

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



MEMOIRE 0

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Physique Computationnelle

Par

Mehdid Halima Saadia

Sur le thème

Discrétisation implicite de l'équation de chaleur à deux dimensions

Soutenu le : 07/09/2020 devant le jury composé de :

Dr. MESKINE MOHAMED	MCA	Université Dr. Tahar Moulay, Saida	Président
Dr. SAHABI TOUFIK	MCB	Université Dr. Tahar Moulay, Saida	Encadreur
Pr. ELKURTI MOHAMED.	Pr	Université Dr. Tahar Moulay, Saida	Examinateur
Dr. ABADA AHMED	MCB	Université Dr. Tahar Moulay, Saida	Examinateur

Année Universitaire 2019 – 2020

Remerciement

Qu'Allah le bénisse et son aide pour terminer cette recherche

À mon cher père, qu'Allah prolonge sa vie

À la source de la tendresse de ma mère

À mes frères et sœurs qui ont partagé le fardeau de la vie avec moi

À tous ceux qui m'ont aidé en secret

Je dédie également le fruit de mes efforts à l'honorable professeur Sahabi

Toufik, à Zeri, Via Hope et à tous les professeurs de physique.

A ceux qui ont goûté avec eux les plus beaux moments mes amis.

À tous ceux qui croient que les germes du succès changent en nous avant
qu'ils ne soient en d'autres choses.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	7
Références	9
CHAPITRE 1 : RAPPEL SUR LA THERMODYNAMIQUE	10
1.1 Introduction	11
1.2 Notions de base	11
1.2.1 Travail	11
1.2.2 La température	12
1.2.3 La chaleur.....	12
1.2.4 Transfert de chaleur.....	12
1.2.5 Modes de transfert de chaleur	12
1.3 Le premier principe de la thermodynamique	14
1.3.1 Enoncé du premier principe	14
1.3.2 Application du premier principe	14
1.3.3 Énergie interne	15
1.3.4 La chaleur et le premier principe de la thermodynamique	15
1.3.5 Capacité calorifique/chaleur spécifique	16
1.3.6 Conséquence du premier principe	16
1.4 Thermométrie	16
1.4.1 Thermomètre électronique.....	17
1.4.2 Thermomètre magnétique.....	17
1.4.3 Thermomètre à cristaux liquides.....	17
1.5 Transformation d'un système thermodynamique.....	18
1.5.1 Transformations particulières.....	18
1.5.2 Transformations quasi-statiques.....	18
1.5.3 Transformations réversibles.....	18
1.5.4. Transformations irréversibles.....	18
Références	19
CHAPITRE 2 : LES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES & SES RESOLUTIONS NUMERIQUES	20
2.1 Introduction	21
2.2 Différents types d'équations différentielles	21
2.2.1 Équation différentielle ordinaire	21
2.2.2 Équation différentielle linéaire.....	21
2.2.3 Les équations différentielles d'ordre 1.....	21

2.2.4 L'équation de Bernoulli	22
2.3 Exemples des équations différentielles au 2 ^{iem} ordre	22
2.3.1 L'équation homogène.....	22
2.3.2 Equation de Bessel	22
2.3.3 Equation différentielle erreur	22
2.3.4 Equation différentielle d'Hermite	23
2.4 Application d'équations différentielles.....	23
2.4.1 Mécanique.....	23
2.4.2 Dynamique des Populations.....	24
2.4.3 Electricité	25
2.4.4 Météorologie	26
2.4.5 Cinétique chimique	26
2.5 Les méthodes de résolutions numériques d'une équation différentielle	26
2.5.1 Méthode de Monte Carlo	27
2.5.2 Méthode de différences finies	27
2.6 Le programme Maple.....	28
Référence	30

**CHAPITRE 3 : METHODE DE DIFFERENCES FINIES POUR LA RESOLUTION DE L'EQUATION DE CHALEUR
 BIDIMENSIONNELLE INSTATIONNAIRE**

3.1 Introduction	32
3.2 La résolution analytique de l'équation de chaleur à 2D	32
3.3 Application des conditions aux limites et initiales.....	34
3.4Méthode de différences finies.....	35
3.4.1 Description de maillage.....	35
3.4.2Algorithme, résultats, et discussion	37
Références	43
Conclusion	44

Liste des Figures

Figure 1.1 Les modes de transmission de chaleur.....	13
Figure 1.2 Représentation de compression d'un gaz.....	15
Figure 1.3 Le thermomètre électronique.....	17
Figure 1.4 Thermomètre magnétique.....	17
Figure 3.1 Une plaque rectangulaire en notation matricielle mise aux conditions aux limites et initiales.....	32
Figure 3.2 L'évolution de température au cours de temps (a) : à l'instant $t = 0$, (b) : à l'instant $t = t_m/2$ (c) : à l'instant $t = t_m$	39
Figure 3.3 le comportement de température suivant chaque variable.....	40
Figure 3.4 L'évolution de température au cours de temps (a) : à l'instant $t = 0$, (b) : à l'instant $t = 1$, (c) : à l'instant $t = t_m/2$, (d) : à l'instant $t = t_m$ pour $K = 1$	41
Figure 3.5 L'évolution de température au cours de temps (a) : à l'instant $t = 0$, (b) : à l'instant $t = 1$, (c) : à l'instant $t = t_m/2$, (d) : à l'instant $t = t_m$ pour $K = 0.5$	41
Figure 3.6 L'évolution de température au cours de temps (a) : à l'instant $t = 0$, (b) : à l'instant $t = 1$, (c) : à l'instant $t = t_m/2$, (d) : à l'instant $t = t_m$ pour $K = 0.1$	42

INTRODUCTION GENERALE

La thermodynamique est la branche de la physique qui se consacre à l'étude des relations entre la chaleur et les autres formes d'énergie. Ceci dit, elle analyse les effets des changements de température, de pression, de densité, de masse et de volume au sein des systèmes au niveau macroscopique. La base de la thermodynamique est tout ce qui concerne la circulation de l'énergie, un phénomène capable d'inculquer du mouvement aux corps. D'après le premier principe de la thermodynamique, dite aussi le principe de conservation de l'énergie, si un système échange de la chaleur avec un autre, sa propre énergie interne change elle aussi. La chaleur, en ce sens, est l'énergie nécessaire qu'un système doit échanger pour compenser les différences entre le travail et l'énergie interne [1].

Comme les autres branches de physique, on trouve des formulations mathématiques des phénomènes sous forme des équations différentielles. Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées, elle forme le langage dans lequel les lois fondamentales des sciences physiques sont formulées. La science nous décrit comment un système physique change d'un instant à l'autre. La théorie des équations différentielles nous fournit les outils et les techniques pour prendre cette information à court terme et obtenir le fonctionnement à long terme de tout l'organisme [2].

Dans ce sens, on trouve l'équation de la chaleur qui est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en 1811, modélisa l'involution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Il a permis ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques [3].

L'équation de la chaleur est soumise aux principes thermodynamiques et est elle-même une branche de la physique qui s'est développée au cours du XVIIIème Siècle, elle avait alors comme objet principal l'étude des échanges de chaleurs et d'énergies. C'est son essor qui fût à l'origine de la révolution industrielle grâce, notamment, au développement de moteurs à vapeur qui permirent la mise au point de nouveaux moyens de transport et de machines industrielles. Par la suite la thermodynamique englobât aussi l'étude des conditions d'équilibres des systèmes physiques et chimiques en fonction des grandeurs qui les caractérisent (température, pression, quantité de matière, activité chimique etc.) [4].

Les lois du transfert de la chaleur ont pris la forme d'une doctrine très générale, valable à tous les champs d'application des sciences ou ingénieurs, physiciens, chimistes, biologistes en manifestent le besoin de leurs connaissances. On distingue trois modes différents du transfert de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement. En pratique ces trois modes sont souvent combinés et constituent les trois fondamentales du transfert de chaleur. Le développement rapide des techniques ces

dernières décennies fait que le problème du transfert de la chaleur continue désoccuper une place inactualité dans les domaines des investigations et de la recherche. Il n'est pas à ignorer qu'avec le développement sont apparus de nouveaux paramètres, autres que les caractéristiques thermo physiques des corps considérés.

On ne peut parler de transfert de chaleur sans évoquer sa principale constituante qu'est l'équation de la chaleur. Celle-ci ramène le problème à l'Étude de la distribution du champ de la température et de ce fait permet de porter un jugement sur celui-ci, car en définitive on peut apprécier ou estimer n'importe quel transfert d'énergie à travers une distribution de champ de température. La grande variété des situations, des positions et des problèmes et des hypothèses fait que l'équation de la chaleur devienne un domaine de recherche très vaste. Elle a fait l'objet de plusieurs travaux et restera dans le futur un champ très approprié pour les spécialistes en la matière, sachant que la technologie moderne exige une connaissance précise des phénomènes physiques [5].

Dans ce travail, on va étudier numériquement par la méthode des différences finies le transfert thermique par conduction dans une plaque bidimensionnelle au cours du temps. Pour cela, on va organiser notre mémoire comme suit : Dans le premier chapitre on va rappeler les notions de base de la thermodynamique que ce soit l'énergie, la chaleur, ...etc. puis dans le deuxième chapitre, on va discuter le concept des équations différentielles et leurs méthode de résolution numériques que ce soit la méthode de différences finies ou les méthodes de Monte Carlo. Puisque on va utiliser le programme Maple, on va donner une brève description de ce programme. Le dernier chapitre sera une application de la méthode implicite de différences finies pour la résolution de l'équation de chaleur bidimensionnelle dans une plaque rectangulaire. Finalement, on conclut notre travail en suggérant des perspectives.

Références

[1] Les définitions, Définition de thermodynamique, 30 Mai 2012.

[2] Équation différentielle Mathématiques, Université Virtuelle Africaine.

[3] Benhamma Salima, équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes et en axi-symétrie 3d, mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques université de Bejaia année 2015-2016.

[4] Shadly Hayat, l'équation de chaleur uni-dimensionnelle, mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en physique université de Saida, année 2018-2019.

[5] Taouli Mouna et Khamez Fatima Zahra, équation de la chaleur de dimension un, mémoire de l'obtention du grade de licence en mathématiques université Aboubekr Belkaid- Tlemcen année 2012-2013.

CHAPITRE 1

RAPPEL SUR LA THERMODYNAMIQUE

1.1 Introduction La thermodynamique correspond à une branche de la physique qui étudie le comportement thermique des corps, plus exactement les mouvements de chaleur. De façon plus générale, la thermodynamique s'intéresse à l'étude de l'énergie (en particulier l'énergie interne) et de ses transformations. Les notions de chaleur et de température sont les plus fondamentales de la thermodynamique. On peut définir la thermodynamique comme la science de tous les phénomènes qui dépendent de la température et de ses changements.

Les applications de la thermodynamique sont nombreuses. On peut citer entre autres les machines thermiques (moteurs de voitures, réfrigérateurs, pompes à chaleur).

Dans ce chapitre, on présentera brièvement les concepts de base de la thermodynamique, du travail, la température, puis la chaleur et ces modes de transport [1]

1.2 Notions de base

1.2.1 Travail

Le travail, W , est le produit de la force par le déplacement. Une pompe à vélo ordinaire nous permet de comprendre aisément la notion de travail en thermodynamique. Si l'on déplace le piston, le travail, W , est simplement le produit de la force, F , par le déplacement, l , ainsi, en écriture infinitésimale, on a

$$W = \int F \cdot dl \quad (1.1)$$

En mécanique, la pression, p , est définie comme étant la force divisée par la surface, S , du piston, ainsi

$$p = \frac{F}{S} \quad (1.2)$$

Le changement de volume, ΔV , équivaut à :

$$\Delta V = S \cdot d \quad (1.3)$$

À partir de ce qui précède, l'on obtient la relation qui définit le travail en thermodynamique :

$$W = p\Delta V \quad (1.4)$$

1.2.2 La température

La température est la quantité physique qui caractérise la quantité de chaleur contenue dans un corps. Lorsque deux parties d'un système thermodynamique sont en contact thermique, la chaleur s'écoulera d'une partie à l'autre. On dit que la chaleur est transférée spontanément de la partie la plus chaude, à la plus froide. Cet écoulement se poursuivra jusqu'à l'atteinte d'un équilibre. Les parties en contact seront alors à la même température.

1.2.3 La chaleur

On a longtemps cru que la chaleur était un fluide qui s'écoulait spontanément d'un corps chaud à un corps froid. On utilisait une unité de mesure particulière : la calorie. De nos jours, nous comprenons mieux la nature de la chaleur qui n'est qu'une autre forme d'énergie. La chaleur est la mesure d'un changement d'énergie interne d'un système thermodynamique, lorsqu'aucun travail n'est effectué.

En pratique, et étant donné la façon dont l'enthalpie est définie, la chaleur est aussi égale à la variation de l'enthalpie d'un système qui n'effectue pas de travail. Lorsque l'on effectue du travail, la variation d'énergie interne est la somme du travail et de la chaleur. Représentée par la lettre Q , la chaleur est mesurée en joules (J).

1.2.4 Transfert de chaleur

Lorsque l'on discute de transfert (ou diffusion) de la chaleur, on définit la température comme le paramètre caractérisant l'équilibre. La chaleur se diffusera entre des parties d'un système, ou entre des systèmes, que si une différence de température existe.

Le transfert de chaleur à un corps résultera en un changement de sa température, en un changement de sa phase, ou les deux. Si la température d'une substance change, l'équation suivante s'applique :

$$Q = m c \Delta T \quad (1.5)$$

m est la masse du corps, et c étant la chaleur spécifique.

1.2.5 Modes de transfert de chaleur

Le transfert de chaleur au sein d'une phase ou, plus généralement, entre deux phases, se fait de trois façons (fig. 1.1)

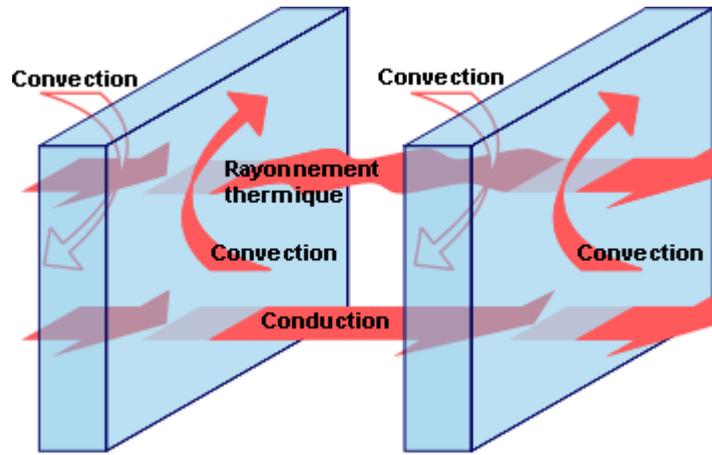


Figure 1.1 Les modes de transmission de chaleur

(a) Rayonnement

Les particules dont sont formés les corps émettent de l'énergie électromagnétique dans l'infrarouge. Cette Énergie radiante permet le transfert de chaleur à partir de la matière. Ce rayonnement est émis par tout Corps dont la température est supérieure au zéro absolu. Plus élevée est la température d'un corps, plus Intense sera son rayonnement thermique. Parallèlement à l'émission de chaleur, un corps absorbe et réfléchit le rayonnement émis par d'autres corps dans son voisinage.

Si le taux d'émission est égal au taux d'absorption, le taux de Transfert par rayonnement est zéro puisque le corps ne gagne ni ne perd de chaleur. Dans le vide, le rayonnement est le seul mécanisme de transfert de chaleur possible. Alors que les molécules sont nécessaires au transport chaleur d'un endroit à un autre par conduction, convection, énergie le rayonnement «transporte» des photons. Ceux-ci se déplacent facilement dans les gaz et la vapeur. En revanche, les solides, dans une moindre mesure, absorbe les liquides et réfléchit les photons.

(b) Conduction

Avec la conduction, la diffusion de la chaleur s'effectue sans transfert de masse. La chaleur passe d'une partie d'un corps à un autre ou à un autre corps avec lequel il est en contact. La diffusion est réalisée par le transfert d'énergie cinétique d'une molécule à l'autre. Les Molécules se déplacent, mais leurs déplacements sont imperceptibles. Par exemple, dans les Solides, elles vibrent de part et d'autre d'un point fixe, mais, en définitive, sans transfert de masse d'un endroit à un autre.

La conduction se produit surtout dans les solides. Dans les liquides, elle est habituellement négligeable par rapport à la convection. Toutefois, si nous arrêtons ou empêchons le mouvement des liquides, la conduction prédominera.

(c) Convection

Dans la convection, la chaleur est entraînée par les mouvements d'un fluide. Puisque la convection dépend du déplacement de molécules d'un endroit à un autre, elle ne se produit que dans les fluides qui peuvent se déplacer librement. Il n'y a pas de convection dans les solides et celle-ci est en général négligeable dans les « liquides piégés ». La convection peut être naturelle ou forcée comme nous l'expliquons plus bas.

Convection forcée

Dans ce type de convection, les différences de pression forcent le mouvement du liquide. Différents équipements peuvent produire cette différence de pression : pompes, ventilateurs, compresseurs...etc.

Convection naturelle

S'il n'y a pas de mécanisme externe, on parle de convection naturelle, aucune pompe ne force le mouvement du fluide. Les différences de masse volumique ou de pression dans le liquide causées par le transfert de chaleur sont à la source du mouvement [2]

1.3 Le premier principe de la thermodynamique

1.3.1 Enoncé du premier principe

C'est le principe de la conservation de l'énergie. Il énonce l'équivalence de la chaleur Q et du travail T , et précise que la variation d'énergie d'un système lors d'une transformation ne dépend pas de la nature de cette transformation, mais des états initial et final associés. On peut à partir de ce principe, définir une fonction d'état E , énergie totale, qui décrit le niveau énergétique du système thermodynamique étudié.

Ce premier principe ne s'applique qu'à un système où la masse m est conservée. Le premier principe transformé en équation donne

$$dE = \delta Q + \delta W \quad (1.6)$$

1.3.2 Application du premier principe

Regardons l'application du premier principe au cas de la compression et de la détente adiabatique. Pour ce faire, il faut considérer en premier lieu un piston mobile à parois adiabatiques (voir figure 1.2) dont le mouvement est lent et réversible. Compte tenu du fait que l'échange de chaleur δQ est nul, l'expression du travail δW est la suivante, où P_s est la pression interne du gaz [3]

$$\delta W = - P_s . L . dx = - P_s . dv \quad (1.7)$$

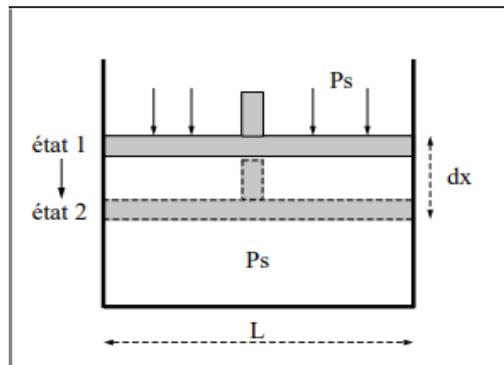


Figure 1.2 Représentation de compression d'un gaz

1.3.3 Énergie interne

Le premier principe de la thermodynamique dénonce que l'énergie totale d'un système isolé se conserve au cours de ses transformations.

$$\Delta E_t = 0 \quad (1.8)$$

L'énergie totale d'un système est

$$E_t = E_c + E_p + U \quad (1.9)$$

tels que E_c est l'énergie cinétique macroscopique, E_p : l'énergie potentielle associée aux force extérieure (pesanteur), et U : l'énergie interne liée à la nature propre du système. Elle regroupe deux formes énergétiques trouvant leur origine au sein du système interne :

- L'énergie cinétique microscopique (due à l'agitation thermique des particules)
- L'énergie potentielle issue de toutes les forces internes au système : interactions intramoléculaires et intermoléculaires

U est une grandeur d'état extensive (proportionnelle à la quantité de matière). Elle s'exprime enJoule. Cette énergie n'est pas mesurable, seule la variation d'énergie interne ΔU peut être Déterminée. [4]

1.3.4 La chaleur et le premier principe de la thermodynamique

Un changement d'état d'un système peut aussi être effectué sans travail fait sur ou par le système : quand on chauffe de l'eau pour faire du thé, par exemple, on met l'eau en contact avec un système plus chaud (le réchaud). Il y a transfert de chaleur d'un système à un autre. Un fait expérimental

important est qu'un changement d'état produit en ajoutant de la chaleur peut aussi bien être effectué en faisant du travail sur le système.

Bien que ça prenne un effort substantiel, on pourrait brasser une tasse d'eau pour augmenter sa température. La conclusion est que l'ajout de chaleur est une autre façon d'augmenter l'énergie interne d'un système. Ceci est le contenu du premier principe de la thermodynamique

1.3.5 Capacité calorifique/chaleur spécifique

La capacité calorifique est une quantité très importante facile à mesurer. C'est donc un excellent moyen de tester un système spécifique.

Nous pouvons mesurer la capacité thermique (et donc la chaleur spécifique) du matériau en lui faire entrer en contact avec une autre substance dont la chaleur spécifique est connue. Au début de la thermodynamique, il n'était pas entendu que la chaleur n'était rien d'autre qu'une forme de transfert d'énergie [5].

1.3.6 Conséquence du premier principe

(a) Energie d'un système isolé

Si le système est isolé, il n'y a pas d'échange d'énergie entre le système et le milieu extérieur

$$\Delta U = 0 \quad (1.10)$$

L'énergie d'un système isolé est constante

(b) Energie d'une transformation cyclique

Si une transformation amène un système d'un état initial à un état final identique, la transformation est cyclique [6]

$$\Delta U = U_{final} + U_{initial} = 0 \quad (1.11)$$

Soit

$$Q + W = 0 \quad (1.12)$$

1.4 Thermométrie

Un thermomètre est un appareil qui mesure et affiche la valeur des températures. On distingue

1.4.1 Thermomètre électronique

Les thermomètres électroniques (fig. 1.3) sont particulièrement précis et performants. Ils permettent les mesures de température de l'air, des liquides, des matériaux, etc. Ils ont aussi la possibilité de mémoriser des valeurs avec une alarme et la lecture est facilitée grâce à un écran. Les données peuvent aussi être imprimées pour faire une Sauvegarde. On peut lui ajouter différentes sondes selon le type de mesure à effectuer, ou alors des sondes sans fil (radio). Il existe aussi des thermomètres à infrarouge pour des mesures à distances ou sans contact.



Figure 1.3 Le thermomètre électronique

1.4.2 Thermomètre magnétique

Ils utilisent la loi de Curie pour mesurer particulièrement les basses températures (fig. 1.4). Ils sont particulièrement répandus actuellement même si on ne s'en rend pas compte.



Figure 1.4 Thermomètre magnétique

1.4.3 Thermomètre à cristaux liquides

Ces thermomètres utilisent des cristaux liquides qui changent de couleur selon la température. Fréquemment, les cristaux liquides dessinent la valeur de la température. Sur d'autres modèles, ils dessinent simplement une échelle superposée à des valeurs chiffrées. Ces thermomètres sont fréquemment utilisés pour les aquariums (modèles autocollants) ou comme thermomètres médicaux (thermomètres frontaux), avec une précision d'une fiabilité médiocre. [7]

1.5 Transformation d'un système thermodynamique

On appelle transformation ou évolution tout processus qui fait passer le système d'un état d'équilibre initial à un autre état d'équilibre dit final

1.5.1 Transformations particulières

Au cours d'une transformation, il est rare de voir tous les paramètres varier en même temps. On trouve ainsi des :

- Transformations à température constante : transformations isothermes
- Transformations à pression constante : transformations isobares
- Transformations à volume Constant : transformations isochores
- Transformations sans échange de chaleur avec le milieu Extérieur : transformations adiabatiques
- Transformations telles que l'état initial est égal à l'état Final : transformations cycliques.

1.5.2 Transformations quasi-statiques

Où les variables d'état sont définies que si le système est en équilibre.

1.5.3 Transformations réversibles

Une transformation est réversible si, à tout instant, des modifications infiniment petites de variables adéquates suffisent à inverser le sens de la transformation. Le caractère quasi-statique est une condition nécessaire pour qu'une transformation soit réversible.

1.5.4. Transformations irréversibles

La transformation réversible est un cas idéal impossible en toute rigueur. Les transformations réelles sont irréversibles.

Références

- [1] Définition thermodynamique, Futura Sciences©2001-2020
- [2] Principe de science et de fonctionnement des recteurs chaleur et thermodynamique planification des politiques et apprentissage, p 8, 9, 26, 28,30
- [3] Jean-Pierre et Catherine Devaux, rappels de thermodynamique, Cours de Turbomachines© 2017
- [4] Université du Maine, Faculté des Sciences, Le premier principe de la thermodynamique, CHM104B thermochimie 2
- [5] Richard Mackenzie, Physique thermique et statistique. Résumé de la thermodynamique, PHY 2215, Hiver 2012 15 février 2012– Page17, 18
- [6] Sommaire du premier principe de la thermodynamique, copyright paris 2002

CHAPITRE 2

LES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES & SES RESOLUTIONS NUMERIQUES

2.1 Introduction

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie. Si dans les premières investigations, l'on s'attachait surtout à en calculer les solutions au moyen de fonctions déjà connues, très vite ce point de vue s'affirma trop étroit ; c'est qu'en effet le problème Fondamental de la théorie des équations différentielles est de déduire les propriétés des solutions d'une équation ou d'un système donné de la forme analytique de ceux-ci ; or, en général, les équations qui résultent d'une investigation théorique en mathématiques ou en physique ne sont pas explicitement intégrables et constituent, bien souvent, la principale source pour la définition de nouvelles fonctions dont les propriétés peuvent être prévues par une analyse systématique de grandes classes d'équations ou de systèmes [1]. Ce chapitre présente une brève rappelle aux équation différentielles ainsi que leurs méthode de résolution numériques.

2.2 Différents types d'équations différentielles

2.2.1 Équation différentielle ordinaire

On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) une relation entre une variable réelle indépendante t , une fonction inconnue $t \rightarrow y(t)$ et ses dérivées : $y', y'', \dots, y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. L'ordre d'une EDO est défini comme étant l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Ainsi, une équation différentielle d'ordre n se présente sous la forme.

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

2.2.2 Équation différentielle linéaire

On appelle équation différentielle linéaire toute équation de la forme

$$a_n(t) y^n + a_{n-1}(t) y^{n-1} + \dots + a_0(t) = g(t) \quad (2.2)$$

2.2.3 Les équations différentielles d'ordre 1

Il n'y a pas une seule technique ou une seule façon de résoudre toutes les équations différentielles. Il peut s'agir de classes d'équations spécifiques. Sur les équations de l'ordre 1, nous verrons de nombreuses techniques en général comme forme spéciale ou caractéristique spécifique de l'équation

$$\frac{dx}{dy} = F(x, y) \quad (2.3)$$

Une équation différentielle est dite linéaire du 1^{er} ordre si elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + y.P(x) = Q(x) \quad (2.4)$$

Où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des constantes ou des fonctions de x uniquement.

2.3.4 L'équation de Bernoulli

Une équation différentielle du 1^{er} ordre qui peut s'écrire ou se ramener à la forme

$$\frac{dy}{dx} + y.P(x) = y^n Q(x) \quad (2.5)$$

Où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions de la variable indépendante de x ou des constantes réelle [3].

2.3 Exemples des équations différentielles au 2^{iem} ordre

2.3.1 L'équation homogène

Considérons l'équation linéaire homogène d'ordre 2, à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.6)$$

2.3.2 Equation de Bessel

Les équations différentielles de Bessel sont définies par les équations suivantes

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad (2.7)$$

et

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad (2.8)$$

2.3.3 Equation différentielle erreur

On appelle équation différentielle erreur l'équation suivante

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2n y(x) = 0 \quad (2.9)$$

où n est un entier. Pour $n = 0$, la solution est de la forme

$$y(x) = c + d \operatorname{erf}(x) \quad (2.10)$$

c et d sont des constantes arbitraires. Dans le cas où $n = 1$, la solution est de la forme

$$y(x) = c(x) + d(e^{-x^2} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)x) \quad (2.11)$$

De manière générale, la solution est une combinaison générale de fonction de Whittaker.

2.3.4 Equation différentielle d'Hermite

L'équation différentielle d'Hermite est très proche de l'équation différentielle précédente, puisque on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 2n y(x) = 0 \quad (2.12)$$

De manière générale, la solution est aussi une combinaison générale de fonction de Whittaker M [4].

2.4 Application d'équations différentielles

L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun à plusieurs disciplines ou sous disciplines. On commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

2.4.1 Mécanique

La relation fondamentale de la mécanique, écrite à 1 dimension pour une particule ponctuelle, fournit une source intarissable d'équations différentielles. Dans un système d'unités adaptées, elle s'écrit

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (2.13)$$

Où désigne la position de la particule, \dot{x} sa dérivée par rapport au temps (la vitesse), et f représente les forces appliquées sur la particule. Cette équation, du second ordre en x , est généralement complétée

par des conditions initiales qui spécifient la position et la vitesse à un instant origine : $x(0) = 0, \dot{x} = v_0$. Il est utile de remarquer que cette équation du second ordre est équivalente à un système différentiel de 2 équations du 1er ordre. En effet, introduisons la vitesse $v \equiv \dot{x}$, l'équation précédente s'écrit aussi

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Le plan (x, v) est appelé, aussi bien en physique qu'en mathématique, plan ou plus généralement espace des phases. Dans le cas particulier où f ne dépend pas de x c'est-à-dire $f = f(v, t)$ dans le cas des mouvements dominés par les frottements, l'équation d'évolution de la vitesse peut être résolue indépendamment de x . On obtient ensuite x par intégration de l'équation $\dot{x} = v$. Si par contre f ne dépend que de x c'est-à-dire $f = f(x)$, l'équation obtenue, en divisant les deux équations différentielles, s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{v} \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

On obtient donc encore une équation différentielle du 1er ordre, l'inconnue étant la fonction $v(x)$. Cette équation qui est séparable dans les variables v et x conduit directement à l'existence d'un invariant (l'énergie).

2.4.2 Dynamique des Populations

De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus (1798) qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d

$$\begin{cases} \dot{N} = bN - dN \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Lorsque $b = 0$, on reconnaît dans cette équation la loi de décroissance exponentielle des substances radioactives si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas où $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, ce qui n'est pas très réaliste. Verhulst (1836) a proposé un modèle phénoménologique non linéaire (Modèle logistique) qui s'écrit

$$\begin{cases} \dot{N} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.17)$$

où α et k sont des constantes positives. Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus. On montrera qu'il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (la solution $N = 0$ est instable), le terme non linéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite $N = k$

2.4.3 Electricité

L'état d'un circuit électrique composé de résistances, bobines et condensateurs, peut être décrit par l'intensité I et la différence de potentiel U dans chacun de ces composants. Et les différentes lois de l'électricité montrent que cet état est régi par un système d'équations différentielles. Typiquement, pour un circuit fermé comprenant un composant de chaque sorte, dans l'ordre résistance-bobine-condensateur, la bobine ayant pour inductance L et le condensateur ayant pour capacité C , le comportement de la résistance étant régi par la loi d'Ohm généralisée. On a les équations différentielles

$$U_R = F(I_R) \quad (2.18)$$

et

$$\begin{cases} L \frac{dI_L}{dt} = U_L \\ C \frac{dU_C}{dt} = U_C \end{cases} \quad (2.19)$$

Assorties des relations

$$\begin{aligned} U_C &= U_L + U_R \\ I_C &= I_L + I_R \end{aligned} \quad (2.20)$$

Notez qu'il y a de l'arbitraire dans l'orientation du circuit, mais les équations sont invariantes par changement d'orientation. En éliminant les autres inconnues, on se ramène à un système de deux équations pour $x = IL$ et $y = UC$ par exemple

$$\begin{cases} L \frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ C \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad (2.21)$$

Dans le cas particulier où $F(x) = x^3 - x$, ce système est connu sous le nom d'équation de van der Pol.

2.4.4 Météorologie

Les équations qui permettent de modéliser l'évolution des différents paramètres météorologiques (température, humidité, pression, etc...) sont très complexes. Un système très simple mais qui permet de retrouver plusieurs des caractéristiques de ces équations a été proposé par Lorenz. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires en dimension 3

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx + (-y) - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.22)$$

2.4.5 Cinétique chimique

Considérons une réaction chimique sur trois espèces :



L'évolution de la concentration $(Y_i)_{1 \leq i \leq 3}$ des trois espèces $(Y_i)_{1 \leq i \leq 3}$ satisfait le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -k_1 y_1 + k_2 y_2 \\ \dot{y}_2 = k_1 y_1 - k_2 y_2 + k_3 y_3 \\ \dot{y}_3 = -k_3 y_3 \end{cases} \quad (2.24)$$

Dans ce genre de problème, on observe typiquement de grandes disparités dans les coefficients k_i . Le système dynamique contient donc des échelles de temps très différentes. Il faut évidemment tenir compte de cette information pour discrétiser les équations de manière efficace. Dans l'exemple précédent, si k_3 est très grand par rapport à k_1 et k_2 , on comprend que très rapidement, la concentration de Y_3 tend vers 0. On peut donc légitimement se demander si on ne peut pas construire analytiquement un modèle plus simple, seulement sur les concentrations des espèces Y et Y.

2.5 Les méthodes de résolutions numériques d'une équation différentielle

On appellera calcul numérique tout calcul (évaluation d'un nombre, d'une fonction, d'une matrice,...) qui est effectué au moyen d'une machine et/ou de tables de valeurs numériques. On peut définir l'analyse numérique comme l'étude théorique des méthodes constructives de l'algèbre et de l'analyse mathématique. Par méthode constructive il faut comprendre une méthode qui fournit le

moyen d'obtenir la solution d'un problème, ou, à tout le moins, une approximation de celle-ci. Ainsi, un théorème qui établit l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy (cf. cours d'analyse) ne sera d'aucune utilité au numéricien s'il n'indique pas comment construire effectivement la solution du problème [5].

2.5.1 Méthode de Monte Carlo

(a) Définition

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo.

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.) [6]

Les méthodes de Monte Carlo permettent d'estimer des quantités en utilisant la simulation de variables aléatoires. Les problèmes pouvant être rencontrés comprennent le calcul d'intégrales, les problèmes d'optimisation et la résolution de systèmes linéaires. La simplicité, la flexibilité et l'efficacité pour les problèmes en grande dimension de la méthode en font un outil intéressant, pouvant servir d'alternative ou de référence pour d'autres méthodes numériques [7]

(b) Génération des nombres aléatoires

Dans la construction simulatrice de la liste d'événements, là où des aléas interviennent, nous avons besoin de tirer une variable aléatoire suivant une distribution donnée. Il est donc nécessaire d'alimenter le programme de constructions d'une suite de tels nombres ou faute de possibilité d'une suite possédant les propriétés similaires.

Initialement des statisticiens utilisaient des tables de taille énorme pour stocker une suite de nombres supposés être aléatoires. Aujourd'hui il existe des techniques bien plus performantes qui permettent de générer rapidement des dizaines de millions de nombres sans encombrement de mémoire. [8]

2.5.2 Méthode de différences finies

(a) Définition

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18^{ème} siècle (Euler, Taylor,

Leibniz...). [9]. La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1712, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , x_0 un point intérieur I , et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On fixe un entier naturel n . Supposons que f soit de classe C_n sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + h^n\varepsilon(h)
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

(b) Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale des équations, la méthode des différences finies centrées d'ordre deux sur un maillage décalé a été retenue dans ce travail. Pour cette méthode, chaque grandeur spatiale est définie sur un maillage décalé d'un pas d'espace suivant chaque direction (x,y,z) .

(c) Discrétisation temporelle

Les méthodes dites temporelles sont des méthodes qui permettent d'analyser directement dans le temps un phénomène dynamique, à partir de ses équations gouvernantes, de ses conditions aux frontières et de ses conditions initiales. La résolution du problème se fait en fonction de la variable temporelle, pas à pas, suivant un schéma temporel donné, c'est-à-dire que l'état du système à un instant donné est évalué à partir de l'état du système déjà évalué aux instants précédents. Pour chaque pas de temps, la solution est calculée simultanément pour l'ensemble des points du domaine considéré.

2.6 Le programme Maple

Maple est un logiciel de mathématiques développé par des chercheurs de l'université de Waterloo au Canada et de l'université ETH de Zurich. Il se distingue par la puissance de son calcul symbolique, numérique et par la représentation graphique des résultats. C'est un logiciel destiné aux scientifiques, ingénieurs, étudiants possédant un bon niveau mathématique. Ce logiciel fait des merveilles dans le calcul à très haute précision, la résolution d'équations réelles, imaginaires, différentielles, intégrales, etc. Le module graphique de base de Maple permet le changement de couleur discontinu et les changements dynamiques des points de vue de graphiques, Cette dernière caractéristique pouvant être très intéressante pour visualiser les surfaces et volumes en 3D. Maple est

un langage interprété, contrairement à Pascal et Fortran qui sont des langages compilés. Ça veut tout simplement dire que Maple est un interlocuteur toujours attentifs ans passer par des étapes intermédiaires comme la compilation et l'établissement des liens (linking). [10].

Référence

- [1] Christian Coatmelec, Maurice Roseau, « Différentielles équations », encyclopédie niversalisa [en ligne].
- [2] file:///C:/Users/M@A/Desktop/mimoir/Chap1GeneralitiesED.pdf
- [3] Gilles picard, Notes de cours et exercices volume 1, mat265 équations différentielles, rédigé en août 2016 révisé en octobre 2019.
- [4] Thierry Lubin, équations aux dérivées partielles (EDP), méthode de résolution des EDP par séparation de variables; applications, cours.
- [5] Chadly Hayat, l'équation de chaleur unidimensionnelle, Mémoire de Master, Université de Saida, 2019.
- [6] Techno-Science.net, Méthode de Monte-Carlo - Définition et Explications .
- [7] Julien Stoehr, stoehr@ceremade.dauphine.fr, Université Paris Dauphine, Département MIDO Master 2019–2020.
- [8] Nasser Saheb - IUP Miage Bordeaux.
- [9] Eric Goncalvès da Silva. Méthodes et Analyse Numériques. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2007, pp.99. Cel-00556967.
- [10] Mohamed El Marraki, Le Langage de programmation Maple, Université Mohammed V-Agdal Faculté des Sciences Rabat Département Mathématiques et Informatique. 2006/2007.

CHAPITRE 3

METHODE DE DIFFERENCES FINIES POUR LA RESOLUTION DE L'EQUATION DE CHALEUR BIDIMENSIONNELLE INSTATIONNAIRE

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique basée sur la méthode de différences finies de l'équation de chaleur temporelle à deux dimensions sur une plaque rectangulaire supposée homogène. Dans un premier temps, on va présenter en détail comment résoudre analytiquement cette équation en considérant des conditions aux limites de type Dirichlet, puis on va détailler notre algorithme numérique basé sur la méthode de différences finies pour obtenir le comportement de chaleur sur cette plaque. Les résultats sont illustrés à l'aide d'un programme Maple pour un exemple concret.

3.2 La résolution analytique de l'équation de chaleur à 2D

Soit une plaque bidimensionnelle sous forme d'un rectangle de dimensions $L \times L'$. On veut suivre l'évolution de sa chaleur par l'identification de sa température dépendant de temps t , et les deux coordonnées de l'espace (x, y) . On la note $T(t, x, y)$. Cette plaque est mise à des conditions constantes respectivement aux limites de type Dirichlet, et initiales suivantes (fig. 3.1)

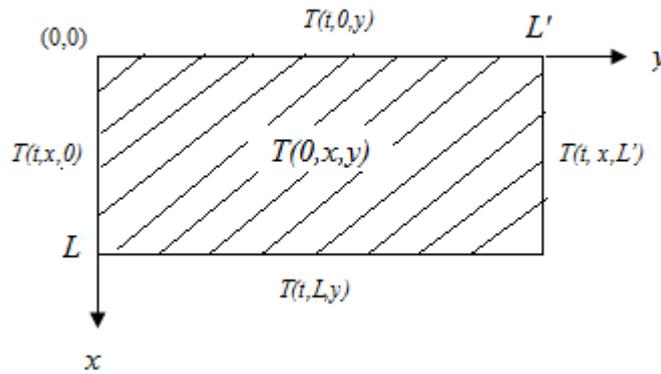


Fig. 3.1 Une plaque rectangulaire en notation matricielle mise aux conditions aux limites et initiales

$$T(t, x, 0) = T_{x0} \text{ pour } x \in [0, L], t \geq 0$$

$$T(t, x, L') = T_{xL'} \text{ pour } x \in [0, L], t \geq 0 \tag{3.1}$$

$$T(t, 0, y) = T_{0y} \text{ pour } y \in]0, L'[, t \geq 0$$

$$T(t, L, y) = T_{Ly} \text{ pour } y \in]0, L'[, t \geq 0 \tag{3.2}$$

$$T(0, x, y) = h(x, y), \text{ pour } (x, y) \in]0, L[\times]0, L'[\tag{3.3}$$

f, g , et h sont des fonctions arbitraires. Les intervalles sont ouverts dans (3.2) et (3.3) pour éviter l'intersection des conditions. Considérons l'équation de chaleur à deux dimensions [1]

$$\frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(t, x, y)}{\partial t} \tag{3.4}$$

α étant la diffusivité thermique de la plaque. Elle est mesurée par ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$). La méthode de séparation de variables [2] nous permet d'écrire la solution sous la forme

$$T(t, x, y) = R(t)P(x)Q(y) \quad (3.5)$$

Remplaçant cette forme dans (3.6), on aboutit à un système de deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{1}{P(x)} \frac{d^2P(x)}{dx^2} + \frac{1}{Q(y)} \frac{d^2Q(y)}{dy^2} = -A \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\alpha R(t)} \frac{dR(t)}{dt} = -A \quad (3.7)$$

A est une constante strictement positif par souci de convergence dans $R(t)$. Si on pose

$$\frac{1}{P(x)} \frac{d^2P(x)}{dx^2} = B \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{Q(y)} \frac{d^2Q(y)}{dy^2} = C \quad (3.9)$$

avec

$$B + C = -A \quad (3.10)$$

On arrive à cinq cas possibles de résolution (a), (b), (c), (d), et (e)

(a) Pour $B, C < 0$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \mu \cos(\sqrt{-B}x) + \nu \sin(\sqrt{-B}x); \mu, \nu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \mu' \cos(\sqrt{-C}y) + \nu' \sin(\sqrt{-C}y); \mu', \nu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.11)$$

(b) Pour $B < 0, C > 0$ et $-B > C$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \mu \cos(\sqrt{-B}x) + \nu \sin(\sqrt{-B}x); \mu, \nu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \mu' \exp(\sqrt{C}y) + \nu' \exp(-\sqrt{C}y); \mu', \nu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.12)$$

(c) Pour $B > 0, C < 0$ et $-C > B$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \mu \exp(\sqrt{B}x) + \nu \exp(-\sqrt{B}x); \mu, \nu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \mu' \cos(\sqrt{-C}y) + \nu' \sin(\sqrt{-C}y); \mu', \nu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.13)$$

(d) Pour $B = 0, C = -A$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \mu x + \nu; \mu, \nu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \mu' \cos(\sqrt{-C}y) + \nu' \sin(\sqrt{-C}y); \mu', \nu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.14)$$

(e) Pour $B = -A, C = 0$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \mu \cos(\sqrt{-B}x) + \nu \sin(\sqrt{-B}x); \mu, \nu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \mu' y + \nu'; \mu', \nu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3 Application des conditions aux limites et initiales

Si on applique les conditions aux bords supérieur et gauche (3.1), et (3.2) avec $T_{x0} = T_{0y} = 0$ aux différents cas détaillés précédemment, ils vont se simplifier encore

(a) Pour $B, C < 0$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \nu \sin(\sqrt{-B}x); \nu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \nu' \sin(\sqrt{-C}y); \nu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.16)$$

(b) Pour $B < 0, C > 0$ et $-B > C$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \mu \sin(\sqrt{-B}x); \mu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \mu' (\exp(\sqrt{C}y) - \exp(-\sqrt{C}y)); \mu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.17)$$

(c) Pour $B > 0, C < 0$ et $-C > B$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \mu (\exp(\sqrt{B}x) - \exp(-\sqrt{B}x)); \mu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \mu' \sin(\sqrt{-C}y); \mu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.18)$$

(d) Pour $B = 0, C = -A$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \nu; \nu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \nu' \sin(\sqrt{-C}y); \nu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.19)$$

(e) Pour $B = -A, C = 0$

$$\begin{cases} R(t) = \lambda \exp(-A\alpha t); \lambda \in \mathbb{R}^* \\ P(x) = \nu \sin(\sqrt{-B}x); \nu \in \mathbb{R}^* \\ Q(y) = \nu'; \nu' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour A donné, les trois premiers cas présentent une infinité des sous cas, tandis que les deux derniers ne présentent qu'un seul cas pour chaque'un. La solution finale s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire de ces solutions exprimées dans les trois premiers cas précédents (a), (b), et (c) (les deux derniers sont exclus de la solution par (3.1) et (3.2))

$$\begin{aligned} T(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \exp(-A_n \alpha t) \{ & \mu_{n,p} \sin(\sqrt{-B_{n,p}}x) \sin(\sqrt{-C_{n,p}}y) \\ & + \nu_{n,p} \sin(\sqrt{-D_{n,p}}x) [\exp(\sqrt{E_{n,p}}y) - \exp(-\sqrt{E_{n,p}}y)] \\ & + \gamma_{n,p} \sin(\sqrt{-F_{n,p}}y) [\exp(\sqrt{G_{n,p}}x) - \exp(-\sqrt{G_{n,p}}x)] \} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pour toute valeur de n et p , les constantes A, B, C, D, E, F , et G vérifient

$$\begin{aligned} B_{n,p} + C_{n,p} &= -A_n, \text{ et } B_{n,p}, C_{n,p} < 0 \\ D_{n,p} + E_{n,p} &= -A_n, \text{ et } D_{n,p} < 0, E_{n,p} > 0 \\ F_{n,p} + G_{n,p} &= -A_n \text{ et } F_{n,p} < 0, G_{n,p} > 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

La solution analytique (3.21) sera complète par l'utilisation des conditions aux bords inferieur et droit et initiales (3.3), et les relations d'orthogonalités [3]afinde déterminer les constantes dedans. Par suite, on va expliquer comment résolu notre problème de façon numérique basée sur la méthode de différences finies [4].

3.4 Méthode de différences finies

3.4.1 Description de maillage

La discrétisation de l'équation différentielle (3.4) se fait à partir (2.25) par les relations [5]

$$\left. \frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial x^2} \right|_{x_0} = \frac{T(t, x_0 + d, y) + T(t, x_0 - d, y) - 2T(t, x_0, y)}{d^2} \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial y^2} \right|_{y_0} = \frac{T(t, x, y_0 + d) + T(t, x, y_0 - d) - 2T(t, x, y_0)}{d^2} \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial T(t, x, y)}{\partial t} \right|_{t_0} = \frac{T(t_0 + h, x, y) - T(t_0, x, y)}{h} \quad (3.25)$$

Où d et h sont les pas respectivement spatial et temporel de discrétisation qui doivent être les plus petits que possible. Alors on peut avoir

$$\begin{aligned} & \frac{T(t_0, x_0 + d, y_0) + T(t_0, x_0 - d, y_0) - 2T(t_0, x_0, y_0)}{d^2} \\ & + \frac{T(t_0, x_0, y_0 + d) + T(t_0, x_0, y_0 - d) - 2T(t_0, x_0, y_0)}{d^2} \\ & = \frac{1}{\alpha} \frac{T(t_0 + h, x_0, y_0) - T(t_0, x_0, y_0)}{h} \end{aligned} \quad (3.26)$$

et par un petit calcul

$$\begin{aligned} & T(t_0, x_0 + d, y_0) + T(t_0, x_0 - d, y_0) + T(t_0, x_0, y_0 + d) + T(t_0, x_0, y_0 - d) - 4T(t_0, x_0, y_0) \\ & = K \times (T(t_0 + h, x_0, y_0) - T(t_0, x_0, y_0)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

K est une constante sans dimension définie par

$$K = \frac{d^2}{\alpha h} \quad (3.28)$$

On peut introduire trois entiers $k, i,$ et j dans $[0, \infty[\times [1, \infty[\times [1, \infty[$ décrivant respectivement la dépendance temporelle, spatiale en x , et spatiale en y

$$T(t_0, x_0, y_0) \equiv T_{k,i,j} \quad (3.29)$$

Alors, la discrétisation implicite de (3.27) devient

$$T_{k+1,i+1,j} + T_{k+1,i-1,j} + T_{k+1,i,j+1} + T_{k+1,i,j-1} - 4T_{k+1,i,j} = K(T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}) \quad (3.30)$$

Sous certain condition de convergence sur K , on peut avoir une discrétisation explicite de la forme [2]

$$T_{k,i+1,j} + T_{k,i-1,j} + T_{k,i,j+1} + T_{k,i,j-1} - 4T_{k,i,j} = K(T_{k+1,i,j} - T_{k,i,j}) \quad (3.31)$$

De même les conditions aux limites et initiales (3.1), (3.2), et (3.3) deviennent

$$T_{k,i,1} = T_T \text{ pour } i = 1..x_m = \frac{L}{d}, k = 0..t_m$$

$$T_{k,i,L'} = T_B \text{ pour } i = 1..x_m = \frac{L}{d}, k = 0..t_m \quad (3.32)$$

$$T_{k,1,j} = T_L \text{ pour } j = 2..y_m - 1 = \frac{L'}{d} - 1, k = 0..t_m$$

$$T_{k,L,j} = T_R \text{ pour } j = 2..y_m - 1 = \frac{L'}{d} - 1, k = 0..t_m \quad (3.33)$$

$$T_{0,i,j} = H_{i,j} \text{ pour } i = 2..x_m - 1, j = 2..y_m - 1 \quad (3.34)$$

tels que on choisit d d'être diviseur commun de L et L' , et t_m un temps suffisant pour atteindre l'équilibre. Les relations (3.30), (3.32), (3.33), et (3.34) nous permis de résoudre notre problème.

3.4.2 Algorithme, résultats, et discussion

Par suite, on présente notre algorithme Maple où on fixe tout d'abord les constantes h, d , et α puis les paramètres de maillage $[6]t_m, x_m$, et y_m . Après, on écrit les conditions initiales et aux limites en vérifiant que le nombre des inconnus et le nombre des équations sont égaux. Finalement on lance la résolution de l'équation (3.31) et on illustre les résultats par des graphes matriciels pour différents instants. On obtient un système d'équation linéaire de 2100 inconnus et également 2100 équations

$\begin{aligned} &> d := 10^{-5}; h := 10^{-5} \\ & \\ &> \alpha := 10^{-6}; K := \frac{d^2}{\alpha \cdot h}; \end{aligned}$	<p style="color: red; margin: 0;">(1) The constants values</p> $d := \frac{1}{100000}$ $h := \frac{1}{100000} \quad (1)$ $\alpha := \frac{1}{1000000}$ $K := 10 \quad (2)$
$\begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned}$	<p style="color: red; margin: 0;">(2) Mesh parameters</p>

```

> tm := 20; xm := 10; ym := 10
      tm := 20
      xm := 10
      ym := 10

```

(3)

```

(3) Limit and initial conditions
> TT := 10; TB := 10; TL := 10; TR := 10; H := (i,j) → 15
      TT := 10
      TB := 10
      TL := 10
      TR := 10
      H := (i,j) → 15

```

(4)

```

> LimCondX := seq(seq(T(k, i, 1) = TT, k = 0 .. tm), i = 1 .. xm), seq(seq(T(k, i, ym) = TB, k = 0
  .. tm), i = 1 .. xm) :
LimCondY := seq(seq(T(k, 1, j) = TL, k = 0 .. tm), j = 2 .. ym - 1), seq(seq(T(k, xm, j) = TR, k
  = 0 .. tm), j = 2 .. ym - 1) :
InCond := seq(seq(T(0, i, j) = H(i, j), i = 2 .. xm - 1), j = 2 .. ym - 1) :

```

```

(4) Discret equation
> EQ := seq(seq(seq(T(k + 1, i + 1, j) + T(k + 1, i - 1, j) + T(k + 1, i, j + 1) + T(k + 1, i, j
  - 1) - 4 T(k + 1, i, j) = K · (T(k + 1, i, j) - T(k, i, j)), k = 0 .. tm - 1), i = 2 .. xm - 1), j
  = 2 .. ym - 1) :
> Var := seq(seq(seq(T(k, i, j), k = 0 .. tm), i = 1 .. xm), j = 1 .. ym) :
(5) Verification of equation and unknown numbers
> Nx := 2 · (xm) · (tm + 1); Ny := 2 · (tm + 1) · (ym - 2); Nt := (xm - 2) · (ym - 2); Ne
  := (tm) · (xm - 2) · (ym - 2)
      Nx := 420
      Ny := 336
      Nt := 64
      Ne := 1280

```

(5)

```

> Neq := Nt + Nx + Ny + Ne;
Nv := (tm + 1) · (xm) · (ym)
      Neq := 2100
      Nv := 2100

```

(6)

```

(6) Resolution and representation
> S := evalf( solve( {EQ, LimCondX, LimCondY, InCond}, {Var} ) ) :
> TM := Matrix(xm · ym, tm + 1, subs(S, [Var]))
      TM :=
      100 x 21 Matrix
      Data Type: anything
      Storage: rectangular
      Order: Fortran_order

```

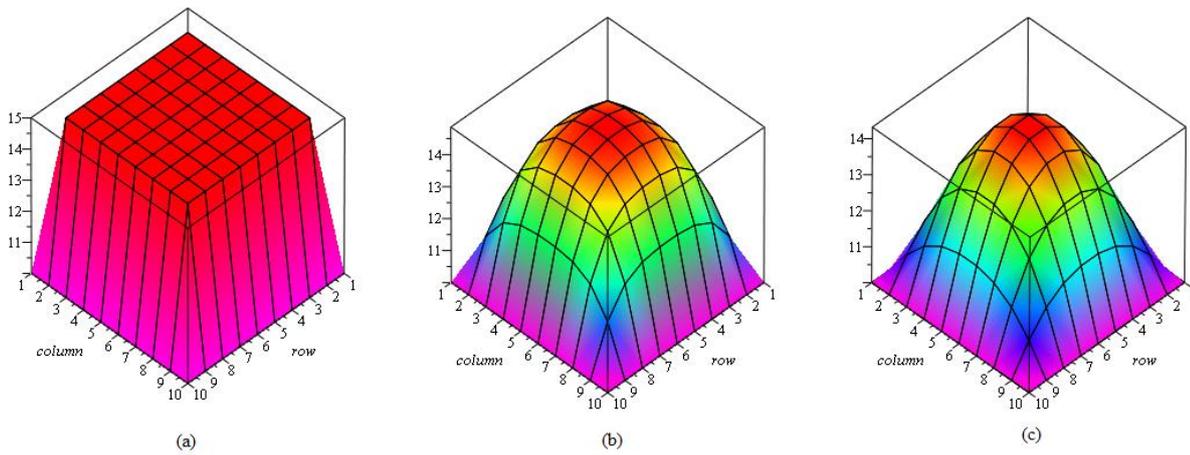
(7)

```

> TS := (t) → Matrix(xm, ym, [seq(TM(i, t + 1), i = 1 .. xm · ym)])
      TS := t → Matrix(xm, ym, [seq(TM(i, t + 1), i = 1 .. xm · ym)])

```

(8)



> `plots[matrixplot](TS(0), shading = zhue, axes = boxed); plots[matrixplot](TS($\frac{tm}{2}$), shading = zhue, axes = boxed); plots[matrixplot](TS(tm), shading = zhue, axes = boxed)`

Fig. 3.2 L'évolution de température au cours de temps (a) : à l'instant $t = 0$, (b) : à l'instant $t = tm/2$, (c) : à l'instant $t = tm$

```
> plot((seq(t, t=0..tm))|(seq(TS(t)(2, 3), t=0..tm)));
plot((seq(x, x=1..xm))|(seq(TS(20)(x, 3), x=1..xm)));
plot((seq(y, y=1..ym))|(seq(TS(20)(2, y), y=1..ym)))
```

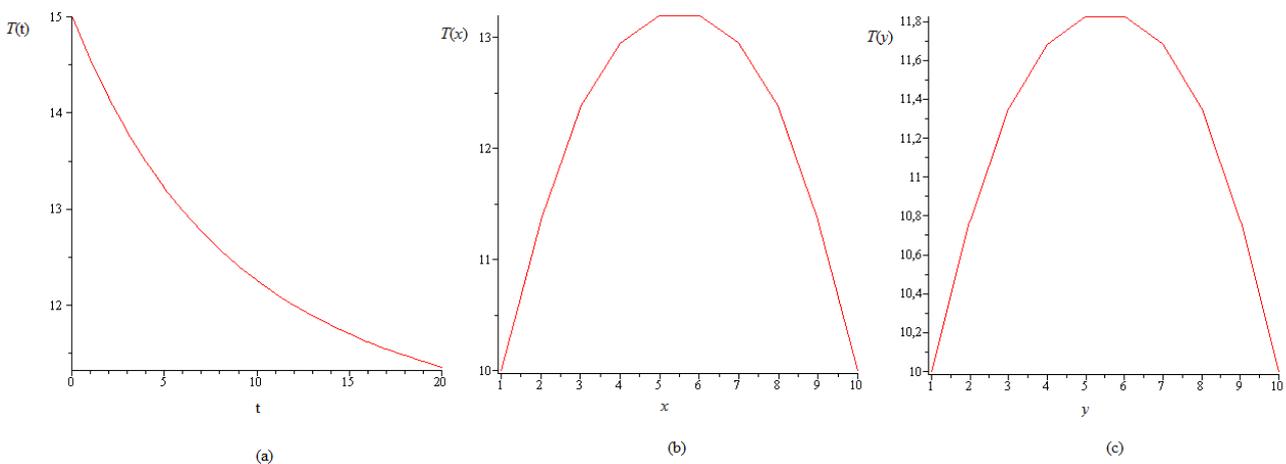


Fig. 3.3 Le comportement de température suivant chaque variable

On voit d'après les deux figures (3.2) et (3.3) que la température dans la plaque infinitésimale tend instantanément vers les températures aux limites (conditions aux limites). Pour atteindre l'équilibre, il nous faut plus de pas de temps que 20 mais cela va prendre plus de temps de calcul. D'autre part, la figure (3.3) montre le caractère exponentielle suivant le temps (a) et sinusoidale (b et c) suivant l'espace ce qui confirme la solution analytique (3.21) si on se limite au premier terme dans la somme.

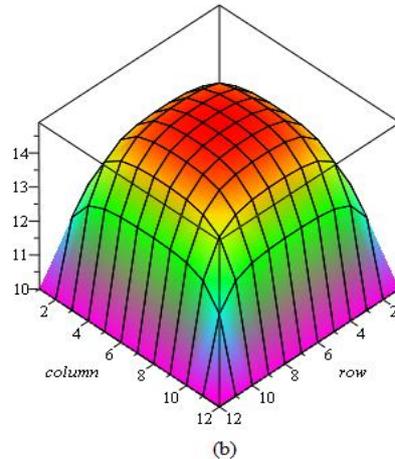
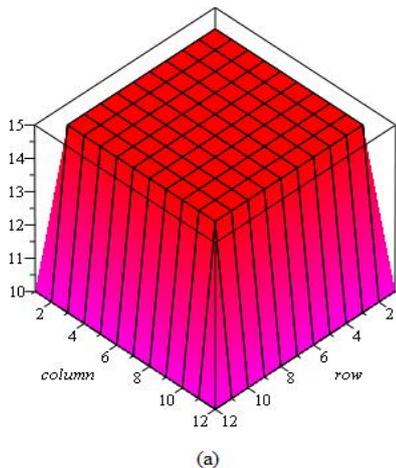
On représente par suite les résultats pour différents valeurs de K (défini en (3.28)) en fixant les trois paramètres de maille à $t_m = 20$, $x_m = 12$, et $y_m = 12$. Pour cela, on génère une procédure Maple où on peut jouer sur les paramètres en considération qui sont les conditions aux limites, les conditions initiales, K , et les paramètres de maille.

(7) Procedure

```

> Temp := proc (TT, TB, TL, TR, H, K, tm, xm, ym)
  global LimCondX, LimCondY, InCond, EQ, Var, S, TM, TS, TP;
  local i, j, k, t;
  LimCondX := seq(seq(T(k, i, 1) = TT, k = 0 .. tm), i = 1 .. xm), seq(seq(T(k, i, ym) = TB, k = 0 .. tm), i = 1 .. xm);
  LimCondY := seq(seq(T(k, 1, j) = TL, k = 0 .. tm), j = 2 .. ym - 1), seq(seq(T(k, xm, j) = TR, k = 0 .. tm), j = 2 .. ym - 1);
  InCond := seq(seq(T(0, i, j) = H, i = 2 .. xm - 1), j = 2 .. ym - 1);
  EQ := seq(seq(seq(T(k + 1, i + 1, j) + T(k + 1, i - 1, j) + T(k + 1, i, j + 1) + T(k + 1, i, j - 1) - 4 T(k + 1, i, j) = K * (T(k + 1, i, j) - T(k, i, j)), k = 0 .. tm - 1), i = 2 .. xm - 1), j = 2 .. ym - 1);
  Var := seq(seq(seq(T(k, i, j), k = 0 .. tm), i = 1 .. xm), j = 1 .. ym);
  S := evalf( solve( {EQ, LimCondX, LimCondY, InCond}, {Var} ));
  TM := Matrix(xm * ym, tm + 1, subs(S, [Var]));
  TS := (t) -> Matrix(xm, ym, [seq(TM(i, t + 1), i = 1 .. xm * ym)]);
  TP := (t) -> plots[matrixplot](TS(t), shading = zhue, axes = boxed)
end proc :

```



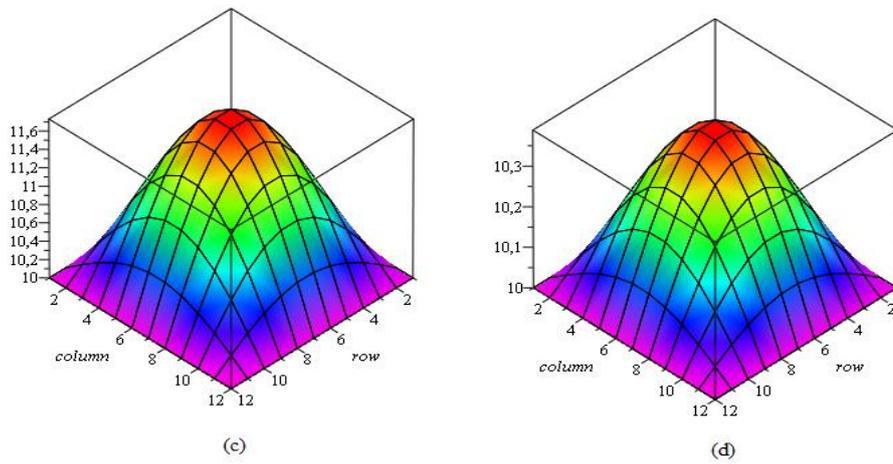


Fig. 3.4 L'évolution de température au cours de temps (a) : à l'instant $t = 0$, (b) : à l'instant $t = 1$, (c) : à l'instant $t = tm/2$, (d) : à l'instant $t = tm$ pour $K = 1$

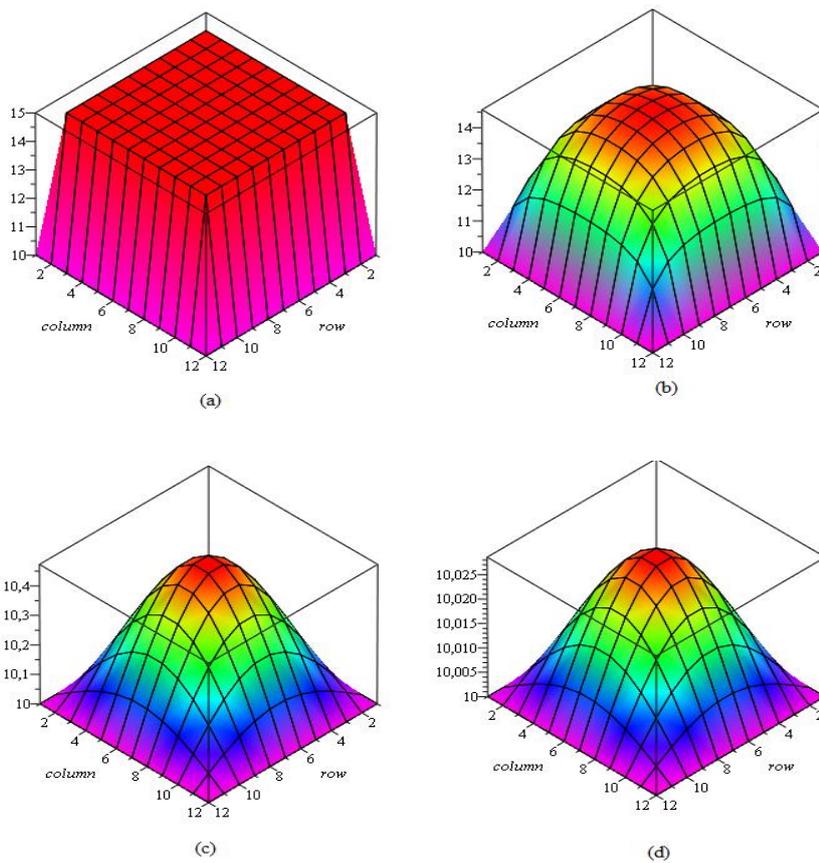


Fig. 3.5 L'évolution de température au cours de temps (a) : à l'instant $t = 0$, (b) : à l'instant $t = 1$, (c) : à l'instant $t = tm/2$, (d) : à l'instant $t = tm$ pour $K = 0.5$

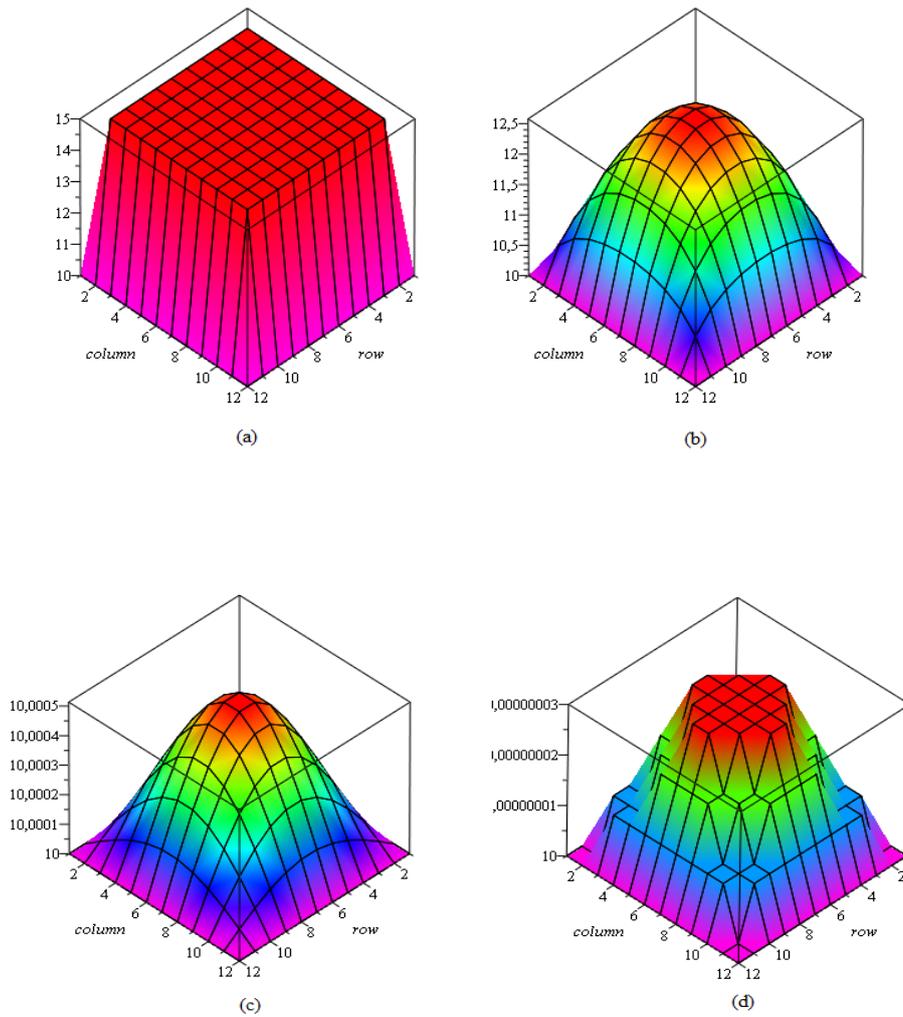


Fig. 3.6 L'évolution de température au cours de temps (a) : à l'instant $t = 0$, (b) : à l'instant $t = 1$, (c) : à l'instant $t = tm/2$, (d) : à l'instant $t = tm$ pour $K = 0.1$

Les conditions aux limites sont 10 partout, et 15 initialement. On choisit trois valeurs de K : 1 dans fig. 3.4, 0.5 dans la fig. 3.5, et 0.1 dans la fig. 3.6. Les résultats montrent que le temps de l'évolution avant l'équilibre thermique est proportionnel à K autrement dit proportionnel au paramètre spatial d , et inversement proportionnel au paramètre temporel h et la diffusivité α .

Références

- [1] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.
- [2] H. Belghazi, *Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement*, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2008.
- [3] F. De Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000.
- [4] Nicolas Champagnat, *Différences finies et analyse numérique matricielle*, cours d'harmonisation en IMAFA, 15 octobre 2010, Université de Nice.
- [5] Eric Goncalvès, *Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO*, Institut national polytechnique de Grenoble, Sept. 2005.
- [6] Mehri Allaoua, *Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles*, Polycopié du Cours Master 1, Département de Mathématique, Université de Guelma.

Conclusion

Dans ce travail, on a considéré le problème de transfert de chaleur dans une plaque rectangulaire mise aux conditions aux limites de type Dirichlet. Nous avons utilisé la méthode numérique de différences finies basé sur un algorithme implicite. Cela nous conduit à une équation discrète, et par un maillage simple de nos variables temporel et spatiales, on a déterminé les températures en tout l'espace et à chaque instant. Les résultats numériques coïncident avec la forme analytique et montrent que la diffusion a deux caractères : temporel exponentiel et spatial sinusoïdal (cf. séries de Fourier). D'autre part, on a remarqué que l'équilibre thermique est instantané et sa durée dépend proportionnellement de la constante $Klié$ à la diffusivité et les paramètres de maille.

On se propose par suite d'étudier l'algorithme explicite sous certaines conditions sur Ket voir la convergence de la méthode par rapport la première. D'autre part, on peut retourner vers la solution analytique pour calculer les constantes d'intégration. Cela peut faire un titre actif de recherche.

ملخص

درسنا في هذا العمل انتقال الحرارة بمرور الوقت في لوحة مستطيلة بالطريقة العددية و هي طريقة الفروق المحدودة الضمنية. استذكرنا الحلول التحليلية التي يقدمها الرتبة الأولى دالة زمنية أسية و دالتان جيبيان فضائيتان. تظهر النتائج توافقنا بالطريقتين، بالإضافة إلى إظهار أن التوازن الحراري لحظوي يتطلب وقتاً يتناسب طردياً مع ثابت المصفوفة المكانية و عكساً مع ثابت الزمن و كذا الانتشارية في النظام.

Résumé

On a étudié dans ce travail le transfert de chaleur au cours de temps dans une plaque rectangulaire par une méthode numérique qui est la méthode de différences finies implicite. On a fait rappel à la solution analytique qui présente au premier ordre un terme temporel exponentiel et des termes spatiaux sinusoïdaux. Les résultats montrent la concordance entre les deux méthodes et en plus montre que l'équilibre est instantané et nécessite un temps proportionnel de paramètre spatial de maille et inversement proportionnel au paramètre temporel et la diffusivité de système.

Abstract

We studied in this work the heat transfer over time in a rectangular plate by a numerical method, which is the implicit finite difference method. We recalled the analytical solution, which presents to the first order an exponential temporal term and sinusoidal spatial terms. The results show the concordance between the two methods and in addition show that the equilibrium is instantaneous and requires a time proportional to the spatial lattice parameter and inversely proportional to the time parameter and the diffusivity of the system.