* W. *L'ensemble des $u \in \mathrm{V}$ qui sont orthogonaux à* W *est appelé le complément orthogonal de* W. *il est noté $\mathrm{W}^{\perp}$.*

Proposition 1.2.4. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé, et soit* W *un sous-espace vectoriel de* V. *Alors on a*

(a) $W^{\perp}$ *est un sous-espace vectoriel de* V.

(b) $W \bigcap W^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration :

(a) *On a* $< 0, w >= 0$ *pour tout* $w \in \mathrm{W}$, *donc* $0 \in \mathrm{W}^{\perp}$. *Montrons que* $\mathrm{W}^{\perp}$ *est formé par addition et par multiplication par les scalaires. Soient*

$$u, v \in \mathrm{W}^{\perp}.$$

Alors

$$< u, w >=< v, w >= 0$$

pour tout $w \in \mathrm{W}$. *On a donc*

$$\begin{aligned} < u + v, w > &=< u, w > + < v, w > \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $w \in \mathrm{W}$ *ce qui montre que*

$$u + v \in \mathrm{W}^{\perp}.$$

De même, si $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\begin{aligned} < \lambda u, w > &= \lambda < u, w > \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $w \in \mathrm{W}$ *et donc* $\lambda u \in \mathrm{W}^{\perp}$.

(b) *Soit* $v \in \mathrm{W} \bigcap \mathrm{W}^{\perp}$. *Alors*

$$< v, v >= 0$$

et donc

$$v = 0.$$

Proposition 1.2.5. *Soit* A *une matrice de taille* $m \times n$*. Alors*

(a) *Par rapport au produit scalaire habituel de* $\mathbb{R}^n$*, le complément orthogonal de l'espace des lignes de A est le nilespace (noyau) de A.*

(b) *Par rapport au produit scalaire habituel de* $\mathbb{R}^m$*, le complément orthogonal de l'espace des colonnes de A est le nilespace de* A^T*.*

Démonstration :

(a) *Soit W l'espace des lignes de* A*. Soit* $v \in \mathrm{W}^\perp$*. Soient* $\ell_1, ..., \ell_m$ *les vecteurs ligne de A. Alors*

$$\ell_1 \bullet v = \ell_2 \bullet v = ... = \ell_m \bullet v = 0.$$

Or, nous avons vu que le système linéaire

$$\mathrm{A}x = 0$$

peut étre exprimé par

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \bullet & x \\ \ell_2 & \bullet & x \\ & \vdots & \\ \ell_m & \bullet & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\ell_1 \bullet v = \ell_2 \bullet v = \cdots = \ell_m \bullet v = 0$*, le vecteur* v *est une solution de ce système. Par définition, ceci implique que* v *est dans le nilespace de* A*. Réciproquement, supposons que* v *est dans le nilespace de* A*, autrement dit*

$$\mathrm{A}v = 0.$$

Alors on a

$$\ell_1 \bullet v = \ell_2 \bullet v = \ldots = \ell_m \bullet v = 0.$$

Soit $w \in \mathrm{W}$*. Alors* w *est combinaison linéaire de* $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m.$*, c'est-à-dire que l'on a*

$$w = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \ldots + \lambda_m \ell_m$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$*. On a donc*

$$\begin{aligned} w \bullet v &= (\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \ldots + \lambda_m \ell_m) \bullet v \\ &= \lambda_1(\ell_1 \bullet v) + \lambda_2(\ell_2 \bullet v) + \ldots + \lambda_m(\ell_m \bullet v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $v \in \mathrm{W}^{\perp}$. *Ceci démontre la partie (a) du proposition.*

(b) *On applique (a) à la matrice* $\mathrm{A}^{\top}$: *en effet, l'espace des colonnes de* A *est égal à l'espace des lignes de* $\mathrm{A}^{\top}$.

1.3 Bases orthogonales et méthode de Gram-Schmidt

Définition 1.3.1. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé . Soit*

$$\mathrm{S} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

un sous-ensemble de V. *On dit que* S *est un ensemble orthogonal si* v_i *est orthogonal à* v_j *pour tout* $i \neq j$. *On dit que S est un ensemble orthonormé si* S *est orthogonal et si*

$$\|v_i\| = 1$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. *Un ensemble orthogonal qui est une base est appelé une base orthogonale ; un ensemble orthonormé qui est une base est appelé une base orthonormée.*

Proposition 1.3.1. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$, *et soit* $\mathrm{S} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *une base orthonormée de* V. *Soit* $u \in \mathrm{V}$. *Alors*

$$u =< u, v_1 > v_1 + \cdots + < u, v_n > v_n.$$

Démonstration : *Comme S est une base, il existe* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

On a

$$\begin{aligned} < u, v_i > &=< \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, v_i > \\ &= \lambda_1 < v_1, v_i > + \cdots + \lambda_n < v_n, v_i > . \end{aligned}$$

Or, comme $< v_j, v_i >= 0$ *si* $i \neq j$ *et* $< v_i, v_i >= \|v_i\|^2 = 1$, *on a*

$$< u, v_i >= \lambda_i$$

et par conséquent

$$u =< u, v_1 > v_1+ < u, v_2 > v_2 + \cdots + < u, v_n > v_n.$$

On appelle les scalaires

$$< u, v_1 >, < u, v_2 >, \dots, < u, v_n >$$

les coordonnées de u par rapport à la base orthonormée $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Proposition 1.3.2. *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$ *. Soit $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base orthogonale de V et u un vecteur de V . Alors*

$$u = \frac{< u, v_1 >}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{< u, v_2 >}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{< u, v_n >}{\|v_n\|^2} v_n.$$

Démonstration *: La base*

$$S' = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$$

est orthonormée. Par la propsition précédente, on a donc

$$u =< u, \frac{v_1}{\|v_1\|} > \frac{v_1}{\|v_1\|} + \cdots + < u, \frac{v_n}{\|v_n\|} > \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

et alors

$$u = \frac{< u, v_1 >}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{< u, v_n >}{\|v_n\|^2} v_n.$$

Proposition 1.3.3. *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$ *. Soit $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ un sous-ensemble orthogonal de V, avec $v_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors S est une famille linéairement indépendante.*

Démonstration *: Supposons que*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On a

$$< \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n, v_i >=< 0, v_i >= 0$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. *Par linéarité du produit scalaire, on obtient*

$$\lambda_1 < v_1, v_i > + \lambda_2 < v_2, v_i > + \cdots + \lambda_n < v_n, v_i >= 0.$$

Mais comme $< v_j, v_i >= 0$ *si* $i \neq j$ *on obtient*

$$\lambda_i < v_i, v_i >= 0$$

ce qui implique, comme $v_i \neq 0$, *que* $\lambda_i = 0$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$. *Donc* S *est linéairement indépendant.*

Proposition 1.3.4. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$. *Soit* $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *un sous-ensemble orthonormé (qui n'est pas forcément une base ; il peut être plus petit) de* V *et soit* $u \in \mathrm{V}$. *Posont*

$$w_1 =< u, v_1 > v_1 + < u, v_2 > v_2 + \cdots + < u, v_n > v_n$$

et $w_2 = u - w_1$. *Notons* $\mathrm{W} = \mathcal{L}(S)$, *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* S. *Alors* $w_1 \in \mathrm{W}$ *et* $w_2 \in \mathrm{W}^\perp$.

Notation : Le vecteur $w_1 \in \mathrm{W}$ *est appelé la projection orthogonale de* u *sur W, et est noté*

$$proj_{\mathrm{W}}(u).$$

Démonstration *: Il est clair que* $w_1 \in \mathrm{W}$, *puisque* w_1 *est une combinaison linéaire de* $v_1, \dots, v_n$.

Montrons que $w_2 \in \mathrm{W}^\perp$. *On a*

$$\begin{aligned} < w_2, v_i > &= < u - w_1, v_i > \\ &= < u, v_i > - < w_1, v_i > \end{aligned}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. *On a*

$$\begin{aligned} < w_1, v_i > &= \langle < u, v_1 > v_1 + \cdots + < u, v_n > v_n, v_i \rangle \\ &= < u, v_1 >< v_1, v_i > + \cdots + < u, v_n >< v_n, v_i > \\ &= 0 + \cdots + 0 + < u, v_i >< v_i, v_i > + 0 + \cdots + 0 \\ &= < u, v_i > \cdot 1 \\ &= < u, v_i > \end{aligned}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. *On a donc*

$$\begin{aligned} < w_2, v_i > &= < u, v_i > - < w_1, v_i > \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$ *ce qui montre que* w_2 *est orthogonal à* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Comme* S *engendre* W, *on a que* w_2 *est orthogonal à* W. *Donc*

$$w_2 \in \mathrm{W}^{\perp}.$$

Corollaire 1.3.1. *Soit* V *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$. *Soit* W *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* V . *Alors tout* $u \in \mathrm{V}$ *s'écrit de manière unique comme*

$$u = w_1 + w_2$$

avec $w_1 \in \mathrm{W}$ *et* $w_2 \in \mathrm{W}^{\perp}$. *De plus,* $w_1 = proj_W(u)$.

Exemple 1.3.1. *Soit* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3, <,>$ *le produit scalaire habituel, et soit* W *le sous-espace engendré par*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$, *et que* $< v_1, v_2 >= v_1 \bullet v_2 = 0$. *Donc* $S = \{v_1, v_2\}$ *est un ensemble orthonormé. Soit* $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$w_1 = proj_W(u) =< u, v_1 > v_1 + < u, v_2 > v_2.$$

Comme $< u, v_1 >= 1$ *et* $< u, v_2 >= -\frac{1}{5}$, *ceci donne*

$$proj_W(u) = v_1 - \frac{1}{5} v_2 = \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix}.$$

La décomposition orthogonale de u par rapport à W est donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21/25 \\ 0 \\ 28/25 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\begin{pmatrix} 21/25 \\ 0 \\ 28/25 \end{pmatrix}$ *est orthogonal à* v_1 *et à* v_2 *et donc qu'il est bien dans* $\mathrm{W}^{\perp}$.

Proposition 1.3.5. *Soit* V *un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$ *. Alors V a une base orthonormée.*

Démonstration *: On va démontrer la proposition en construisant une base orthonormée. La méthode de construction utilisée ici s'appelle* ***méthode de Gram-Schmidt*** *ou* ***procédé de Gram-Schmidt.*** *Soit* $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *une base quelconque de* V. *On construit une base orthonormée en n étapes.*

1ère étape : On pose

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

ce qui nous donne $\|v_1\| = 1$.

2ème étape : Soit W_1 *le sous-espace de V engendré par* v_1. *On pose*

$$w_2 = u_2 - proj_{W_1}(u_2).$$

Alors

$$< w_2, v_1 >= 0$$

car w_2 *est orthogonal à* W_1, *donc à* v_1. *Vérifions que* $w_2 \neq 0$. *En effet, si* $w_2 = 0$, *alors*

$$u_2 = proj_{W_1}(u_2).$$

Ceci implique que u_2 *et* v_1 *sont linéairement dépendants et donc que* u_2 *et* u_1 *le sont également. Ceci n'est pas possible car* u_1 *et* u_2 *font partie d'une base de* V *La norme de* w_2 *est donc non nulle. On pose alors*

$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}.$$

On a $\|v_2\| = 1, \|v_1\| = 1$ *et* $< v_1, v_2 >= 0$.

k-ème étape : Supposons construits les vecteurs

$$v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$$

tels que

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \cdots = \|v_{k-1}\| = 1$$

que $< v_i, v_j >= 0$ *si* $i \neq j$ *que le sous-espace* W_{k-1} *engendré par* $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ *soit égal au sous-espace engendré par* $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$. *On pose*

$$w_k = u_k - proj_{W_{k-1}}(u_k).$$

Montrons que $w_k \neq 0$. *si* $w_k = 0$, *alors* $u_k = proj_{W_{k-1}}(u_k)$,

donc $u_k \in \mathrm{W}_{k-1} = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_{k-1})$.

font partie d'une base de V *Donc* $w_k \neq 0$. *Comme* $w_k = u_k - proj_{W_{k-1}}(u_k)$, *le vecteur* w_k *est orthogonal à* W_{k-1} *et en particulier à* $v_1, \ldots, v_{k-1}$. *On pose*

$$v_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}.$$

On a ainsi construit $v_1, \ldots, v_K$ *tels que*

$$\|v_1\| = \cdots = \|v_k\| = 1,$$

et que $< v_i, v_j >= 0$ *si* $i \neq j$ *et* $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k) = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_k)$. *On termine ce procédé lorsque l'on a obtenu* v_n.

Exemple 1.3.2. *On considère* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire habituel. Soit* $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, *avec* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$. *On applique la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée.*

1ère étape : $w_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2ème étape : soit $\mathrm{W}_1 = \mathcal{L}(w_1) = \mathcal{L}(u_1)$. *On pose*

$$\begin{aligned} w_2 &= u_2 - proj_{W_1}(u_2) \\ &= u_2 - \frac{<u_2,w_1>}{\|w_1\|^2} w_1 \end{aligned}$$

Comme $< u_2, w_1 >=< u_2, u_1 >= 2$ *et* $\|w_1\|^2 = \|u_1\|^2 = 3$, *on obtient*

$$\begin{aligned} w_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3ème étape : soit

$$\begin{aligned} W_2 &= \mathcal{L}(w_1, w_2) \\ &= \mathcal{L}(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3 - proj_{W_2}(u_3) \\ &= u_3 - \frac{<u_3,w_1>}{\|w_1\|} w_1 - \frac{<u_3,w_2>}{\|w_2\|^2} w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Alors $\{w_1, w_2, w_3\}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}^3$. *On obtient une base orthonormée en posant*

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, \qquad v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \quad et \quad v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}.$$

Ceci nous donne

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1.4 Matrices orthogonales

1.4.1 Définition et Propriétés

Définition 1.4.1. *Soit A une matrice carrée. On dit que A est une matrice orthogonale si*

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{T}$$

Remarque 1.4.1. *A est une matrice orthogonale si et seulement si*

$$\mathrm{A}^{T}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{T} = \mathrm{I}.$$

Exemple 1.4.1. *Les matrices de rotation sont orthogonales. Soit θ un angle. Alors la matrice de la rotation d'angle θ de $\mathbb{R}^2$ est*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Cette matrice est orthogonale. En effet, l'identité

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

montre que l'on a

$$\mathrm{A}^{T}\mathrm{A} = \mathrm{I}.$$

Proposition 1.4.1. *Soit A une matrice $n \times n$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- **(*a*)** *A est orthogonale.*
- **(*b*)** *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|\mathrm{A}x\| = \|x\|$.*
- **(*c*)** *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{A}x \bullet \mathrm{A}y = x \bullet y$*

En d'autres termes, une matrice orthogonale conserve les normes et les angles.

Démonstration : $(a) \Rightarrow (b)$ *Supposons A orthogonale. On a*

$$\begin{aligned}\|\mathrm{A}x\|^2 &= \mathrm{A}x \bullet \mathrm{A}x\\ &= x \bullet (\mathrm{A}^T\mathrm{A})x\\ &= x \bullet x\\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (c)$ *Supposons que*

$$\|\mathrm{A}x\| = \|x\|$$

pout tout $x \in \mathbb{R}^n$. *On a*

$$\begin{aligned}\mathrm{A}x \bullet \mathrm{A}y &= \tfrac{1}{4}\|\mathrm{A}x + \mathrm{A}y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathrm{A}x - \mathrm{A}y\|^2\\ &= \tfrac{1}{4}\|\mathrm{A}(x+y)\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathrm{A}(x-y)\|^2\\ &= \tfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2\\ &= x \bullet y.\end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (a)$ *On considère* (c) *avec* $x = e_i$ *et* $y = e_j$ *des vecteurs de la base standard. Alors* $x \bullet y$ *est soit* 0 *(si* $i \neq j$*) soit* 1 *(si* $i = j$*), et est le coefficient* I_{ij} *de la matrice identité. D'autre part,*

$$\mathrm{A}x \bullet \mathrm{A}y = e_j^T \mathrm{A}^T \mathrm{A} e_i$$

est le coefficient (i, j) *de la matrice* $\mathrm{A}^T\mathrm{A}$. *Il suit que* $\mathrm{A}^T\mathrm{A} = \mathrm{I}$, *et donc que* A *est orthogonale.*

Remarque 1.4.2. *L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale.En effet on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{A} \ \textit{orthogonale} &\Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^T\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{A}^{-1})^{-1} = (\mathrm{A}^T)^{-1}\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{A}^{-1})^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^T\\ &\Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1} \ \textit{est orthogonale}\end{aligned}$$

1.4.2 Changement de bases orthonormées

Proposition 1.4.2. *Soit* V *un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire généralisé. Soit* P *la matrice de changement de base d'une base orthonormée vers une autre base orthonormée. Alors* P *est une matrice orthogonale.*

Démonstration : *Soient* $\mathrm{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *et* $\mathrm{B}' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$ *deux bases orthonormées de* V *et soit* $\mathrm{P}_{B,B'}$ *la matrice de changement de base de* B′ *à* B. *On a*

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i = \sum_{i=1}^{n} u_i' e_i'$$

Comme B *et* B′ *sont des bases orthonormées, on a*

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i'^2.$$

De plus, on a

$$(u)_B = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \mathrm{P}_{B,B'} \cdot \begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \mathrm{P}_{B,B'} \cdot (u)_{B'},$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = (u)_B^T \cdot (u)_B \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} u_i'^2 .= (u)_{B'}^T \cdot (u)_{B'}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} (u)_{B'}^T \cdot (u)_{B'} &= \|u\| \\ &= (u)_B^T \cdot (u)_B \\ &= (\mathrm{P}_{B,B'} \cdot (u)_{B'})^T \cdot \mathrm{P}_{B,B'} \cdot (u)_{B'}^T \\ &= (u)_{B'}^T \cdot \mathrm{P}_{B,B'}^T \mathrm{P}_{B,B'} \cdot (u)_{B'}. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout vecteur u, *on en déduit que* $\mathrm{P}_{B,B'}^T \mathrm{P}_{B,B'} = \mathrm{I}$ *ce qui montre que* $\mathrm{P}_{B,B'}$ *est orthogonale.*

1.4.3 Décomposition Q-R :

Soit A une matrice $n \times n$ ayant ses colonnes linéairement indépendantes. Alors il existe une matrice orthogonale Q (par rapport au produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$) et une matrice triangulaire supérieure R, telles que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{QR}.$$

Plus précisément, Q est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs obtenus en appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs colonne de A. On procède comme suit : Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On appelle c_i la i-ème colonne de A. Soit $\{c'_1, \dots, c'_n\}$ la base obtenue en appliquant Gram-Schmidt à $\{c_1, \dots, c_n\}$ et Q la matrice dont les colonnes sont $c'_1, \dots, c'_n$.

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Comme $\{c'_1, \dots, c'_n\}$ est une base orthonormée, on a

$$\begin{aligned} c_1 &= < c_1, c'_1 > c'_1 + \dots + < c_1, c'_n > c'_n \\ &\vdots \\ c_n &= < c_n, c'_1 > c'_1 + \dots + < c_n, c'_n > c'_n \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} c_1 &= < c_1, c'_1 > \begin{pmatrix} q_{11} \\ \vdots \\ q_{n1} \end{pmatrix} + \dots + < c_1, c'_n > \begin{pmatrix} q_{1n} \\ \vdots \\ q_{nn} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ c_n &= < c_n, c'_1 > \begin{pmatrix} q_{11} \\ \vdots \\ q_{n1} \end{pmatrix} + \dots + < c_n, c'_n > \begin{pmatrix} q_{1n} \\ \vdots \\ q_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} < c_1, c'_1 > & < c_2, c'_1 > & \dots & < c_n, c'_1 > \\ \vdots & & & \vdots \\ < c_1, c'_n > & < c_2, c'_n > & \dots & < c_n, c'_n > \end{pmatrix}}_{=\mathrm{R}}$$

La matrice R est triangulaire. En effet, par Gram-Schmidt, pour tout $k > 1$, c'_k est orthogonal à l'espace engendré par $c_1, \ldots, c_{k-1}$. Ainsi, $\mathrm{R}_{ij} =< c_j, c'_i >= 0$ pour tout $i > j$, et R est bien triangulaire supérieure.

La décomposition d'une matrice en un produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire s'appelle la décomposition $\mathrm{Q} - \mathrm{R}$.

Exemple 1.4.2. *Calculons la décomposition* $\mathrm{Q} - \mathrm{R}$ *de la matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs colonne de A, on obtient

$$\mathrm{c}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{c}'_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

De plus,

$$\begin{aligned} < \mathrm{c}_1, \mathrm{c}'_1 > &= \sqrt{5} \\ < \mathrm{c}_2, \mathrm{c}'_1 > &= \tfrac{6\sqrt{5}}{5} \\ < \mathrm{c}_1, \mathrm{c}'_2 > &= 0 \\ < \mathrm{c}_2, \mathrm{c}'_2 > &= \tfrac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{6\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Applications multilinéaires et tenseurs

La théorie des tenseurs offre un langage mathématique simple et efficace pour décrire des phénomènes naturels, comme la trajectoire d'un satellite, la circulation de la chaleur dans un corps ou encore la focre électromagnétique d'un électron. L'objectif du présent chapitre est d'introduire la notion de tenseur ainsi que certaines propriétés associées. Celles-ci permettent, par exemple, d'expliquer les relations entre des quantités physiques et de prédire leur évolution future.

2.1 Formes linéaires

2.1.1 Formes linéaires sur V : tenseurs d'ordre$(0,1)$

Définition 2.1.1. *On appelle forme linéaire ou tenseur d'ordre* $(0,1)$ *ou encore tenseur covariant d'ordre* 1 *sur* V *toute application linéaire :*

$$f \ : \ \mathrm{V} \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$

Exemple 2.1.1.

1. *Si* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^n$, *l'application de i-ième projection* π_i. *est un*

2. *Si* V *est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille* n , *alors l'application trace* $\mathbf{M} \to \mathrm{Tr}(\mathbf{M})$ *définit une application linéaire sur* V.
3. *Si* V *est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire généralisé* $<,>$ *et si* v_0 *un élément de* V , *alors l'application* $f : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(v) =< v,v_0 >$ *est une forme linéaire sur V.*

2.1.2 Espace dual, bases duales

Définition 2.1.2. *On appelle espace dual de* V *l'ensemble, noté* V^* *,des formes linéaires sur* V. *On a donc :*

$$\mathrm{V}^* = \{f : \mathrm{V} \to \mathbb{R} \| f \quad \textit{est linéaire}\}.$$

Proposition 2.1.1. *L'espace dual* V^* *est muni d'une structure d'espace vectoriel.*

Démonstration *: On vérifie facilement que l'addition des formes linéaires et leur*

multiplication par un scalaire satisfont aux propriétés des espaces vectoriels. Si V *est un espace vectoriel de dimension finie, alors* V^* *est aussi de dimension finie, et leurs dimensions sont égales. Plus précisément, chaque base de* V *détermine une base de* V^* *de la façon suivante :*

Proposition 2.1.2. *On suppose que l'espace V est de dimension finie,avec* $\dim(\mathrm{V}) = n$. *Soit* $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n)$ *une base de* V.*Soit* $\mathcal{B}^*$ *la famille* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *de* V^* *où les* $\alpha_i : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ *sont des applications linéaires sur* V *données par :*

$$\alpha_i(\mathrm{e}_j) = \delta_{ij}$$

et étendues linéairement à V. *Alors, la famille* $\mathcal{B}^*$ *forme une base de l'espace dual* V^*, *appelée base duale de la base* $\mathcal{B}$. *En particulier, on a bien :*

$$\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{V}^*)$$

Rappelons que le symbole δ_{ij} *désigne le symbole de Kronecker, c'est-à-dire la fonction qui vaut*

$$\begin{cases} 1 & \textit{si } i{=}j \\ 0 & \textit{si non} \end{cases}$$

Démonstration *: Soit f une forme linéaire sur V. Puisque toute forme linéaire sur V est déterminée par ses valeurs prises sur les e_i, on a :*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \alpha_i$$

avec $f_i = f(\mathrm{e}_i)$. Ceci montre que les α_i engendrent l'espace dual V^*. D'autre part, on vérifie facilement que les α_i sont linéairement indépendantes. L'ensemble $\mathcal{B}^*$ forme donc une base de l'espace V^*.

Remarque 2.1.1. *Si f est une application linéaire sur V alors, avec les notations précédentes, on a $f = \sum_i f_i \alpha_i$ et les coordonnées f_i sont appelées les coordonnées covariantes de f.*

Exemple 2.1.2. *Considérons la base suivante de $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$:*

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1 = (2,1), \mathrm{e}_2 = (3,1)\}$$

Nous allons déterminer la base $\mathcal{B}^*$ de $\mathrm{V}^\star$ qui est duale de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire identifier les formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, notées α_1 et α_2, telles que :

$$\alpha_1(\mathrm{e}_1) = 1 \ , \ \alpha_1(\mathrm{e}_2) = 0, \ \textit{et} \ \alpha_2(\mathrm{e}_1) = 0 \ , \ \alpha_2(\mathrm{e}_2) = 1.$$

On écrit ces applications sous la forme :

$$\alpha_1(x,y) = ax + by \ \textit{ et } \ \alpha_2(x,y) = cx + dy$$

Il s'agit donc de déterminer les réels a, b, c, d. Les relations précédentes impliquent :

$$\begin{cases} \alpha_1(\mathrm{e}_1) = \alpha_1(2,1) = 2a + b = 1 \\ \alpha_1(\mathrm{e}_2) = \alpha_1(3,1) = 3a + b = 0 \end{cases}$$

d'où $a = -1$ et $b = 3$. Puis :

$$\begin{cases} \alpha_2(\mathrm{e}_1) = \alpha_2(2,1) = 2c + d = 0 \\ \alpha_2(\mathrm{e}_2) = \alpha_2(3,1) = 3c + d = 1 \end{cases}$$

d'où $c = 1$ et $d = -2$.

La base duale est donc :

$$\mathcal{B}^* = \{\alpha_1 : (x,y) \mapsto -x + 3y; \alpha_2 : (x,y) \mapsto x - 2y\}.$$

la proposition 2.1.2 implique un résultat plus fort :

Proposition 2.1.3. *Si* V *est un espace de dimension finie, alors les espaces* V *et* V^* *sont isomorphes.*

Démonstration *: Soit* $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n)$ *une base de* V *et soit* $\mathcal{B}^* = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *la base duale de* V^* *correspondante, donnée par la proposition* 2.1.2. *D'après cette proposition, il est évident que l'application :*

$$\begin{array}{rcccc} \Theta_{\mathfrak{B}} & : & \mathrm{V} & \rightarrow & \mathrm{V}^* \\ & & \mathrm{e}_i & \mapsto & \alpha_i \end{array}$$

est un isomorphisme entre V *et* V^*. *Notons que cet isomorphisme dépend de la base* $\mathcal{B}$ *choisie : en ce sens, il n'est pas canonique*

Il est intéressant de noter les relations suivantes entre une base $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n)$ *de* V *et sa base duale* $\mathcal{B}^* = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *de* V^*. *Ces relations expriment les coordonnées de tout vecteur* v *(resp. forme linéaire* f*) dans la base*$\mathcal{B}$*(resp.*$\mathcal{B}^*$*) :*

$$\forall v \in \mathrm{V}, u = \alpha_1(v)\mathrm{e}_1 + \alpha_2(v)\mathrm{e}_2 + ... + \alpha_n(v)\mathrm{e}_n\,;$$
$$\forall f \in \mathrm{V}^*, f = f(\mathrm{e}_1)\alpha_1 + f(\mathrm{e}_2)\alpha_2 + ... + f(\mathrm{e}_n)\alpha_n.$$

2.1.3 Formes linéaires sur V^* : tenseurs d'ordre $(1,0)$

L'espace dual V^* de V étant encore un espace vectoriel, on peut définir son espace dual. Celui-ci est noté V^{**} : c'est l'espace vectoriel formé de toutes les formes linéaires sur V^*. Si l'on applique deux fois la proposition 2.1.3, on voit clairement que les espaces V et V^* sont isomorphes, lorsque V est de dimension finie. En fait, on a mieux : l'isomorphisme est cette fois canonique, dans le sens qu'il ne dépend pas de la base choisie sur V.C'est ce que nous montrons dans la proposition qui suite. Avant cela, il est utile de faire la remarque suivante : si v est un vecteur de V , l'application :

$$\hat{v} := f \mapsto f(v)$$

est une forme linéaire sur V^*,c'est-à-dire un élément de V^{**}. On définit ainsi une application de l'espace V dans son bidual $\mathrm{V}^{\star\star}$, donnée par :

$$\begin{array}{rcccl} \iota & : & \mathrm{V} & \to & \mathrm{V}^{**} \\ & & v & \mapsto & \hat{v}. \end{array}$$

La proposition est la suivante :

Proposition 2.1.4. *L'application ι est linéaire et injective. De plus, lorsque l'espace* V *dimension finie,ι est un isomorphisme.*

Démonstration *: Pour montrer la linéarité, il faut montrer que $\iota(k.v + w) = k.\iota(v) + \iota(w)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$ et pour tout $v,w \in \mathrm{V}$. Il faut donc montrer que $\widehat{k.v + w} = k.\widehat{v} + \widehat{w}$. Ce qui est vrai car*

$$(\widehat{k.v + w})(f) = f(k.v + w) = k.f(v) + f(w) = k.\widehat{v}(f) + \widehat{w}(f)$$

puisque f est linéaire. Supposons maintenant que $\iota(v) = 0$,c'est-à-dire que $\widehat{v}(f) = 0$ pour tout $f \in \mathrm{V}^*$.Ceci implique que $f(v) = 0$ pour tout $f \in \mathrm{V}^*$ et donc que $v = 0$. Ceci démontre bien l'injectivité de ι. Enfin, si l'on calcule la base duale de $\mathcal{B}^*$,on obtient une base de V^{**},notée :

$$\mathcal{B}^{**} = (\widehat{\mathrm{e}_1}, \widehat{\mathrm{e}_2}, ..., \widehat{\mathrm{e}_n})$$

et l'isomorphisme (cf. notations de la preuve du proposition 2.1.3.*) envoie e_i sur $\widehat{\mathrm{e}_i}$. Cet isomorphisme n'est donc rien d'autre que ι(en particulier,ι ne dépend plus de $\mathcal{B}$). ceci prouve la dernière assertion du proposition. Dans la suite, nous supposerons l'espace* V *de dimension finie et nous identifierons souvent les espaces* V *et* V^{**} *. Les vecteurs de* V *sont appelés tenseurs d'ordre $(1, 0)$,ou encore tenseurs contravariants d'ordre* 1*. Avec cette identification, remarquons que si $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ est une base de V^* duale d'une base $(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n)$ de V,alors $(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n)$ est aussi une base de V^{**}, duale de la base $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.*

2.2 Formes multilinéaires sur V : tenseurs d'ordre $(0, m)$

2.2.1 Formes bilinéaires sur V : tenseurs d'ordre $(0, 2)$

Définition 2.2.1. *(Forme bilinéaire). Une application*

$$f : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$$

est dite bilinéaire si elle est linéaire en chacun des facteurs, autrement dit, si :

(i) $f(ku + v, w) = kf(u, w) + f(v, w)$ *et si*

(ii) $f(u, kv + w) = kf(u,v) + f(u,w)$

L'ensemble des formes bilinéaires sur V *est un espace vectoriel où l'addition et la multiplication par un scalaire sont données par*

$$(f + g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$$

et

$$(\lambda f)(u,v) = \lambda f(u,v).$$

Cet espace vectoriel est noté Bil$(\mathrm{V}, \mathbb{R})$*. Si* $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, ..., \mathrm{e}_n)$ *est une base de* V*, on peut considérer les formes bilinéaires particulières*

$$\alpha_i \otimes \alpha_j \; 1 \leq i \leq n, \, 1 \leq j \leq n$$

définies par

$$(\alpha_i \otimes \alpha_j)(\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_l) = \delta_{ik}.\delta_{j.l}.$$

L'ensemble des $\alpha_i \otimes \alpha_j$ *forme alors une base de Bil* $(\mathrm{V}, \mathbb{R})$*. Les coordonnées* f_{ij} *d'une forme bilinéaire* f *quelconque dans cette base sont simplement données par l'évaluation de* f *au couple* $(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)$*. Explicitement, on a*

$$f_{ij} = f(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)$$

et

$$f = \sum f_{ij}.(\alpha_i \otimes \alpha_j).$$

Ainsi, si une base $\mathcal{B}$ *de* V *est choisie, une forme bilinéaire sur* V *n'est rien d'autre que la donnée d'une matrice* $\mathrm{F} = (f_{ij})$ *de dimension* $n \times n$ *où* $n = \dim \mathrm{V}$*. Si* $[u]_{\mathcal{B}}(resp.[v]_{\mathcal{B}})$ *désigne le vecteur des coordonnées de* $u(resp.v)$ *dans la base* $\mathcal{B}$*,alors* $f(u,v)$ *se calcul par le produit matriciel suivant :*

$$f(u,v) = [u]_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}}.\mathrm{F}.[v]_{\mathcal{B}}$$

Une forme bilinéaire sur V *est aussi appelée un tenseur d'ordre* $(0,2)$ *ou encore un tenseur 2 fois covariant. Cette terminologie provient du comportement de la forme lors d'un changement de base que nous verrons dans la section 3.6*

Remarque 2.2.1. *La notation* $\otimes$ *ci-dessus peut être prise ici pour une simple notation.*

Exemple 2.2.1. *Soit* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^n$*.Alors le produit scalaire usuel est une forme bilinéaire (symétrique). Sa matrice dans la base canonique est* I_n*.*

Un produit scalaire généralisé est une forme bilinéaire (symétrique). Il est représenté par une matrice A *symétrique et définie positive.*

2.2.2 Tenseurs d'ordre $(0,m)$

Définition 2.2.2. *(Forme multilinéaire). Soit* V *un espace vectoriel, et soit*

$$f : \underbrace{\mathrm{V} \times ... \times \mathrm{V}}_{m} \to \mathbb{R}$$

une application. On dit que f *est une forme multilinéaire ou tenseur d'ordre* $(0,m)$ *si pour tout* $1 \leq i \leq m$*,on a :*

$$f(v_1, ..., \alpha v_i + \beta w_i, ..., v_m) = \alpha f(v_1, ..., v_i, ..., v_m) + \beta f(v_1, ..., w_i, ..., ..., v_m)$$

pour tout $v_1, ..., v_m, w_1, ..., w_m \in \mathrm{V}$ *et tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.Une telle application est appelée tenseur d'ordre* $(0,m)$*, ou tenseur covariant d'ordre* m*. Pour* $m = 1$*,on retrouve les formes linéaires sur* V*,et pour* $m = 2$ *les formes bilinéaires sur* V*.*

Exemple 2.2.2. *(Produit mixte). Le produit mixte*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y,z) = [x,y,z] = x \cdot (y \times z)$$

est un tenseur d'ordre $(0,3)$*.*

2.2.3 Quelques interprétations physiques

Avant de poursuivre, voici quelques interpétations physiques des tenseurs d'ordre $(0, m)$ que nous venons de rencontrer.

1. Les tenseurs d'ordre $(0,0)$ sont les applications linéaires $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ces dernières étant précisément de la forme $x \mapsto ax$ pour un scalaire $a \in \mathbb{R}$, les tenseurs d'ordre $(0,0)$ peuvent donc être naturellement identifiés aux scalaires de $\mathbb{R}$. En physique, ils représentent des quantités chiffrées telles la masse d'un satellite, la température d'un corps ou la charge d'un électron.
2. Les tenseurs d'ordre $(0,1)$ sont les formes linéaires $\mathrm{V} \to \mathbb{R}$. Un exemple de tel tenseur est donné par l'étude de la trajectoire d'un bateau à voile, qui se dirige selon un vecteur unitaire e.Considérons la force du vent exercée sur ce bateau : elle est représentée par un vecteur f perpendiculaire à la voile du bateau. Seule la composante $\mathrm{e}\dot{f}$ (produit scalaire) propulse le bateau à l'avant. L'application $f \mapsto \mathrm{e}f$ est un tenseur d'ordre $(0,1)$. Le bateau avancera d'autant plus vite que la quantité $\mathrm{e}\dot{f}$ est grande.
3. Les tenseurs d'ordre $(0,2)$ sont les formes bilinéaires $\mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$. Le calcul du moment d'une force appliquée sur une clef plate pour visser un boulon furnit un exemple.

2.3 Formes multilinéaires sur V^* ;tenseurs d'ordre$(m, 0)$

2.3.1 Une remarque sur les tenseurs d'ordre $(1,0)$

Nous avons vu à la section 2.1.3 que V et V^{**} sont isomorphes si V est de dimension finie (ce que nous supposons toujours ici).Ainsi un vecteur $v \in \mathrm{V}$ peut être vu comme une forme linéaire $\widehat{v}$ sur V^* :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{v} : \mathrm{V}^* & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(v). \end{array}$$

C'est pourquoi, on identifie les tenseurs d'ordre $(1,0)$ avec les vecteurs. En physique, la direction que suit la trajectoire d'un électron à un moment donné est représentée par un vecteur et fournit donc un exemple de tenseur 1 fois contravariant.

2.3.2 Formes bilinéaires sur V^* :tenseurs d'ordre $(2,0)$

Considérons un espace vectoriel V muni d'une base $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$

et son dual V^* muni de la base duale $\mathcal{B}^* = \{\alpha_1, ..., \alpha_\mathrm{n}\}$.

On se donne une forme bilinéaire

$$f : \mathrm{V}^* \times \mathrm{V}^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

Cette forme est entièrement déterminée par ses valeurs sur les couples $(\alpha_\mathrm{i}, \alpha_\mathrm{j})$. Rappelons que l'espace vectoriel V^{**} des formes linéaires sur V^* est isomorphe canoniquement à V et admet pour base l'ensemble :

$$\mathcal{B}^{**} = \{\widehat{\mathrm{e}_1}, ..., \widehat{\mathrm{e}_\mathrm{n}}\}$$

où les $\widehat{\mathrm{e}_\mathrm{i}}$ sont donnés par :

$$\widehat{e_\mathrm{i}}(\alpha_\mathrm{j}) = \alpha_\mathrm{j}(e_\mathrm{i}) = \delta_\mathrm{ij}.$$

Notons $\widehat{e_\mathrm{i}} \otimes \widehat{e_\mathrm{j}}$ la forme bilinéaire sur $\mathrm{V}^* \times \mathrm{V}^*$ définie par

$$\widehat{e_\mathrm{i}} \otimes \widehat{e_\mathrm{j}}(\alpha_k, \alpha_l) = \delta_{\mathrm{i}k}.\delta_{\mathrm{j}l}.$$

On montre de manière similaire à ce qui a été fait précédemment que l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{\widehat{e_\mathrm{i}} \otimes \widehat{e_\mathrm{j}}\}_{1 \leq \mathrm{i,j} \leq \mathrm{n}}$$

est une base de l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $\mathrm{V}^* \times \mathrm{V}^*$ Dans cette base, la forme bilinéaire f s'écrit

$$f = \sum_i \sum_j f_\mathrm{ij}.\{\widehat{e_\mathrm{i}} \otimes \widehat{e_\mathrm{j}}\}$$

où $f_\mathrm{ij} = f(\alpha_\mathrm{i}, \alpha_\mathrm{j})$.Le choix de $\mathcal{B}$ étant fait (et donc aussi celui de $\mathcal{B}^*$ et de $\mathcal{C}$), la forme f est représentée par une matrice $\mathrm{F} = (f_\mathrm{ij})$.

Les formes bilinéaires sur $\mathrm{V}^* \times \mathrm{V}^*$ sont appelées tenseurs d'ordre $(2,0)$,ou encore tenseurs contravariants d'ordre 2.

2.3.3 Tenseurs d'ordre $(m, 0)$

En généralisant ceci, on peut poser la définition suivante :

Définition 2.3.1. (*Tenseur d'ordre* $(m, 0)$). *Une application multilinéaire*

$$\underbrace{\mathrm{V}^* \times \mathrm{V}^* \times ... \times \mathrm{V}^*}_{m} \to \mathbb{R}$$

est appelée un tenseur d'ordre $(m, 0)$ *ou tenseur* m *fois contravariant ou encore tenseur contravariant d'ordre* m.

À nouveau, la terminologie de tenseur contravariant vient du comportement oted'une telle application lors d'un changement de bases

Chapitre 3

Tenseurs mixtes d'ordre $(\boldsymbol{p,q})$

3.1 Tenseurs d'ordre (p,q)

Il existe des tenseurs mixtes, à savoir des tenseurs d'ordre (p,q) qui sont donc (en copiant les terminologies précédentes) p fois contravariants et q fois covariants. .

Définition 3.1.1. (*Tenseur d'ordre* (p,q)). *Soient* p *et* q *des entiers* ≥ 0. *Un tenseur d'ordre* (p,q) *est une application multilinéaire :*

$$f : \underbrace{\mathrm{V}^* \times ... \times \mathrm{V}^*}_{\mathrm{p}} \times \underbrace{\mathrm{V} \times ... \times \mathrm{V}}_{\mathrm{q}} \to \mathbb{R}$$

3.1.1 Exemple des tenseurs d'ordre $(1,1)$

Pour illustrer la notion de tenseur d'ordre $(1,1)$, considérons une application bilinéaire :

$$f : \mathrm{V}^* \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$$

Nous allons montrer qu'une telle application n'est rien d'autre qu'une application linéaire :

$$\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V},$$

On commence par la construction inverse. Etant donnée une application linéaire :

$$\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V},$$

on peut définir une application bilinéaire :

$$f : \mathrm{V}^* \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$$

en posant :

$$f(\alpha, u) = \widehat{\phi(u)}(\alpha) = \alpha(\phi(u)).$$

On vérifie facilement que f est bilinéaire et que l'association $\phi \mapsto f$ est injective. Vérifions ici l'injectivité. Supposons que f soit l'application triviale $f(\alpha u) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{V}$ et pour tout $\alpha \in \mathrm{V}^*$.Par définition de f, ceci implique que $\alpha(\phi(u)) = 0$ pour tout

emphu et tout α. Mais ceci entraéne que $\phi(u)$ doit être nul pour tout $u \in \mathrm{V}$ et donc que ϕ est l'application nulle.

Pour des raisons de dimensions, l'injectivité implique la surjectivité et on a donc montré que donner une application bilinéaire :

$$f(\alpha, u) = \widehat{\phi(u)}(\alpha) = \alpha(\phi(u)).$$

est équivalent à donner une application linéaire :

$$\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}.$$

Ce qui est remarquable, c'est que les matrices de f et de ϕ sont les mêmes,dans une base $\mathcal{B}$ de V étant choisie. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_\mathrm{n}\}$ une base de V et $\mathcal{B}^* = \{\alpha_1, ..., \alpha_\mathrm{n}\}$ sa base duale. La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}$ est définie par $\mathrm{F}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}} = \mathrm{F} = (f_{\mathrm{ij}})$ avec

$$f_{\mathrm{ij}} = f(\alpha_\mathrm{i}, e_\mathrm{j}).$$

Mais, d'autre part, la j-ème colonne de la matrice $[\phi]_{\mathcal{B}}$ est donnée par l'image de e_j exprimée dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, on a

$$[\phi]_{\mathrm{ij}} = \alpha_\mathrm{i}(\phi(e_\mathrm{j})) = f(\alpha_\mathrm{i}, e_\mathrm{j}) = f_{\mathrm{ij}}$$

ce qui prouve que

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \mathrm{F}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}}$$

.

3.2 Opérations sur les tenseurs

Sur les tenseurs de même ordre, on a une opération d'addition et de multiplication par les scalaires qui en font un espace vectoriel. Nous avons déjà vu cette structure d'espace vectoriel pour les tenseurs d'ordre $(0,1)$ et d'ordre $(0,2)$, c'est-à-dire sur V^* et sur l'espace des formes bilinéaires. La généralisation à tout tenseur se fait de manière évidente. On a aussi une opération de multiplication entre tenseurs. Nous commençons par l'exemple du produit de deux formes linéaires :

Exemple 3.2.1. *Soient $f, g \in V^*$ deux tenseurs d'ordre $(0,1)$,*

$$f : V \to \mathbb{R}$$

$$g : V \to \mathbb{R}$$

on définit leur produit par

$$b : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$b(u,v) = f(u)g(v).$$

C'est une forme bilinéaire,c'est-à-dire un tenseur d'ordre $(0,2)$. Plus généralement, on peut multiplier un tenseur d'ordre (p,q) avec un tenseur d'ordre (r,s) et le résultat est un tenseur d'ordre $(\mathrm{p}+r, \mathrm{q}+s)$. Voici comment le produit est défini. Soit :

$$f : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{q} \to \mathbb{R}$$

un tenseur d'ordre (p,q) et soit :

$$g : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{s} \to \mathbb{R}$$

un tenseur d'ordre (r,s).On définit leur produit :

$$f \cdot g : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{\mathrm{p}+r} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{\mathrm{q}+s} \to \mathbb{R}$$

par :

$$(f.g)(\alpha_1, ..., \alpha_{\mathrm{p}+r}, x_1, ..., x_{\mathrm{q}+s}) = f(\alpha_1, ..., \alpha_{\mathrm{p}}, x_1, ..., x_{\mathrm{q}})g(\alpha_{\mathrm{p}+1}, ..., \alpha_{\mathrm{p}+r}, x_{\mathrm{q}+1}, ..., x_{\mathrm{q}+s})$$

Remarque 3.2.1. *L'application identité* Id : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *peut être considérée comme un tenseur d'ordre* $(0,1)$. *Il joue alors le rôle d'élément neutre pour le produit défini ci-dessus.*

3.3 Changement de bases

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le comportement d'un tenseur (ou plutôt de ses coordonnées) lors d'un changement de bases. Il s'agit ici d'introduire des propriétés importantes des tenseurs liées aux changements de coordonnées, très utiles par exemple en physique lorsque l'on change de système référent. D'autre part, les relations obtenues nous permettront d'éclairer les notions de tenseurs "covariants" et "contravariants".
Soient donc deux bases de V :

$$\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\} \text{ et } \acute{\mathcal{B}} = \{\acute{e}_1, ..., \acute{e}_n\}$$

On a la matrice de passage de la base $\acute{\mathcal{B}}$ à la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$P_{\mathcal{B}\acute{\mathcal{B}}} = (\lambda_{ij})$$

dont la j-ème colonne repésente les coordonnées de $\acute{e}_j$ dans la base $\mathcal{B}$. En d'autres termes

$$\acute{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i \tag{3.1}$$

ou encore, matriciellement (avec un petit abus de notation)

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_1 \end{pmatrix} = P^{T}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} . \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

et on a,la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est inversible, et l'on a :

$$P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Dans la suite, nous noterons γ_{ij} les coefficients de la matrice $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, de sorte que l'on a :

$$e_{\mathrm{i}} = \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \acute{e}_k.$$

Le but de cette section est de d'étudier le changement de coordonnées des tenseurs.

3.3.1 Cas des tenseurs d'ordre $(1, 0)$ (vecteurs de V)

La modification des coordonnées d'un vecteur par un changement de bases a déjà été étudiée. Rappelons que si v est un vecteur de V et si$[\mathrm{v}]_{\mathcal{B}}$ $(resp.[\mathrm{v}]_{\mathcal{B}'})$ désigne le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}(resp.\mathcal{B}')$, on a :

$$[\mathrm{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\mathrm{v}]_{\mathcal{B}'} \tag{3.3}$$

ou encore :

$$[\mathrm{v}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\mathrm{v}]_{\mathcal{B}} \tag{3.4}$$

chaque $v_i(resp.v_i')$ désignant i-ème composante de v dans la base $(\mathcal{B}(resp.\mathcal{B}')$.

3.3.2 Cas des tenseurs d'ordre $(0, 1)$(formes linéaires sur$\mathrm{V}$)

Considérons maintenant une forme linéaire $f \in \mathrm{V}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{\mathrm{n}})$ une base de V et soit $\mathcal{B}^* = (\alpha_1, ..., \alpha_{\mathrm{n}})$ la base de V^*,duale de V. Matriciellement, en écrivant les vecteurs de V dans la base$\mathcal{B}$, l'application f est de la forme :

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}) = (f_1 \dots f_{\mathrm{n}}).\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

Le vecteur ligne $[f]_{\mathcal{B}^*} = (f_1 \dots f_{\mathrm{n}})$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}^*$, donnée par $f_{\mathrm{i}} = f(e_{\mathrm{i}})$. En d'autres termes, on a :

$$f = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} f_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{i}}$$

De même, $\mathcal{B} = (\acute{e}_1, ..., \acute{e}_\mathrm{n})$ est une autre base de V,de base duale $\acute{\mathcal{B}}^* = (\acute{\alpha}_1, ..., \acute{\alpha}_\mathrm{n})$,et si on note $[f]_{\acute{\mathcal{B}}^*}$ la matrice de f dans cette base, ses coefficients sont donnés par :

$$\acute{f}_\mathrm{i} = f(\acute{e}_\mathrm{i})$$

de sorte que :

$$f = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \acute{f}_\mathrm{i}\acute{\alpha}_\mathrm{i}.$$

Il s'agit d'écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'^*$ á la base $\mathcal{B}^*$ et de voir les modifications sur les coefficients de la matrice de f. Pour cela, déterminons d'abord les coefficients, notés μ_ij de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}^*}\mathcal{B}'^*$, dont la j-ème colonne est donnée par les coefficients de l'application α'_j dans la base $\mathcal{B}^*$. Des relations $\alpha'_\mathrm{j} = \sum_\mathrm{i} \mu_\mathrm{ij}\alpha_\mathrm{i}$ et $\alpha_\mathrm{i}(e_\mathrm{j}) = \delta_\mathrm{ij}$, on déduit :

$$\alpha'_\mathrm{j}(e_\mathrm{i}) = \mu_\mathrm{ij}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rcl} \mu_\mathrm{ij} & = & \alpha'_\mathrm{j}(\sum_k \gamma_{ki}\acute{e}_k) \\ & = & \gamma_\mathrm{ji} \end{array}$$

où les γ_ji sont les coefficients de la matrice $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$
On a donc prouvé :

$$P_{\mathcal{B}^*\mathcal{B}'^*} = (P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^\mathrm{T} \tag{3.5}$$

On peut, maintenant ,calculer les coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'^*$, i.e. trouver les f'_j tels que

$$f = \sum_\mathrm{j} f'_\mathrm{j}\alpha'_\mathrm{j}.$$

Cela s'écrit facilement, en utilisant la relation $\alpha'_\mathrm{i}(e'_\mathrm{j}) = \delta_\mathrm{ij}$:

$$\begin{array}{rcl} f'_\mathrm{j} & = & f(e'_\mathrm{j}) \\ & = & \sum_\mathrm{i} \lambda_\mathrm{ij} f(e_\mathrm{i}) \\ & = & \sum_\mathrm{i} \lambda_\mathrm{ij} f_\mathrm{i} \end{array}$$

On a donc :

$$[f]_{\mathcal{B}'^*} = P^\mathrm{T}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.[f]_{\mathcal{B}^*} \tag{3.6}$$

On constate que les formes linéaires sur V se transforment « comme » les vecteurs de base tandis que les vecteurs se transforment selon la règle inverse (comparer (3.6) avec (3.2) et (3.4)). C'est pour cette raison que les vecteurs (ou les formes linéaires sur V*) sont appelés des tenseurs contravariants d'ordre 1 et les formes linéaires sur V sont appelées des tenseurs covariants d'ordre 1. Le qualificatif "contravariant" concernerait donc les tenseurs dont les composantes se transforment contrairement à celles des vecteurs de base. Poursuivons notre investigation...

3.3.3 Cas des tenseurs $(0,2)$(formes bilinéaires sur V)

On considère une forme bilinéaire f sur V et sa matrice F ($resp.$F′) dans la base$\mathcal{B}$($resp.\mathcal{B}'$). On peut montrer que l'on a la relation

$$\mathrm{F}' = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.\mathrm{F}.\mathrm{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}. \tag{3.7}$$

Cette équation est du même type que la relation (3.6). Les formes bilinéaires suivent les mêmes règles que les formes linéaires lors d'un changement de bases. C'est pourquoi, on dit aussi que les formes bilinéaires sur V sont des tenseurs covariants d'ordre 2.

3.3.4 Cas des tenseurs $(2,0)$ (formes bilinéaires sur V^*)

On considère un tenseur d'ordre $(2,0)$, c'est-à-dire une forme bilinéaire sur V^*. Notons F ($resp.$F′) sa matrice dans la base $\mathcal{B}^*$ ($resp.\acute{\mathcal{B}}^*$).On a la relation :

$$\mathrm{F}' = P^{-1}_{\mathcal{B}\acute{\mathcal{B}}}.F.(P^{-1}_{\mathcal{B}\acute{\mathcal{B}}})^{\mathrm{T}} \tag{3.8}$$

On constate que c'est la règle inverse que pour un tenseur d'ordre $(0,2)$

(comparer avec 3.7).En revanche, c'est une loi similaire à celle qui régit le changement de coordonnées d'un vecteur. Un tenseur d'ordre $(2,0)$ est donc dit 2 fois contravariant.

3.3.5 Cas des tenseurs d'ordre $(1, 1)$

Lors d'un changement de bases, on sait comment la matrice d'une application ϕ : $\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ change. Si ϕ $(resp.\phi')$ est la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ $(resp.\mathcal{B}')$,alors on a

$$\phi' = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}.\phi.P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Via l'équivalence vue au paragraphe 3.1.1, et tenant compte du fait que $\phi = F$, on obtient la manière dont les coefficients d'un tenseur d'ordre $(1, 1)$ varient lors d'un changement de bases. C'est la même règle que pour une application linéaire. Plus précisément, si

$$f : \mathrm{V}^* \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire de matrice F $(resp.\mathrm{F}')$ dans la base $\mathcal{B}$ $(resp.\mathcal{B}')$, alors on a

$$\mathrm{F}' = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}.F.P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \tag{3.9}$$

On constate que la matrice de changement de base apparaît à droite de F mais que c'est son inverse qui apparait à gauche. C'est pourquoi, un tenseur d'ordre $(1, 1)$ est dit 1 fois covariant et 1 fois contravariant (comparer la relation (3.9) avec l'équation (3.8)qui donne la règle pour un tenseur 2 fois covariant).

3.3.6 Cas des tenseurs d'ordre (p,q)

Les formules précédentes se généralisent encore... et expliquent pourquoi un tenseur d'ordre (p,q) est dit p fois contravariant et q fois covariant.

3.4 Champs tensoriels

3.4.1 Définitions

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des tenseurs isolés. En physique, il

est plus fréquent de rencontrer un champ tensoriel, c'est-à-dire, la donnée d'un tenseur en tout point de l'espace (ou d'une partie de celui-ci)ou en plusieurs instants. On considère donc l'espace affine $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ et en tout point Y de l'espace on considère l'espace vectorie $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Définition 3.4.1. *(Champ tensoriel). Un champ tensoriel est la donnée en tout point y de l'espace d'un tenseur d'ordre (p,q). Alors que le tenseur varie en fonction du point $y \in \mathrm{E}$, l'ordre (p,q), à lui, est indépendant de y.*

Exemple 3.4.1. *Considérons un fluide localisé dans une partie de l'espace* E. *La vitesse du fluide en chaque point de l'espace est un tenseur d'ordre* $(0,1)$. *En chaque point $y \in \mathbb{R}^3$,on se donne une base :*

$$\mathcal{B}(y) = \{\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n\}$$

dans laquelle on exprimera le champ tensoriel.Par exemple, on pourrait considérer la base canonique en chaque point y : dans ce cas, la base ne dépend pas de la position y.

3.4.2 Changements de coordonnées

Supposons que l'on se donne un changement de coordonnées, i.e. en termes mathématiques, une fonction :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \dots, x_{\mathrm{n}}) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{c} u_1 = u_1(x_1, \dots, x_{\mathrm{n}}) \\ \vdots \\ u_{\mathrm{n}} = u_{\mathrm{n}}(x_1, \dots, x_{\mathrm{n}}) \end{array} \right. \end{array}$$

qui soit de classe $\mathcal{C}^1$,bijective et dont l'inverse est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. L'application ϕ transforme, en chaque point y,la base $\mathcal{B}(\mathrm{Y})$ en une nouvelle base

$$\mathcal{B}'(y) = \{e'_1(y), ..., e'_{\mathrm{n}}(y)\}$$

Le dessin ci-dessous illustre la situation dans le cas $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$. Explicitement, en chaque point y de l'espace $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$,on a un changement de bases qui est donné par

$$e'_{\mathrm{i}}(y) = \sum_{\mathrm{j}} \frac{\partial u_{\mathrm{j}}}{\partial x_{\mathrm{i}}}(y) \mathrm{e}_{\mathrm{j}}(y)$$

Notons la dépendance en y dans la formule ci-dessus. Définissons la matrice :

$$A = (\lambda_{\mathrm{ij}}) := (\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}(y)).$$

C'est la matrice de changement de base au point y.Son inverse est donné par

$$A^{-1} = \Gamma = (\lambda_{\mathrm{ij}}) = (\frac{\partial x_{\mathrm{i}}}{\partial u_{\mathrm{j}}}(y))$$

3.4.3 Cas d'un champ tensoriel d'ordre $(1,0)$ (champ vectoriel)

Admettons que l'on ait maintenant un champ vectoriel, i.e. la donnée d'un vecteur v de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ en tout point y de l'espace $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.Un champ vectoriel (ou champ tensoriel d'ordre $(1,0)$) est donc la donnée d'une application :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{E} & = & \mathbb{R}^{\mathrm{n}} & \rightarrow & \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \\ & & y & \mapsto & v(y) \end{array}$$

qui à tout point y associe un vecteur $v(y)$. Notons $v_{\mathrm{i}}(y)$ $(resp. v'_{\mathrm{i}}(y))$ les coordonnées de $v(y)$ dans la base $\mathcal{B}(y)$ $(resp. \mathcal{B}'(y))$.On montre alors qu'on a la relation suivante :

$$v'_{\mathrm{i}}(y) = \sum_{\mathrm{j}} \frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_j}(y) v_{\mathrm{j}}(\mathrm{y})$$

ou matriciellement

$$[v'] = \Gamma.[v].$$

Cette règle est similaire à celle obtenue en avec comme seule différence que la matrice de changement de bases dépend du point y et est donnée par la matrice jacobienne $\Gamma = A^{-1}$. On parle dans ce cas de champ contravariant.

3.4.4 Cas d'un champ tensoriel d'ordre $(0,1)$

Soit w un champ de formes linéaires, i.e. la donnée en tout point y de l'espace d'une forme linéaire

$$w(y) : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathbb{R}$$

. On peut, en tout point y,considérer la base duale de $\mathcal{B}(y)$ que l'on note $\mathcal{B}^*(y)$.Comme précédemment, si

$$\mathcal{B}^*(y) = \{\alpha_{\mathrm{i}}(y)\}$$

alors chaque forme linéaire $w(y)$ s'écrit

$$w(y) = \sum_{\mathrm{i}} w_i(y).\alpha_{\mathrm{i}}(y)$$

. Le changement de coordonnées donné par ϕ induit un changements des coordonnées $w_i(y)$ qui suit la règle suivante :

$$w'_{\mathrm{i}}(y) = \sum_{\mathrm{j}} \frac{\partial x_{\mathrm{j}}}{\partial u_{\mathrm{i}}}(y) w_{\mathrm{j}}(y)$$

qui s'écrit matricellement

$$[w'] = A^{\mathrm{T}}.[w]$$

ou encore

$$[w] = (A^{-1})^{\mathrm{T}}.[w'] \tag{3.10}$$

Ce résultat n'est pas surprenant. L'équation (3.10) est semblable à la relation (3.6),la matrice $\mathrm{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ ayant été remplaçée par la matrice A. On parle dans ce cas d'un champ covariant.

3.4.5 Cas d'un champ quelconque

On peut généraliser ce qui précède au cas d'un champ tensoriel d'ordre (p,q) quelconque. Les changements de coordonnées se font de la même manière que pour un tenseur d'ordre (p,q) à la différence près, à nouveau, que la matrice de changement de bases dépend du point y (et de ϕ). On remplace ainsi la matrice

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

par la matrice

$$A = (\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}})$$

Bibliographie

1 H. Anton and C. Rorres. Elementary linear Algebra. Applications Version. John Wiley et Sons, Inc. New York, 2000.

2 R. Dalang and A. Caabouni. Algèbre linéaire, Aide-mémoire, exercices et applications.

3 D. Danielson. Vectors and Tensors in Enginee and Physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1992.

4 T. Liebling. Algèbre linéaire : une introduction pour ingénieurs.