République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr Tahar Moulay Saïda
Laboratoire de Géométrie, Analyse, Contrôle et Applications

MEMOIRE DE MAGISTER

présenté
par
Boudaoud Abdelkader

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse non Linéaire et Géométrie Riemannienne

"Analyse spectrale des opérateurs matriciels sur un espace de Hilbert"

dirigé par
Dr. G. Djellouli

Soutenu le 25/09/2012 devant le jury composé de :

Président :	**F. Hathout**,	Maître de conférences A,	Université de Saïda
Promoteur :	**G. Djellouli**,	Maître de conférences A,	Université de Saïda
Examinateurs :	**B. Messirdi**,	Professeur,	Université d'Oran
	M. Djaa,	Professeur,	Centre universitaire de Relizane
	A. Azouz,	Maître de conférences B,	Université de Saïda

Dédicaces

A mes parents et toute ma grande famille..

Surtout mes neveux et mes nièces..

Mes enseignants et mes camarades, durant les années d'études

A tous mes amis ..

A tous je dédie ce modeste travail..

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Monsieur **G. Djellouli**, qui a accepté de diriger ce mémoire. Je le remercie de sa disponibilité, de sa patience et de son intérêt pour ce travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Monsieur **F. Hathout** d'avoir accepter d'être le président de ce Jury.

Je remercie aussi Messieurs **B. Messirdi**, **M. Djaa** et **A. Azouz** d'avoir accepter de faire partie de ce jury.

Table des matières

0.1 Introduction

La théorie spectrale des opérateurs linéaires, en particulier auto-adjoints dans un espace de Hilbert est l'une des avancées majeures en mathématiques du 20e siècle.
Elle a été initiée par D. Hilbert dans ses célèbres documents sur les équations intégrales de 1904 à 1910, qui contiennent toutes les idées de base de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints bornés. La prochaine percée majeure survenue au cours des années 1927 à 1929, lorsque J. Von Neumann a développé le concept abstrait de l'espace de Hilbert et des opérateurs linéaires, et initié la théorie spectrale pour les opérateurs auto-adjoints non bornés. Le travail de Von Neumann a été conduit par les besoins de la mécanique quantique, qui a été créée en 1925 et 1926, principalement par W. Heisenberg, E. Schrodinger et P. Dirac. Entre 1927 et 1932, cette théorie spectrale a été élaborée et étendue aux opérateurs non bornés normaux par F. Riesz en détail et indépendamment des travaux de Von Neumann.

D'autres contributions importantes concernant les extensions d'opérateurs semi-bornés symétriques et les applications sur les opérateurs différentiels sont dues à K.O. Friedrichs en 1934. Un autre domaine important a été stimulé par des problèmes de Physique mathématique, il s'agit de la théorie de la perturbation des opérateurs linéaires (voir [11]).qui trouve ses sources dans les travaux de Lord Rayleigh de 1877 sur les systèmes vibrants et les travaux de E. Schrödinger de 1926 sur les problèmes des valeurs propres dans la mécanique quantique.

La première contribution importante dans ce domaine revient à H. Weyl en 1909 et concerne la stabilité du spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint borné.

Une théorie mathématique rigoureuse des perturbations pour les valeurs propres et vecteurs propres des opérateurs auto-adjoint T (k) qui dépend analytiquement d'un paramètre k a été développée par F. Rellich entre 1937 et 1942 dans une série d'articles fondamentaux. Plus tard, en 1948, K.O. Friedrichs instaure la théorie de perturbation du spectre continu qui s'avéra incontestablement utile dans la théorie quantique.
En 1949, T. Kato a commencé ses recherches profondes sur la théorie de perturbation pour les opérateurs linéaires qui forment la base de son célèbre livre (Perturbation theory for linear operators) en 1966 [11]. Dans les années 1951/52 B. Sz.-Nagy, Loup F. et T. Kato ont généralisé les résultats de Rellich et ont obtenu les premiers

théorèmes sur la théorie de la perturbation d'opérateurs linéaires fermés.

En 1957 un travail sur la stabilité de plusieurs propriétés spectrales, en particulier, de l'index pour les opérateurs non auto-adjoints est dû à I.C. Gohberg et M.G. Krein. En 1965 I.C. Gohberg et M.G. Krein ont aussi redigè un rapport complet de résultats sur les opérateurs non auto- adjoints.

En 1983 des contributions majeures furent attribuées à F. Chatelin qui a développé la théorie de la perturbation de Kato pour les applications à l'analyse spectrale numérique. D'autres concepts importants comme les pseudo-spectres et les ensembles des valeurs spectrales ; dans les travaux de H.J. Landau depuis 1975 et S.K. Godunov depuis 1990.

Un opérateur matriciel est une matrice dont les entrées (les éléments) ; sont des opérateurs linéaires. Chaque opérateur linéaire borné peut être écrit comme un opérateur matriciel si l'espace dans lequel il agit est décomposable en deux composants ou plus. l'analyse spectrale d'un tel opérateur est tellement vaste qu'on ne peut pas la limiter dans un mémoire ou même dans un seul livre (voir [15] Introduction), c'est pour cela qu'on va se limiter dans ce mémoire aux opérateurs matriciels dont les propriétés spectrales sont exhibées à partir d'une factorisation soit de Schur ou d'une factorisation analogue(dite antidiagonale) ainsi que les opérateurs matriciels qu'on peut investiguer sur leurs propriétés spectrales à partir des méthodes purement algébrique.

Donc l'objectif de ce mémoire est d'étudier les propriétés spectrales des opérateurs matriciels dans leurs forme la plus générale possible, et faire quelques applications, malgré qu'on ne peut pas faire quelque chose d'intéressant que sous quelques suppositions qui varient entre les domaines de définitions des éléments de la matrice représentant cet opérateur matriciel, et leurs inversibilités, ainsi que autres hypothèses surtout dans le cas non borné.

Un outil principal qu'on a utilisé dans ce mémoire, "sauf quand les opérateurs diagonaux sont nuls ", consiste en les propriétés spectrales d'une famille d'opérateurs indexés par un nombre complexe $(T(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{C}}$ dont on a fait un rappel des définitions nécessaires comme le spectre et la résolvante...

Donc soit dans la partie où on a abordé les opérateurs matriciels bornés soit pour les opérateurs matriciels non bornés, on a distingué deux methodes d'étude ; l'une pour les opérateurs à diagonal nulle (antidiagonal), l'autre (dans laquelle on a utilisé les propriétés spectrales des familles d'opérateurs précédemment cités) dans le cas général y compris quelques cas particuliers .

Enfin, on a fait une petite application du résultat trouvé dans le cas des opérateurs matriciels (sous certaines conditions) pour obtenir une localisation de ses valeurs propres.

Le mémoire présenté se compose de trois chapitres. une partie concernant les propriétés générales dont on a besoin, et les deux dernières parties concernant les propriétés spectrales des opérateurs matriciels qui sont en fait le but de ce mémoire.

Au premier chapitre, on a fait un petit rappel sur les principaux résultats généraux et les définitions sur les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert.

Au deuxième chapitre, on a abordé l'étude de quelques propriétés spectrales des opérateurs matriciels 2×2 bornés de la forme $\mathcal{T} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ sur un espace de Hilbert.

Enfin, au troisième chapitre on a étudié les propriétés spectrales des opérateurs matriciels 2×2 non bornés de la forme $\mathcal{T} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ sur un espace de Hilbert.

Et on a procédé à une petite application du cas général à la localisation des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{T} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$.

Chapitre 1

Définitions et Propriétés

1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On appelle opérateur linéaire, toute application linéaire $u \mapsto Tu \in F$ définie sur un sous- espace vectoriel $\mathfrak{D}(T) \subset E$, nommé domaine de T.*

$$\mathfrak{D}(T) = \{x \in E;\ T \text{ est défini en } x\}$$

Définition 1.1.2. ***Somme de deux opérateurs**. Soient S et T deux opérateurs de E dans F. On définit l'opérateur somme $S+T$ par :*

$$(S+T)(x) = S(x) + T(x)$$

de domaine :

$$\mathfrak{D}(T+S) = \mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{D}(T)$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}(T+S)$.

Remarque 1.1.1. *On peut vérifier facilement que :*

- $S + T = T + S$
- $(R+S)+T = R+(S+T)$

Définition 1.1.3. ***Opérateur produit.** Soient E, F et H des espaces vectoriels normés, et soient $T : E \to F$ et $S : F \to H$ deux opérateurs de domaine $\mathfrak{D}(T) \subseteq E$ et $\mathfrak{D}(S) \subseteq F$ respectivement. On définit l'opérateur composition ST (dit opérateur produit) de T et S par :*

$$(ST)(x) = S(T(x))$$

De domaine :

$$\mathfrak{D}(ST) = \{x \in \mathfrak{D}(T) \ ; \ T(x) \in \mathfrak{D}(s)\}$$

- *Si R est un opérateur de H dans un quatrième espace vectoriel normé G, alors :*

$$(RS)T = R(ST)$$

- *Si R est un opérateur de F dans H, alors :*

$$(R+S)T = RT + ST$$

Définition 1.1.4. ***Densité.*** *Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur $T : E \to F$ est dit densément défini si son domaine $\mathfrak{D}(T)$ est dense dans E : $(\overline{\mathfrak{D}(T)} = E)$.*

Définition 1.1.5. ***Opérateur borné.*** *Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est dit borné s'il existe une constante réelle $M \geqslant 0$, telle que :*

$$\| Tx \| \leqslant M \| x \| \qquad \forall x \in \mathfrak{D}(T).$$

Il est clair que tout opérateur borné est continu sur son domaine.

Remarque 1.1.2. *La somme de deux opérateurs bornés est un opérateur borné;*
La composition de deux opérateurs bornés est un opérateur borné.

Définition 1.1.6. ***Opérateur inverse.*** *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné $S : F \longrightarrow E$ de domaine $\mathfrak{D}(S) = F$, tels que $TS = I_F$ et $ST = I_{\mathfrak{D}(T)}$*

Théorème 1.1.1. ***Théorème de Hahn-Banach.*** *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire borné de domaine $\mathfrak{D}(T) = E$, alors :*
T est bijectif si et seulement si T est inversible.

Définition 1.1.7. ***Opérateur fermé.*** *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est dit fermé, si pour toute suite $(x_n) \in \mathfrak{D}(T)$ et $y \in F$, on a :*

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ et \\ Tx_n \longrightarrow y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathfrak{D}(T) \\ et \\ y = Tx \end{cases}$$

Définition 1.1.8. ***Graphe d'un opérateur.*** *On appelle graphe d'un opérateur $T : E \longrightarrow F$, noté $G(T)$ l'ensemble*

$$G(T) = \{(x, Tx)\ ;\ x \in \mathfrak{D}(T)\} \subseteq E \times F$$

Remarque 1.1.3. .• *Un opérateur $T : E \to F$ est fermé si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$ pour la topologie produit.*

• *Si T est injectif alors : $G(T^{-1}) = \{(Tx, x)\ ;\ Tx \in T(E)\} \subseteq F \times E$*

• *L'inverse d'un opérateur fermé est un opérateur fermé.*

Théorème 1.1.2. ***Graphe fermé.*** *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire partout défini sur E, alors : T est fermé si et seulement si T est borné*

Définition 1.1.9. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire*

1- On appelle extension de l'opérateur T, tout opérateur $S : E \longrightarrow F$ tel que $G(T) \subseteq G(S)$. On écrit alors $T \subseteq S$.

2- On appelle fermeture de l'opérateur T, l'opérateur $\overline{T} : E \longrightarrow F$ tel que $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

Proposition 1.1.1. *Soient E et F deux espaces normés. Si $S : E \longrightarrow F$ est un opérateur borné de domaine $\mathfrak{D}(S) = E$, et $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq E \longrightarrow F$ un opérateur fermé, alors $T + S$ est un opérateur fermé de domaine $\mathfrak{D}(T + S) = \mathfrak{D}(T)$.*

Remarque 1.1.4. *Dans le cas général la somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement un opérateur fermé*

Preuve : Soient (x_n) une suite dans E qui converge vers x, tel que la suite $y_n = (T+S)(x_n)$ converge vers $y \in F$. Comme S est continu ($S(x_n)$ converge vers $S(x)$), alors la suite $T(x_n) = y_n - S(x_n)$ converge vers $y - S(x)$

$$\begin{cases} x_n \to x \\ et \\ T(x_n) \to y - S(x) \end{cases}$$

Puisque T est fermé on obtient :

$$\begin{cases} x \in \mathfrak{D}(T) \\ et \\ T(x) = y - S(x) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x \in \mathfrak{D}(T+S) \\ et \\ y = (T+S)(x) \end{cases}$$

d'où $T+S$ est fermé.

□

Proposition 1.1.2. *Soient E, F et G des espaces normés. Si $S : E \longrightarrow F$ est un opérateur borné de domaine $\mathfrak{D}(S) = E$, et $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq F \longrightarrow G$ un opérateur fermé, alors l'operateur de composition TS est fermé. Si de plus E et F sont de Banach et $S(E) \subseteq \mathfrak{D}(T)$ alors TS est borné.*

Preuve : Soit (x_n) une suite qui converge vers x dans E, telle que la suite $(z_n = TS(x_n)$ converge vers z dans G. On pose

$$y_n = S(x_n) \quad et \quad y = S(x).$$

Comme S est borné alors

$$\begin{cases} y_n \to y \\ et \\ z_n = T(y_n) \to z \end{cases}$$

Puisque T est fermé on obtient :

$$\begin{cases} y \in \mathfrak{D}(T) \\ et \\ z = T(y) \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} y = S(x) \in \mathfrak{D}(T) \Rightarrow x \in \mathfrak{D}(TS) \\ et \\ z = T(y) = TS(x) \end{cases}$$

d'où TS est fermé. Si E et G sont de Banach et $S(E) \subseteq \mathfrak{D}(T)$, alors $\mathfrak{D}(TS) = E$ et $TS : E \to G$ est un opérateur fermé ; d'après le Théorème du graphe fermé, on déduit que TS est borné.

□

1.2 Opérateur matriciel

Définition 1.2.1. *Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert, A, B, C et D des opérateurs linéaires tels que :*

$$\begin{array}{rcl} A : \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 \\ B : \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 \\ C : \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_2 \\ D : \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_2 \end{array}$$

On définit l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ (x, y) & \longmapsto & \mathcal{T}(x, y) = (A(x) + B(y), C(x) + D(y)) \end{array} \tag{1.1}$$

On le note par :

$$\mathcal{T}(x, y) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $\mathfrak{D}(\mathcal{T}) = (\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(C)) \times (\mathfrak{D}(B) \cap \mathfrak{D}(D))$

Proposition 1.2.1. *On suppose que $(\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(C))$ et $(\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(D))$. Alors l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$ est borné si et seulement si les opérateurs A, B, C et D sont bornés.*

Preuve : Soient P_1 et P_2 les projections canoniques tels que :

$$\begin{array}{rcl} P_1 : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 \\ (x, y) & \longmapsto & x \\ P_2 : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_2 \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

et soient J_1 et J_2 les injections naturelles tels que :

$$\begin{array}{rcl} J_1 : \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ x & \longmapsto & (x, 0) \\ J_2 : \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ y & \longmapsto & (0, y) \end{array}$$

alors on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(x, y) & = & \mathcal{T}(x, 0) + \mathcal{T}(0, y) \\ & = & (P_1\mathcal{T}(x, 0) + P_1\mathcal{T}(0, y), P_2\mathcal{T}(x, 0) + P_2\mathcal{T}(0, y)) \\ & = & (P_1 \circ \mathcal{T} \circ J_1(x) + P_1 \circ \mathcal{T} \circ J_2(y), P_2 \circ \mathcal{T} \circ J_1(x) + P_2 \circ \mathcal{T} \circ) J_2(y) \end{array}$$

par suite on déduit que :

$$\begin{array}{rcl} A & = & P_1 \circ \mathcal{T} \circ J_1 \\ B & = & P_1 \circ \mathcal{T} \circ J_2 \\ C & = & P_2 \circ \mathcal{T} \circ J_1 \\ D & = & P_2 \circ \mathcal{T} \circ J_2 \end{array} \tag{1.2}$$

et

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} P_1 \circ \mathcal{T} \circ j_1 & P_1 \circ \mathcal{T} \circ j_2 \\ P_2 \circ \mathcal{T} \circ j_1 & P_2 \circ \mathcal{T} \circ j_2 \end{bmatrix}$$

Comme P_1, P_2, J_1 et J_2 sont des opérateur bornés, des formules (1.1) et (1.2), on déduit que $\mathcal{T}$ est borné si et seulement si A, B, C et D sont bornés.

$\square$

1.3 Spectre et Résolvante

1.3.1 spectres résolvantes des opérateurs bornés

Définition 1.3.1. *Soit T un opérateur borné d'un espace d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lui même. On appelle Résolvante de T noté $\rho(T)$, l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $(T - \lambda I_E)$ est inversible.*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ (T - \lambda I_E) \ inversible\} \tag{1.3}$$

pour $\lambda \in \rho(T)$ l'opérateur :

$$\mathcal{R}_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} \tag{1.4}$$

est dit opérateur résolvant où résolvante de T.

Le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$, noté par $\sigma(T)$, est appelé spectre de T

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ (T - \lambda I) \ non \ inversible\} \tag{1.5}$$

et le spectre est composé de trois parties :

***1) le spectre ponctuel** $\sigma_p(T)$:*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/T - \lambda I \, \textbf{\textit{n'est pas injectif}} \, \}$$

***2) le spectre continu** $\sigma_c(T)$:*

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/T - \lambda I \, \textit{est injectif sans être surjectif mais } \textbf{\textit{à image dense}} \textit{ dans } H\}$$

***3) le spectre residuel** $\sigma_r(T)$:*

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/T - \lambda I \, \textit{est injectif sans être surjectif mais dont l'} \textbf{\textit{image n'est pas dense}} \textit{ dans } H\}$$

1.3.2 spectres résolvantes des opérateurs non bornés

Soit T un opérateur non borné d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lui même. On appelle l'ensemble résolvant de T noté $\rho(T)$, l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que :

(i) $Im(T - \lambda I)$ est dense dans $\mathcal{H}$

(ii) $(T - \lambda I)$ est inversible de $\mathcal{D}(T)$ dans $Im(T - \lambda I)$, d'inverse borné.

Définition 1.3.2. *Soit T un opérateur non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on designe par $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble $\rho(T)$, $\sigma(T)$ est le spectre de l'opérateur T.*
D'où $\sigma(T)$ est la réunion des trois ensembles disjoints :

1) Le spectre ponctuel de T $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T-\lambda I)$ n'est pas inversible de $D(T)$ dans $Im(T-\lambda I)\}$

2) Le spectre continu de T $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T-\lambda I)$ est inversible de $D(T)$ dans $Im(T-\lambda I)$ et $Im(T - \lambda I)$ est dense dans $\mathcal{H}$ mais $(T - \lambda I)^{-1}$ n'est pas borné$\}$

3) Le spectre residuel de T $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T-\lambda I)$ est inversible de $D(T)$ dans $Im(T-\lambda I)$ et $Im(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}\}$

1.3.3 Spectre et résolvante des opérateurs fermable

Définition 1.3.3. *(voir [15] page 92) Soit T un opérateur linéaire fermable sur un espace Banach E. L'ensemble résolvant et le spectre de T sont définis comme suit :*
$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ est injective; $(T - \lambda I) \in L(E)\}$ $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ et le spectre ponctuel le spectre continu et le spectre residuel :
$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)$ n'est pas injectif$\}$
$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)$ est injectif, $\overline{R(T - \lambda I)} = E$ $R(T - \lambda I) \neq E\}$
$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I)$ est injectif $\overline{R(T - \lambda I)} \neq E\}$
*Notons que ; **si** $\rho(T) \neq 0$ implique que T **est fermé** ; en fait, si $\lambda \in \rho(T)$, alors $(T - \lambda I)^{-1}$ est fermé et donc aussi $T - \lambda I$ est fermé Alors, par le théorème du graphe fermé,on a :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I estbijectif\} \tag{1.6}$$

1.3.4 Identité de la Résolvante

Lemme 1.3.1. *(Identité de la Résolvante) Soient $S : E \to E$ un opérateur linéaire et $\lambda, \mu \in \rho(S)$, alors :*

$$(S - \mu I)^{-1} = (S - \lambda I)^{-1} + (\mu - \lambda)(S - \mu I)^{-1}(S - \lambda I)^{-1}$$

Preuve : on a

$$\begin{aligned}
(S - \mu I)^{-1} &= (S - \mu I)^{-1}(S - \lambda I)(S - \lambda I)^{-1} \\
&= (S - \mu I)^{-1}((S - \mu I) + (\mu - \lambda I))(S - \lambda I)^{-1} \\
&= (1 + (\mu - \lambda)(S - \mu)^{-1}))(S - \lambda I)^{-1} \\
&= (S - \lambda I)^{-1} + (\mu - \lambda)(S - \mu I)^{-1}(S - \lambda I)^{-1}
\end{aligned}$$

□

1.3.5 Le spectre et l'ensemble résolvent d'une fonction d'opérateurs (famille d'opérateurs indexée par un paramètre $\zeta \in \mathbb{C}$)

Soient pour les opérateurs matriciels bornés, ou non bornés on va utiliser cette notion car les factorisations utilisées par la suite mènent à des opérateurs où figure un paramètre complexe λ. Donc on a besoin de savoir comment calculer son spectre ainsi que sa résolvante. Le spectre et l'ensemble résolvent d'une fonction d'opérateurs, ils sont définis comme suit (voir [16])

Définition 1.3.4. *Soit $S = (S(\zeta))_\zeta$ une famille d'opérateurs, où ζ varie dans un certain ensemble $U \in \mathbb{C}$. Alors le spectre, spectre ponctuel et l'ensemble résolvent de S sont définis par :*

$$\begin{aligned}
\sigma(S) &= \{\zeta \in U : 0 \in \sigma(S(\zeta))\} \\
\sigma_p(S) &= \{\zeta \in U : 0 \in \sigma_p(S(\zeta))\} \\
\rho(S) &= \{\zeta \in U : 0 \in \rho(S(\zeta))\}
\end{aligned}$$

1.4 Factorisation de Schur

(Voir [12], [1], [2])

Dans la théorie spectrale des opérateurs matriciels, la factorisation de Schur joue un rôle très important pour caractériser le spectre de l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$. Supposons que l'opérateur matriciel $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ est bien défini alors nous avons, au moins formellement, les factorisations suivantes :

$$\mathcal{T}-\lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C(A-\lambda I)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A-\lambda I & 0 \\ 0 & S_D(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \rho(A) \tag{1.7}$$

où

$$\mathcal{T}-\lambda = \begin{pmatrix} I & B(D-\lambda I)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_A(\lambda) & 0 \\ 0 & D-\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D-\lambda I)^{-1}C & I \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \rho(D) \tag{1.8}$$

où les opérateurs $S_A(\lambda)$ et $S_D(\lambda)$ sont donnés par :

$$\begin{array}{rcll} S_A(\lambda) & = & A-\lambda I - B(D-\lambda I)^{-1}C, & \lambda \in \rho(D) \\ S_D(\lambda) & = & D-\lambda I - C(A-\lambda I)^{-1}B, & \lambda \in \rho(A) \end{array}$$

Les fonctions S_A et S_D sont appelées les compléments de Schur de la matrice $\mathcal{T}$. Habituellement les domaines des opérateurs S_A et S_D sont pris à être leurs domaines naturels, par exemple pour $\lambda \in \rho(D)$ il est naturel de définir :

$$\mathcal{D}(S_A(\lambda)) = \{x \in \mathcal{H}_1 : x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(C), (D-\lambda)^{-1}Cx \in \mathcal{D}(B)\};$$

notons qu'en général ces domaines dépendent du paramètre λ

Les factorisations (1.7) et (1.8) peuvent être utilisées pour caractériser le spectre de $\mathcal{T}$; par exemple :

$$\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \cap \rho(D) \qquad \text{si et seulement si 0 est dans l'ensemble résolvent de } S_A(\lambda).$$

Tandis que la factorisation de Schur ne donne pas de résultats pour :$\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(D)$.En revanche, si nous savons que B et C sont inversibles, alors c'est aussi possible d'utiliser une factorisation analogue à celle de Schur mais qui donne une matrice antidiagonale.

1.5 Factorisation antidiagonale

La factorisation de l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$ que l'on va montrer ultérieurement et sous certaines conditions s'écrit formellement sous la forme :

- **Si C est inversible**

$$\mathcal{T} - \lambda = \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

avec

$$T_1(\lambda) = B - (A-\lambda I)C^{-1}(D-\lambda I)$$

- **Si B est inversible**

$$\mathcal{T} - \lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D-\lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A-\lambda I) & I \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D-\lambda I)B^{-1}(A-\lambda I) \tag{1.11}$$

1.6 Lien entre la factorisation antidiagonale et la factorisation de Schur :

Soit $\mathcal{T}$ un opérateur matriciel défini par 2.5.1 et assumez $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. Au lieu de $\mathcal{T}$ nous considérons l'opérateur matriciel :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{T}}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} (\mathcal{T} - \lambda) \\ &= \begin{pmatrix} C & D-\lambda I \\ A-\lambda I & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec le domaine :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{T}}) &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{D}(B) \oplus \mathcal{D}(C) \end{aligned}$$

Pour tout $\mu_C \in \rho(C)$ et $\mu_B \in \rho(B)$ nous avons les factorisations dite de Schur suivante :

$$\widetilde{\mathcal{T}}(\lambda) - \mu_C = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (A-\lambda I)(C-\mu_C I)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C-\mu_C I & 0 \\ 0 & S_B(\mu_C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (C-\mu_C I)^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}(\lambda) - \mu_B = \begin{pmatrix} I & (D-\lambda I)(B-\mu_B I)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_C(\mu_B) & 0 \\ 0 & B-\mu_B I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ (B-\mu_B I)^{-1}(A-\lambda I) & I \end{pmatrix}$$

où les compléments de Schur pour l'opérateur matriciel $\widetilde{\mathcal{T}}(\lambda)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} S_B(\mu_C) &= B - \mu_C I - (A-\lambda I)(C-\mu_C I)^{-1}(D-\lambda I), \qquad \mu_C \in \rho(C), \\ S_C(\mu_B) &= C - \mu_B I - (D-\lambda I)(B-\mu_B I)^{-1}(A-\lambda I), \qquad \mu_B \in \rho(B), \end{aligned}$$

puisque $0 \in \rho(C) \cap \rho(B)$, les compléments de Schur $S_B(\mu_C)$ et $S_C(\mu_B)$ sont bien définis pour : $\mu_C = \mu_B = 0$ et les factorisations donnent :

$$\widetilde{\mathcal{T}}(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (A-\lambda I)C^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & S_B(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

$$= \begin{pmatrix} I & (D-\lambda I)B^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_C(0) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A-\lambda I) & I \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Avec :

$$\begin{aligned} S_B(0) &= B - (A-\lambda I)C^{-1}(D-\lambda I) = T_1(\lambda) \\ S_C(0) &= C - (D-\lambda I)B^{-1}(A-\lambda I) = T_2(\lambda) \end{aligned}$$

Si nous multiplions les équations (1.12) et (1.13) du côté gauche par : $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ et insérons le facteur $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ après le premier facteur à droite nous retrouvons la factorisation antidiagonale de T donné dans le lemme 2.5.1

Chapitre 2

Etude spectrale des opérateurs matriciels 2×2 bornés de type $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va voir qu'on peut sous certaines conditions sur les opérateurs A, B, C et D (surtout l'inversibilité des opérateurs C et B) et par un calcul purement algébrique on peut calculer le spectre et la résolvante de la matrice d'opérateurs linéaires en utilisant la factorisation de Schur et une autre factorisation analogue dite antidiagonale.

2.2 Etude spectrale des opérateurs antidiagonaux bornés de type $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$

voire ([9] et [10])

Dans cette section on montrera que les propriétés spectrales d'un tel opérateur $\mathcal{T}$ est étroitement liées à celles des produits d'opérateurs BC et CB où C et B sont des opérateurs fermés densément définis agissant sur les espaces de Hilbert sur la condition que les ensembles résolvants de ces produits ne sont pas vides. On va démontrer que les spectres de CB et BC coïncident partout sauf au point "0", et étudier le lien entre les spectres des opérateurs C, B et l'opérateur matriciel qu'on note :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert tels que : $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un opérateur linéaire fermé densément défini, de domaine $\mathfrak{D}(C) \subseteq \mathcal{H}_1$, ($\overline{\mathfrak{D}(C)} = \mathcal{H}_1$) et $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ un opérateur linéaire fermé densément défini de domaine $\mathfrak{D}(B) \subseteq \mathcal{H}_2$, ($\overline{\mathfrak{D}(B)} = \mathcal{H}_2$) :
Alors l'opérateur matriciel $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ est un opérateur fermé densément défini sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, de domaine $\mathfrak{D}(\mathcal{T}) = \mathfrak{D}(C) \times \mathfrak{D}(B)$ et l'opérateur $\mathcal{T}^2 = \begin{pmatrix} BC & 0 \\ 0 & CB \end{pmatrix}$ est un opérateur défini sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, de domaine $\mathfrak{D}(\mathcal{T}^2) = \mathfrak{D}(BC) \times \mathfrak{D}(CB)$.

L'objectif dans cette partie est d'établir les résultats du théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert et $C : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, $B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ deux opérateurs linéaires bornés densément définis de plus si $\rho(CB) \neq \emptyset$ et $\rho(BC) \neq \emptyset$, Alors le spectre et la résolvante de l'opérateur $\mathcal{T}$ sont donnés par :*

$$\sigma(CB) \setminus \{0\} = \sigma(BC) \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \lambda^2 \in \sigma(CB) \setminus \{0\}\} \tag{2.2}$$

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \lambda^2 \in \sigma(BC) \setminus \{0\}\} \tag{2.3}$$

$$\rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)\} \tag{2.4}$$

$$\rho(CB) \setminus \{0\} = \rho(BC) \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

Remarque 2.2.1. *Pour la preuve du théorème remarquons qu'il suffit de montrer (2.2), (2.3) et (2.4) car (2.1) est une conséquence directe de (2.2) et (2.3). Et en utilisant (2.1) et en passant au complémentaire en obtient (2.5)*

Pour terminer on donne un contre exemple dans le cas où

$$\rho(CB) = \emptyset \quad ou \quad \rho(BC) = \emptyset$$

Pour la preuve de ce théorème on va envisager les deux cas suivant :

- Le cas où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont de dimension finie.
- Le cas où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont de dimension infinie, avec C et B sont des opérateurs bornés et partout définis.

2.3 Cas de dimension finie

Preuve : Dans un espace vectoriel de dimension finie on sait qu'un tel opérateur S défini sur un espace vectoriel dans lui même est continue, de plus S est bijectif si et seulement s'il est injectif, d'où :

$$\lambda \in \rho(S) \Leftrightarrow (S - \lambda I) \ injectif$$

Comme nous l'avons indiqué il suffit de montrer les trois égalités (2.2), (2.3) et (2.4)

- Montrons le résultat suivant :

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda^2 \in \sigma(CB) \setminus \{0\}\}$$

cela revient à prouver pour tout $\lambda \neq 0$ l'équivalence suivante :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \text{ est non injectif} \Leftrightarrow (CB - \lambda^2 I) \text{ est non injectif}$$

" $\Rightarrow$ "
En effet, soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$, alors $\exists (x, y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$\mathcal{T}(x, y) = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ce qui implique que :

$$\begin{cases} By = \lambda x \\ Cx = \lambda y \end{cases}$$

et puisque $\lambda \neq 0$, alors :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\lambda} By \\ et \\ CBy = \lambda^2 y \end{cases}$$

d'où $\lambda^2 \in \sigma(CB) \setminus \{0\}$

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \lambda^2 \in \sigma(CB) \setminus \{0\}\}$$

Inversement : " $\Leftarrow$ "

Soit $\lambda^2 \in \rho(CB) \setminus \{0\}$, donc il existe y non nul dans $\mathcal{H}_2$, tel que $CBy = \lambda^2 y$.Si on pose $x = \dfrac{1}{\lambda} By$, alors $By = \lambda x$ donc $C\lambda x = \lambda^2 y$ ou $Cx = \lambda y$

d'où

$$\mathcal{T}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} By \\ Cx \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

puisque $(x, y) \neq (0, 0)$ donc $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; \ \lambda^2 \in \sigma(CB) \setminus \{0\}\}$.

• D'une manière analogue, on démontre :

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ \lambda^2 \in \sigma(BC) \setminus \{0\}\}$$

• Montrons qu'on a :

$$\rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)\}$$

Du fait qu'on a

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ \lambda^2 \in \sigma(CB) \setminus \{0\}\}$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \lambda^2 \in \sigma(BC) \setminus \{0\}\}$$

En passant au complémentaire on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} & = & \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \lambda^2 \in \rho(CB) \setminus \{0\}\} \\ & = & \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \lambda^2 \in \rho(BC) \setminus \{0\}\} \\ & = & \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC) \setminus \{0\}\} \end{array}$$

donc on a bien :

$$\rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC) \setminus \{0\}\} \tag{2.6}$$

• Pour le cas où $\lambda = 0$ remarquons que $\mathcal{T}$ est bijectif si et seulement si $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T} \circ \mathcal{T}$ est bijectif. Comme :

$$\mathcal{T}^2 = \begin{pmatrix} BC & 0 \\ 0 & CB \end{pmatrix}$$

on déduit que $\mathcal{T}$ est bijectif si et seulement si CB et BC sont bijectifs, d'où :

$$0 \in \rho(\mathcal{T}) \Leftrightarrow 0 \in \rho(CB) \cap \rho(BC) \tag{2.7}$$

des formules (2.6) et (2.7) on déduit (2.4) c'est à dire :

$$\rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)\}$$

$\square$

2.4 Cas de dimension infinie

Dans le cas de dimension finie on sait qu'un opérateur linéaire borné injectif est bijectif contrairement au cas de dimension infinie où ce n'est pas le cas

Preuve : • Montrons que

$$\begin{array}{rcl}(\mathcal{T}-\lambda I)\ est\ injectif & \Leftrightarrow & \big(CB-\lambda^2 I\big)\ est\ injectif \\ & \Leftrightarrow & \big(BC-\lambda^2 I\big)\ est\ injectif\end{array}$$

c'est à dire :

$$\begin{array}{rcl}\sigma_p(\mathcal{T})\setminus\{0\} & = & \{\lambda\in\mathbb{C};\lambda^2\in\sigma_p(CB)\}\setminus\{0\} \\ & = & \{\lambda\in\mathbb{C};\lambda^2\in\sigma_p(BC)\}\setminus\{0\}\end{array}$$

où σ_p désigne le spectre ponctuel de l'opérateur $\mathcal{T}$.

En effet ; pour $\lambda\neq 0$ montorons qu'on a l'équivalence suivante :

$$(\mathcal{T}-\lambda I)\ est\ non\ injectif \Leftrightarrow (CB-\lambda^2 I)\ est\ non\ injectif$$

" $\Rightarrow$ "
Soit $\lambda\in\sigma(\mathcal{T})\smallsetminus\{0\}$, alors $\exists(x,y)\in\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2\smallsetminus\{(0,0)\}$ tel que :

$$\mathcal{T}(x,y)=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ce qui implique que :

$$\begin{cases}By=\lambda x\\ Cx=\lambda y\end{cases}$$

puisque $\lambda\neq 0$, alors :

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\lambda}By\\ et\\ CBy=\lambda^2 y\end{cases}$$

d'où $\lambda^2\in\sigma(CB)\smallsetminus\{0\}$

$$\sigma(\mathcal{T})\smallsetminus\{0\}\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\ \lambda^2\in\sigma(CB)\smallsetminus\{0\}\}$$

Inversement : " $\Leftarrow$ "

Soit $\lambda^2 \in \rho(CB) \setminus \{0\}$, donc il existe y non nul dans $\mathcal{H}_2$, tel que $CBy = \lambda^2 y$. Si on pose $x = \frac{1}{\lambda} By$, alors $By = \lambda x$ donc $C\lambda x = \lambda^2 y$ ou $Cx = \lambda y$

d'où

$$\mathcal{T}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} By \\ Cx \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

puisque $(x,y) \neq (0,0)$ donc $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \setminus \{0\} \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \lambda^2 \in \sigma_p(CB) \setminus \{0\}\}.$$

• D'une manière analogue, on démontre :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ \lambda^2 \in \sigma_p(BC) \setminus \{0\}\}$$

• Montrons qu'on a :

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\ est\ surjectif \Leftrightarrow (CB - \lambda^2 I)\ est\ surjectif$$

· Supposons que $(CB - \lambda^2 I)$ est surjectif.

Pour $\lambda \neq 0$ et $(z_1, z_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, cherchons $(x,y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ tel que :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

ce qui revient à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} By - \lambda x = z_1 \\ Cx - \lambda y = z_2 \end{cases}$$

qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\lambda}(By - z_1) \\ CBy - \lambda^2 y = \lambda z_2 + Cz_1 \end{cases}$$

Puisque $(CB - \lambda^2 I)$ est surjectif, alors il existe $y \in \mathcal{H}_2$ tel que $(CB - \lambda^2 I)y =$

$\lambda z_2 + Cz_1$, et par suite on prend $x = \dfrac{1}{\lambda}(By - z_1)$

Inversement :

On suppose que $(\mathcal{T} - \lambda I)$ surjectif.

Soit $z \in \mathcal{H}_2$, prenons z_1 un élément arbitraire dans $\mathcal{H}_1$ et posons $z_2 = \dfrac{1}{\lambda}(z - Cz_1) \in \mathcal{H}_2$. Puisque $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est surjectif ; alors il existe $(x, y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ tel que :

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

du système :

$$\begin{cases} By = \lambda x + z_1 & (1) \\ Cx = \lambda y + z_2 & (2) \end{cases}$$

l'équation (1) nous donne $x = \frac{1}{\lambda}(By - z_1)$ et en le substituant dans l'équation (2) on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}C(By - z_1) = \lambda y + z_2 \;&\Rightarrow\; CBy - Cz_1 = \lambda^2 y + \lambda z_2 \\ &\Rightarrow\; CBy - \lambda^2 y = Cz_1 + \lambda z_2 \\ &\Rightarrow\; (CB - \lambda^2 I)y = Cz_1 + \lambda z_2 = z \end{aligned}$$

d'où $(CB - \lambda^2 I)$ est surjectif.

Finalement de1) et 2) on obtient :

$$\rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \rho(CB) \setminus \{0\}\} \tag{2.8}$$

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma(CB) \setminus \{0\}\} \tag{2.9}$$

De la même façon, on démontre :

$$\rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \rho(BC) \setminus \{0\}\}.$$

$$\sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma(BC) \setminus \{0\}\}$$

$\square$

Remarque 2.4.1. *On a :*

$$\mathcal{T} \textit{ inversible} \Leftrightarrow \mathcal{T}^2 = \begin{pmatrix} BC & 0 \\ 0 & CB \end{pmatrix} \textit{ inversible}$$

donc

$$\mathcal{T} \textit{ inversible} \Leftrightarrow CB \textit{ et } BC \textit{ sont inversibles}$$

d'où :

$$0 \in \rho(\mathcal{T}) \Leftrightarrow 0 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)$$

2.5 Etude spectrale des opérateurs bornés de type $\mathcal{T} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$

2.5.1 Introduction

Considérons l'opérateur matriciel :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

définit sur l'espace Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert avec $\rho(T) \neq \emptyset$ (d'où $\mathcal{T}$ sera fermé)

Dans cette partie on va établir toute en utilisant la factorisation antidiagonale (analogue à celle de Schur), (Voir [17], [16], [18]) qui s'écrit formellement sous la forme :

$$\mathcal{T} - \lambda = \begin{pmatrix} I & (A - \lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1}(D - \lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

avec $T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I)$, une relation entre les propriétés spectrales de $\mathcal{T}$, et celles de T_1 ainsi on va montrer en utilisant la factorisation (2.11) qu'on a les résultats suivants :

Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_1(\lambda))\}$$

Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_1(\lambda))\}$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_1(\lambda))\}$$

avec

$$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I),$$

Pour celà on va envisager les trois cas suivants :

- C inversible.
- B inversible.
- C et B non inversible.

2.5.2 C Inversible

L'inversibilité de C nous sert à utiliser la factorisation antidiagonale (2.11) dans notre investigation sur les propriétés spectrales de l'opérateurs matriciel $\mathcal{T}$ défini par (2.10) ; ces propriétés sont données par le théorème suivant :

Théorème 2.5.1. *Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur matriciel donné par (2.10) tels que :*

$A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ et $B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ sont des opérateurs linéaires bornés densément définis (et B fermé),

$C : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur linéaire borné densément défini et inversible

$D : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur linéaire borné partout défini,

avec $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A)$, et $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(D)$, de plus soit $(T_1(\lambda))_\lambda$ la famille d'opérateurs définis par :

$$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I),$$

alors on a les résultats suinvants :

$$\begin{aligned} \sigma_p(\mathcal{T}) &= \sigma_p(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_1(\lambda))\} \\ \sigma(\mathcal{T}) &= \sigma(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_1(\lambda))\} \\ \rho(\mathcal{T}) &= \rho(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_1(\lambda))\} \end{aligned}$$

Afin de démontrer le théorème (2.5.1) on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.5.1. *(Voir [17], [16], [18]) Soient :*

A :$\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$, $D : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$, $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ et C :$\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ des opérateurs linéaires bornés densément définis . D partout défini

Nous définissons $\mathcal{T}_1$ par :

$$\mathcal{T}_1 - \lambda = \begin{pmatrix} I & (A - \lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1}(D - \lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

avec

$$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I), \qquad \mathcal{D}(T_1(\lambda)) = \mathcal{D}(B), \tag{2.12}$$

et

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{D}(T_1) : x + C^{-1}(D - \lambda I)y \in \mathcal{D}(C) \right\}$$

d'autre part, soit :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(B),$$

Alors nous avons la factorisation suivante :

$$\mathcal{T} - \lambda I = \mathcal{T}_1 - \lambda I$$

Notons que le domaine de $\mathcal{T}_1(\lambda)$ ne dépend pas de λ, alors on écrit $\mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$ au lieu de $\mathcal{D}(\mathcal{T}_1(\lambda))$.

Preuve : :
On doit établir les égalités suivantes pour tout $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$:

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$$

et

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{T}_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En effet ;

- $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$:

Soit $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ donc $y \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(T_1)$ et puisque D borné partout défini (en particulier $\mathcal{D}(D) \supset \mathcal{D}(B)$), donc on a aussi $y \in \mathcal{D}(D)$ ainsi l'élément $x + C^{-1}(D - \lambda I)y$ est bien défini et appartient à $\mathcal{D}(C)$ ceci montre que$\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$

• $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \supseteq \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$:

soit $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$ puisque $y \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(D)$,et du fait que :$x \in \{-C^{-1}(D-\lambda I)y + x_0 : x_0 \in \mathcal{D}(C)\} = \mathcal{D}(C)$ alors $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ c.q.f.d

• $=\mathcal{T}_1$:

Pour tout $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ on a : $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$ de plus :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1(\lambda)y \\ C(x + C^{-1}(D-\lambda I)y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1(\lambda)y + (A-\lambda)C^{-1}(Cx + (D-\lambda I)y) \\ Cx + (D-\lambda I)y \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$ ce qui achève la démonstration du lemme

□

Le lemme précédent montre que sous les suppositions données ; le spectre de $\mathcal{T}$ peut être obtenu à partir du spectre de T_1.

Lemme 2.5.2. *(Voir [17], [16], [18]) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et supposons que les suppositions de l'un des cas (i) ou (ii) dans le lemme (2.5.1) sont satisfaites. Alors les équivalences suivantes sont vérifiées :*

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ bijectif \Longleftrightarrow T_1 \ bijectif$$

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ n'est \ pas \ injectif \Longleftrightarrow T_1 \ n'est \ pas \ injectif$$

Preuve : :
C'est une conséquence directe de la factorisation (2.11) .

En effet : On a

$$\mathcal{T}_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

avec

$$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I), \qquad \mathcal{D}(T_1(\lambda)) = \mathcal{D}(B),$$

et

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{D}(T_1) : x + C^{-1}(D - \lambda I)y \in \mathcal{D}(C) \right\}$$

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ \textit{est bijectif} \Leftrightarrow (\mathcal{T}_1 - \lambda I) \ \textit{est bijectif}$$

donc :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ \textit{est inversible} \Leftrightarrow (\mathcal{T}_1 - \lambda I) \ \textit{est inversible}$$

mais dans la formule (2.11) ; le premier et le dernier facteur du premier terme à droite est borné, inversible d'inverse borné c-à-d :

- Le premier terme de $\mathcal{T}_1 - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} I & (A - \lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

est inversible, son inverse est :

$$\begin{pmatrix} I & -(A - \lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

et on a l'opérateur $(A - \lambda I)C^{-1}$ est borné comme produit de deux opérateurs bornés.

- Le dernier terme de $\mathcal{T}_1 - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} I & C^{-1}(D - \lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

est borné inversible ; son inverse est :

$$\begin{pmatrix} I & -C^{-1}(D - \lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

parce que $C^{-1}(D-\lambda I)$ est borné partout définit comme produit de deux opérateurs bornés et $(D-\lambda I)$ est partout définit par hypothèse, donc $(\mathcal{T}-\lambda I)$ est inversible si et seulement si $\begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix}$ est inversible mais C est inversible par hypothèse donc $(\mathcal{T}-\lambda I)$ est inversible si et seulement si $T_1(\lambda) = B-(A-\lambda I)C^{-1}(D-\lambda I)$ est inversible, par suite $(\mathcal{T}-\lambda I)$ est bijectif si et seulement si $T_1(\lambda) = B-(A-\lambda I)C^{-1}(D-\lambda I)$ est bijectif [car $T_1(\lambda)$ et $(\mathcal{T}-\lambda I)$ sont fermés] ; c'est à dire :

$$(\mathcal{T}-\lambda I) \ bijectif \Longleftrightarrow T_1 \ bijectif$$

• Montrons maintenant qu'on a :

$$(\mathcal{T}-\lambda I) \ n'est \ pas \ injectif \Longleftrightarrow T_1 \ n'est \ pas \ injectif$$

on s'appuyant sur la factorisation (2.11)

$$(\mathcal{T}_1-\lambda I) = \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

on a vu que le premier et le dernier terme sont inversibles donc injectifs d'ou $\mathcal{T}_1-\lambda$ est injectif si est seulement si :

$$\begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \ est \ injectif$$

mais C est inversible par hypothèse donc injectif d'où :

$$(\mathcal{T}-\lambda I) \quad est \ injectif \Longleftrightarrow T_1(\lambda) \quad est \ injectif$$

ce qui est équivalent à :

$$(\mathcal{T}-\lambda I) \ n'est \ pas \ injectif \Longleftrightarrow T_1 \ n'est \ pas \ injectif$$

c.q.f.d

□

Nous pouvons maintenant montrer le théorème **2.5.1**

Preuve : du théorème 2.5.1 :

On a d'après le lemme(2.5.2) :

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\ bijectif \Longleftrightarrow (T_1 - \lambda I)\ bijectif \tag{2.13}$$

de plus en utilisant la définition 1.3.4 alors (2.13) est équivalent à :
l'ensemble résolvant de $\mathcal{T}$ coïncide avec celui de T_1 et donné par :

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{T}) &= \rho(T_1) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_1)(\lambda)\} \end{aligned}$$

de même le spectre : est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{T}) &= \sigma(T_1) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_1)(\lambda)\} \end{aligned}$$

et puisqu'on a :

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\ n\prime est\ pas\ injectif \Longleftrightarrow T_1\ n\prime est\ pas\ injectif$$

alors le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_1)(\lambda)\}$$

c-q-f-d

□

2.5.3 B inversible

L'inversibilité de B nous sert à utiliser la factorisation antidiagonale (2.15) dans notre investigation sur les propriétés spectrales de l'opérateurs matriciel $\mathcal{T}$ défini par (2.10) ; ces propriétés sont données par le théorème suivant :

Théorème 2.5.2. *Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur matriciel défini par (2.10) tels que :*

$A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ est un opérateur borné partout défini et $C : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ est un opérateur borné densément défini et fermé, $B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ un opérateur borné densément défini et inversible ; $D : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur borné. De plus on a les inclusions :

$$\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A), et \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(D)$$

et soit $(T_2(\lambda))_\lambda$ la famille d'opérateurs définis par :

$$T_2(\lambda) = C - (D - \lambda I)B^{-1}(A - \lambda I), \tag{2.14}$$

alors on a :

le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_2(\lambda))\}$$

le spectre

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_2(\lambda))\}$$

l'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_2(\lambda))\}$$

Preuve : :
En effet, en s'appuyant sur la factorisation :

$$\mathcal{T} - \lambda I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D - \lambda I)B^{-1}(A - \lambda I),$$

on va montrer qu'ona :

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\ bijectif \Longleftrightarrow T_2\ bijectif$$

ou

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\ n'est\ pas\ injectif \Longleftrightarrow T_2\ n'est\ pas\ injectif$$

En effet : On a

$$\mathcal{T}_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix}$$

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D - \lambda I)B^{-1}(A - \lambda I), \qquad \mathcal{D}(T_2(\lambda)) = \mathcal{D}(C),$$

et

$$\mathcal{T} - \lambda I\ est\ bijectif \Leftrightarrow \mathcal{T}_2 - \lambda I\ est\ bijectif$$

donc :

$$\mathcal{T} - \lambda I\ est\ inversible \Leftrightarrow \mathcal{T}_2 - \lambda I\ est\ inversible$$

mais dans la formule (2.15) le premier et le dernier facteur du terme à droite est borné et d'inverse borné c-à-d :

- Le premier terme de $\mathcal{T}_2 - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ (D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix}$$

est inversible, et son inverse est :

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix}$$

et on a l'opérateur $(D - \lambda I)B^{-1}$ est borné comme produit de deux opérateurs bornés.

• Le dernier terme de $\mathcal{T}_2 - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix}$$

est borné inversible ; son inverse est :

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix}$$

parce que $B^{-1}(A-\lambda I)$ est borné partout définit comme produit de deux opérateurs bornés et $B^{-1}(A-\lambda I)$ est partout définit par hypothèse.Donc $\mathcal{T} - \lambda I$ est inversible si et seulement si $\begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$ est inversible mais B est inversible par hypothèse donc $\mathcal{T} - \lambda I$ est inversible si et seulement si $T_2(\lambda) = C-(D-\lambda I)B^{-1}(A-\lambda I)$ est inversible, donc $\mathcal{T} - \lambda I$ est bijectif si et seulement si $T_2(\lambda) = C-(D-\lambda I)B^{-1}(A-\lambda I)$ est bijectif [car $T_2(\lambda)$ et$\mathcal{T} - \lambda I$sont fermés] c'est à dire :

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\ bijectif \Longleftrightarrow T_2\ bijectif$$

d'ou le spectre

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_2(\lambda))\}$$

alors l'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_2(\lambda))\}$$

• Montrons maintenant qu'on a :

$$\mathcal{T} - \lambda I\ n\prime est\ pas\ injectif \Longleftrightarrow T_2\ n\prime est\ pas\ injectif$$

On s'appuyant sur la factorisation (2.15)

$$\mathcal{T}_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix}$$

On a vu que le premier et le dernier terme sont inversibles donc injectifs d'ou

$(\mathcal{T}_2 - \lambda I)$ est injectif si est seulement si :

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \text{ est injectif}$$

mais B est inversible par hypothèse donc injectif d'où :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \text{ est injectif} \Longleftrightarrow T_2(\lambda) \text{ est injectif}$$

ce qui est équivalent à :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \text{ n'est pas injectif} \Longleftrightarrow T_2 \text{ n'est pas injectif}$$

d'où le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_2(\lambda))\}$$

ce qui achève la démonstration.

$\square$

2.5.4 C non inversible et B non inversible

Dans cette partie on va essayer d'établir une relation entre les propriétés spectrales de $\mathcal{T}$. et celles de C en utilisant la factorisation de Schur définie par :

$$\mathcal{T} - \lambda = \begin{pmatrix} I & B(D-\lambda I)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(\lambda) & 0 \\ 0 & (D-\lambda I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D-\lambda I)^{-1}C & I \end{pmatrix}$$

avec

$$S(\lambda) = (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C,$$

Ainsi on va montrer par un procédé algébrique que les propriétés spectrales de l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$ ont les caractéristiques suivantes (sous la condition que B et C soient fermés) :

On prend ;

$$\mathcal{S}(\lambda) := (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C, \ avec, \ \lambda \in \rho(D)$$

et soit

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{C}} = \{\mathcal{S}(\lambda) = (A-\lambda I) - B(D-\lambda I)^{-1}C : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

on a :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma_p(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

et :

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \rho(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

Proposition 2.5.1. *(Voir [17], [16], [18])*

Soit . $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1,\ B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1,\ C : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *des opérateurs bornés densément définis et* $D : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *un opérateur borné densément défini, inversible avec* $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A)$ *et* $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(D)$.

Soit $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *l'opérateur matriciel linéaire de domaine :* $\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(B)$, *avec* $\rho(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ *(d'où* $\mathcal{T}$ *sera fermé)*

Si D *est bijectif, alors l'opérateur :*

$$S := A - BD^{-1}C, \text{ avec } \mathcal{D}(S) := \{x \in \mathcal{D}(C) : D^{-1}Cx \in \mathcal{D}(B)\}$$

est bien défini et on a les résultats suivants :

(i)

$$\mathcal{T} \text{ est injectif} \Longleftrightarrow S \text{ est injectif}$$

(ii)

$$Im(S) \oplus \{0\} = Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus 0)$$

et :

$$\mathcal{T} \textit{ est surjectif} \Longleftrightarrow S \textit{ est surjectif}$$

Preuve

(i) $\mathcal{T}$ est injectif $\Longleftrightarrow S$ est injectif :

"$\Leftarrow$"

Supposons que $\mathcal{T}$ n'est pas injectif. alors il existent $f \in \mathcal{D}(C)$, $g \in \mathcal{D}(B)$ telles que :

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Af + Bg = 0 \\ Cf + Dg = 0 \end{cases}$$

et puisque D inversible on obtient de la deuxième équation :

$$D^{-1}Cf = -g \in \mathcal{D}(B)$$

et de cette dernière avec la première équation, on obtient $Sf = 0$ et comme $f \neq 0$ (f reste dans $\mathcal{D}(S)$) alors :
S n'est pas injectif.

"$\Rightarrow$" Supposons maintenant que S n'est pas injectif et fixons un élément $f \neq 0$ tel que

$$\begin{aligned} 0 &= Sf = Af - BD^{-1}Cf \\ &= Af + Bg, \end{aligned}$$

on pose : $g := -D^{-1}Cf$ alors :

$$\begin{aligned} 0 &= g + D^{-1}Cf \\ &= D^{-1}(Dg + Cf). \end{aligned}$$

Puisque D^{-1} est injectif, les équations précédentes montrent que $0 \neq \binom{f}{g} \in \ker(\mathcal{T})$. d'où $\mathcal{T}$ n'est pas est injectif

(ii) $\mathcal{T}$ est surjectif $\Longleftrightarrow S$ est surjectif :

"$\Rightarrow$ "

montrons que

$$Im(S) \oplus \{0\} = Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus 0)$$

"$\subseteq$" Pour chaque $f \in \mathcal{D}(S)$, l'élément $g := -D^{-1}Cf$ reste dans $\mathcal{D}(B)$.et par conséquent $\binom{f}{g} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ et :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Af + Bg \\ Cf + Dg \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Af - BD^{-1}Cf \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Sf \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$Im(S) \oplus \{0\} \subseteq Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}).$$

" $\supseteq$ " Inversement ; soit$\binom{f}{g} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ tel que $T\binom{f}{g} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ pour un certain $x \in \mathcal{H}_1$.et du fait que : $Cf + Dg = 0$ il s'ensuit que $g = -D^{-1}Cf \in \mathcal{D}(B)$.
Donc nous avons $f \in \mathcal{D}(S)$ et :

$$x = Af + Bg = Af - BD^{-1}Cf = Sf,$$

Ce qui implique que $Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}) \subseteq Im(S) \oplus \{0\}$. En particulier la surjectivité de $\mathcal{T}$ implique celle de S.

"$\Leftarrow$ "

montrons que $\mathcal{T}$ est surjectif. Puisque B est borné, alors nous n'avons pas besoin de supposer l'opérateur C surjective (contrairement au cas non borné qu'on va aborder au prochain chapitre) pour prouver la surjectivité de $\mathcal{T}$ dans l'assertion (ii) de la proposition 2.5.1. Pour tout $\binom{x}{y} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ donné, l'élément $x - BD^{-1}y$ est bien défini, et la surjectivité de S implique qu' il existe un f tel que $Sf = x - BD^{-1}y$ comme D est bijectif, on peut définir $g := D^{-1}(y - Cf)$.un simple calcul montre que $\mathcal{T}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et donc

la surjectivité de $\mathcal{T}$ est prouvée. □

Corollaire 2.5.1. *Dans les conditions de la proposition 2.5.1 avec le changement :*

au lieu de l'opérateur matriciel : A, on prend l'opérateur matriciel : $A - \lambda$;

au lieu de l'opérateur inversible : D, on prend l'opérateur : $D - \lambda I$ inversible (c'est à dire $\lambda \in \rho(D)$)

au lieu de : $S := A - BD^{-1}C$, On prend :

$$\mathcal{S}(\lambda) := (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C, \qquad \textit{avec : } \lambda \in \rho(D)$$

et soit

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{C}} = \{\mathcal{S}(\lambda) = (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Alors on a les assertions suivantes (sous la condition que B et C soient fermés) :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma_p(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

et :

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \rho(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

Preuve

C'est une conséquence directe de la proposition 2.5.1 mais appliquée à : $\mathcal{T} - \lambda I = \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D - \lambda I \end{pmatrix}$ au lieu de $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $(D - \lambda I)$ inversible (c'est à dire $\lambda \in \rho(D)$) au lieu de D inversible.

(i) Donc on a sur $\rho(D)$:

$$\mathcal{T} - \lambda I \ est\ injectif \Longleftrightarrow \mathcal{S}(\lambda) \ est\ injectif$$

(ii) Si en plus C est surjectif, alors :

$$Im(\mathcal{S}) \oplus \{0\} = Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus 0)$$

et

$$\mathcal{T} - \lambda \ est\ surjectif \Longleftrightarrow \mathcal{S}(\lambda) \ est\ surjectif\ sur \rho(D)$$

d'où

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma_p(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$$

et si en plus C est surjectif alors on a [puisque $(\mathcal{T} - \lambda I)$ et $\mathcal{S}(\lambda)$ sont fermés] :

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \rho(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$$

□

Remarque 2.5.1. *D'une manière analogue, en utilisant l'autre factorisation de Schur définie par :*

$$\mathcal{T} - \lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C(A - \lambda I)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda I & 0 \\ 0 & S_D(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (A - \lambda I)^{-1} B \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \rho(A)$$

où

$$S_D(\lambda) = D - \lambda I - C(A - \lambda I)^{-1} B, \qquad \lambda \in \rho(A)$$

on obtient les résultats suivants :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(A) = \sigma_p(S_D) \cap \rho(A)$$

et si en plus C est surjectif alors on a :

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(A) = \rho(S_D) \cap \rho(A)$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(A) = \sigma(S_D) \cap \rho(A)$$

Chapitre 3

Opérateurs matriciels 2×2 non bornés de type $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, comme dans le cas borné, on va voir qu'on peut sous certaines conditions calculer le spectre et la résolvante de l'operateur tout en utilisant la factorisation de Schur et une autre factorisation analogue, ainsi les propriétés spectrales des opérateurs indexés par un complexe pour aboutir aux résultats suivants :

Supposons le long de ce chapitre que $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$, $B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$, $C : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2)$ et $D : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ sont des opérateurs linéaires non nécessairement bornés

– Dans le cas où $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ on va montrer qu'on a :

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \rho(BC) \setminus \{0\}\} \\ \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(BC) \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

– Dans le cas où $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ le spectre et la résolvante sont déterminés, à savoir :

• C inversible on obtient :
Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_1(\lambda))\}$$

Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_1(\lambda))\}$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_1(\lambda))\}$$

avec$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I)$,
• B inversible, on va montrer qu'on a :

le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_2(\lambda))\}$$

Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_2(\lambda))\}$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_2(\lambda))\}$$

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D - \lambda)B^{-1}(A - \lambda),$$

• Cas où C et B non inversible dans ce cas on prend :

$$\mathcal{S}(\lambda) := (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C, \qquad avec : \quad \lambda \in \rho(D)$$

on va montrer qu'on a :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma_p(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

et :

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \rho(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

3.2 Etude spectral des opérateurs antidiagonaux non bornés de type $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$

Voir ([10] et [9]).

Dans cette partie ; on montrera que les propriétés spectrales d'un tel opérateur sont étroitement liées à ceux des produits d'opérateurs BC et CB où B, C sont des opérateurs non bornés ; plus exactement on va montrer :

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \rho(BC) \setminus \{0\}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \rho(CB) \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(BC) \setminus \{0\}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(CB) \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

Pour la démonstrations, on procédera en trois étapes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Etape.1: & \rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \;;\; \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)\} \\ & \sigma(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(CB) \cup \sigma(BC)\} \\ Etape.2: & (\rho(CB) \cap \rho(BC) \neq \varnothing) \Rightarrow \sigma(CB) \smallsetminus \{0\} = \sigma(BC) \smallsetminus \{0\} \\ & \Rightarrow \rho(CB) \smallsetminus \{0\} = \rho(BC) \smallsetminus \{0\} \\ Etape.3: & [(\rho(CB) \neq \varnothing) \text{ et } (\rho(BC) \neq \varnothing)] \Rightarrow (\rho(CB) \cap \rho(BC) \neq \varnothing) \end{array} \right.$$

Lemme 3.2.1. *Soit $\mathcal{T} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{smallmatrix}\right)$ où B, C sont des opérateurs non bornés alors :*

$$\begin{array}{rcl} \sigma_p(\mathcal{T}) \setminus \{0\} & = & \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma_p(CB)\} \setminus \{0\} \\ & = & \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma_p(BC)\} \setminus \{0\} \\ \sigma_p(CB) \setminus \{0\} & = & \sigma_p(BC) \setminus \{0\} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$

Preuve

Montrons qu'on a :

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{T} - \lambda I) \ est\ injectif & \Leftrightarrow & (AB - \lambda^2 I) \ est\ injectif. \\ & \Leftrightarrow & (BC - \lambda^2 I) \ est\ injectif. \end{array}$$

$\diamond$ Supposant $(CB - \lambda^2 I)$ (ou $(BC - \lambda^2 I)$) est injectif
soit $(x, y) \in ker(\mathcal{T} - \lambda I)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{T} - \lambda I)(x, y) = 0 & \Rightarrow & \begin{pmatrix} -\lambda & B \\ C & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} By = \lambda x & \qquad\qquad (1) \\ Cx = \lambda y & \qquad\qquad (2) \end{array} \right. \end{array}$$

Comme $\lambda x \in \mathfrak{D}(C)$ de l'équation (1), on déduit que $By \in \mathfrak{D}(C)$ et donc $y \in \mathfrak{D}(CB)$ de même de l'équation (2), on déduit que $Cx \in \mathfrak{D}(B)$ et donc $x \in \mathfrak{D}(BC)$ alors :

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{T} + \lambda I)(\mathcal{T} - \lambda I)(x, y) = 0 & \Rightarrow & \begin{pmatrix} BC - \lambda^2 I & 0 \\ 0 & CB - \lambda^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} (BC - \lambda^2 I)(x) = 0 & \qquad\qquad (3) \\ (CB - \lambda^2 I)(y) = 0 & \qquad\qquad (4) \end{array} \right. \end{array}$$

Si $(CB - \lambda^2 I)$ (resp $(BC - \lambda^2 I)$) est injectif, des équations (4) et (1) (resp (3) et

(2)), on déduit $x = 0$ et $y = 0$.

$\diamond$ Inversement, on suppose $(\mathcal{T} - \lambda I)$ injectif

Soit $x \in ker(BC - \lambda^2 I)$, on a :

$$BC(x) = \lambda^2 x$$

en posant $y = \dfrac{1}{\lambda} C(x)$ on obtient $By = \lambda x$, et on a

$$\begin{cases} x \in \mathfrak{D}(BC) \subseteq \mathfrak{D}(C) \\ et \\ y = \dfrac{1}{\lambda} C(x) \in \mathfrak{D}(B) \end{cases}$$

d'où $(x, y) \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$ et

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x + By \\ Cx - \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x + \lambda x \\ \lambda y - \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $(\mathcal{T} - \lambda I) = \{0\}$ est injectif, on déduit $x = 0$ et $y = 0$.

De la même façon on peut montrer que $ker(CB - \lambda^2 I) = \{0\}$

Donc on a bien :

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{T} - \lambda I)\ est\ injectif & \Leftrightarrow & (AB - \lambda^2 I)\ est\ injectif. \\ & \Leftrightarrow & (BC - \lambda^2 I)\ est\ injectif. \end{array}$$

c'est à dire

$$\begin{array}{rcl} \sigma_p(\mathcal{T}) \setminus \{0\} & = & \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma_p(CB)\} \setminus \{0\} \\ & = & \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma_p(BC)\} \setminus \{0\} \\ \sigma_p(CB) \setminus \{0\} & = & \sigma_p(BC) \setminus \{0\} \end{array}$$

$\square$

Première étape

Montrons les résultats suivants :

$$\begin{array}{l} \rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \ \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)\} \\ \sigma(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(CB) \cup \sigma(BC)\} \end{array}$$

alors soit

$$\mathcal{T}^2 = \begin{pmatrix} CB & 0 \\ 0 & BC \end{pmatrix}$$

Donc pour $\lambda = 0$, on a

$$\mathcal{T}\ est\ injectif \Leftrightarrow \mathcal{T}^2\ est\ injectif$$

donc

$$\mathcal{T}\ est\ injectif \Leftrightarrow CB\ et\ BC\ sont\ injectifs.$$

Lemme 3.2.2. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \neq 0$, alors*

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\ est\ surjectif\ \ \Leftrightarrow (CB - \lambda^2 I)\ et\ (BC - \lambda^2 I)\ sont\ surjectifs\ .$$

Preuve

$\diamond$ On suppose que : $(CB - \lambda^2 I)$ et $(BC - \lambda^2 I)$ sont surjectifs

Soit $(z_1, z_2) \in E_1 \times E_2$, il existe $x_1 \in \mathfrak{D}(BC)$ et $x_2 \in \mathfrak{D}(CB)$ tels que :

$$\begin{cases} (BC - \lambda^2 I)x_1 = z_1 \\ (CB - \lambda^2 I)x_2 = z_2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\mathcal{T} - \lambda I)(\mathcal{T} + \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On pose

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\mathcal{T} + \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Comme $x_1 \in \mathfrak{D}(BC)$, alors $x_1 \in \mathfrak{D}(C)$ et $Cx_1 \in \mathfrak{D}(B)$, de même $x_2 \in \mathfrak{D}(B)$ et $Bx_2 \in \mathfrak{D}(C)$, d'où

$$\begin{cases} y_1 = \lambda x_1 + Bx_2 \in \mathfrak{D}(C) \\ y_2 = \lambda x_2 + Cx_1 \in \mathfrak{D}(B) \end{cases}$$

Ainsi il existe $(y_1, y_2) \in \mathfrak{D}(\mathcal{T}) = \mathfrak{D}(C) \times \mathfrak{D}(B)$ tel que

$$(z_1, z_2) = (\mathcal{T} - \lambda I)(y_1, y_2)$$

donc $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est surjectif.

$\diamond$ Inversement :

Soit $z_1 \in \mathcal{H}_1$, comme $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est surjectif alors il existe $(x_1, x_2) \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$ tel que

$$(\mathcal{T} - \lambda I)(x_1, x_2) = (z_1, 0)$$

du système

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + Bx_2 = z_1 \\ Cx_1 = \lambda x_2 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} x_1 \in \mathfrak{D}(BC) \\ et \\ z_1 = (BC - \lambda^2 I)(\frac{1}{\lambda} x_1) \end{cases}$$

donc $BC - \lambda^2 I$ est surjectif

De même soit $z_2 \in \mathcal{H}_2$, comme $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est surjectif alors il existe $(x_1, x_2) \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$ tel que

$$(\mathcal{T} - \lambda I)(x_1, x_2) = (0, z_2)$$

du système

$$\begin{cases} Bx_2 = \lambda x_1 \\ Cx_1 - \lambda x_2 = z_2 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} x_2 \in \mathfrak{D}(CB) \\ et \\ z_2 = (CB - \lambda^2 I)(\frac{1}{\lambda} x_2) \end{cases}$$

donc $CB - \lambda^2 I$ est surjectif

$\square$

Remarque 3.2.1. *De même on peut montrer que*

$$\mathcal{T}^2 est\ surjectif \Leftrightarrow \mathcal{T} est\ surjectif$$

car remarquant que $\mathfrak{D}(\mathcal{T}^2) \subseteq \mathfrak{D}(\mathcal{T})$, on déduit que si $\mathcal{T}^2$ est surjectif alors $\mathcal{T}$ est surjectif. Inversement, si T est surjectif, soit $z \in H$, il existe $\overline{x} \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$ tel que $z = \mathcal{T}(\overline{x})$, de même il existe $x \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$ tel que $\overline{x} = \mathcal{T}(x)$, et par suite on obtient :

$$x \in \mathfrak{D}(\mathcal{T}^2) \texttt{ et } z = \mathcal{T}^2(x)$$

d'où $\mathcal{T}^2$ est surjectif.

Remarque 3.2.2. *Pour $\lambda = 0$, on a*

$$\mathcal{T}^2 \text{ est surjectif } \Leftrightarrow \mathcal{T} \text{ est surjectif}$$

donc

$$CBetBC \text{ sont surjectifs} \Leftrightarrow \mathcal{T} \text{est surjectif}$$

Des lemmes 3.2.1, 3.2.2,et la remarque 3.2.2 on obtient

Corollaire 3.2.1. *Soit $\mathcal{T}$, A et B définie comme au début du section*

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \text{ est bijectif} \Leftrightarrow (CB - \lambda^2 I) \text{ et } (BC - \lambda^2 I) \text{ sont bijectifs}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve
C'est une Conséquence directe Des lemmes 3.2.1, 3.2.2 et la Proposition 3.2.2

□

Corollaire 3.2.2. *pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

$$(CB - \lambda^2 I) \text{ et } (BC - \lambda^2 I) \text{ sont bijectifs } \Rightarrow (\mathcal{T} - \lambda I) \text{ est inversible}$$

c'est à dire $\lambda \in \rho(\mathcal{T})$

Preuve
En effet :
Si $(CB - \lambda^2 I)$ et $(BC - \lambda^2 I)$ sont bijectifs,
Alors du Corollaire 3.2.1, on obtient $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est bijectif de $\mathfrak{D}(\mathcal{T})$ sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$.

Comme $\mathcal{T}$ est fermé alors $(\mathcal{T} - \lambda I)^{-1}$ est fermé de domaine $\mathfrak{D}(\mathcal{T} - \lambda I)^{-1} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. En vertu du théorème du graphe fermé, on déduit que $(\mathcal{T} - \lambda I)^{-1}$ est borné.

□

Du corollaire 3.2.2, on obtient

Proposition 3.2.1. *pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

$$\lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC) \Rightarrow \lambda \in \rho(\mathcal{T})$$

Preuve :
C'est une Conséquence directe du corollaire 3.2.2

□

Proposition 3.2.2. *pour tout $\lambda \neq 0$ complexe*

$$\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \Rightarrow \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)$$

Preuve :
Soit $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$. Calculons $(\mathcal{T} - \lambda I)^{-1}$.

Posons :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} - \lambda I)^{-1} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 &\rightarrow \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{pmatrix} -\lambda & B \\ C & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{cases} Bc - \lambda a = 1 \\ Bd - \lambda b = 0 \\ Ca - \lambda c = 0 \\ Cd - \lambda d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{\lambda} Bd \\ c = \frac{1}{\lambda} Ca \\ (BC - \lambda^2 I)a = \lambda \\ (CB - \lambda^2 I)d = \lambda \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a = \lambda(BC - \lambda^2 I)^{-1} \\ d = \lambda(CB - \lambda^2 I)^{-1} \\ b = B(CB - \lambda^2 I)^{-1} \\ c = C(BC - \lambda^2 I)^{-1} \end{cases} \qquad (1)$$

et par suite

$$(\mathcal{T} - \lambda I)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda(BC - \lambda^2 I)^{-1} & B(CB - \lambda^2 I)^{-1} \\ C(BC - \lambda^2 I)^{-1} & \lambda(CB - \lambda^2 I)^{-1} \end{bmatrix}$$

Du Corollaire 3.2.1 et la Proposition 1.2.1, on déduit donc que $(CB - \lambda^2 I)^{-1}$ et $(BC - \lambda^2 I)^{-1}$ sont bijectifs et bornés

$\square$

Remarque 3.2.3. *Si $0 \in \rho(\mathcal{T})$, alors $\mathcal{T}$ est bijectif et $\mathcal{T}^{-1}$ est borné, on déduit donc que $\mathcal{T}^2$ est bijectif, et*

$$(\mathcal{T}^2)^{-1} = (\mathcal{T}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} (BC)^{-1} & 0 \\ 0 & (CB)^{-1} \end{pmatrix}$$

est un opérateur borné, par suite CB et BC sont bijectifs, et $(AB)^{-1}$ et $(BC)^{-1}$ sont bornés.

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B(CB)^{-1} \\ C(BC)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}^{-1}|_{\mathfrak{D}(C)\times\mathfrak{D}(B)} = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^{-1}B \\ (CB)^{-1}C & 0 \end{pmatrix}$$

Des Propositions 3.2.1, 3.2.2 et la Remarque 3.2.3, on déduit le théorème suivant

Théorème 3.2.1.

$$\rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)\}$$

$$\sigma(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(CB) \cup \sigma(BC)\}.$$

Deuxième étape

Montrons que si $\rho(CB) \cap \rho(BC \neq \varnothing$ alors $\sigma(CB) \setminus \{0\} = \sigma(BC) \setminus \{0\}$ et $\rho(CB) \setminus \{0\} = \rho(BC) \setminus \{0\}$.

L'ors de l'étude de l'opérateur résolvant $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$ on a besoin des confirmations suivantes, soit $\lambda \in \rho(\mathcal{T})$ alors

Remarque 3.2.4. *1. $(BC - \lambda^2 I)^{-1}$ borné (par définition de l'inverse d'un opérateur)*

2. $(AC - \lambda^2 I)^{-1}$ borné (par définition de l'inverse d'un opérateur)

3. $C(BC - \lambda^2 I)^{-1}$ borné (fermé partout défini)

4. $B(CB - \lambda^2 I)^{-1}$ borné (fermé partout défini)

Soit $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$ alors l'injection canonique

$$(\mathcal{T} - \lambda I)^{-1}(\mathcal{T} - \lambda I) : \mathfrak{D}(\mathcal{T}) = \mathfrak{D}(C) \times \mathfrak{D}(B) \to \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

est borné sur $\mathfrak{D}(\mathcal{T})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & B \\ C & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\lambda a + bC & = 1 \\ aB - \lambda b & = 0 \\ -\lambda c + dC & = 0 \\ cB - \lambda d & = 1 \end{array} \right. \qquad (2)$$

des systèmes (1) et (2), on déduit que sur $\mathfrak{D}(\mathcal{T})$, on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = \lambda(BC - \lambda^2 I)^{-1} & = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} B(CB - \lambda^2)^{-1} C \\ d = \lambda(CB - \lambda^2 I)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} C(BC - \lambda^2)^{-1} B \\ b = B(CB - \lambda^2 I)^{-1} & = (BC - \lambda^2)^{-1} B \\ c = C(BC - \lambda^2 I)^{-1} & = (CB - \lambda^2)^{-1} A \end{array} \right. \qquad (3)$$

d'où par prolongement borné sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = \lambda(BC - \lambda^2 I)^{-1} & = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \overline{B(CB - \lambda^2)^{-1} C} \\ d = \lambda(CB - \lambda^2 I)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \overline{C(BC - \lambda^2)^{-1} B} \\ b = B(CB - \lambda^2 I)^{-1} & = \overline{(BC - \lambda^2)^{-1} B} \\ c = C(BC - \lambda^2 I)^{-1} & = \overline{(CB - \lambda^2)^{-1} C} \end{array} \right. \qquad (4)$$

ainsi

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{T} - \lambda)^{-1} & = & \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \overline{B(CB - \lambda^2)^{-1} C} & B(CB - \lambda^2 I)^{-1} \\ \overline{(CB - \lambda^2)^{-1} C} & \lambda(CB - \lambda^2 I)^{-1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \lambda(BC - \lambda^2 I)^{-1} & \overline{(BC - \lambda^2)^{-1} B} \\ C(BC - \lambda^2 I)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \overline{C(BC - \lambda^2)^{-1} B} \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où le

Théorème 3.2.2. *Si $\rho(CB) \cap \rho(BC) \neq \varnothing$, alors*

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma(CB)\} \setminus \{0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma(BC)\} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Preuve :
D'après le théorème 3.2.1, l'inclusion ($\subseteq$), est vérifiée

Soit $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda^2 \in \rho(BC)$, on a

$$\begin{cases} \bullet \quad (BC - \lambda^2) \\ \bullet \quad (BC - \lambda^2)^{-1} : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1 \\ \bullet \quad C(BC - \lambda^2)^{-1} : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2 \end{cases}$$

On pose :

$$R(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda(BC - \lambda^2 I)^{-1} & (BC - \lambda^2)^{-1}B \\ C(BC - \lambda^2 I)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}C(BC - \lambda^2)^{-1}B \end{bmatrix}$$

Si $z \in \mathcal{H}_1$, alors $(BC - \lambda^2 I)^{-1}(z) \in \mathfrak{D}(BC)$ et donc $C(BC - \lambda^2 I)^{-1}(z) \in \mathfrak{D}(B)$, d'où

$$R(\lambda) : \mathcal{H}_1 \times \mathfrak{D}(B) \to \mathfrak{D}(\mathcal{T}) = \mathfrak{D}(C) \times \mathfrak{D}(B) \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

Soit $\mu^2 \in \rho(CB) \cap \rho(BC)$ $(\mu \neq 0)$, alors $\mu \in \rho(\mathcal{T})$ et on a

$$(\mathcal{T} - \mu)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu(BC - \mu^2 I)^{-1} & \overline{(BC - \mu^2)^{-1}B} \\ C(BC - \mu^2 I)^{-1} & -\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\overline{C(BC - \mu^2)^{-1}B} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \bullet \quad (BC - \mu^2 I)^{-1} \mathit{et}\ C(BC - \mu^2 I)^{-1} \text{ sont borné sur } \mathcal{H}_1 \\ \mathit{et} \\ \bullet \quad (BC - \mu^2)^{-1}B \text{ et } C(BC - \mu^2)^{-1}B \textit{ sont bornés sur } \mathfrak{D}(B) \end{cases}$$

d'après l'identité de la résolvante (lemme 1.3.1), on a

$$(BC - \lambda^2 I)^{-1}B = (BC - \mu^2)^{-1}B + (\lambda - \mu)(BC - \lambda^2 I)^{-1}(BC - \mu^2)^{-1}B$$

et

$$C(BC-\lambda^2 I)^{-1}B = C(BC-\mu^2)^{-1}B + (\lambda-\mu)C(BC-\lambda^2 I)^{-1}(BC-\mu^2)^{-1}B$$

Ce qui montre que $(BC-\lambda^2 I)^{-1}B$ et $C(BC-\lambda^2 I)^{-1}B$ sont bornés sur $\mathfrak{D}(B)$. Par suite $R(\lambda) : \mathcal{H}_1 \times \mathfrak{D}(B) \to \mathfrak{D}(\mathcal{T})$, est un opérateur défini et borné sur $\mathcal{H}_1 \times \mathfrak{D}(B)$. Comme $\mathcal{H}_1 \times \mathfrak{D}(B)$ est dense dans $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, alors $R(\lambda)$ possède un prolongement borné sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ que l'on note par $\overline{R(\lambda)}$:

$$\overline{R(\lambda)} = \begin{bmatrix} \lambda(BC-\lambda^2 I)^{-1} & \overline{(BC-\lambda^2)^{-1}B} \\ C(BC-\lambda^2 I)^{-1} & -\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}\overline{C(BC-\lambda^2)^{-1}B} \end{bmatrix}$$

Puisque $(BC-\lambda^2 I)$ est injectif, alors d'après le lemme 3.2.1, on a $\mathcal{T}-\lambda$ et $(CB-\lambda^2 I)$ sont injectifs. On peut vérifier facilement que

$$(\mathcal{T}-\lambda)R(\lambda) = I_{\mathcal{H}_1 \times \mathfrak{D}(B)}$$

Donc

$$\forall (x,y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathfrak{D}(B) \Rightarrow (\mathcal{T}-\lambda)R(\lambda)(x,y) = (x,y).$$

Soit$(x,y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, de la densité de $\mathfrak{D}(B)$ dans $\mathcal{H}_2$, il existe dans $\mathfrak{D}(B)$, une suite $(y_n)_n$ qui converge vers y dans $\mathcal{H}_2$. On pose

$$(a_n, b_n) = \overline{R(\lambda)}(x, y_n) = R(\lambda)(x, y_n) \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$$

Soit $(a,b) = \overline{R(\lambda)}(x,y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, de la continuité de $\overline{R(\lambda)}$, on a

$$(a,b) = \overline{R(\lambda)}(x,y) = \lim_n \overline{R(\lambda)}(x,y_n) = \lim_n (a_n, b_n)$$

d'autre part on a

$$\begin{cases} \mathfrak{D}(\mathcal{T}) \ni (a_n, b_n) \to (a,b) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ (\mathcal{T}-\lambda)(a_n, b_n) = (x, y_n) \to (x,y) \end{cases}$$

comme $(\mathcal{T}-\lambda)$ est un opérateur fermé, on déduit que

$$\begin{cases} (a,b) \in \mathfrak{D}(\mathcal{T}) \\ et \\ (\mathcal{T}-\lambda)(a,b) = (x,y) \end{cases}$$

Par suite $(\mathcal{T}-\lambda)$ est surjectif (donc bijectif), et on a

$$\begin{cases} \overline{R(\lambda)}(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2) \subseteq \mathfrak{D}(T) \\ (\mathcal{T}-\lambda)\overline{R(\lambda)} = I_{\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2} \\ (\mathcal{T}-\lambda)^{-1} = \overline{R(\lambda)} \end{cases}$$

d'où $(\mathcal{T}-\lambda)$ est inversible ($\lambda \in \rho(\mathcal{T})$), du théorème 3.2.1, on déduit que $\lambda^2 \in \rho(CB)$

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(BC)\} \subseteq \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(CB)\}$$

de la même façon, on démontre

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(CB)\} \subseteq \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(BC)\}$$

d'où

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(CB)\} = \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(BC)\}$$

Ainsi

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \sigma(CB)\} = \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \sigma(BC)\}$$

□

Lemme 3.2.3. *Si $\mu \in \rho(CB) \setminus \{0\}$. Alors $(BC-\mu) : \mathfrak{D}(BC) \to \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ admet un inverse algébrique $(BC-\mu)^{-1}$, et les opérateurs $(BC-\mu)^{-1}B$ et $C(BC-\mu)^{-1}B$ sont bornés sur $\mathfrak{D}(B)$ tels que leurs extensions bornées sont données par*

$$\begin{aligned} \overline{(BC-\mu)^{-1}B} &= B(CB-\mu)^{-1} && (3.1) \\ \overline{C(BC-\mu)^{-1}B} &= 1_{\mathcal{H}_2} + \mu(CB-\mu)^{-1} && (3.2) \end{aligned}$$

Preuve :
Du Lemme 3.2.1, on déduit que $(BC-\mu)$ est injectif, donc bijectif son image $Im(BC-\mu)$, soit alors

$$(BC-\mu)^{-1} : Im(BC-\mu) \to \mathcal{H}_1$$

de plus si $x \in \mathfrak{D}(B)$ il existe $y \in \mathfrak{D}(CB)$ tel que $x = CBy - \mu y$ donc

$$Bx = BCBy - \mu By = (BC-\mu)By$$

on déduit que $Bx \in Im(BC-\mu)$, et donc $Im(B) \subseteq \mathfrak{D}((BC-\mu)^{-1})$. On a

$$B(CB-\mu) = (BC-\mu)B$$

en composant à droite par $(CB-\mu)^{-1}$, on obtient

$$B = (BC-\mu)B(CB-\mu)^{-1}|_{\mathfrak{D}(B)}$$

et en composant à gauche par $(BC-\mu)^{-1}$, on obtient

$$(BC-\mu)^{-1}B = B(CB-\mu)^{-1}|_{\mathfrak{D}(B)} \qquad (1)$$

Par composition à gauche par C, on obtient

$$\begin{aligned} C(BC-\mu)^{-1}B &= CB(CB-\mu)^{-1}|_{\mathfrak{D}(B)} \\ &= (1_{\mathcal{H}_2} + \mu(CB-\mu)^{-1})|_{\mathfrak{D}(B)} \quad (2) \end{aligned}$$

des équations (1) et (2), se déduit le Lemme 3.2.3

$\square$

Troisième étape

Lemme 3.2.4. *Si $\rho(CB) \neq \varnothing$ et $\rho(BC) \neq \varnothing$ alors $\rho(CB) \cap \rho(BC) \neq \varnothing$*

Preuve : Soient $\lambda \in \rho(BC) \setminus \{0\}$ et $\mu \in \rho(CB) \setminus \{0\}$, de l'identité de la résolvante on obtient

$$(BC-\lambda)^{-1}B = (BC-\mu)^{-1}B + (\lambda-\mu)(BC-\lambda)^{-1})(BA-\mu)^{-1})B$$

et

$$C(BC-\lambda)^{-1}B = C(BC-\mu)^{-1}B + (\lambda-\mu)C(BC-\lambda)^{-1})(BA-\mu)^{-1})B$$

du Lemme 3.2.3, on déduit que $(BC-\lambda)^{-1}B$ et $C(BC-\lambda)^{-1}B$ sont bornés sur $\mathfrak{D}(B)$ par conséquent si $\lambda^2 \in \rho(BC) \setminus \{0\}$, alors

$$R(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda(BC-\lambda^2 I)^{-1} & (BC-\lambda^2)^{-1}B \\ C(BC-\lambda^2 I)^{-1} & -\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}C(BC-\lambda^2)^{-1}B \end{bmatrix}$$

est un opérateur matriciel borné sur $\mathcal{H}_1 \times \mathfrak{D}(B)$, qui a pour extension bornée

$$\overline{R(\lambda)} = \begin{bmatrix} \lambda(BC-\lambda^2 I)^{-1} & \overline{(BC-\lambda^2)^{-1}B} \\ AC(BC-\lambda^2 I)^{-1} & -\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}\overline{C(BC-\lambda^2)^{-1}B} \end{bmatrix}$$

Par un raisonnement analogue à la démonstration faite dans le Théorème 3.2.2, on déduit que $\lambda \in \rho(\mathcal{T})$ et $\lambda^2 \in \rho(CB)$.

□

Remarque 3.2.5. *Si $0 \in \rho(BC)$ on considère alors*

$$R(0) = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^{-1}B \\ (CB)^{-1}A & 0 \end{pmatrix}$$

défini sur $\mathfrak{D}(C) \times \mathfrak{D}(B)$. On a

$$C(BC) = (CB)C \Rightarrow (CB)^{-1}C = C(BC)^{-1}|_{\mathfrak{D}(C)}$$

donc $(CB)^{-1}C$ est borné sur $\mathfrak{D}(C)$. De l'équation de la résolvante et du lemme 3.2.3, on obtient

$$(BC)^{-1}B = (BC-\mu)^{-1}B - \mu(BC)^{-1})(BC-\mu)^{-1})B$$

borné sur $\mathfrak{D}(B)$.Ce qui montre que $R(0)$ est borné sur $\mathfrak{D}(C) \times \mathfrak{D}(B)$, et par suite admet un prolongement borné

$$\overline{R(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{(BC)^{-1}B} \\ \overline{(CB)^{-1}A} & 0 \end{pmatrix}$$

Même raisonnement que dans le Théorème 3.2.2, on déduit que $0 \in \rho(\mathcal{T})$ et $0 \in$

$\rho(CB)$.

3.2.1 Contre exemple

Soient $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = F \times F$ où F est un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit S un opérateur fermé non borné et densément défini, tel que $0 \in \rho(S)$. On pose

$$C = \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & S \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}$$

On C est fermé de domaine $F \times \mathfrak{D}(S)$ et B est un opérateur borné sur $F \times F$.

$$CB = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad et \quad BA = \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Il est évident que CB est borné et BC est fermé non borné, de domaine $\mathfrak{D}(BC) = \mathfrak{D}(C) = F \times \mathfrak{D}(S)$. Il est facile de vérifier

$$\sigma(CB) = \{1\} \quad et \quad \sigma(BC) = \mathbb{C}$$

En effet $(BC - 1I)$ n'est pas injectif et pour $\lambda \neq 1$ alors $(BC - \lambda I)$ est bijectif et on a

$$et \quad (BC - \lambda)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} I & -(1-\lambda)^{-1}S \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

qui est non borné.

3.3 Etude spectrale des opérateurs non bornés de type $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1$ un espace de Hilbert et soient :
$B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ et $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ des opérateurs linéaires fermés, $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ est un opérateur linéaire C-borné et $D : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ est un opérateur linéaire borné partout défini tel que $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(D)$

Il existe : $\alpha, \gamma, \delta \geq 0$ telles que

$$\begin{array}{rcl} \|Ax\| & \leq & \alpha\|x\| + \gamma\|Cx\|, \qquad x \in \mathcal{D}(C), \\ \|Dx\| & \leq & \delta\|x\|, \qquad x \in \mathcal{D}(B). \end{array}$$

Alors l'opérateur matriciel

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(B),$$

est un opérateur linéaire bien défini dans $\mathcal{H}$ avec $\rho(\mathcal{T}) \neq \emptyset$(d'où $\mathcal{T}$ sera fermé).

3.3.1 C inversible

Dans cette section, l'outil principale utilisé est la factorisation antidiagonale, (Voir [17], [16], [18]) qui s'écrit formellement sous la forme :

$$\mathcal{T} - \lambda = \begin{pmatrix} I & (A - \lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1}(D - \lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

avec

$$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I),$$

On va essayer d'établir une relation entre les propriétés spectrales de $\mathcal{T}$ et celles de T_1. Pour des conditions un peu différentes de celles du cas borné ; on va montrer en utilisant la factorisation (3.3) qu'on a :

Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_1(\lambda))\}$$

Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_1(\lambda))\}$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_1(\lambda))\}$$

avec

$$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I),$$

Dans ce cas le spectre et l'ensemble résolvant de $\mathcal{T}$ sont donnés par le Théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur matriciel défini par :*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

tels que :avec $\rho(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ (d'où $\mathcal{T}$ sera fermé) et :

1. *$A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ un opérateur densément défini C-borné .*
2. *$B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ un opérateur densément défini, fermé, surjectif,*
3. *$C : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur densément défini, fermé, surjectif*
4. *$D : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur partout défini, borné*

et soit $(T_1(\lambda))_\lambda$ la famille d'opérateurs définis par :

$$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I),$$

avec

$$\mathcal{D}(T_1(\lambda)) = \mathcal{D}(B)$$

Alors on a :

Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_1)$$

Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_1)$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_1)$$

Lemme 3.3.1. *(Voir [17], [16], [18])*

Soient $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, $D : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$, $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ et $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ des opérateurs linéaires densément définis,tels que :

- *B et C sont surjectifs, fermés*
- *A est C-borné et D est borné partout défini*

Dans le ce cas où D est borné, nous définissons $\mathcal{T}_1$ par :

$$\mathcal{T}_1 - \lambda I = \left(\begin{array}{cc} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{array}\right) \tag{3.3}$$

avec

$$T_1(\lambda) = B - (A-\lambda I)C^{-1}(D-\lambda I), \qquad \mathcal{D}(T_1(\lambda)) = \mathcal{D}(B), \tag{3.4}$$

et :

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{D}(T_1) : x + C^{-1}(D-\lambda I)y \in \mathcal{D}(C) \right\}$$

d'autre part, soit :

$$\mathcal{T} = \left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right), \qquad \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(B),$$

Alors nous avons la factorisation suivante :

$$\mathcal{T} - \lambda I = \mathcal{T}_1 - \lambda I$$

Notons que le domaine de $\mathcal{T}_1(\lambda)$ ne dépend pas de λ, alors on écrit $\mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$ au lieu de $\mathcal{D}(\mathcal{T}_1(\lambda))$.

Preuve : On doit montrer pour tout $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(\mathcal{T}_1) \\ \quad\quad et \\ \mathcal{T}\binom{x}{y} = \mathcal{T}_1\binom{x}{y} \end{cases}$$

• Montrons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$:

1. $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \supseteq \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$:
Soit $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ donc $y \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(T_1)$ et puisque D borné partout défini (en particulier $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{D}(B)$), donc on a aussi $y \in \mathcal{D}(D)$ ainsi l'élément $x + C^{-1}(D-\lambda)y$ est bien défini et $\in \mathcal{D}(C)$ ceci montre que$\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$

2. $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \supseteq \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$
Soit $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$ alors $y \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(D)$ et du fait que $x \in \{-C^{-1}(D-\lambda)y + x_0 : x_0 \in \mathcal{D}(C)\} = \mathcal{D}(C)$ alors $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ d'où le résultat.

3. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$:

soit $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ alors $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$ et on a de plus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1(\lambda)y \\ C(x + C^{-1}(D-\lambda)y) \end{pmatrix} + \lambda I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T_1(\lambda)y + (A-\lambda I)C^{-1}(Cx + (D-\lambda I)y) \\ Cx + (D-\lambda I)y \end{pmatrix} + \lambda I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ ce qui achève la démonstration du lemme

□

Le lemme précédent montre que sous les suppositions données ; le spectre de $\mathcal{T}$ peut être obtenu du spectre de T_1 (pour la définition du spectre les fonctions d'opérateurs voir la définition 1.3.4).
Comme application on annonce le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1. *(voir [18], [17] [16]) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et supposons que les suppositions du lemme (3.3.1) sont satisfaites. Alors les équivalences suivantes sont vérifiées :*

Si D est borné, nous avons les équivalences :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ bijectif \Longleftrightarrow T_1 \ bijectif$$

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ n\prime est \ pas \ injectif \Longleftrightarrow T_1 \ n\prime est \ pas \ injectif$$

Preuve :
C'est une conséquence directe de la factorisation (3.3).
En effet :

$$\mathcal{T}_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

avec

$$T_1(\lambda) = B - (A-\lambda I)C^{-1}(D-\lambda I), \ avec \ \mathcal{D}(T_1(\lambda)) = \mathcal{D}(B),$$

et

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{D}(T_1) : x + C^{-1}(D-\lambda)y \in \mathcal{D}(C) \right\}$$

puisque

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ est \ bijectif \Leftrightarrow (\mathcal{T}_1 - \lambda I) \ est \ bijectif$$

alors

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ \textit{est inversible} \Leftrightarrow (\mathcal{T}_1 - \lambda I) \ \textit{est inversible}$$

mais : dans la formule (3.3) ; le premier et le dernier facteur du premier terme à droite est borné et bornement inversible c'est à dire :

- le premier terme de $(\mathcal{T}_1 - \lambda I)$:

$\begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} I & -(A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$

donc pour tout $x \in \ \mathcal{H}\mathcal{T}_1$ on a :

$$\begin{aligned} \|(A-\lambda)C^{-1}x\| &\leq \lambda\|C^{-1}x\| + \alpha\|C^{-1}x\| + \gamma\|x\| \\ &\leq (\|C^{-1}\|(\lambda+\alpha)+\gamma)\|x\| \end{aligned}$$

ainsi $(A - \lambda I)C^{-1}$ est aussi borné.

- le dernier terme de $(\mathcal{T}_1 - \lambda I)$:

$\begin{pmatrix} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$ est aussi borné inversible et son inverse est
$\begin{pmatrix} I & -C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$
car : $C^{-1}(D - \lambda I)$ est borné partout définit comme produit de deux opérateurs bornés et $(D - \lambda)$ est partout défini par hypothèse.

- donc $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est inversible si et seulement si $\begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, mais

C est inversible par hypothèse donc $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est inversible si et seulement si $T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I)$ est inversible [et on a de plus et $(\mathcal{T} - \lambda I)$ et $T_1(\lambda)$ sont fermés]
donc $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est bijectif si et seulement si $T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I)$ est bijectif c'est à dire :

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\, bijectif \Longleftrightarrow T_1 bijectif$$

- Pour :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ n\prime est\ pas\ injectif \Longleftrightarrow T_1 \ n\prime est\ pas\ injectif$$

En se basant aussi sur la factorisation (3.3)

$$\mathcal{T}_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} I & (A-\lambda I)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1}(D-\lambda I) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

On a vu que le premier terme et le dernier sont inversibles donc injectifs d'ou $\mathcal{T}_1 - \lambda I$ est injectif si est seulement si :

$$\begin{pmatrix} 0 & T_1(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ est injectif}$$

mais C est inversible par hypothèse donc injectif d'ou :

$$\mathcal{T} - \lambda I \ n\prime est\ pas\ injectif \Longleftrightarrow T_1(\lambda) \ n\prime est\ pas\ injectif$$

Ce qui équivaut à :

$$\mathcal{T} - \lambda I \ n\prime est\ pas\ injectif \Longleftrightarrow T_1 \ n\prime est\ pas\ injectif$$

c.q.f.d

□

Preuve :
du théorème 3.3.1 c'est une conséquence directe du corollaire précédent ; En effet :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ bijectif \Longleftrightarrow T_1 bijectif$$

En se basant sur la définition du spectre et l'ensemble résolvant de la famille d'opérateurs indexée par un paramètre $\zeta \in \mathbb{C}$ définition (1.3.4) alors l'équivalence précédente mène à :
Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_1)$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_1)$$

et

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ n\prime est\ pas\ injectif \Longleftrightarrow T_1\ n\prime est\ pas\ injectif$$

est équivalent à :Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_1)$$

c-q-f-d □

3.3.2 B inversible

Dans cette cette section, l'outil principale utilisé est la factorisation antidiagonale, (Voir [17], [16], [18]) qui s'écrit formellement sous la forme :

$$\mathcal{T} - \lambda I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix}$$

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D - \lambda I)B^{-1}(A - \lambda I),$$

On va essayer d'établir une relation entre les propriétés spectrales de $\mathcal{T}$. et celles de T_2.
En utilisant lafactorisation (3.5) dans ce cas on va montrer que :

Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(T_2(\lambda))\}$$

Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(T_2(\lambda))\}$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(T_2(\lambda))\}$$

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D - \lambda I)B^{-1}(A - \lambda I),$$

Pour cela on va considéré les deux conditions cas suivantes :

- A est borné partout défini et :
- D est B-borné

Dans ce cas le spectre et l'ensemble résolvant de $\mathcal{T}$ sont donnés par le Théorème qui suit :

Lemme 3.3.2. *(voir [18], [17] [16])*
Soient $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, $D : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$, $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ et $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ des opérateurs linéaires densément définis avec ;

1. *B et C sont surjectifs (et fermés)*
2. *D est B-borné et A est borné partout défini.*

Dans le cas où A est borné, nous définissons $\mathcal{T}_2$ par :

$$\mathcal{T}_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D-\lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A-\lambda I) & I \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D - \lambda I)B^{-1}(A - \lambda I), \qquad \mathcal{D}(T_2(\lambda)) = \mathcal{D}(C), \tag{3.6}$$

et son domaine naturel :

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(T_2) \oplus \mathcal{H}_2 : y + B^{-1}(A - \lambda I)x \in \mathcal{D}(B) \right\}$$

d'autre part, soit :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(B),$$

Alors nous avons la factorisation suivante :

$$\mathcal{T} - \lambda I = \mathcal{T}_2 - \lambda I$$

Notons que le domaine de $\mathcal{T}_2(\lambda)$ ne dépend pas de λ, alors on écrit $\mathcal{D}(\mathcal{T}_2)$ au lieu de $\mathcal{D}(\mathcal{T}_2(\lambda))$.

Preuve : Montrerons pour tout $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ qu'on a :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(\mathcal{T}_1) \\ \qquad et \\ \mathcal{T}\binom{x}{y} = \mathcal{T}_2\binom{x}{y} \end{cases}$$

• Montrons que $\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(\mathcal{T}_2)$

1. $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{T}_2)$

Pour $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ donc $x \in \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(\mathcal{T}_2)$ et puisque A borné partout défini (en particulier $\mathcal{D}(C) \subset \mathcal{D}(A)$), donc on a aussi $x \in \mathcal{D}(A)$ ainsi l'élément $y + B^{-1}(A - \lambda I)x$ est bien défini et $\in \mathcal{D}(B)$ ceci montre que$\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_2)$.

2. $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \supset \mathcal{D}(\mathcal{T}_2)$

Maintenant on considère $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_2)$ puisque $x \in \mathcal{D}(T_2) = \mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A)$,et du fait que $y \in \{-B^{-1}(A - \lambda I)x + y_0 : y_0 \in \mathcal{D}(B)\} = \mathcal{D}(B)$ alors $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ c.q.f.d

3. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_2$

Soit $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ alors $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_2)$ de plus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D-\lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A-\lambda I) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\lambda I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D-\lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B(B^{-1}(A-\lambda I)x+y) \\ T_2(\lambda)x \end{pmatrix}+\lambda I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B(B^{-1}(A-\lambda I)x+y) \\ (D-\lambda I)(B^{-1}(A-\lambda I)x+y)+T_2(\lambda)x \end{pmatrix}+\lambda I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Ax+By \\ Cx+Dy \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_2$. En fin on a $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$ ce qui achève la démonstration du lemme

$\square$

Théorème 3.3.2. *(Voir [17], [16], [18]) Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur matriciel défini par :*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

tels que :avec $\rho(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ (d'où $\mathcal{T}$ sera fermé)et :

- $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ *un opérateur linéaire densément défini, borné partout défini.*

- $B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$*et* $C : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *deux opérateurs linéaires densément définis, surjectifs et fermés*

- $D : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *un opérateur densément défini, B-borné*

et soit $(T_2(\lambda))_\lambda$ la famille d'opérateurs définis par :

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D-\lambda I)B^{-1}(A-\lambda I),$$

Dans ce cas :

$$\mathcal{D}(T_2(\lambda)) = \mathcal{D}(C)$$

alors :

Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_2)$$

Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_2)$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_2)$$

Preuve :
C'est une conséquence directe de la factorisation (3.5)
En effet :

$$\mathcal{T}_2 - \lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix}$$

avec

$$T_2(\lambda) = C - (D - \lambda I)B^{-1}(A - \lambda I), \qquad \mathcal{D}(T_2(\lambda)) = \mathcal{D}(C),$$

et son domaine naturel :

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(T_2) \oplus \mathcal{H}_2 : y + B^{-1}(A - \lambda I)x \in \mathcal{D}(B) \right\}$$

D'après la factorisation on a :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ \textit{est bijectif} \Leftrightarrow (\mathcal{T}_2 - \lambda I) \ \textit{est bijectif}$$

donc :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ \textit{est inversible} \Leftrightarrow (\mathcal{T}_2 - \lambda I \ ) \ \textit{est inversible}$$

mais : dans la factorisation (3.5) ; le premier et le dernier facteur du terme à droite est borné et bornement inversible c'est à dire :

- le premier terme de $\mathcal{T}_2 - \lambda I$:

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ (D-\lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est
$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(D-\lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix}$

On a, pour tout $y \in \mathcal{H}_2$:

$$\begin{aligned} \|(D-\lambda I)B^{-1}y\| &\leq \lambda\|B^{-1}y\| + \alpha\|B^{-1}y\| + \gamma\|y\| \\ &\leq (\|B^{-1}\|(\lambda+\alpha)+\gamma)\|x\| \end{aligned}$$

ainsi $(D-\lambda I)B^{-1}$ est aussi borné.

- le dernier terme de $\mathcal{T}_2 - \lambda I$:

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A-\lambda I) & I \end{pmatrix}$ est aussi borné inversible et son inverse est
$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}(A-\lambda I) & I \end{pmatrix}$
car : $B^{-1}(A-\lambda I)$ est borné partout définit comme produit de deux opérateurs bornés et $(A-\lambda I)$ est partout défini par hypothèse.

- donc $\mathcal{T} - \lambda$ est inversible si et seulement si $\begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$ est inversible,

mais B est inversible par hypothèse donc $(\mathcal{T} - \lambda I)$ est inversible si et seulement si $T_2(\lambda) = C - (D-\lambda I)B^{-1}(A-\lambda I)$ est inversible [et puisque $(\mathcal{T} - \lambda I)$ et $T_2(\lambda)$ sont fermés] alors $\mathcal{T} - \lambda I$ est bijectif si et seulement si $T_2(\lambda) = C - (D-\lambda I)B^{-1}(A-\lambda I)$ est bijectif c'est à dire :

$$(\mathcal{T} - \lambda I)\ bijectif \Longleftrightarrow T_1\ bijectif$$

d'ou on a

Le spectre :

$$\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(T_2)$$

L'ensemble résolvant :

$$\rho(\mathcal{T}) = \rho(T_2)$$

• Pour :

$$\mathcal{T} - \lambda I \qquad \text{n'est pas injectif} \Longleftrightarrow T_1 \qquad \text{n'est pas injectif}$$

En se basant aussi sur la factorisation (3.5)

$$\mathcal{T}_2 - \lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (D - \lambda I)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}(A - \lambda I) & I \end{pmatrix}$$

On a vu que le premier terme et le dernier sont inversibles donc injectifs d'ou $\mathcal{T}_2 - \lambda I$ est injectif si est seulement si :

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ T_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \text{ est injectif}$$

mais B est inversible par hypothèse donc injectif d'ou :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ est \ injectif \Longleftrightarrow T_2(\lambda) \ est \ injectif$$

Ce qui équivaut à :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \ n\prime est \ pas \ injectif \Longleftrightarrow T_2(\lambda) \ n\prime est \ pas \ injectif$$

alors :

Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_2)$$

et c.q.f.d

□

3.3.3 C non inversible et B non inversible

Dans cette section, on va essayer d'établir une relation entre les propriétés spectrales de $\mathcal{T}$. et celles de $S(\lambda)$ ainsi on va montrer par un procédé algébrique que les propriétés spectrales de l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$ ont les caractéristiques pour

$$\mathcal{S}(\lambda) := (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C, \qquad avec : \quad \lambda \in \rho(D)$$

et

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{C}} = \{\mathcal{S}(\lambda) = (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

par :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma_p(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma_p(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

et :

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \rho(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma(\mathcal{S}) \cap \rho(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(\mathcal{S}(\lambda))\} \cap \rho(D)$$

Proposition 3.3.1. *(voir [18], [17] [16])*

Soit $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$, $B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ et $C : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ des opérateurs linéaires densément définis de plus $D : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur linéaire densément défini inversible avec $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(D)$. Si D est bijectif, alors l'opérateur :

$$S := A - BD^{-1}C, \qquad \mathcal{D}(S) := \{x \in \mathcal{D}(C) : D^{-1}Cx \in \mathcal{D}(B)\}$$

est bien défini et on a les résultats suivants :

(i)

$$\mathcal{T} \ est \ injectif \Longleftrightarrow S \ est \ injectif$$

(ii) Si en plus C est surjectif, alors $Im(S) \oplus \{0\} = Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus 0)$ et :

$$\mathcal{T} \ est \ surjectif \Longleftrightarrow S \ est \ surjectif$$

Preuve : (i) $\mathcal{T}$ *est injectif* $\Longleftrightarrow S$ *est injectif* **:**

"$\Leftarrow$ ”

Supposons que $\mathcal{T}$ n'est pas injectif. alors il existent $f \in \mathcal{D}(C)$, $g \in \mathcal{D}(B)$ telles que :

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Af + Bg = 0 \\ Cf + Dg = 0 \end{cases}$$

et puisque D inversible on obtient de la deuxième équation :

$$D^{-1}Cf = -g \in \mathcal{D}(B)$$

et de cette dernière avec la première équation, on obtient $Sf = 0$ et comme $f \neq 0$ (f reste dans $\mathcal{D}(S)$) alors :
S n'est pas injectif.

b-($\Rightarrow$)

Supposons maintenant que S n'est pas injectif et fixons un élément $f \neq 0$ dans son noyau, et on pose $g := -D^{-1}Cf$ il s'ensuit que :

$$0 = Sf = Af - BD^{-1}Cf = Af + Bg,$$

alors

$$0 = g + D^{-1}Cf = D^{-1}(Dg + Cf).$$

Puisque D^{-1} est injectif, les équations précédentes montrent que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \binom{f}{g} \in \ker(\mathcal{T})$.
d'où $\mathcal{T}$ **n'est pas injectif**.

(ii) $\mathcal{T}$ *est surjectif* $\Longleftrightarrow S$ *est surjectif* **:**

a-($\Rightarrow$)
montrons que $Im(S) \oplus \{0\} = Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus 0)$
"$\subseteq$" Pour chaque $f \in \mathcal{D}(S)$, l'élément $g := -D^{-1}Cf$ reste dans $\mathcal{D}(B)$.et par conséquent $\binom{f}{g} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ et :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Af + Bg \\ Cf + Dg \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Af - BD^{-1}Cf \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Sf \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui implique que : $Im(S) \oplus \{0\} \subseteq Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus \{0\})$.

"$\supseteq$"Inversement ; soit $\binom{f}{g} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ tel que $T\binom{f}{g} = \binom{x}{0}$ pour un certain $x \in \mathcal{H}_1$.et du fait que : $Cf + Dg = 0$ il s'ensuit que : $g = -D^{-1}Cf \in \mathcal{D}(B)$. Donc nous avons :$f \in \mathcal{D}(S)$ et :

$$x = Af + Bg = Af - BD^{-1}Cf = Sf,$$

implique que $Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}) \subseteq Im(S) \oplus \{0\}$; en particulier la surjectivité de $\mathcal{T}$ implique celle de S.

b-($\Leftarrow$)

Finalement, supposons que S est surjectif et fixons $\binom{x}{y} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.Puisque $Im(C) = \mathcal{H}_2$ par hypothèse, il existe un $f' \in \mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A)$ tel que $Cf' = y$. Par conséquent, $\binom{f'}{0}$ reste dans le domaine de $\mathcal{T}$ et nous avons : $\mathcal{T}\binom{f'}{0} = \binom{Af'}{y}$. Puisque nous avons déjà montré que $Im(S) \oplus \{0\} = Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus \{0\})$,

La surjectivité de S implique que : $\mathcal{H}_1 \oplus \{0\} = Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}) \subseteq Im(T)$, d'où nous avons finalement $\binom{x}{y} = \mathcal{T}\binom{f'}{0} + \binom{x - Af'}{0} \in Im\mathcal{T}$ parce que les deux termes à droite restent dans $Im(\mathcal{T})$ (car : $Im(\mathcal{T})$ est un sous-espace vectoriel).

$\square$

Remarque 3.3.1. *Si B est borné, alors nous n'avons pas besoin de supposer que C est surjectif pour prouver la surjectivité de $\mathcal{T}$ dans l'assertion (ii) de la proposition 3.3.1 (c'est comme dans le cas borné du chapitre précédent). Pour tout*

$\binom{x}{y} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ *donné, l'élément* $x - BD^{-1}y$ *est bien défini, et la surjectivité de* S *implique qu' il existe un* f *tel que :*

$$Sf = x - BD^{-1}y$$

Comme D *est bijectif, on peut définir :*

$$g := D^{-1}(y - Cf).$$

un simple calcul montre que $\mathcal{T}\binom{f}{g} = \binom{x}{y}$ *et donc la surjectivité est prouvée.*

Corollaire 3.3.2. *Dans les conditions de la proposition 3.3.1 mais au lieu de l'opérateur matriciel* A *On prend l'opérateur matriciel* $A - \lambda I$; *et au lieu de l'opérateur inversible* D, *On prend l'opérateur* $D - \lambda I$ *inversible c'est à dire* $\lambda \in \rho(D)$; *et au lieu de :* $S := A - BD^{-1}C$, *on prend;* $\mathcal{S}(\lambda) := (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C$, *avec :* $\lambda \in \rho(D)$ *et soit*

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{C}} = \{\mathcal{S}(\lambda) = (A - \lambda I) - B(D - \lambda I)^{-1}C : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

et avec les conditions suivantes :
$\rho(T) = 0$ *(d'où* $\mathcal{T}$ *sera fermé) ;*
B *et* C *fermés et*
A *borné partout défini*
on a :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma_p(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$$

et si en plus C *est surjectif alors on a :*

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \rho(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$$

et $\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$

Preuve :
c'est une conséquence directe de la proposition 3.3.1 mais appliquée à :

$\mathcal{T} - \lambda I = \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D - \lambda I \end{pmatrix}$ au lieu de $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $(D - \lambda I)$ inversible (c'est à dire. $\lambda \in \rho(D)$)au lieu de D inversible. et la preuve est donc l'application directe de la proposition 3.3.1. donc on a sur $\rho(D)$:

(i)

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \text{ est injectif} \Longleftrightarrow \mathcal{S}(\lambda) \text{ est injectif sur } \rho(D)$$

(ii)
Si en plus C est surjectif, alors $Im(\mathcal{S}) \oplus \{0\} = Im(\mathcal{T}) \cap (\mathcal{H}_1 \oplus 0)$ et :

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \quad \text{est surjectif} \Longleftrightarrow \mathcal{S}(\lambda) \quad \text{est surjectif sur } \rho(D)$$

donc

$$(\mathcal{T} - \lambda I) \quad \text{est bijectif} \Longleftrightarrow \mathcal{S}(\lambda) \quad \text{est bijectif sur } \rho(D)$$

et puisque $(\mathcal{T} - \lambda I)$ et $\mathcal{S}(\lambda)$ sont fermés alors on a bien :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma_p(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$$

et si en plus C est surjectif alors on a :

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \rho(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(D) = \sigma(\mathcal{S}) \cap \rho(D)$$

□

Remarque 3.3.2. *d'une manière analogue et exactement de même façon, en utilisant l'autre factorisation de Schur :*

$$\mathcal{T} - \lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C(A - \lambda I)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda & 0 \\ 0 & S_D(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (A - \lambda I)^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \rho(A)$$

avec la fonction d'opérateur

$$S_D(\lambda) = D - \lambda I - C(A - \lambda I)^{-1}B, \qquad \lambda \in \rho(A)$$

Alors trouvera les résultats suivants :

$$\sigma_p(\mathcal{T}) \cap \rho(A) = \sigma_p(S_D) \cap \rho(A)$$

et si en plus C est surjectif alors on a :

$$\rho(\mathcal{T}) \cap \rho(A) = \rho(S_D) \cap \rho(A)$$

et

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \rho(A) = \sigma(S_D) \cap \rho(A)$$

3.4 Application du cas général à la localisation des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{T} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$

Corollaire 3.4.1. *Nous considérons la matrice de l'opérateur de bloc T sur un espace Hilbert :*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(B),$$

où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert et $\mathcal{H}$ est équipé du produit scalaire habituel induit par les produits scalaires de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Soient : $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ et $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ des opérateurs linéaires fermés. C inversible on suppose de plus que :

$A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ est un opérateur linéaire C-borné .et $D : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ est un opérateur linéaire borné .tel que :

$$\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A), et \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(D)$$

et il existe : $\alpha, \gamma, \delta \geq 0$ *tels que :*

$$\begin{array}{rcl} \|Ax\| & \leq & \alpha\|x\| + \gamma\|Cx\|, \qquad x \in \mathcal{D}(C), \\ \|Dx\| & \leq & \delta\|x\|, \qquad x \in \mathcal{D}(B). \end{array}$$

Alors l'opérateur matriciel :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(B),$$

est un opérateur bien défini dans $\mathcal{H}$*. Alors pour chaque valeur propre* $\lambda \in \mathbb{C}$ *de* $\mathcal{T}$ *l'inégalité suivante est vraie :*

$$|\lambda| \geq -\frac{1}{2}(\alpha + \gamma\|C^{-1}\| + \|D\|) + \left(\frac{1}{4}(\alpha + \gamma\|C^{-1}\| - \|D\|)^2 + (\|B^{-1}\|\|C^{-1}\|)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

Si D *et* A *sont bornés on obtient donc :*

$$|\lambda| \geq -\frac{1}{2}(\|A\| + \|D\|) + \left(\frac{1}{4}(\|A\| - \|D\|)^2 + (\|B^{-1}\|\|C^{-1}\|)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

Preuve :
D'après le théorème 3.3.1 : on a $\sigma_p(\mathcal{T}) = \sigma_p(T_1(\lambda))$ avec $T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I)$.

Soit λ une valeur propre de $\mathcal{T}$, alors par le corollaire précédent ; 0 est une valeur propre de l'opérateur :
$T_1(\lambda) = B - (A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I)$.pour une fonction propre f de $T_1(\lambda)$ avec la valeur propre 0 ; c'est à dire $\exists f$ une fonction propre de $T_1(\lambda)$ telle que
$T_1(\lambda)f = 0$. Nous avons l'égalité :

$$f = B^{-1}(A - \lambda I)C^{-1}(D - \lambda I)f$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\|f\| &\leq \|B^{-1}\|\|(A-\lambda I)C^{-1}(D-\lambda I)\|\|f\| \\
&\leq \|B^{-1}\|(|\lambda|\|C^{-1}\| + \alpha)\|C^{-1}\| + \gamma)\|(D-\lambda I)f\| \\
&\leq \|B^{-1}\|\|C^{-1}\|(|\lambda| + \alpha + \gamma\|C^{-1}\|^{-1})(D + |\lambda|)\|f\| \\
&= \|B^{-1}\|\|C^{-1}\|(|\lambda|^2 + |\lambda|(\alpha + \gamma\|C^{-1}\|^{-1} + \|D\|) + \alpha\|D\| + \gamma\|D\|\|C^{-1}\|)\|f\| \\
&= \|B^{-1}\|\|C^{-1}\|((|\lambda| + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma\|C^{-1}\|^{-1} + \|D\|))^2 - \frac{1}{4}(\alpha + \gamma\|C^{-1}\|^{-1} - \|D\|))\|f\|.
\end{aligned}$$

en divisant par $\|f\|$ on obtient :

$$((|\lambda| + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma\|C^{-1}\|^{-1} + \|D\|))^2 \geq \frac{1}{4}(\alpha + \gamma\|C^{-1}\|^{-1} - \|D\|) + (\|B^{-1}\|\|C^{-1}\|)^{-1}$$

ce qui implique l'inégalité (3.7) c'est à dire :

$$|\lambda| \geq -\frac{1}{2}(\alpha + \gamma\|C^{-1}\| + \|D\|) + \left(\frac{1}{4}(\alpha + \gamma\|C^{-1}\| - \|D\|)^2 + (\|B^{-1}\|\|C^{-1}\|)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si A est borné, on peut choisir $\alpha = \|A\|$ et $\gamma = 0$ ce qui donne l'inégalité (3.8) c'est à dire

$$|\lambda| \geq -\frac{1}{2}(\|A\| + \|D\|) + \left(\frac{1}{4}(\|A\| - \|D\|)^2 + (\|B^{-1}\|\|C^{-1}\|)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\square$

Exemple 3.4.1. *Dans le cas spécial : $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$ et $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de la matrice $\mathcal{T}$ sont données par :*

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(A + D) \pm \sqrt{(A-D)^2 + BC}$$

Cette formule montre que le corollaire 3.4.1 donne un résultat optimal dans le cas :

$$A = D = 0.$$

Car on a dans ce cas;

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{BC}.$$

c'est à dire

$$|\lambda_+| = |\lambda_-| = (\|B\|\|C\|)^{\frac{1}{2}} \qquad (\star)$$

et d'aprés 3.8 on a ;

$$|\lambda| \geq \left\{\|B^{-1}\|\|C^{-1}\|)^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

c'est à dire

$$|\lambda| \geq \left\{\|B^{-1}\|\|C^{-1}\|)^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

donc ;

$$|\lambda| \geq (\|B\|\|C\|)^{\frac{1}{2}}. \qquad (\star\star)$$

On voit bien dans cet exemple le résultat exact du module des deux valeurs propres $(\star)$ *obtenues par un calcul direct ; et le résultat de "localisation"* $(\star\star)$ *obtenu en appliquant les résultats des chapitres précédents.*

Conclusion

Nous avons pu extraire quelques propriétés spectrales des opérateurs matriciels soit dans le cas borné ou le cas non borné en se limitant généralement à les extraire d'une façon algébrique et en utilisant les factorisations de Schur et d'une autre factorisation dite antidiagonale

Alors nous avons imposé beaucoup de conditions sur les éléments de la matrice représentant un tel opérateur, surtout sur les domaines de définitions et sur l'inversibilité des éléments non diagonaux afin que ces factorisations puissent avoir un sens et nous avons constaté qu'on a abouti à des résultats généraux sur la description du spectre et la résolvante de ces opérateurs matriciels à l'aide de celles des éléments de la matrice représentant cet opérateur
Remarquons que nous avons "construit" nos conditions dans le but d'avoir des résultats purement mathématiques, et donc nous n'avons pas "en arrière plan" un modèle physique dont on veut étudier les propriétés spectrales et par conséquent nous étions libres de choisir nos hypothèses.

Perspectives

Nous essayons de restreindre notre étude aux operateurs matriciels décrivant des phénomènes physiques réels ; ces derniers exigent des conditions et des hypothèses relatives aux éléments des operateurs suscités ; ainsi nous sommes tenus de nous en tenir à ces conditions au cours de nos investigations sur leurs propriétés spectrales .

Bibliographie

[1] F. V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, and A. A. Shkalikov. The essential spectrum of some matrix operators. Math. Nachr., 167 :5-20, 1994.

[2] V. Adamyan, H. Langer, R. Mennicken, and J. Saurer. Spectral components of selfadjoint block operator matrices with unbounded entries. Math. Nachr., 178 :43-80, 1996.

[3] E. B. Davies, : Spectral Theory and Differential Operators, Cambridge University Press, 1995

[4] J. Dereziński, Bounded operators,
Department of Mathematical Methods in Physics Warsaw University Hoza 74, 00-682, Warszawa, Poland Lecture notes, version of Jan. 2007 January 31, 2007

[5] J. Dereziński, Unbounded linear operators,
Department of Mathematical Methods in Physics Warsaw University Hoza 74, 00-682, Warszawa, Poland Lecture notes, version of Jan. 2007 January 30, 2007

[6] F. Gesztesy, : A Complete Spectral Characterization of the Double Commutation Method, J.F unct Anal. 117, No.2 (1993), 401 - 446

[7] I. C. Gohberg, S. Goldberg, and M.A. Kaashoek, : Classes of Linear Operators, Vol. I, Birkh¨auser-Verlag, Basel - Boston- Berlin, 1990

[8] F. Gesztesy, B. Simon, and G. Teschl, : Spectral Deformations of One – Dimensional Schr¨odinger Operators, J.A nal. Math. 70 (1996), 267– 324

[9] V. Hardt. A. Konstantinov and R. Mennicken, On the spectrum of the product of closed operators, Math. Nachr.215 (2000), 91-101

[10] V. Hardt. and R. Mennicken,On the spectrum of unbounded off-diagonal 2x2 operator matrices in Banach spaces. Operator Theory. Advances and applications. vol 124. 2001 Birkhauser verlag Basel Switzerland.

[11] T. Kato, Perturbation Theory for linear Operators. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, corrected printing of the second edition, 1980

[12] R. Nagel. Towards a "matrix theory" for unbounded operator matrices. Math. Z., 201(1) :57-68, 1989.

[13] M. Reed, and B. Simon, : Methods of Modern Mathematical Physics, III : Scattering Theory, Academic Press, New York - San Francisco - London, 1979

[14] Methods of Modern Mathematical Physics, IV : Analysis of Operators, Academic Press, New York - San Francisco - London, 1978

[15] C. Tretter, Spectral theory of block operator matrices and application, Imperial college Press. 2008

[16] M. Winklmeier, A variational principle for Block operator matrices and its applications to the angular part of the Dirac operator in curved spacetime. Mathematisches institut, universitat Bern, Sidlerstrasse 5, CH-3012 Bern.

[17] M. Winklmeier The Angular Part of the Dirac Equation in the Kerr-Newman Metric :Estimates for the Eigenvalues

Vorgelegt im Fachbereich 3 (Mathematik, Informatik) der Universität Bremenim August 2005

[18] M. Winklmeier, Off-Diagonalisation of a certain class of block operator matrices. Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July 24-28, 2006 ; ThA13. 1 pp 1926-1934