

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Physique computationnelle

Par

Bouazza Mimoune

Sur le thème

*Discretisation explicite de l'équation de chaleur pour une plaque
carrée*

Soutenu le : 28/09/2020 devant le jury composé de :

Mr. El-keurti Mohamed	Pr	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Président
Mr. Sahabi Toufik	MCB	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Encadreur
Mme. Mokhtari Habiba	MAA	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Examineur
Mr. Abada Ahmed	MCB	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Examineur

Année Universitaire 2019 - 2020

Table des matières

<i>DÉDICACE</i>	1
<i>Remerciement</i>	2
Liste des figures	3
INTRODUCTION GENERALE	4
CHAPITRE I	7
LE TRANSFERT DE CHALEUR	7
I.1 Introduction	8
I.2 Définition d'un système thermodynamique	8
I.2.1 Système fermé	8
I.2.2 Système ouvert	8
I.2.3 Système simple	8
I.3 La chaleur	9
I.3.1 Définition	9
I.3.2 Flux de chaleur	9
I.3.3 La Température	9
I.3.4 Unités de chaleur	10
I.3.5 Equation de la chaleur	10
I.4 Équilibre thermodynamique	10
I.4.1 État stationnaire	10
I.4.2 État d'équilibre thermodynamique	10
I.4.3 Transformation réversible, irréversible	10
I.5 Différents types de transformations	11
I.5.1 Transformation isotherme	11
I.5.2 Transformation isobare	11
I.5.3 Transformation isochore	11
I.5.4 Cycle thermodynamique	11
I.6 Coefficients thermo élastiques	11
I.6.1 Coefficient de dilatation volumique	11
I.6.2 Coefficient relatif de pression	12
I.6.3 Coefficient de compressibilité isotherme	12
I.7 Le transfert de chaleur	12

I.8 Les types de transfert de chaleur	12
I.8.1 La conduction	13
I.8.2 Rayonnement	14
I.8.3 Convection	15
a) La convection naturelle ou libre	15
b) La convection forcée	15
I.9 Lois fondamentales du transfert de la chaleur	16
I.9.1 Loi fondamentale de la conduction	16
I.9.2 Loi fondamentale de la convection	18
I.9.3 Loi fondamentale du rayonnement	18
Références	19
CHAPITRE 2	20
LES EQUATIONS DE CHALEURS	20
II.1 Introduction	21
II.2 Equations différentielles	21
II.3 Formulation des équations différentielles	21
II.3.1 Équations différentielles partielles	21
II.3.2 Équations différentielles ordinaires	22
II.3.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre	22
II.3.4 Équations différentielles linéaires du second ordre a coefficients constants	23
II.3.5 Équations différentielles linéaires du n-ième ordre	23
II.4 Exemples des équations différentielles au 1ier ordre	23
II.4.1 Equation à coefficients constants	23
II.4.2 Equation linéaire	24
II.4.3 Equation de Bernoulli	24
II.4.4 Equation de Clairaut	24
II.5 Equation de la Chaleur	25
II.5.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes	25
II.5.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques	26
II.5.3 Equation de la chaleur en coordonnées sphériques	26
II.6 Résolution par la méthode des différences finis	26
II.6.1 Les schémas numériques	26
(a) Schéma explicite	26
(b) Schéma implicite	27

(c) Schéma de la Direction alternée implicite (ADI)	28
II.6.2 Les volumes finis	29
II.6.3 Les éléments finis.....	30
II.8 La méthode de simulation de Monte Carlo	30
II.8.1 Principe de la méthode	31
II.8.2 Avantage de la méthode	31
II.9 Importance de la Simulation.....	33
Références	34
CHAPITRE 3.....	35
DISCRETISATION EXPLICITE DE L'EQUATION DE CHALEUR POUR UNE PLAQUE CARRE MIS AUX CONDITIONS AUX LIMITES CONSTANTES DE TYPE DIRICHLET	35
III.1 Introduction.....	36
III.2 Description de problème.....	36
III.3 Discrétisation explicite.....	37
III.4 Algorithme Maple.....	39
Références	47
CONCLUSION.....	48
ملخص.....	50
Résumé	51
Abstract	52

DEDICACE

Je dédie ce mémoire à

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.

Mes frères « mostapha, ben hlima » et qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

A mes amis qui ont toujours été à mes côtés et avec qui j'ai partagé les meilleurs moments, De ma vie «oualid,zakaria, ».

A mon ami et frère à l'université qui m'a beaucoup aidé tout au long de ma carrière « lakhedar, fettah , , Nadir, hadj ».

A mes professeurs qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

A celui qui était avec moi par son encouragement et m'a aidé à la réalisation de ce travail.

« Dr : sahabi.Toufik »

A tous mes collègues la promotion de physique Computationnelle 2019-2020

Remerciement

Tout d'abord, nous remercions Allah, notre créateur de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Dr : « Sahabi .T » qui a proposé le thème de ce mémoire, pour avoir accepté de m'encadrer dans cette étude, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à ma soutenance, Ma profonde gratitude à monsieur Dr. Elkourti Mohamed, Dr. abada ahmed , Dr. Mokhetari habiba , qui m'ont fait l'honneur en acceptant de faire partie de ce jury pour l'examen de ce mémoire.

Finally, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma famille qui j'ai toujours soutenues et à tout ce qui participe de réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Je voudrais également remercier tous les travailleurs de la bibliothèque et tous les travailleurs de l'université.

Liste des figures

<i>Figure 1.1: Les trois types de Transfer de chaleur</i>	13
<i>Figure 1.2: Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par conduction thermique.....</i>	14
<i>Figure 1.3: Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par rayonnement</i>	14
<i>Figure 1.4 : Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par convection.....</i>	16
<i>Fig.(1.5)Plaque plane.....</i>	16
<i>Figure 2.1: Schéma explicite.....</i>	27
<i>Figure 2.2: Schéma implicite.....</i>	28
<i>Figure 2.3 : Schéma ADI.....</i>	28
<i>Fig. 3.1 Une plaque rectangulaire en notation matricielle mise aux conditions aux limites et initiales (Depuis [1]).....</i>	37
<i>Figure 3.2 L'évolution de chaleur dans la plaque carré pour des différents instants ((a) : 0, (b) : $t_m/2$, (c) : $t_m - 10$, et (d) : t_m).....</i>	41
<i>Figure 3.3 Le comportement de la température suivant chaque variable(a) : t, (b) : x, (c) : y.....</i>	42
<i>Fig. 3.4 Divergence apparue au moment $t = t_m/2$ de l'algorithme explicite pour $K = 3$. (a) : $t = 0$, (b) : $t = 1$, (c) : $t = t_m /2$, et (d) : $t = t_m$.....</i>	43
<i>Fig. 3.5L'évolution de chaleur dans la plaque carré pour les différents instants (a) : $t = 0$, (b) : $t = 1$, (c) : $t = t_m /2$, et (d) : $t = t_m$ pour $(K, t_m) = (4, 60)$.....</i>	44
<i>Fig. 3.6L'évolution de chaleur dans la plaque carré pour les différents instants (a) : $t = 0$, (b) : $t = 1$, (c) : $t = t_m /2$, et (d) : $t = t_m$ pour $(K, t_m) = (10, 200)$.....</i>	45
<i>Fig. 3.7L'évolution de chaleur dans la plaque carré pour les différents instants (a) : $t = 0$, (b) : $t = 1$, (c) : $t = t_m /2$, et (d) : $t = t_m$ pour $(K, t_m) = (20, 200)$.....</i>	46

INTRODUCTION GENERALE

La thermodynamique est la branche de la physique consacrée à la chaleur et aux notions connexes. La partie de la thermodynamique qui s'applique particulièrement aux réacteurs nucléaires traite des principes gouvernant le transfert de la chaleur d'une forme à un autre.

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et des composantes électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs des procédés industriels, etc.

La plupart des problèmes scientifiques et les phénomènes physiques est modélisent sous la forme des équations (EDO, EDP, . . . etc.) linéaires ou non linéaires qui sont difficiles à résoudre dans la plupart cas. La résolution de ces équations se fait par des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis, la méthode des différences finis, et la méthode des volumes finis qui est la plus utilisée actuellement dans les codes simulation, et la méthode de simulation de Monte Carlo.

Joseph Fourier est connu pour avoir déterminé, par le calcul, la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente. De telles fonctions sont appelées séries de Fourier. La méthode de calcul permettant de passer, de façon réversible, d'une fonction à la série trigonométrique correspondante est la transformation de Fourier. Cette méthode très féconde est devenue incontournable en théorie du signal, avec des applications majeures pour le traitement et la compression du son et de l'image numérique.

L'objet du présent travail est de résoudre l'équation de chaleur à deux dimensions à l'absence d'une source de chaleur par la méthode de différences finies en appliquant l'algorithme de discrétisation explicite.

Le premier chapitre sera une introduction générale sur la notion de chaleur et ses modes de transfert. Le deuxième chapitre sera un rappel rapide au sujet des équations différentielles en particuliers sur quelques types des équations de chaleur en présentant les différents types de l'algorithme de discrétisation. Le troisième chapitre est une application de l'algorithme explicite pour résoudre l'équation de chaleur décrivant le transfert thermique sur une plaque carré mis aux conditions aux limites de type Dirichlet.

Enfin, on conclut ce travail en suggérant des perspectives.

CHAPITRE I
LE TRANSFERT DE CHALEUR

I.1 Introduction

La thermodynamique est une branche de physique a pour objet principal l'étude des phénomènes mécaniques (travail, pression,...) couplés aux phénomènes thermiques (chaleur, température,...), tous deux considérés du point de vue macroscopique. Elle est née au XIXème siècle de la nécessité de comprendre le fonctionnement des machines thermiques produites au début de l'ère industrielle. En raison du caractère universel des principes produits par la thermodynamique, celle-ci a par la suite dépassé le cadre strict de l'étude des machines, pour toucher tous les domaines de la physique dans lesquels la chaleur et son transfert jouent un rôle (électromagnétisme, optique,...), ainsi que d'autres disciplines scientifiques (chimie, biologie,...).

On va aborder dans ce chapitre les notions de bases de la thermodynamique ainsi que les différents types de transfert de chaleurs et les lois fondamentales gouvernants.

I.2 Définition d'un système thermodynamique

La thermodynamique s'attache à décrire le comportement de systèmes thermodynamiques. Un système thermodynamique est constitué d'un très grand nombre de particules (atomes, molécules, ions,...), généralement de l'ordre du nombre d'Avogadro ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$). Un tel système peut alors être décrit à l'échelle macroscopique par des grandeurs statistiques (volume, pression, température, concentrations,...), qui sont des valeurs moyennes rendant compte du comportement des diverses particules constituant le système. Ces grandeurs statistiques sont appelées variables d'état[1]. On distingue les systèmes suivants

I.2.1 Système fermé

Un système fermé est tel qu'il n'échange pas de matière avec le milieu extérieur (en d'autres termes, la totalité de sa frontière est imperméable).

I.2.2 Système ouvert

Un système est dit ouvert si les échanges de matière avec le milieu extérieur sont autorisés (il suffit pour cela qu'au moins une partie de la frontière soit perméable).

I.2.3 Système simple

Un système simple est un fluide contenant (N) moles d'un corps pur, homogène, occupant un volume (V) pour lequel on peut négliger les effets de pesanteur, d'énergie cinétique, d'inertie, ainsi que les effets de champ électrique ou magnétique. En outre, on supposera le système suffisamment étendu pour que l'on puisse négliger les effets de surfaces (comme la tension superficielle à la surface libre d'un liquide, par exemple). Un système simple ne pourra donc échanger de l'énergie avec l'extérieur que sous deux formes : travail mécanique ou chaleur.

I.3 La chaleur

I.3.1 Définition

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. Cette équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité : le joule. A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de Chaleur et de différence de température [2].

I.3.2 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur [3]

$$\varphi = \frac{1}{s} * \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1.1)$$

Où s est l'aire de la surface.

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1.2)$$

I.3.3 La Température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu. Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps

le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température.

I.3.4 Unités de chaleur

La quantité de chaleur est exprimée dans les mêmes unités que l'énergie et le travail, à savoir en joules (J). On utilise également la calorie (Cal), définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de 14,5°C à 15,5°C sous une pression de 1 atm.

L'énergie mécanique peut être convertie en chaleur par frottement, et le travail mécanique nécessaire pour produire une calorie s'appelle «l'équivalent mécanique de la calorie». On a : 1 Cal = 4,1855 J.

I.3.5 Equation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux de type paraboliques sans source de chaleur

$$u_t(x, t) - k\Delta u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \sum_{i=0}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t) = 0 \quad (1.3)$$

Pour u défini sur R^+ , et $k > 0$. C'est l'équation de la chaleur qui modélise des phénomènes d'évolution : diffusion de chaleur.

I.4 Équilibre thermodynamique

I.4.1 État stationnaire

L'état d'un système est dit stationnaire si toutes les grandeurs qui le caractérisent demeurent constantes au cours du temps. Dans le cas contraire (une ou plusieurs variables d'état évoluent dans le temps), le système subit une transformation (ou évolution).

I.4.2 État d'équilibre thermodynamique

Un système est en équilibre thermodynamique si, étant isolé (absence de tout échange avec l'extérieur), son état est stationnaire.

I.4.3 Transformation réversible, irréversible

Une transformation réversible est constituée d'une suite d'états d'équilibre thermodynamique infiniment proches les uns des autres. Dans le cas contraire, elle est irréversible.

Toutes les transformations réelles sont donc irréversibles. Comme nous le verrons par la suite, l'intérêt des transformations réversibles réside dans le fait que, le système étant toujours à l'équilibre, les variables d'état sont définies à chaque instant au cours de la transformation. Comme ces variables ne dépendent que de l'état du système, on sera toujours libre de calculer leur variation entre deux états d'équilibre distincts en imaginant une transformation réversible entre ces deux états même si, dans la réalité, la transformation est irréversible [3]

I.5 Différents types de transformations

I.5.1 Transformation isotherme

C'est une transformation s'effectuant à température constante.

I.5.2 Transformation isobare

C'est une transformation s'effectuant à pression constante.

I.5.3 Transformation isochore

C'est une transformation s'effectuant à volume constant.

I.5.4 Cycle thermodynamique

C'est une transformation telle que l'état final est le même que l'état initial. De ce fait, elle peut être répétée indéfiniment.

I.6 Coefficients thermo élastiques

Ces coefficients permettent de caractériser le comportement des différents matériaux en fonction des paramètres d'état p , v , et T .

I.6.1 Coefficient de dilatation volumique

Il représente la variation relative de volume résultant d'une variation de température. Il est homogène à l'inverse d'une température

$$\alpha_v = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_p \quad (1.4)$$

I.6.2 Coefficient relatif de pression

Il est défini par

$$\alpha_p = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_v \quad (1.5)$$

Il représente la variation relative de pression résultant d'une variation de température. Il est aussi homogène à l'inverse d'une température.

I.6.3 Coefficient de compressibilité isotherme

Il est défini par

$$k_t = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_t \quad (1.6)$$

Il représente la variation relative de volume résultant d'une variation de pression. Il est homogène à l'inverse d'une pression

I.7 Le transfert de chaleur

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction, convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et composants électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs des procédés industriels, etc.

L'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objet principal de plusieurs travaux, et pour se faire, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes gérant la conduction et la convection sous l'effet de la nature des systèmes dans lesquels elle a lieu (géométrie spécialement), et les propriétés des fluides impliqués, (Propriétés physico-chimiques).

I.8 Les types de transfert de chaleur

Comme on a indiqué, le transfert de chaleur est défini par la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de températures. Le transfert de

chaleur est régi, non seulement par une relation unique, mais, plutôt par une combinaison de différentes lois physique indépendantes. On distingue, généralement, trois modes de transfert (cf. Fig. 1.1) [4]

* **Conduction** : Transfert dans la masse

* **Rayonnement** : Transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée.

* **Convection** : Transfert par transport.

I.8.1 La conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne). Provoquée par une différence de température entre deux milieux solides, en contact physique. Ainsi, le corps à température plus élevée donne de l'énergie thermique à celui dont la température est plus faible, sans qu'il y fasse transfert de matière. La différence de température entre deux corps provoque les transferts thermiques à l'intérieur même de chacun des corps. On obtient un système dynamique dans la conduction, l'énergie(Chaleur) se propage par contact direct des molécules sans un déplacement appréciable des Molécules[5]

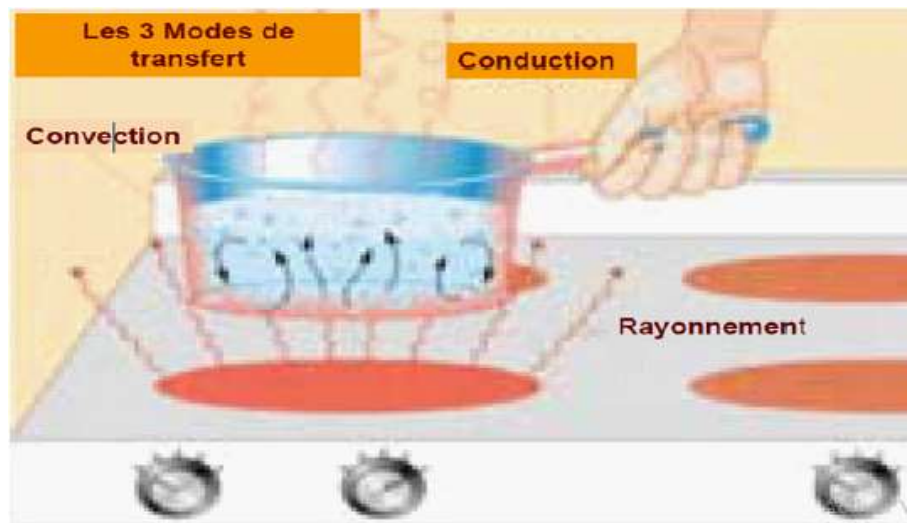


Figure 1.1: Les trois types de Transfert de chaleur

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc...

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur.

Si les faces intérieure et extérieure d'une vitre d'une maison sont à des températures différentes il y a conduction thermique dans l'épaisseur de la vitre. En hiver par exemple, si la température de la face extérieure est de -10°C et celle de la face intérieure est de 20°C , le transfert de chaleur se fait de l'intérieur à l'extérieur. (cf. Fig. 1.2)

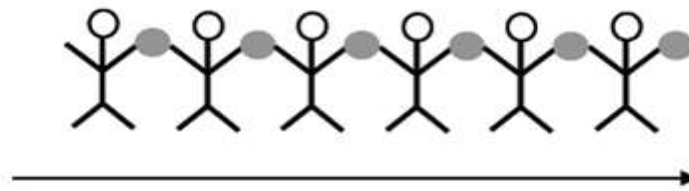


Figure 1.2: Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par conduction thermique

I.8.2 Rayonnement

C'est un mode de transfert de chaleur qui nous est familier : L'hiver devant un bon feu ou l'été sur la plage au soleil. La chaleur passe d'un corps à haute température vers un corps à basse température sous forme d'un rayonnement électromagnétique (photon); les deux corps devant être dans un milieu transparent (comme l'air ou le vide). Voir Fig. 1.3

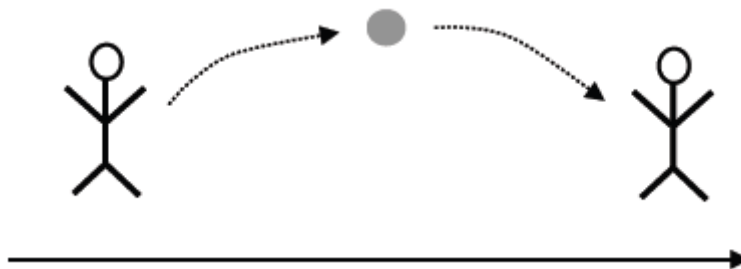


Figure 1.3: Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par rayonnement

Le rayonnement infrarouge est appliqué dans de très nombreux procédés industriels. Son action sur la matière est essentiellement thermique et les applications principales concernent [5]

- Le séchage (papiers, cartons, textiles, etc.) ;
- La cuisson (teintures, apprêts, enductions...) ;
- Le chauffage (avant formage de matériaux divers, traitements thermiques, soudage, chauffage de postes de travail...) ;

- Les polymérisations (encres, revêtements, emballages...);
- La stérilisation (acons pharmaceutiques, produits alimentaires divers...).

I.8.3 Convection

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes (fig. 1.4).

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La quantité de chaleur échangée par unité de temps dépend de plusieurs paramètres :

- La différence de température entre la paroi et le fluide.
- La vitesse du fluide.
- La capacité thermique massique du fluide.
- La surface d'échange.
- L'état de surface du solide.
- Sa dimension...etc.

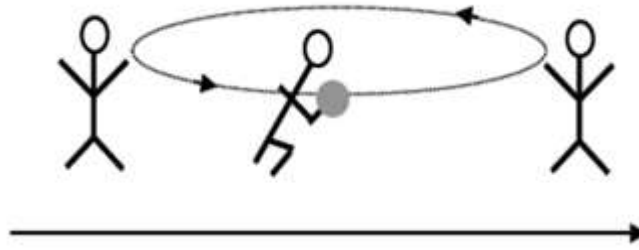
Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide, on distingue :

a) La convection naturelle ou libre

Pour laquelle le mouvement provient de l'action simultanée de différences de température existant au sein du milieu, et d'un champ de force massique.

b) La convection forcée

Pour laquelle le mouvement est imposé par une action extérieure (pompe, ventilateur...).



1.4 : Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur par convection.

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur.

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud. [5]

I.9 Lois fondamentales du transfert de la chaleur

I.9.1 Loi fondamentale de la conduction

Considérons une plaque plane (D), de surface (S) et d'épaisseur (e) (voir Fig.1.5), et soit dQ, la quantité de chaleur échangée entre la plaque et l'air ambiant pendant le temps dt. On définit le flux de chaleur (flux thermique, f) comme la puissance échangée entre la surface S de la plaque et le milieu extérieur. [6]

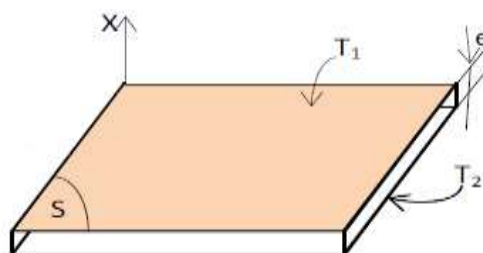


Fig.(1.5)Plaque plane

$$\phi = \frac{dQ [J]}{dt [s]}; [w] \quad (1.7)$$

On définit la densité de flux thermique comme la puissance échangée par unité de surface de la plaque

$$\varphi = \frac{dQ}{s \cdot dt} \frac{[J]}{[m^2 \cdot s]}; \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (1.8)$$

Les principes fondamentaux de la thermodynamique nous font savoir que :

- L'énergie est conservée en l'absence d'une source de chaleur ;
- La chaleur transmise passe toujours du corps chaud vers le corps froid (dans notre cas : $T_1 > T_2$).

On peut vérifier expérimentalement que :

$$Q = k \frac{s}{e} \cdot (T_1 - T_2) \quad (1.9)$$

tels que

Q : la quantité de chaleur échangée à travers la surface (S) ;

K : le facteur de proportionnalité appelé conductivité thermique qui est une caractéristique du matériau, son unité de mesure est [W/m.K] ou [kcal/h.m.C].

Pour un élément infinitésimal, dès, la relation (1.9) s'écrit

$$dQ = d\varphi = -k \cdot ds \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.10)$$

Le signe (-) : pour tenir compte du sens de flux thermique, le gradient qui va de la plus grande grandeur à la plus petite est négative (voir interprétation mathématique ci-après). L'équation (1.9) est attribuée au mathématicien et physicien Français J. B. Fourier qui en 1822 énonça sa loi et qui peut se traduire comme suit : «En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantané, est proportionnelle à la conductivité thermique du milieu et au gradient de température» [6].

L'équation (1.10) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k \cdot s}} \quad (1.11)$$

tel que $\frac{e}{k \cdot s}$, représente la résistance thermique que le matériau oppose à l'écoulement de la chaleur par conduction. L'inverse de la résistance thermique représente la conductance thermique et désignée par $\frac{k \cdot s}{e}$.

- $\frac{k}{e}$: représente la conductance thermique par unité de surface et est appelé l'unité de conductance thermique pour l'écoulement de la chaleur par conduction.

I.9.2 Loi fondamentale de la convection

La loi fondamentale de la convection est la loi de Newton traduite par la relation expérimentale de flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi solide [6].

$$\phi = k \cdot s(T_{\text{chaud}} - T_{\text{froid}}) \quad (1.12)$$

$$h = k_{\text{fluide}}/\delta \quad (1.13)$$

tels que :

δ : Représente l'épaisseur d'un film mince du fluide adhérent à la paroi solide ;

K_{fluide} : La conductivité thermique du fluide,

h : Le coefficient du transfert de chaleur par convection,

I.9.3 Loi fondamentale du rayonnement

Le flux de chaleur rayonné par un milieu de surface (S) et de température (T) s'exprime grâce à la loi de Stefan, et Boltzmann [6] par :

$$\phi_{\text{emis}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 \quad (1.14)$$

σ : Constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 4.92 \cdot 10^{-8}$ kcal/h.m².K

ε : L'émissivité de la surface sans unité et T en [K]

Références

- [1] José-Philippe Pérez, éd. Dunod, Paris 2001, Thermodynamique, fondements et applications
- [2] Pierre Cormault. "Cours de Thermique théorique et pratique", Janvier 1999.
- [3] Yves Jannot. " Transferts thermiques". Ecole des Mines Nancy 2ème année, 6, 5, 2012.
- [4] Arif Ali. "Thèse de Magister : Modélisation d'une installation à plasma inductif basse fréquence". Université de Biskra.
- [5] René Leleu. "Transferts De Chaleur J 1 080, Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences fondamentales", 2,4, 10.
- [6] M. Mustapha Bordjane. Polycopié destiné aux étudiants de Licence LMD, Energétique et Construction Mécanique.

CHAPITRE 2

LES EQUATIONS DE CHALEURS

II.1 Introduction

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en 1811, modélisa l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Il a permis ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques. [1]

Dans ce chapitre, on discute l'importance des équations différentielle dans la modélisation des systèmes physiques en détaillant l'exemple de l'équation de chaleur ainsi que la résolution numérique basé sur la méthode de différences finies.

II.2 Equations différentielles

Les équations différentielles et les systèmes différentiels ont une importance fondamentale dans les problèmes pratiques. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre de lois et de relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme d'équations différentielles. Les équations différentielles constituent une des branches les plus fertiles des mathématiques, l'étude de ce type d'équations différentielles est liée à l'étude des phénomènes naturels.

Une première approximation dans cette étude consiste en effet à simplifier les relations entre les fonctions représentant ces phénomènes et leurs dérivées, jusqu'à obtenir des équations différentielles linéaires, c'est-à-dire du premier degré par rapport aux fonctions et aux dérivées.

Dans le cas d'une seule fonction dépendant d'une seule variable la forme générale d'une telle équation est :

$$y^n + A_1(x)y^{(n-1)} + \dots + A_n y(x) = d(x) \quad (2.1)$$

Une deuxième approximation consiste à prendre dans chacun des coefficients $A_n(x)$ développés en série de Maclaurin le terme constant seul. On obtient ainsi les équations à coefficients constants d'importance pratique considérable et que nous étudierons.

II.3 Formulation des équations différentielles

II.3.1 Équations différentielles partielles

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles.

D'une manière générale, la modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution d'équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP. Ces équations correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique

- ✓ Mécanique des fluides : équations de Navier-Stokes
- ✓ Electromagnétisme : équations de Maxwell
- ✓ Thermique : équation de la chaleur
- ✓ Mécanique quantique : équation de Schrödinger

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables $(x, y, \dots) \mapsto u(x, y, \dots)$ s'écrit sous la forme

$$F(x, u(x), Du(x), \dots, D^p u(x)) = 0 \quad (2.2)$$

telle que: $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction inconnue avec n et p des entiers strictement positifs données et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^p}$ est une fonction donnée, l'entier p est appelé l'ordre de l'E.D.P

II.3.2 Équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle x , une fonction inconnue $x \mapsto y(x)$ et ses dérivées y', y'', \dots, y^n au point x définie par [2]

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \quad (2.3)$$

Où F n'est pas indépendante de sa dernière variable y^n . On prendra dans un intervalle I de \mathbb{R} (I peut être \mathbb{R} tout entier). La solution y en général sera à valeurs dans \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}^*$ où N sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

II.3.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre, une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Une telle équation est de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (2.4)$$

où a , b et c sont des fonctions données de x ; $a(x)$; et $b(x)$ sont appelés coefficients et $c(x)$ le second membre. On associe à l'équation (2.4), l'équation sans second membre

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (2.5)$$

qui est à variables séparable.

II.3.4 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à ses deux premières dérivées, soit

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (2.6)$$

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \quad (2.7)$$

Où a , b et c sont des constantes données et f une fonction donnée. On associe à l'équation (2.7) l'équation sans second membre

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (2.8)$$

II.3.5 Équations différentielles linéaires du n-ième ordre

On appelle équation différentielle linéaire du n-ième ordre, une relation de la forme $f[x, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0$ reliant la variable x , une fonction inconnue y de la variable x et les dérivées successives $y', \dots, y^{(n)}$ de cette fonction.

II.4 Exemples des équations différentielles au 1er ordre

Une classe restreinte, mais importante, d'équations différentielles ont des solutions mathématiques sous la forme de fonctions transcendantes ou de fonctions spéciales en général. Nous allons donc donner un rapide aperçu de ces équations différentielles particulières qui contiennent en autres quelques équations différentielles non-linéaires, dont l'immense majorité ne peut être résolue que numériquement.

II.4.1 Equation à coefficients constants

Les équations différentielles à coefficients constants a , et b de forme générale

$$a \frac{dy}{dx} + by(x) = c(x) \quad (2.9)$$

ont pour solution générale

$$y(x) = e^{-b/ax} \left(\int dt \frac{c(t)}{a} e^{at} + cste \right) \quad (2.10)$$

II.4.2 Equation linéaire

Une équation différentielle linéaire a pour forme générale

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y(x) = g(x) \quad (2.11)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions arbitraires. La solution de cette équation est

$$y(x) = e^{\int f(u)du} \left(\int dt g(t) e^{f(u)du} + cste \right) \quad (2.12)$$

II.4.3 Equation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli a pour forme générale

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y(x) + g(x)y(x)^a = 0 \quad (2.13)$$

Où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions arbitraires, et a est une constante. En introduisant le changement de fonction

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-a}} \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) devient une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = (a-1)(u(x)f(x) + g(x)) \quad (2.15)$$

qui s'intègre alors comme une équation différentielle linéaire.

II.4.4 Equation de Clairaut

Une équation de Clairaut est une équation qui introduit une fonction g . Sa forme est

$$y(x) = x \frac{dy}{dx} + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2.16)$$

Ce type admet une solution linéaire de la forme

$$y(x) = Cx + g(c) \quad (2.17)$$

où C , est une constante arbitraire. On peut aussi exprimer la solution de l'équation sous forme paramétrique

$$x(s) = -\dot{g}(s) \quad (2.18)$$

$$y(s) = g(s) - s\dot{g}(s) \quad (2.19)$$

II.5 Equation de la Chaleur

II.5.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes

Dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général

$$pc \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q \quad (2.20)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $q = 0$
- c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T .

Les hypothèses (a) + (b) + (c) permettent d'écrire

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dz} \right)^2 \right] = pc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.21)$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.22)$$

Le rapport $\alpha = \frac{\lambda}{pc}$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) Qui caractérise la vitesse de Propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.23)$$

II.5.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques

Elle s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.24)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de z , l'équation (2.24) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.25)$$

$\frac{\dot{q}}{k} = 0$ (Sans source de chaleur). Donc l'équation devient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.26)$$

II.5.3 Equation de la chaleur en coordonnées sphériques

En coordonnées sphérique, on a

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} \quad (2.27)$$

II.6 Résolution par la méthode des différences finis

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. Elle repose sur deux notions : la discrétisation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu [5]

II.6.1 Les schémas numériques

(a) Schéma explicite

Soit j l'indice représentant la variable spatiale, et n représentant la variable temporelle. L'équation (2.21) à une dimension sera approximé par le schéma suivant (fig. 2.1)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.28)$$

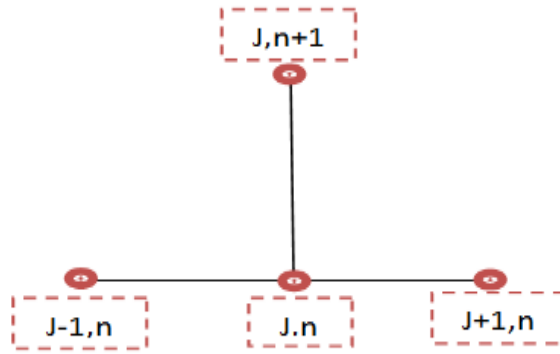


Figure 2.1: Schéma explicite

On remarque qu'on a utilisé un schéma avant d'ordre un pour la dérivée par rapport au temps, et un schéma centré d'ordre deux pour la dérivée par rapport à l'espace. Lors de cette discrétisation nous avons choisi de prendre les termes de droites au temps n . Ce schéma s'appelle un schéma explicite, puisqu'il permet de formuler l'expression de la variable au point i et à l'instant $n+1$ explicitement en fonction de la solution déjà calculée au temps n . Ce schéma est représenté par la molécule suivante

$$u_j^{n+1} = K u_{j-1}^n + (1 - 2K) u_j^n + K u_{j+1}^n \quad (2.29)$$

avec

$$K = \alpha \frac{h}{d^2} \quad (2.30)$$

h , et d sont les paramètres de maillage associés aux indices n , et j respectivement. Cette équation sera appliquée aux nœuds d'une même rangée (c.à.d. $n = \text{cste}$).

(b) Schéma implicite

Reprenons le problème de la conduction thermique non stationnaire et réécrivons l'équation discrète comme suit (les termes de droite sont au temps $(n+1)$). Voir fig. 2.2

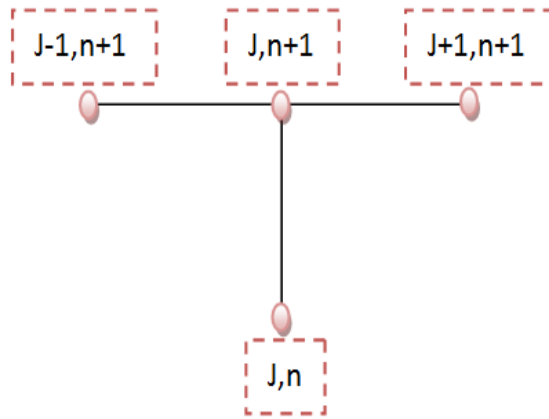


Figure 2.2: Schéma implicite

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.31)$$

Après groupement et arrangement :

$$\lambda u_{i-1}^{n+1} - (1 - 2\lambda)u_i^{n+1} + \lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n \quad (2.32)$$

Cette équation présente trois inconnus en même temps, ce qui ne permet pas de la résoudre directement comme c'était le cas pour le schéma explicite. Cette forme de discrétisation est appelée schéma implicite. Pour trouver la solution il faut écrire l'ensemble des équations issues de l'application de la dernière équation sur tous les nœuds de la même ligne et en suite résoudre le système tout entier [6].

(c) Schéma de la Direction alternée implicite (ADI)

Procédé ADI peut être appliquée pour le système à deux ou trois dimensions pour obtenir une matrice de coefficients tri diagonale.

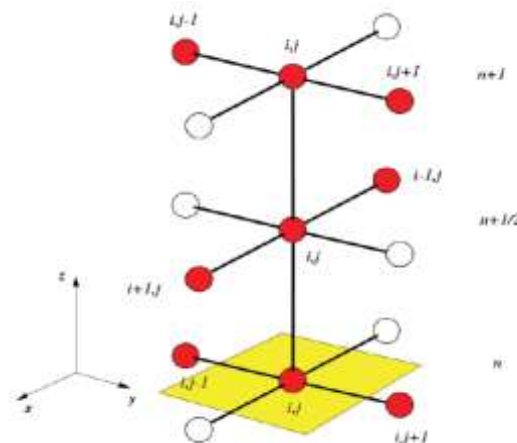


Figure 2.3 : Schéma ADI

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.33)$$

La valeur au niveau du nœud (i, j) pour l'itération (m + 1) est donnée à titre

$$u_{i,j}^{m+1} = \frac{1}{4} [u_{i,j+1}^{(m)} + u_{i,j-1}^{(m)} + u_{i+1,j}^{(m)} + u_{i-1,j}^{(m)}] \quad (2.34)$$

Nous ajoutons maintenant et soustrayons de cette équation pour obtenir

$$u_{i,j}^{m+1} = u_{i,j}^{(m)} + \frac{1}{4} [u_{i,j+1}^{(m)} + u_{i,j-1}^{(m)} + u_{i+1,j}^{(m)} + u_{i-1,j}^{(m)} - 4u_{i,j}^{(m)}] \quad (2.35)$$

Ou de façon équivalente

$$u_{i,j}^{m+1} - u_{i,j}^{(m)} = \frac{1}{4} \left\{ [u_{i,j+1}^{(m)} - 2u_{i,j}^{(m)} + u_{i,j-1}^{(m)}] + [u_{i+1,j}^{(m)} - 2u_{i,j}^{(m)} + u_{i-1,j}^{(m)}] \right\} \quad (2.36)$$

Chaque itération est considérée comme une procédure en deux étapes dans lequel la première étape fait avancer à la (m) niveau de la seconde étape (m + 1) niveaux.

Première étape :

$$u_{i,j}^{(m+1/2)} - u_{i,j}^{(m)} = \frac{1}{4} \left\{ [u_{i,j+1}^{(m+1/2)} - 2u_{i,j}^{(m+1/2)} + u_{i,j-1}^{(m+1/2)}] + [u_{i+1,j}^{(m)} - 2u_{i,j}^{(m)} + u_{i-1,j}^{(m)}] \right\} \quad (2.37)$$

Deuxième étape :

$$u_{i,j}^{m+1} - u_{i,j}^{(m+1/2)} = \frac{1}{4} \left\{ [u_{i,j+1}^{(m)} - 2u_{i,j}^{(m)} + u_{i,j-1}^{(m)}] + [u_{i+1,j}^{(m+1/2)} - 2u_{i,j}^{(m+1/2)} + u_{i-1,j}^{(m+1/2)}] \right\} \quad (2.38)$$

La méthode ADI produit un ensemble d'équations tri diagonale à la (m + 1/2) niveau. Les équations peuvent être résolues long de toutes les lignes de la grille, une ligne à la fois. Une fois, tous les nœuds ont été élevés à la (m + 1/2) niveau, une procédure similaire pour la colonne de nœuds est appliquée. Une itération en deux étapes est achevée lorsque les nouvelles valeurs sont calculées [11].

II.6.2 Les volumes finis

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de

la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles [12].

II.6.3 Les éléments finis

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme vibrationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage [12].

II.8 La méthode de simulation de Monte Carlo

La simulation par la méthode de Monte Carlo est aujourd'hui l'une des techniques les plus utilisées pour étudier le fonctionnement physique des composants électroniques, offrant la possibilité de reproduire fidèlement les divers phénomènes microscopiques qui se produisent dans les matériaux semi-conducteurs [8].

La méthode de Monte Carlo permet de réaliser trois objectifs. Premièrement ; elle facilite l'étude des phénomènes de mobilité ou de diffusion dans les matériaux, par la comparaison des résultats obtenus théoriquement avec les données expérimentales. Elle peut nous apporter des éléments utiles et nouveaux sur les mécanismes physiques qui déterminent la dynamique électronique dans un semi-conducteur. Deuxièmement ; elle permet de faire une étude précise des variations de la vitesse de dérive et du coefficient de diffusion en régimes stationnaire et transitoire. Elle peut fournir les données de base nécessaires à la résolution numérique des composants à partir des équations de l'électrocinétique. Troisièmement ; elle permet la simulation directe de certains de ces composants et s'avèrent, en définitive, des méthodes d'approche plus précise, plus fiable et même parfois plus simple que les techniques numériques classiques [9]. Ses qualités se définissent par la rapidité de l'exécution et la souplesse d'emploi dans les diverses applications.

La méthode de Monte Carlo est basée sur un processus de tirage au sort à partir de lois de probabilités calculées. Ces lois sont les probabilités d'interactions subies par les porteurs durant leur mouvement dans le semi-conducteur.

Il y a deux approches possibles pour simuler le comportement des électrons dans un semi-conducteur : Déterminer la fonction de répartition des électrons en résolvant l'équation de Boltzmann ; et suivre le comportement de chaque électron au cours du temps.

II.8.1 Principe de la méthode

L'idée de base de la méthode consiste à simuler le mouvement dans le temps, un ou plusieurs porteurs dans l'espace des vecteurs d'ondes des points représentatifs de ces porteurs, tenant compte

a. De l'accélération due aux forces appliquées aux porteurs

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = \frac{q\vec{E}}{\hbar} \quad (2.39)$$

La connaissance de la bande d'énergie permet de calculer l'énergie du porteur, à chaque instant.

$$\mathcal{E}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} \quad (2.40)$$

b. Des collisions subies par ces porteurs induisant des transitions brutales entre les états. Connaissant la position d'un porteur de charge dans l'espace des vecteurs d'onde K , il est possible de la connaître dans l'espace géométrique réel ; et la connaissance de la structure de bande d'énergie $\mathcal{E}(\vec{k})$ permet de calculer la vitesse des porteurs à chaque instant

$$\vec{v} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\hbar \partial \vec{k}} \quad (2.41)$$

Par intégration, nous calculons la position des porteurs, au cours du temps. Il est possible d'accéder à toutes les grandeurs moyennes ; énergie moyenne, vitesse,...Celles-ci peuvent être déduites de deux façons différentes : soit par l'observation d'un grand nombre de particules permettant de calculer les moyennes d'ensemble (cette définition est utile quand les conditions d'étude changent dans le temps), soit par observation d'un seul électron pendant une durée suffisamment grande. La trajectoire de chaque électron sera constituée par une suite de vols libres effectués sous l'influence de la force externe, puis des chocs sur les différents obstacles présentés par le milieu où évolue le porteur.

II.8.2 Avantage de la méthode

L'avantage des méthodes de Monte Carlo est de pouvoir obtenir à la fois la durée de vol libre, et les états du porteur après les chocs en utilisant un procédé basé d'une part sur le

tirage de nombres aléatoires et d'autre part sur la connaissance des densités de probabilités correspondant aux interactions auxquelles est soumis le porteur.

Un des principaux avantages de ces méthodes est leur souplesse d'utilisation. Une fois le processus élémentaire de simulation est mis au point, les conditions d'utilisation de celui-ci peuvent être variées à l'infini. L'application la plus simple que l'on puisse imaginer est l'étude de la dynamique électronique dans un matériau supposé infini et homogène soumis à des conditions stationnaires, en fonction du temps. La situation peut se compliquer singulièrement quand le matériau est inhomogène, ou lorsque le champ appliqué n'est plus constant dans le temps ni uniforme dans l'espace.

Dans le cas où les concepts habituels de bande d'énergie et de collisions instantanées restent valides, la méthode de Monte Carlo montre sa supériorité lorsque les phénomènes se compliquent quelque peu. En effet ; elle permet de tenir compte facilement des non stationnarités spatiales ou temporelles que l'on veut étudier. Cette méthode est actuellement la seule susceptible d'étudier les manifestations des porteurs chauds quelque soient les régimes de champ appliqué. Elle tient compte de façon complète, des formes de bandes d'énergie même complexes ; et c'est le cas particulier de l'étude des alliages ternaires et de tous les détails de la dynamique microscopique avec des hypothèses simplificatrices réduites au minimum.

En contrepartie, la méthode de Monte Carlo est attachée d'erreur statistique. Comme pour tout phénomène statistique, on peut améliorer la précision en augmentant la durée d'observation t . Malheureusement, l'amélioration de l'erreur n'évolue qu'en $1/t$; et ceci peut être un gêne important quand on étudie des comportements fins : estimation d'une mobilité différentielle négative ou vitesse de pic en fonction de certains paramètres (température ou dopage du matériau, par exemple). Ce problème nécessite un soin particulier en absence d'une relation analytique. Il découle que cette méthode nécessite parfois des moyens de calcul importants.

Une autre propriété caractéristique jouant en défaveur de la méthode de Monte Carlo est que celle-ci fonctionne moins bien en champ faible qu'en champ fort, au moins quand on s'intéresse à la vitesse de dérive. Une bonne estimation de la moyenne exigera une longue intégration, et par conséquent un allongement du temps de calcul.

II.9 Importance de la Simulation

Les outils de simulation numérique occupent une place prépondérante dans les études en physique du bâtiment. La démarche de conception optimale qui résulte de l'épuisement des ressources énergétiques et du souci de préservation de l'environnement, n'a fait qu'amplifier leur utilisation.[10]

La simulation se définit comme l'utilisation ou la résolution de modèles correspondant à un système donné pour étudier le comportement de ce dernier dans un contexte précis. Elle est la suite logique de la modélisation qui est la première approche d'une simulation. De nombreux codes de simulation numérique reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo, elsA,...

Les étapes nécessaires pour réussir une simulation d'un problème est

1. Définition de problème.
2. Choix du modèle de simulation
3. Définition des caractéristiques de modèle.
4. Choix des critères de convergence
5. Algorithme
6. Lancement de la simulation
7. Sauvegardes

Références

- [1] BenhammaSalima, Equation de la Chaleur en Coordonnées Cartésiennes et enAxi-symétrie 3D, Mémoire Université de Bejaia, Année 2015/2016.
- [2] B. Helffera partir du texte établi par Thierry Ramond (Cours) Université Paris-Sud Version de Janvier-Mai 2007.
- [3] M. H. Vignal, Cours équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques enMaster 1 .Mathématiques fondamentales .2003-2008.
- [4] Parallel Numerical Solution of 2-D Heat Equation, Verena Horak_, Peter Gruber, Departement of Scientific Computing, University of Salzburg.
- [5] Tahar Abbes Miloud, Méthodes des différences finies, Méthodes intégrales etvibrationnelles.
- [6] Joe D. Ho-man. Numerical Methods for Engineers and Scientists. McGraw- Hill, New York, 1992.
- [7] https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Condition_aux_limites_de_Robin&oldid=155208067 ».
- [8] A.Negol, A.Guyot, J.Zimmermann, A dedicated circuit for changed particles simulationusing the Monte Carlo, Proceeding of IEEE International conference on applicationspecific systems, architectures and processors (AASAP 97), IEEE, 1997.
- [9] J. Zimmermann, étude par la méthode de Monte Carlo des phénomènes de transportélectronique dans le Silicium de type N en régimes stationnaire et non stationnaire.Application à la simulation des composants submicroniques, Thèse de doctorat d'état,U.de Lille 1,1980.
- [10] Salmi Somia, Etude numérique d'une Convection naturelle en 2D par la méthodede volumes finis, l'obtention du Diplôme de master, université Mohamed Boudiaf de m'sila.
- [11] Erwin Kreyszig. Advanced Engineering Mathematics. Wiley, New York, seventh edition,1993.
- [12] EricGoncalvès, Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO, institut national polytechnique de Grenoble Septembre 2005.

CHAPITRE 3

**DISCRETISATION EXPLICITE DE L'EQUATION DE
CHALEUR POUR UNE PLAQUE CARRE MIS AUX
CONDITIONS AUX LIMITES CONSTANTES DE
TYPE DIRICHLET**

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique de l'équation de chaleur bidimensionnelle décrivant le transfert de chaleur à travers les régions d'une plaque carré homogène d'un matériau de diffusivité α (généralement de l'ordre 10^{-6}). La méthode utilisée est celle de différences finies sous sa version explicite expliquée dans le chapitre précédent.

L'étude se base sur un maillage de paramètres temporel et spatiales selon les deux directions. On va voir à l'aide de programme Maple que l'équation de chaleur se transforme par discrétisation à une relation de récurrence décrivant tous l'espace. On fait un test de programme pour certain maillage puis on étudie le comportement de chaleur suivant les valeurs de la constante adimensionnelle K introduite dans (2.30). Notre étude est supportée par des graphes et discussions.

III.2 Description de problème

On considère un matériau de diffusivité α sous forme d'une plaque rectangulaire de dimensions $L \times L'$ (fig. 3.1), mis aux conditions aux limites fixes de type Dirichlet, et aux conditions initiales uniformes. Après certain temps la chaleur va se stabilisé selon les conditions aux limites et tend vers l'équilibre thermique. On veut suivre ce phénomène par une étude numérique basée sur la méthode de différences finies et assistée par le programme Maple.

On note $T(t, x, y)$ la fonction décrivant ce transfert thermique à travers notre système satisfaisant

$$\frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(t, x, y)}{\partial t} \quad (3.1)$$

Nous traduisons nos conditions initial et aux limites par les relations

$$\begin{aligned} T(t, x, 0) &= T_{x0} \text{ pour } x \in [0, L], t \geq 0 \\ T(t, x, L') &= T_{xL'} \text{ pour } x \in [0, L], t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} T(t, 0, y) &= T_{0y} \text{ pour } y \in]0, L'[, t \geq 0 \\ T(t, L, y) &= T_{Ly} \text{ pour } y \in]0, L'[, t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$T(0, x, y) = h(x, y), \text{ pour } (x, y) \in]0, L[\times]0, L'[\quad (3.4)$$

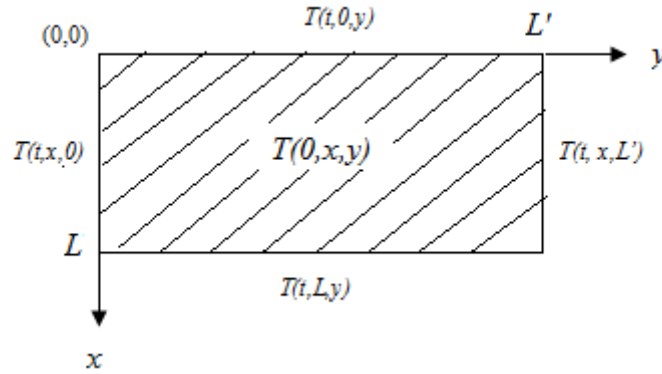


Fig. 3.1 Une plaque rectangulaire en notation matricielle mise aux conditions aux limites et initiales (Depuis [1])

Les intervalles sont ouverts dans (3.3) et (3.4) pour éviter l'intersection des conditions [1]. La résolution analytique se fait par la méthode de séparation de variable donnant un comportement exponentielle temporel et sinusoïdale spatial (voir [2], [3]).

III.3 Discrétisation explicite

La discrétisation de l'équation différentielle (3.1) se fait à partir de développement de Taylor [4], et on trouve

$$\left. \frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial x^2} \right|_{x_0} = \frac{T(t, x_0 + d, y) + T(t, x_0 - d, y) - 2T(t, x_0, y)}{d^2} \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial y^2} \right|_{y_0} = \frac{T(t, x, y_0 + d) + T(t, x, y_0 - d) - 2T(t, x, y_0)}{d^2} \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial T(t, x, y)}{\partial t} \right|_{t_0} = \frac{T(t_0 + h, x, y) - T(t_0, x, y)}{h} \quad (3.7)$$

Où d et h sont les pas respectivement spatial et temporel de discrétisation définis dans (2.30) qui doivent être les plus petits que possible. Alors on peut avoir

$$\begin{aligned}
& \frac{T(t_0, x_0 + d, y_0) + T(t_0, x_0 - d, y_0) - 2T(t_0, x_0, y_0)}{d^2} \\
& + \frac{T(t_0, x_0, y_0 + d) + T(t_0, x_0, y_0 - d) - 2T(t_0, x_0, y_0)}{d^2} \\
& = \frac{1}{\alpha} \frac{T(t_0 + h, x_0, y_0) - T(t_0, x_0, y_0)}{h}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

et par un petit calcul

$$\begin{aligned}
& T(t_0, x_0 + d, y_0) + T(t_0, x_0 - d, y_0) + T(t_0, x_0, y_0 + d) + T(t_0, x_0, y_0 - d) \\
& - 4T(t_0, x_0, y_0) = K \times (T(t_0 + h, x_0, y_0) - T(t_0, x_0, y_0))
\end{aligned} \tag{3.9}$$

On peut introduire trois entiers $k, i,$ et j dans $[0, \infty[\times [1, \infty[\times [1, \infty[$ décrivant respectivement la dépendance temporelle, spatiale en $x,$ et spatiale en y

$$T(t_0, x_0, y_0) \equiv T_{k,i,j} \tag{3.10}$$

Alors, la discrétisation explicite de (3.1) devient

$$T_{k,i+1,j} + T_{k,i-1,j} + T_{k,i,j+1} + T_{k,i,j-1} - 4T_{k,i,j} = K(T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}) \tag{3.11}$$

De même les conditions aux limites et initiales (3.1), (3.2), et (3.3) deviennent

$$\begin{aligned}
& T_{k,i,1} = T_T \text{ pour } i = 1..x_m = \frac{L}{d}, k = 0..t_m \\
& T_{k,i,L'} = T_B \text{ pour } i = 1..x_m = \frac{L}{d}, k = 0..t_m
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& T_{k,1,j} = T_L \text{ pour } j = 2..y_m - 1 = \frac{L'}{d} - 1, k = 0..t_m \\
& T_{k,L,j} = T_R \text{ pour } j = 2..y_m - 1 = \frac{L'}{d} - 1, k = 0..t_m
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$T_{0,i,j} = H_{i,j} \text{ pour } i = 2..x_m - 1, j = 2..y_m - 1 \tag{3.14}$$

La relation (3.11) est une relation de récurrence sous la forme

$$T_{k+1,i,j} = \frac{T_{k,i+1,j} + T_{k,i-1,j} + T_{k,i,j+1} + T_{k,i,j-1} - 4T_{k,i,j}}{K} + T_{k,i,j} \quad (3.15)$$

Contrairement à la relation implicite où on obtient un système d'équation nécessitant un temps énorme de calcul pour la résolution. On signale aussi que la discrétisation explicite converge seulement sous certaines conditions sur K . (cf. section suivante).

III.4 Algorithme Maple

On explique par suite pas par pas les démarches à suivre dans Maple [5] pour la résolution numérique de l'équation de chaleur moyennant l'algorithme explicite.

Pour tester le fonctionnement du programme, on fixe tout d'abord les constantes $h, d, \text{ et } \alpha$ puis les paramètres de maillage $t_m, x_m, \text{ et } y_m$. Après, on écrit les conditions initiales et aux limites en vérifiant que le nombre des inconnus et le nombre des équations sont égaux. On lance le programme pour avoir les solutions de (3.15) et on illustre les résultats par des graphes matriciels pour différents instants : $0, t_m/2, t_m-10, \text{ et } t_m$ (fig. 3.2). Dans notre exemple on obtient un système composé de 8784 équation et également 8784 inconnus.

```

[
  > d := 10-5; h := 10-5
  (1) The constants values
      d := 1/100000
      h := 1/100000
  (1)

  > alpha := 10-6; K := d2 / (alpha * h);
      alpha := 1/1000000
      K := 10
  (2)

  > tm := 60; xm := 12; ym := 12
  (2) Mesh parameters
      tm := 60
      xm := 12
      ym := 12
  (3)
]

```

```

(3) Limit and initial conditions
> TT := 10; TB := 10; TL := 10; TR := 10; H := (i, j) → 15
    TT := 10
    TB := 10
    TL := 10
    TR := 10
    H := (i, j) → 15
(4)

```

```

> LimCondX := seq(seq(T(k, i, 1) = TT, k = 0 .. tm), i = 1 .. xm), seq(seq(T(k, i, ym) = TB, k = 0 .. tm), i = 1 .. xm) :
LimCondY := seq(seq(T(k, 1, j) = TL, k = 0 .. tm), j = 2 .. ym - 1), seq(seq(T(k, xm, j) = TR, k = 0 .. tm), j = 2 .. ym - 1) :
InCond := seq(seq(T(0, i, j) = H(i, j), i = 2 .. xm - 1), j = 2 .. ym - 1) :

```

```

(4) Discret equation
> EQ := seq(seq(seq(T(k, i + 1, j) + T(k, i - 1, j) + T(k, i, j + 1) + T(k, i, j - 1) - 4 T(k, i, j)
    = K · (T(k + 1, i, j) - T(k, i, j)), k = 0 .. tm - 1), i = 2 .. xm - 1), j = 2 .. ym - 1) :
> Var := seq(seq(seq(T(k, i, j), k = 0 .. tm), i = 1 .. xm), j = 1 .. ym) :

```

```

(5) Verification of equation and unknown numbers
> Nx := 2 · (xm) · (tm + 1); Ny := 2 · (tm + 1) · (ym - 2); Nt := (xm - 2) · (ym - 2); Ne
    := (tm) · (xm - 2) · (ym - 2)
    Nx := 1464
    Ny := 1220
    Nt := 100
    Ne := 6000
(5)

```

```

> Neq := Nt + Nx + Ny + Ne;
Nv := (tm + 1) · (xm) · (ym)
    Neq := 8784
    Nv := 8784
(6)

```

```

(6) Resolution and representation
> S := evalf( solve( {EQ, LimCondX, LimCondY, InCond}, {Var} )) :
> TM := Matrix(xm · ym, tm + 1, subs(S, [Var]))
    TM :=
    [
    144 x 61 Matrix
    Data Type: anything
    Storage: rectangular
    Order: Fortran_order
    ]
(7)

```

```

> TS := (t) → Matrix(xm, ym, [seq(TM(i, t + 1), i = 1 .. xm · ym)])
    TS := t → Matrix(xm, ym, [seq(TM(i, t + 1), i = 1 .. xm · ym)])
(8)

```

```

> TS(0)

```

12 x 12 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order

(9)

```

> plots[matrixplot](TS(0), shading = zhue, axes = boxed); plots[matrixplot](TS(tm/2), shading
= zhue, axes = boxed); plots[matrixplot](TS(tm - 10), shading = zhue, axes = boxed);
plots[matrixplot](TS(tm), shading = zhue, axes = boxed)

```

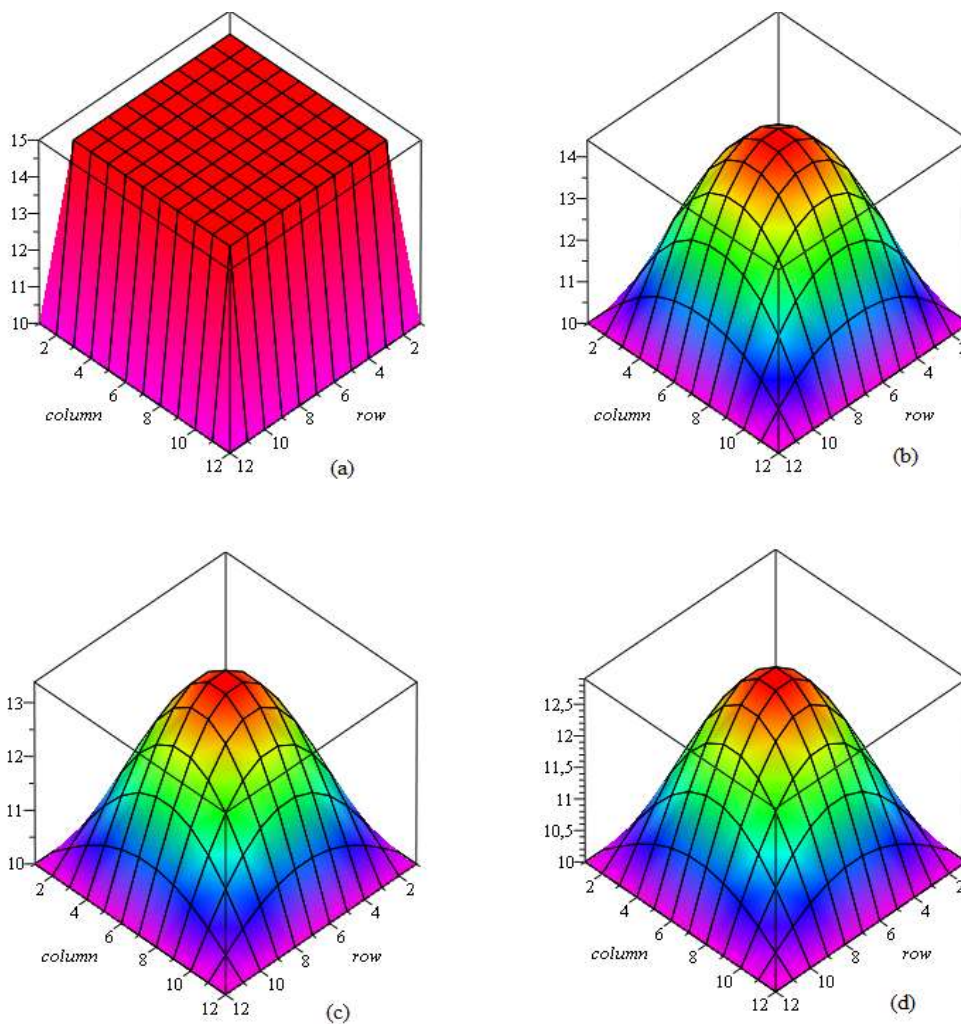


Figure 3.2 L'évolution de chaleur dans la plaque carré pour des différents instants ((a) : 0, (b) : $t_m/2$, (c) : $t_m - 10$, et (d) : t_m).

Le comportement de la température suit une loi exponentielle temporelle (fig. 3.3 (a)), et sinusoïdale spatial (fig. 3.3 (b), (c)). Cela est prévu puisque la solution analytique est série de Fourier en termes spatiaux [6].

```
> plot((seq(t, t = 0 ..tm))(seq(TS(t) (2, 3), t = 0 ..tm)));
plot((seq(x, x = 1 ..xm))(seq(TS(20) (x, 3), x = 1 ..xm)));
plot((seq(y, y = 1 ..ym))(seq(TS(20) (2, y), y = 1 ..ym)))
```

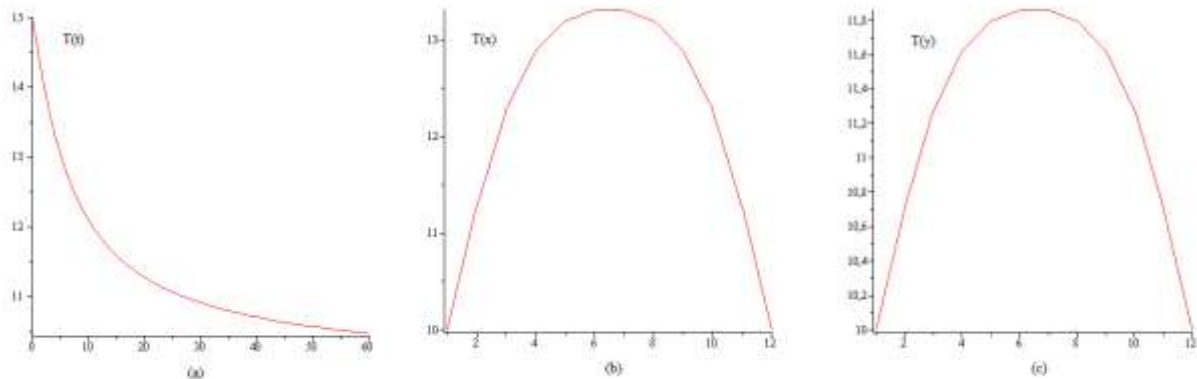


Figure 3.3 Le comportement de la température suivant chaque variable(a) : t, (b) : x, (c) : y.

Par suite, on génère une procédure Maple donnant la température en fonction toutes les conditions, les paramètres, et la constante K

```
(7) Procedure
> Temp :=proc(TT, TB, TL, TR, H, K, tm, xm, ym)
  global LimCondX, LimCondY, InCond, EQ, Var, S, TM, TS, TP;
  local i, j, k, t;
  LimCondX := seq(seq(T(k, i, 1) = TT, k = 0 ..tm), i = 1 ..xm), seq(seq(T(k, i, ym) = TB, k = 0
    ..tm), i = 1 ..xm);
  LimCondY := seq(seq(T(k, 1, j) = TL, k = 0 ..tm), j = 2 ..ym - 1), seq(seq(T(k, xm, j) = TR, k
    = 0 ..tm), j = 2 ..ym - 1);
  InCond := seq(seq(T(0, i, j) = H, i = 2 ..xm - 1), j = 2 ..ym - 1);
  EQ := seq(seq(seq(T(k, i + 1, j) + T(k, i - 1, j) + T(k, i, j + 1) + T(k, i, j - 1) - 4 T(k, i, j)
    = K · (T(k + 1, i, j) - T(k, i, j)), k = 0 ..tm - 1), i = 2 ..xm - 1), j = 2 ..ym - 1);
  Var := seq(seq(seq(T(k, i, j), k = 0 ..tm), i = 1 ..xm), j = 1 ..ym);
  S := evalf( solve( {EQ, LimCondX, LimCondY, InCond}, {Var} ));
  TM := Matrix(xm·ym, tm + 1, subs(S, [Var]));
  TS := (t) → Matrix(xm, ym, [seq(TM(i, t + 1), i = 1 ..xm·ym)]);
  TP := (t) → plots[matrixplot](TS(t), shading = zhue, axes = boxed)
end proc :
```

Cette procédure nous permis de savoir qu'il y a des valeurs de K pour lesquelles la méthode ne converge pas. Cela nécessite toute une autre étude pour étudier la convergence en

fonction de ces valeurs. Pour notre cas il nous suffit que K ne doive pas être inférieur à 3. Fig. (3.4) montre que le divergence apparait dès le moment $t = t_m/2 = 10$.

```

> tm := 20; K := 3;
Temp(10, 10, 10, 10, 15, K, tm, 12, 12) :

TP(0); TP(1); TP( tm / 2 ); TP(tm)

```

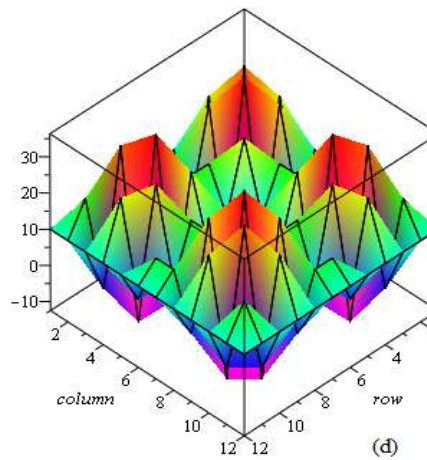
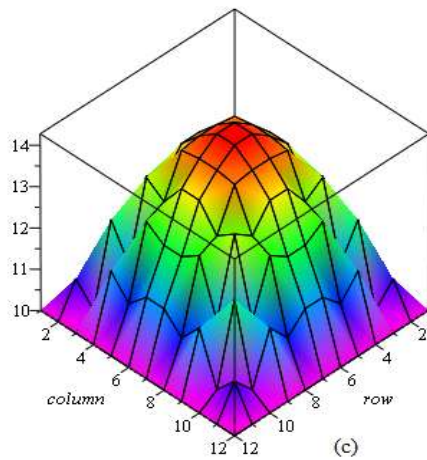
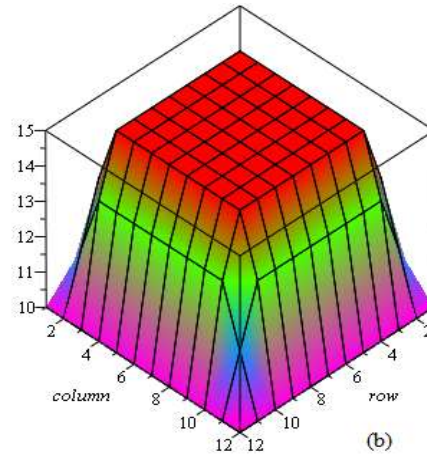
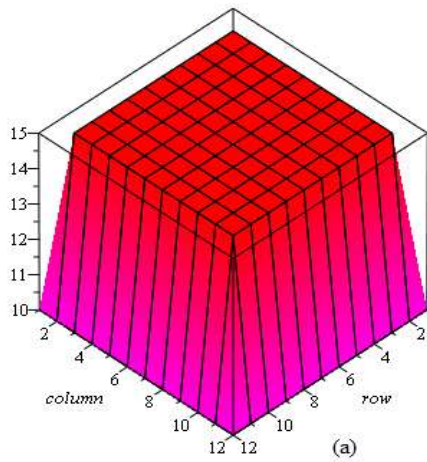


Fig. 3.4 Divergence apparue au moment $t = t_m/2$ de l'algorithme explicite pour $K = 3$. (a) : $t = 0$, (b) : $t = 1$, (c) : $t = t_m/2$, et (d) : $t = t_m$.

Les figures (3.5), (3.6), et (3.7) présentent respectivement l'allure des températures pour $(K, t_m) = (4, 60)$, $(K, t_m) = (10, 200)$, et $(K, t_m) = (20, 200)$.

```

> tm := 60; K := 4;
Temp(10, 10, 10, 10, 15, K, tm, 12, 12) :

TP(0); TP(1); TP( tm / 2 ); TP(tm)

```

```

> K := 10; tm := 200;
Temp(10, 10, 10, 10, 15, K, tm, 12, 12) :
TP(0); TP(1); TP( tm / 2 ); TP(tm)

```

```

> K := 20; tm := 200;
Temp(10, 10, 10, 10, 15, K, tm, 12, 12) :
TP(0); TP(1); TP( tm / 2 ); TP(tm)

```

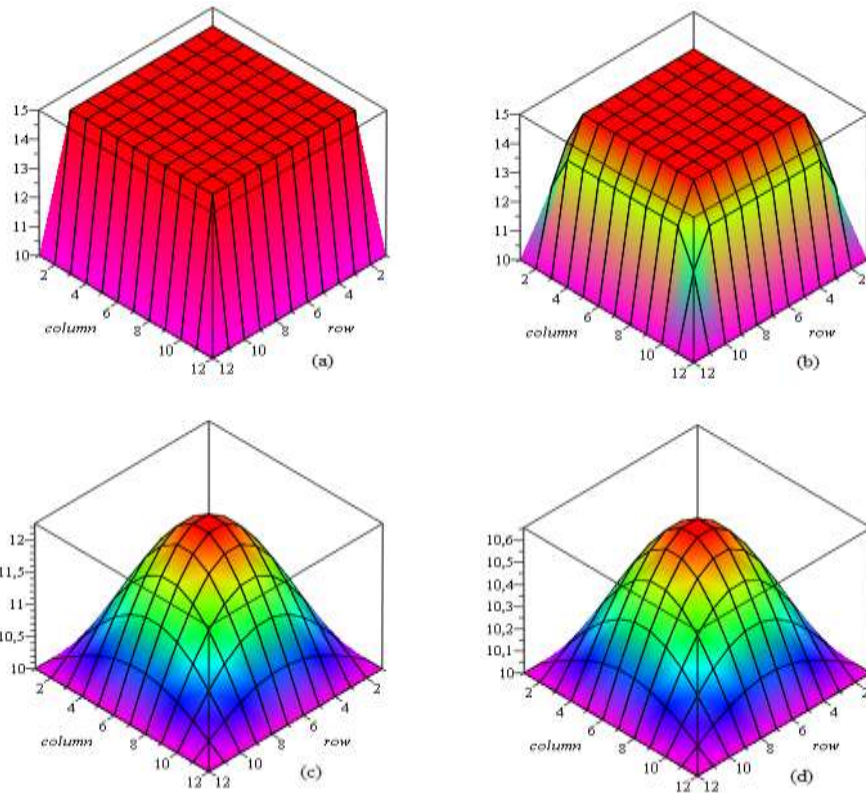


Fig. 3.5L'évolution de chaleur dans la plaque carré pour les différents instants (a) : $t = 0$, (b) : $t = 1$, (c) : $t = t_m/2$, et (d) : $t = t_m$ pour $(K, t_m) = (4, 60)$.

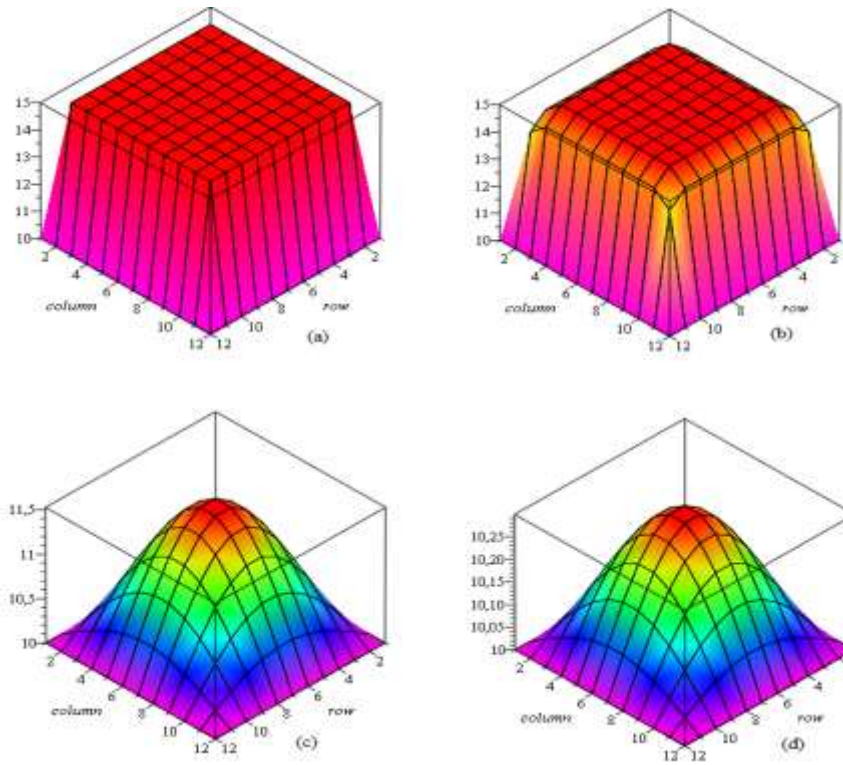


Fig. 3.6 L'évolution de chaleur dans la plaque carré pour les différents instants (a) : $t = 0$, (b) : $t = 1$, (c) : $t = t_m/2$, et (d) : $t = t_m$ pour $(K, t_m) = (10, 200)$.

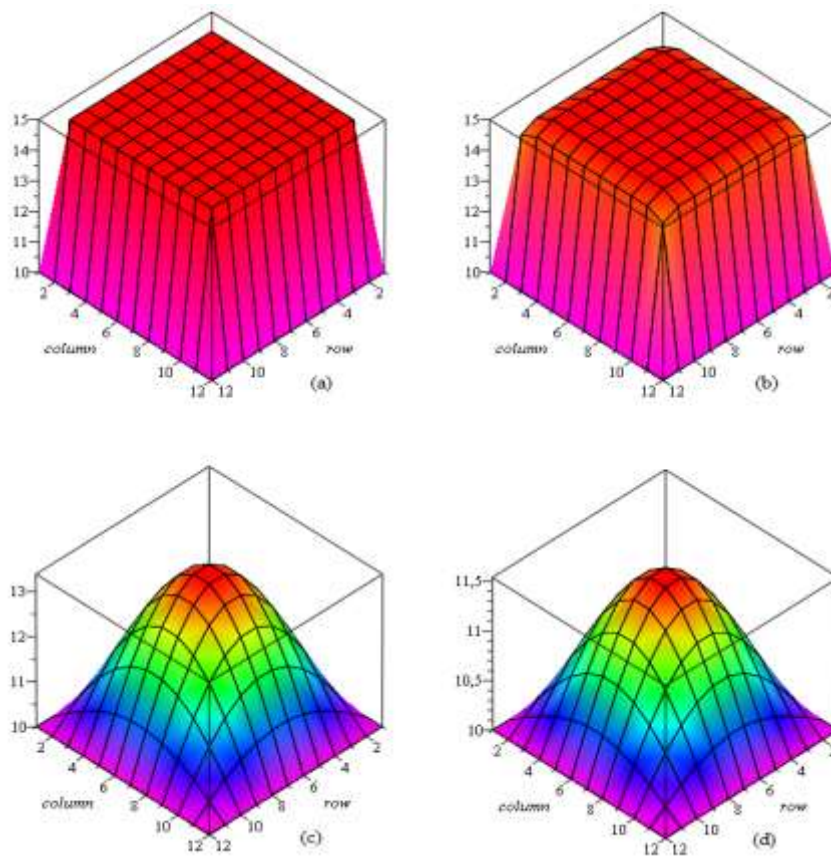


Fig. 3.7 L'évolution de chaleur dans la plaque carré pour les différents instants (a) : $t = 0$, (b) : $t = 1$, (c) : $t = t_m/2$, et (d) : $t = t_m$ pour $(K, t_m) = (20, 200)$.

Par une simple analyse, on constate que le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre thermique est lié proportionnellement au nombre K . Autrement dit le temps avant l'équilibre est proportionnel au paramètre spatial de maillage d et inversement proportionnel aux diffusivité et paramètre temporel h . Cela est prévu par l'analyse dimensionnelle de K .

Finalement, on note que puisque l'algorithme explicite est basé sur une relation de récurrence, il est plus rapide que l'algorithme implicite qui est basé sur un système d'équations linéaire et nécessite un temps considérable pour atteindre l'équilibre thermique (voir [1]). L'avantage de ce dernier est qu'il ne nécessite aucune contrainte de convergence sur les valeurs de K .

Références

- [1] H. Mehdid, *Discrétisation implicite de l'équation de chaleur à deux dimensions*, Mémoire de Master physique computationnelle, Université de Saida 2019/2020.
- [2] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.
- [3] F. De Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000
- [4] MehriAllaoua, *Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles*, Polycopié du Cours Master 1, Département de Mathématique, Université de Guelma.
- [5] A. J. Marie, A. Hofstetter, *Notes de cours Maple*, 2002 Montpellier INRA LAMETA, LIRMM.
- [6] <https://www.math.u-bordeaux.fr/~fjouve001/FourierNotes.pdf>

CONCLUSION

On a vu dans ce mémoire que la méthode de différences fines est utile pour une résolution acceptable de l'équation de chaleur à deux dimensions. L'application de l'algorithme explicite nécessite un critère de convergence sur K (>3) contrairement à l'algorithme implicite mais son avantage est qu'il est plus rapide car sa formule est une relation de récurrence et non pas un système d'équation linéaire comme le cas de l'algorithme implicite.

Les résultats obtenus sont en concordance avec les résultats théoriques connus sous le nom de séries de Fourier. Ainsi on a vu que le temps écoulé avant l'équilibre thermique est proportionnelle au K autrement dit proportionnelle au paramètre spatial de maille, et inversement proportionnelle aux paramètres temporel et la diffusivité.

On peut par suite s'appuyer sur une procédure Maple pour déterminer la valeur critique de K qu'on la note K_c déclenchant la divergence pour chaque maillage. D'autre part on peut essayer de développer notre algorithme pour des modèles plus complexes que ce soit dans la dimension ou dans la forme de l'équation de chaleur. Cela peut être l'objet d'une future recherche.

ملخص

رأينا في هذا العمل كيفية الحل العددي لمعادلة الحرارة ذات البعدين بدون مصدر حرارة بطريقة الفروق المحدودة وفقاً لخوارزمية واضحة. لقد اخترنا معدن ذو انتشارية α في شكل لوحة مربعة متجانسة مضبوطة على الشروط الأولية و النهائية من نوع Dirichlet.

تتوافق النتائج جيداً مع الحل التحليلي (المعروف باسم سلسلة فورييه) المفصل فيا لأدبيات التي تقدم دوال أسية و جيبية. من ناحية أخرى، تمت الإشارة إلى أن هذه الخوارزمية تتحول إلى علاقة تكرار بسيطة مما يجعلها أسرع من الخوارزمية الضمنية التي تختزل إلى نظام خطي. نلاحظ كذلك أن الخوارزمية الصريحة تحتاج إلى معيار التقارب على قيم K عكس الخوارزمية الضمنية. نلاحظ أيضاً أن الحسابات تظهر علاقة التناسب بين K ووقت التطور قبل التوازن الحراري .

Résumé

On a vu dans ce travail comment résoudre numériquement l'équation de chaleur a deux dimensions sans source de chaleur par la méthode de différences finis suivant un algorithme explicite. Nous avons choisi un matériau de diffusivité α sous forme d'une plaque carré homogène mis aux conditions initiales et aux limites de type Dirichlet. Les résultats sont en bien concordance avec la solution analytique (connus sous le nom séries de Fourier) détaillée dans la littérature qui présente des termes exponentielle et sinusoïdales. D'autre part, on a souligné que cet algorithme se ramène à une relation de récurrence simple ce qui le rend plus rapide que l'algorithme implicite qui ramène à un système linéaire. Ainsi, on note que l'algorithme explicite besoins au critère de convergence sur les valeurs de K contrairement au l'algorithme implicite. Notons aussi que les calculs montrent une relation de proportionnalité entre K et le temps de l'évolution avant l'équilibre thermique.

Abstract

We saw in this work how to solve numerically the two-dimensional heat equation without heat source by the finite difference method according to explicit algorithm. We have chosen a material of diffusivity α in the form of a homogeneous square plate set to initial conditions and Dirichlet limit conditions. The results are in good agreement with the analytical solution (known as the Fourier series) detailed in the literature, which presents exponential and sinusoidal terms.

On the other hand, it has been pointed out that this algorithm reduces to a simple recurrence relation, which makes it faster than the implicit algorithm, which reduces to a linear system. We note also that the explicit algorithm needs the convergence criterion on the values of K unlike the implicit one and the calculations show a relation of proportionality between K and the time of evolution before thermal equilibrium.