



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr Tahar Moulay Saïda, Algérie  
Laboratoire de Géométrie, Analyse, Contrôle et  
Applications

P.G : Analyse non Linéaire et Géométrie Riemannienne

**MEMOIRE**

Présenté par : ***Sadli Bendjedid***

*En vue de l'obtention du diplôme de*

**MAGISTER**

*Option : Théorie Spectrale*

*Sujet du mémoire*

**Différents Inverses Généralisés d'un Opérateur Linéaire  
Théorie et Applications**

Encadreur : Pr : ***B. MESSIRDI***

*Soutenu le : 25 septembre 2012*

*Devant le jury composé de*

- Président : ***G. DJELLOULI*** MCA Université de Saïda
- Rapporteur : ***B. MESSIRDI*** Professeur Université d'Oran
- Examineurs :
  - ▶ ***M. DJAA*** Professeur Centre Universitaire de Relizane
  - ▶ ***S. OUAKKAS*** MCA Université de Saïda
  - ▶ ***A. AZZOUZ*** MCB Université de Saïda
- Invité : ***M. BENHARRAT*** MAA ENSET d'Oran

# Dédicaces

Remerciements et louanges à Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail.

Prière et Salut soient sur Notre Cher Maître & Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons.

Je dédie ce modeste travail à :

- Ma douce mère en reconnaissance des sacrifices qu'elle a fait pour nous tracer un chemin dans cette vie. Que vie nous donne temps pour la remercier ! C'est grâce à son amour infini, sa patience, son inestimable aide et ses conseils que ma vie s'est construite !

- Je tiens également à mentionner et à témoigner ma reconnaissance à tous mes amis membres du laboratoire de Mathématiques et particulièrement mes camarades d'études pour leurs encouragements et leur gentillesse envers moi.

- Mes vifs remerciements vont également à tous mes amis intimes pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné et les encouragements qu'ils m'ont offerts. Les moments de travail que nous avons passés ensemble sont inoubliables.

- Pour terminer, j'adresse mon grand amour à mes chères parents, mes frères ; mes soeurs et mon épouse. C'est grâce à leurs amours et leurs sacrifices que ce mémoire a été mené à bout enfin. Mon plus grand souhait dans cette vie, c'est de les voir toujours à côté de moi, en bonne santé, heureux et que la paix soit avec eux.

# Remerciements

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier et à adresser ma reconnaissance à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près afin de réaliser ce travail.

J'exprime ici ma profonde reconnaissance à l'égard de mon promoteur Mr prof. **BEKKAI MESSIRDI**. Il a su orienter mon travail sur l'immense champ d'actualité de recherche. Les conseils et encouragements qu'il n'a jamais cessé de prodiguer sont inestimables. Son patience et son compréhension m'ont permis d'avancer et de terminer ce travail.

Que le Dr. **GHOUTI DJELLOULI** trouve ici l'expression de mes remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je le remercie vivement d'avoir accepté d'être le président du jury de ce mémoire.

Je remercie bien chaleureusement, le Prof. **MOSTAPHA DJAA**, pour ses qualités humaines et scientifiques qui m'ont donné courage, conscience mais surtout esprit de la recherche scientifique. Un grand merci pour l'honneur qu'il m'a fait pour avoir accepté d'examiner ce mémoire, de participer au jury et de suivre mon avancement durant toutes ces années.

Je tiens à remercier Dr. **S. OUAKKAS** pour ses encouragements et précieux conseils. Je le remercie vivement d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Je remercie aussi Dr. **A.AZZOUZ** pour l'honneur qu'il m'a fait pour avoir accepté d'être examinateur de mon mémoire et de participer au jury.

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Notion de projections</b>	<b>7</b>
1.1	Notations et résultats de base . . . . .	7
1.2	Opérateurs Projections Orthogonales . . . . .	8
1.3	Opérations concernant les projections orthogonales . . . . .	12
1.4	Suite Monotone des Opérateurs Projections orthogonales . . . . .	15
1.5	Projection Orthogonale extraite d'une Projection . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Inverses Généralisés des Matrices</b>	<b>25</b>
2.1	Inverse de Moore-Penrose . . . . .	26
2.2	Constructions de $\{i, j, \dots, k\}$ -inverses . . . . .	27
2.3	$1^k$ – et $G^k$ –inverse . . . . .	38
2.4	Inverse de Bott-Duffin . . . . .	39
2.5	Inverse du Groupe . . . . .	42
2.6	Inverse de Drazin . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Inverses généralisés des opérateurs linéaires</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction à des inverses généralisés des opérateurs linéaires . . . . .	49
3.2	Inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire borné . . . . .	53
3.3	Inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire fermé à domaine dense . . . . .	54
3.4	Approximation de l'inverse de Moore-Penrose . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Algorithme de Calcul de L'inverse Généralisé</b>	<b>64</b>
4.1	Décomposition en Valeurs Singulières . . . . .	65
4.2	Calcul rapide de $A^\dagger$ . . . . .	71
4.3	Algorithme de calcul l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire . . . . .	75

## 0.1 Introduction

En mathématiques, et plus précisément en algèbre linéaire, la notion de pseudo-inverse ( ou inverse généralisé ) généralise celle d'inverse d'une matrice ou d'un opérateur linéaire aux cas non inversibles en lui supprimant certaines des propriétés demandées aux inverses, ou en l'étendant aux espaces non algébriques plus larges.

En général, il n'y a pas unicité du pseudo-inverse. Son existence, pour un opérateur linéaire entre espaces de dimension éventuellement infinie, est équivalente à l'existence de supplémentaires du noyau et de l'image. Selon les propriétés demandées, le pseudo-inverse défini permet toutefois de généraliser la notion d'inverse en se restreignant au semi-groupe associatif multiplicatif seul, même s'il ne respecte pas les autres contraintes du corps ou de l'algèbre ( en particulier les propriétés de distributivité ou de commutativité ne sont plus vraies dans le cas général, là où le véritable inverse peut les respecter ). Ainsi notre mémoire se compose en 4 chapitres :

**Le premier chapitre :** Nous abordons les notions de bases nécessaires pour notre sujet. On a défini la projection orthogonale dans les espaces de Hilbert, ainsi on a prouvé des propositions concernant la multiplication, l'addition et la soustraction des projections orthogonales, puis des méthodes pour extraire une projection orthogonale à partir d'une projection de même image, ce concept prendra également une part importante de l'intérêt du quatrième chapitre pour définir l'inverse de *Moore-Penrose*.

**Le deuxième chapitre :** Est consacré aux inverses généralisés des matrices, on a étudié les types les plus célèbres de l'inverse généralisé et les relations entre ces types, l'indice d'une matrice qui est une source essentielle de l'inverse de *Drazin*. Précisément les types suivants de pseudo-inverses ont été étudiés :

- Le pseudo-inverse de *Moore-Penrose* ( $A^\dagger$ ) dans le cas des matrices carrées non inversibles, mais généralisable à toute algèbre de matrices à valeurs dans un corps. Ce type d'inverse vérifie les quatre équations de *Penrose*  $AA^\dagger A = A$  (1),  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$  (2),  $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$  (3) et  $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$  (4)

- Le  $1^k$ -inverse et le  $G^k$ -inverse qui sont utilisable pour le calcul des approximations tel que  $1^k$ -inverse d'une matrice  $A$  est une matrice  $X$  qui vérifie l'équation  $(AX)^k A = A$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Si de plus  $A$  est un  $1^k$ -inverse de  $X$ , alors  $X$  est dit  $G^k$ -inverse.

- Le pseudo-inverse de **Bott-Duffin** ( $A_{(L)}^{(-1)}$  où  $L$  est un sous-espace de  $\mathbb{C}^n$ ) qui est utilisable pour résoudre les systèmes linéaires par exemple dans la théorie des réseaux électriques.

- Le pseudo-inverse du **Groupe** ( $A^\#$ ) ou  $\{1, 2, 5\}$ -inverse ( où  $AA^\# = A^\#A$  (5) ) il existe seulement pour les matrices d'indice  $k = 1$ .

- Le pseudo-inverse de **Drazin** ( $A^D$ ) ou  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse ( où  $A^k A^D A = A^k$  ( $1^k$ ) tel que  $k = \text{Ind}A$  ) détermine la matrice qui constitue un point fixe dans la multiplication par l'exponentiel des matrices carrées au delà de rang fini.

Pour les relations entre les différents types d'inverses généralisés. Tout d'abord l'inverse de **Moore-Penrose** implique tous les autres types d'inverse généralisé. **Bjerhammar** [5] a montré que l'existence d'un  $\{1\}$ -inverse implique l'existence d'un  $\{1, 2\}$ -inverse, **Urquhart** [23] a montré que l'existence d'un  $\{1\}$ -inverse de tous les éléments finis avec matrice dans  $\mathbb{C}$  implique l'existence d'un  $\{1, 2, 3\}$ -inverse et un  $\{1, 2, 4\}$ -inverse de toute matrice, afin de montrer que les ensembles des matrices  $A\{1, 2, 3\}$  et  $A\{1, 2, 4\}$  ne sont pas vides pour toute  $A$  donnée.

Le pseudo-inverse du **Groupe** est un cas particulier de l'inverse de **Drazin** ( le cas où l'indice  $k = 1$  ). Le  $\{1\}$ -inverse est un  $1^k$ -inverse, et le  $\{1, 2\}$ -inverse et un  $G^k$ -inverse. On a terminé ce chapitre par un organigramme qui montre ces relations.

**Le troisième chapitre :** L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'inverse généralisé de **Moore-Penrose** des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert. La première section est une brève introduction à l'inversion généralisée des opérateurs linéaires où on a commencé par la définition de **Tseng**. La deuxième et la troisième section concernent respectivement des opérateurs bornés et des opérateurs fermés à domaine dense sur un espace de Hilbert. Dans la section 4 nous approximons l'inverse de **Moore-Penrose**  $T^\dagger$  de  $T$  par son  $\{2\}$ -inverse. Nous avons aussi illustrer cette méthode avec un exemple.

**Le quatrième chapitre :** Le but de ce chapitre est de donner un algorithme simple et efficace pour le calcul de l'inverse de **Moore-Penrose** d'un opérateur donné à condition que nous connaissons déjà certains inverses généralisés de cet opérateur.

Dans la première section on donne quelques conséquences de la décomposition en valeurs singulières ( ou SVD, *Singular Value Decomposition* ) d'une matrice qui

est un outil important de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes. La méthode la plus célèbre pour le calcul de l'inverse de *Moore-Penrose* des matrices, dans Matlab par exemple on peut décomposer une matrice en valeurs singulières directement par la commande "*svd*" et calculer leur inverse de *Moore-Penrose* à l'aide de la commande "*pinv*".

Dans la deuxième section nous proposons un algorithme pour un calcul rapide de l'inverse de *Moore-Penrose* des matrices sur n'importe quel ordinateur. L'algorithme est basé sur une factorisation de *Cholesky* de rang maximum. Le cas des matrices singulières symétriques positives est traité par *P. Courrieu* dans [10]. On termine cette section par un programme sous Matlab "*geninv*" pour exécuter l'algorithme précédent.

La troisième section concerne les algorithmes de calcul de l'inverse de *Moore-Penrose* pour les opérateurs bornés puis les opérateurs fermés à domaine dense.

# Chapitre 1

## Notion de projections

### 1.1 Notations et résultats de base

• **(A)** Tout au long de ce mémoire nous considérons les espaces de Hilbert, notés  $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ , etc. Le produit scalaire et la norme induite sont notés respectivement par  $\langle, \rangle$  et  $\|\cdot\|$ .  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  désigne l'espace des opérateurs linéaires de  $\mathcal{H}_1$  dans  $\mathcal{H}_2$ . Si  $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  est un opérateur linéaire, le domaine, noyau et l'image de  $T$  sont notés respectivement  $D(T)$ ,  $N(T)$ , et  $R(T)$ .

• **(B)** Le graphe de  $T$  est définie par  $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ . Si  $G(T)$  est fermé, alors  $T$  est appelé un opérateur fermé. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires fermés est noté  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .

L'ensemble des opérateurs linéaires bornés est notée  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Si  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ , alors  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  sont désignés par  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{H})$  respectivement.

• **(C)** Si  $S$  et  $T$  sont deux opérateurs linéaires tels que  $D(T) \subseteq D(S)$  et  $Tx = Sx$  pour tout  $x \in D(T)$ , alors  $T$  est appelé une restriction de  $S$  et  $S$  est appelé une extension de  $T$ . On note  $T \subseteq S$ .

• **(D)** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Si  $\overline{D(T)} = \mathcal{H}_1$ , alors  $T$  est appelé densément défini. Le sous-espace  $C(T) = D(T) \cap N(T)^\perp$  est appelé le carrier de  $T$ , si  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , alors  $D(T) = N(T) \dot{\oplus} C(T)$ , la somme directe orthogonale de  $N(T)$  et  $C(T)$ .

• **(E)** Pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  à domaine dense, on a :

$$\overline{N(T)} = R(T^*)^\perp, \quad N(T^*) = R(T)^\perp$$

où  $T^*$  l'adjoint de l'opérateur  $T$  satisfait

$$\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad \text{pour tout } x \in D(T)$$

En particulier,  $T$  respectivement  $T^*$  a une image dense si et seulement si  $T^*$  respectivement  $T$  est injectif.

• (F) Un opérateur fermé partout défini est borné, c'est une conséquence de théorème du graphe fermé. Inversement, on peut écrire  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .

• (G) On note :

$$\mathcal{H}_{1,2} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 : x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\}$$

$\mathcal{H}_{1,2}$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

Soit  $J_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}_{1,2}$ ,  $i = 1, 2$  définie par

$$J_1 x = (x, 0) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}_1$$

$$J_2 y = (0, y) \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{H}_2$$

et

$$\mathcal{H}_{1,0} = J_1 \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1 \times \{0\}$$

$$\mathcal{H}_{0,2} = J_2 \mathcal{H}_2 = \{0\} \times \mathcal{H}_2$$

**Proposition 1.1.1.** [17] Soient  $T, S \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ . Alors si  $R(T) + N(S)$  est fermé et si  $R(T) \cap N(S) = \{0\}$ ,  $R(T)$  est fermé.

**Proposition 1.1.2.** [3] Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  un opérateur densément défini. Alors :

- (1)  $N(T) = R(T^*)^\perp$
- (2)  $N(T^*) = R(T)^\perp$
- (3)  $\overline{N(T^*T)} = N(T)$
- (4)  $\overline{R(T^*T)} = \overline{R(T^*)}$ .

**Proposition 1.1.3.** [19] Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  un opérateur densément défini. Alors :

- (1)  $(I + T^*T)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ ,  $(I + TT^*)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ .
- (2)  $(I + TT^*)^{-1}T \subseteq T(I + T^*T)^{-1}$  et  $\|T(I + T^*T)^{-1}\| \leq 1$
- (3)  $(I + T^*T)^{-1}T^* \subseteq T^*(I + TT^*)^{-1}$  et  $\|T^*(I + TT^*)^{-1}\| \leq 1$ .

## 1.2 Opérateurs Projections Orthogonales

Les opérateurs projection dans les espaces de Hilbert et de Banach sont largement utilisés dans différents domaines des mathématiques comme l'analyse fonctionnelle et numérique, théorie de l'optimisation et de contrôle optimal, la programmation non linéaire et stochastique et la théorie des jeux. On utilise l'opérateur de projection dans les chapitres 3 et 4 pour définir l'inverse généralisé et la projection orthogonale pour définir l'inverse de **Moore-Penrose**.

### Opérateur de projection

Une projection sur un sous-espace quelconque  $F$  de  $\mathcal{H}$  est un opérateur linéaire borné  $P$  de  $\mathcal{H}$  dans  $F$  tel que  $P^2 = P$ .

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$  et  $G$  un supplémentaire dans  $\mathcal{H}$ . N'importe quel vecteur  $x$  de  $\mathcal{H}$  peut s'écrire d'une façon unique comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$   $x = x' + x''$ ,  $(x', x'') \in F \times G$ .

La projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  est alors l'application  $P$  qui associe à tout  $x$  de  $\mathcal{H}$  le vecteur  $x'$  de  $F$  tel que  $R(P) = F$  et  $N(P) = G$

La projection sur  $G$  parallèlement à  $F$  est l'application  $Q = Id_{\mathcal{H}} - P$ , appelé aussi projecteur associé à  $P$ .

L'image de  $Q$  n'est autre que le noyau de  $P$ , l'image de  $P$  est le noyau de  $Q$ .

Dans ce qui suit, nous supposons que  $\mathcal{H}$  est décomposé en la somme directe :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$$

**Propriété 1.2.1.** *La famille  $(P_i)$  des projections associées à la décomposition précédente vérifie les assertions suivantes :*

- 1)  $\sum_{i=1}^n P_i = Id_{\mathcal{H}}$
- 2)  $P_i^2 = P_i$  pour tout  $i$
- 3)  $P_i \circ P_j = 0$  pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$

**Définition 1.2.1.** *Une projection orthogonale sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est une application linéaire  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  qui satisfait*

$$P^2 = P, \quad \langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle \quad \text{pour tout } x, y \in \mathcal{H}$$

*Une projection orthogonale est nécessairement bornée.*

**Exemple 1.2.1.** *L'espace  $L^2(\mathbb{R})$  est la somme directe orthogonale de l'espace  $\mathcal{M}$  des fonctions paires et  $\mathcal{N}$  l'espace des fonctions impaires. Les projections orthogonales  $P$  et  $Q$  de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ , respectivement, sont donnés par*

$$Pf(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}; \quad Qf(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

*On note que  $I - P = Q$ .*

**Définition 1.2.2.** *Soit  $G$  un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et soit*

$$\mathcal{H} = G \oplus^{\perp} F$$

Alors tout vecteur  $h \in \mathcal{H}$  est représentable uniquement sous la forme

$$h = g + f$$

où  $g \in G$  et  $f \in F$  et  $\langle g, f \rangle = 0$ . Le vecteur  $g$  est appelé la projection orthogonale de  $h$  sur  $G$ . L'opérateur qui à tout  $h \in \mathcal{H}$  associe  $g \in G$  est appelé l'opérateur de projection orthogonale sur  $G$ . Il est noté par  $P_G$  ou parfois par  $P$ .

$$g = Ph = P_G h$$

L'opérateur de projection orthogonale est évidemment linéaire, il est borné et sa norme égale à un. En effet, d'après l'équation

$$\|h\|^2 = \|g\|^2 + \|f\|^2$$

on a

$$\|g\| \leq \|h\| \quad (1.1)$$

et alors

$$\|P\| \leq 1$$

Mais si  $h \in G$ , alors  $g = h$ , donc il y a une égalité dans (1.1).

Par conséquent  $\|P\| = 1$ .

**Remarque 1.2.1.** D'après la définition de la projection orthogonale il suit que

$$1) P^2 = P$$

$$2) P^* = P$$

**Théorème 1.2.1.** Si  $P$  est un opérateur définie sur  $\mathcal{H}$  tel que, pour  $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$  arbitraire

$$1) \langle P^2 h_1, h_2 \rangle = \langle Ph_1, h_2 \rangle$$

$$2) \langle Ph_1, h_2 \rangle = \langle h_1, Ph_2 \rangle$$

alors il existe un sous-espace fermé  $G \subset \mathcal{H}$  tel que  $P$  est l'opérateur projection orthogonale sur  $G$ .

**Preuve.** L'opérateur  $P$  est borné.

$$\|Ph\|^2 = \langle Ph, Ph \rangle = \langle P^2 h, h \rangle = \langle Ph, h \rangle$$

et

$$\|Ph\|^2 \leq \|Ph\| \|h\|$$

alors que

$$\|Ph\| \leq \|h\|$$

Donc, l'opérateur  $P$  est borné et  $\|P\| \leq 1$ . Notons  $G$  l'ensemble des vecteurs  $g \in \mathcal{H}$  tels que

$$Pg = g$$

Clairement,  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$ . On devra prouver que  $G$  est fermé dans  $\mathcal{H}$ . Soit  $g_n \in G$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) et  $g_n \rightarrow g$  dans  $\mathcal{H}$ . Alors

$$g_n = Pg_n$$

et

$$Pg - g_n = Pg - Pg_n = P(g - g_n)$$

Puisque  $\|Pg - g_n\| \leq \|g - g_n\|$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = Pg = g$  donc,  $g \in G$ , ce qui implique que  $G$  est fermé. Vérifions que  $P = P_G$ , où  $P_G$  est l'opérateur de projection orthogonale sur  $G$ . Pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , le vecteur  $Ph$  appartient à  $G$  puisque  $P(Ph) = Ph$ , le sous-espace  $G$  contient aussi  $P_G h$ .

Par conséquent, il est suffisant de prouver que

$$\langle Ph - P_G h, g' \rangle = 0, \quad \forall g' \in G$$

ou alors

$$\langle Ph, g' \rangle = \langle P_G h, g' \rangle, \quad \forall g' \in G$$

En utilisant les propriétés 1) et 2) on a :

$$\langle Ph, g' \rangle = \langle h, P g' \rangle = \langle h, g' \rangle$$

$$\langle P_G h, g' \rangle = \langle h, P_G g' \rangle = \langle h, g' \rangle$$

En particulier,  $(I - P)$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{H} \ominus G$  où  $I$  est l'identité de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ .

□

**Lemme 1.2.1.** [3] Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert.  $L, M$  deux sous-espaces de  $\mathcal{H}$  tels que  $M \subset L$ . Alors

$$L = M \oplus (L \cap M^\perp)$$

si seulement si

$$P_{M^\perp} x \in M \text{ pour tout } x \in L$$

**Théorème 1.2.2.** [2] (Théorème de la Projection) Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $F$  un sous espace fermé de  $\mathcal{H}$ , alors.

i) pour tout  $x \in \mathcal{H}$  existe  $y$  unique dans  $F$ .

ii) Le vecteur  $y$  est l'unique qui vérifie  $(x - y) \in F^\perp$  c'est-à-dire

$\langle x - y, z \rangle = 0, \quad \forall z \in F$ .  $y$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ .

## 1.3 Opérations concernant les projections orthogonales

Dans cette section on doit prouver des propositions concernant la multiplication, l'addition et la soustraction des opérateurs de projections orthogonales.

**Théorème 1.3.1.** *Le produit de deux opérateurs de projections orthogonales  $P_{G_1}$  et  $P_{G_2}$  est aussi un opérateur projection orthogonale si et seulement si  $P_{G_1}$  et  $P_{G_2}$  commutent, c.à.d, si*

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}$$

dans ce cas

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_G$$

où

$$G = G_1 \cap G_2$$

**Preuve.** Si  $P_{G_1}P_{G_2}$  est une projection orthogonale, Alors

$$P_{G_1}P_{G_2} = (P_{G_1}P_{G_2})^* = P_{G_2}^*P_{G_1}^* = P_{G_2}P_{G_1}$$

Inversement, fixons  $h \in \mathcal{H}$  arbitrairement et soit

$$g = P_{G_1}P_{G_2}h = P_{G_2}P_{G_1}h$$

par la première représentation  $g \in G_1$  et par la deuxième,  $g \in G_2$ , donc  $g \in G_1 \cap G_2$ . Si  $h \in G_1 \cap G_2$ , alors  $P_{G_1}P_{G_2}h = h$ . Notons

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1} = P$$

alors

$$\begin{aligned} P^2 &= (P_{G_1}P_{G_2})^2 \\ &= P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2} \\ &= P_{G_1}P_{G_1}P_{G_2}P_{G_2} \\ &= P_{G_1}P_{G_2} \\ &= P \end{aligned}$$

et pour tout  $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle Ph_1, h_2 \rangle &= \langle P_{G_1}P_{G_2}h_1, h_2 \rangle \\ &= \langle P_{G_2}h_1, P_{G_1}h_2 \rangle \\ &= \langle h_1, P_{G_2}P_{G_1}h_2 \rangle \\ &= \langle h_1, P_{G_1}P_{G_2}h_2 \rangle \\ &= \langle h_1, Ph_2 \rangle \end{aligned}$$

Ces équations montrent que l'opérateur  $P = P_{G_1}P_{G_2}$  satisfait les conditions du Théorème 1.2.1, donc, il est un opérateur projection orthogonale sur  $G = G_1 \cap G_2$ .

□

**Corollaire 1.3.1.** *Deux sous-espaces fermés  $G_1$  et  $G_2$  de  $\mathcal{H}$  sont orthogonaux si et seulement si*

$$P_{G_1}P_{G_2} = 0$$

**Théorème 1.3.2.** *La somme finie d'opérateurs de projections orthogonales*

$$P_{G_1} + P_{G_2} + \dots + P_{G_n} = Q \quad (n < \infty)$$

*est un opérateur projection orthogonale si et seulement si*

$$P_{G_i}P_{G_k} = 0 \quad (i \neq k)$$

*c.à.d, si et seulement si les espaces  $G_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) sont deux à deux orthogonaux dans ce cas*

$$Q = P_G$$

où

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$$

**Preuve.** Si les espaces  $G_j$  sont deux à deux orthogonaux, alors  $Q^2 = Q$ , et, donc, la suffisance de la condition est évidente. Il reste seulement de prouver la nécessité de la condition. Soit  $Q$  est un opérateur projection orthogonale, alors

$$\|f\|^2 \geq \langle Qf, f \rangle = \sum_{j=1}^n \langle P_{G_j}f, f \rangle \geq \langle P_{G_i}f, f \rangle + \langle P_{G_k}f, f \rangle$$

Pour tout paire d'indices distingués  $i$  et  $k$ . D'après cette relation il suit que

$$\|P_{G_i}f\|^2 + \|P_{G_k}f\|^2 \leq \|f\|^2$$

Utilisons cette inégalité avec

$$f = P_{G_k}h$$

alors

$$\|P_{G_i}P_{G_k}h\|^2 + \|P_{G_k}h\|^2 \leq \|P_{G_k}h\|^2$$

et

$$\|P_{G_i}P_{G_k}h\|^2 = 0$$

Pour  $h \in \mathcal{H}$ . Donc,

$$P_{G_i}P_{G_k} = 0$$

Alors les espaces  $G_i$  et  $G_k$  sont deux à deux orthogonaux.

□

**Théorème 1.3.3.** *La différence de deux opérateurs projections orthogonales,*

$$P_{G_1} - P_{G_2} \quad (1.2)$$

*est un opérateur projection orthogonale si et seulement si  $G_2 \subset G_1$ . Dans ce cas  $P_{G_1} - P_{G_2}$  est l'opérateur de projection orthogonale sur  $G_1 \ominus G_2$ .*

**Preuve.** Posons

$$Q = I - (P_{G_1} - P_{G_2})$$

$Q$  est un opérateur projection orthogonale si  $P_{G_1} - P_{G_2}$  est une projection orthogonale.

Donc

$$Q = (I - P_{G_1}) + P_{G_2}$$

Il suit du Théorème 1.3.1 que

$$(I - P_{G_1})P_{G_2} = 0$$

ou bien

$$P_{G_2} = P_{G_1}P_{G_2} \quad (1.3)$$

si  $g \in G_2$  alors

$$g = P_{G_2}g = P_{G_1}P_{G_2}g = P_{G_1}g$$

Donc  $g \in G_1$ . Puisque tout élément  $g \in G_2$  appartient à  $G_1$ , on a  $G_2 \subset G_1$ . La condition (1.3) est nécessaire et suffisante pour que la différence (1.2) est un opérateur projection orthogonale. Il reste seulement de caractériser l'espace  $G$  sur lequel l'opérateur (1.2) projecté. L'opérateur  $Q$  projette orthogonalement sur

$$[\mathcal{H} \ominus G_1] \oplus G_2$$

Donc, l'opérateur (1.2) projette sur

$$\mathcal{H} \ominus \{[\mathcal{H} \ominus G_1] \oplus G_2\} \quad (1.4)$$

c.à.d, sur le sous-espace des vecteurs orthogonaux à  $G_2$  et  $\mathcal{H} \ominus G_1$ .

Puisque ce sous-espace est forme de tous les vecteurs de  $G_1$  lesquels sont orthogonaux à  $G_2$ , il est le sous-espace

$$G_1 \ominus G_2 \quad (1.5)$$

□

## 1.4 Suite Monotone des Opérateurs Projections orthogonales

On prouve que la relation  $G_2 \subset G_1$  est équivalente à l'inégalité

$$\|P_{G_2}f\| \leq \|P_{G_1}f\| \quad (1.6)$$

pour tout  $f \in \mathcal{H}$ . L'inégalité (1.6) est évidemment équivalente à

$$\langle P_{G_2}f, f \rangle \leq \langle P_{G_1}f, f \rangle$$

ou

$$\langle P_{G_2} - P_{G_1}, f \rangle \leq 0$$

pour tout  $f \in \mathcal{H}$ . Les deux dernières inégalités sont généralement exprimées par

$$P_{G_2} \leq P_{G_1}$$

Ainsi, nous souhaitons prouver que la relation  $G_2 \subset G_1$  est équivalente à la relation  $P_{G_2} \leq P_{G_1}$ , cela nous autorisera à introduire les suites monotones d'opérateurs projections orthogonale.

Soit  $G_2 \subset G_1$ . Alors

$$P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}$$

Par conséquent, pour tout  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$P_{G_2}f = P_{G_2}P_{G_1}f$$

et

$$\|P_{G_2}f\| \leq \|P_{G_1}f\| \quad (1.7)$$

Inversement, supposant (1.7) est vrai pour tout  $f \in \mathcal{H}$ . Considérons

$$f = (I - P_{G_1})h$$

où  $h$  est un élément arbitraire de  $\mathcal{H}$ . D'après (1.7) et

$$P_{G_1}(I - P_{G_1})h = 0$$

on obtient

$$P_{G_2}(I - P_{G_1})h = 0$$

Puisque cette équation est valable pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , on a

$$P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}$$

Alors que  $G_2 \subset G_1$ .

□

**Théorème 1.4.1.** *Soient  $(G_k), (k = 1, 2, 3, \dots)$  des sous-espaces fermés de  $\mathcal{H}$  Si  $(P_{G_k}) (k = 1, 2, 3, \dots)$  est une suite infinie d'opérateurs projections orthogonales et si  $P_{G_k} \leq P_{G_{k+1}} (k = 1, 2, 3, \dots)$ , alors, quand  $k \rightarrow \infty$ ,  $(P_{G_k})_k$  converge fortement vers  $P$  un opérateur de projection orthogonale dans  $\mathcal{H}$ .*

**Preuve.** Pour  $m < n$  la différence  $P_{G_n} - P_{G_m}$  est un opérateur projection orthogonale. Par conséquent, pour tout  $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|P_{G_n}f - P_{G_m}f\|^2 &= \|(P_{G_n} - P_{G_m})f\|^2 \\ &= \langle (P_{G_n} - P_{G_m})f, f \rangle \\ &= \|P_{G_n}f\|^2 - \|P_{G_m}f\|^2 \end{aligned} \quad (a1)$$

Puisque, pour  $f$  fixe,  $\|P_{G_k}f\|^2$  croît avec  $k$  mais il est borné par  $\|f\|^2$ , il a une limite finie. Donc, le membre droite de (a1) tend vers zéro et la suite  $(P_{G_n}f)_{n=1}^\infty$  est de Cauchy dans  $\mathcal{H}$  au sens fort. Puisque  $\mathcal{H}$  est complet, il existe une limite forte

$$f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{G_n}f$$

On définit l'opérateur  $P$  par

$$f^* = Pf$$

$f \in \mathcal{H}$ . L'opérateur  $P$  est évidemment linéaire. D'autre part,

$$\langle P_{G_k}f, P_{G_k}g \rangle = \langle P_{G_k}f, g \rangle = \langle f, P_{G_k}g \rangle$$

un passage à la limite donne

$$\langle Pf, Pg \rangle = \langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle$$

Par conséquent,

$$P = P^* = P^2$$

alors que  $P$  est un opérateur projection orthogonale.

□

## 1.5 Projection Orthogonale extraite d'une Projection

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection ( $P^2 = P$ ). Nous cherchons la projection orthogonale  $Q$  qui a la même image que  $P$ , c.à.d  $Q^2 = Q$ ,

$$Q^* = Q, PQ = Q \text{ et } QP = P.$$

**Première méthode :**

On prend :  $D = PP^* + (I - P^*)(I - P) = I + (P^* - P)(P - P^*) \geq I$   
d'où  $D$  est inversible.

Ensuite :

$$(I - D)PP^* = (P - P^*)(PP^* - P^*PP^*) = (I - PP^*)PP^*$$

Et

$$PP^*(I - D) = (PP^*P - PP^*)(P - P^*) = (I - PP^*)PP^*$$

Alors :

$$DPP^* = PP^*D = (PP^*)^2$$

Si  $Q = PP^*D^{-1}$  alors  $Q^2 = PP^*D^{-1}PP^*D^{-1} = (PP^*)^2D^{-2} = PP^*D^{-1} = Q$   
et  $Q^* = Q$  alors  $Q$  est une projection orthogonale.

Finalement

$$PQ = PPP^*D^{-1} = PP^*D^{-1} = Q$$

et

$$\begin{aligned} (QP - P)(P^*Q - P^*) &= QPP^*Q - QPP^* - PP^*Q + PP^* \\ &= QPP^* - QPP^* - PP^* + PP^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

tel que  $QP = P$

Nous devons maintenant calculer  $[I - (P - P^*)^2]^{-1}$ . Nous allons utiliser une série de **Neumann**, de sorte que :

$$Q = \sum_{k \geq 0} (P - P^*)^{2k} PP^*, \text{ à condition que la série converge.}$$

Mais  $(P - P^*)^{2j} PP^* = (I - D)^j PP^* = (I - PP^*)^j PP^*$ , donc  $Q = \sum_{k \geq 0} (I - PP^*)^k PP^*$ , en fait, pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , on a aussi.

$$Q = \sum_{k \geq 0} (I - aPP^*)^k aPP^* \text{ à condition que la série converge.}$$

Soit  $c(P) = \inf_{u \perp N(P)} \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$  appelée la conorme (appelé aussi le module minimum réduit) de  $P$ .

il est facile de voir que la conorme d'une projection est toujours  $\geq 1$  et que :

$$-[a\|P\|^2 - 1]^k aPP^* \leq (I - aPP^*)^k aPP^* \leq [1 - ac^2(P)]^k aPP^*$$

l'estimation la plus forte de la norme de la série est donnée par l'équation  $a\|P\|^2 - 1 = 1 - ac^2(P)$  c.à.d. quand  $a = \frac{2}{\|P\|^2 + c^2(P)}$ . Dans ce cas, et plus généralement si

$0 < a < \frac{2}{\|P\|^2}$ , la série donc convergent.

**Proposition 1.5.1.** *Soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection. Soit la suite défini par :*

$$Q_0 = P ; \quad Q_{n+1} = (I - aPP^*)Q_n + aPP^* \quad (1.8)$$

où  $a = \frac{2}{\|P\|^2 + c^2(P)}$ .

Alors la suite  $(Q_n)$  converge uniformément vers  $Q$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Plus précisément :

$$\|Q - Q_n\| \leq \frac{[\|P\|^2 - c^2(P)]^{n+1}}{[\|P\|^2 + c^2(P)]^{n+1}} \leq \left( \frac{\|P\|^2 - 1}{\|P\|^2 + 1} \right)^{n+1} \quad (1.9)$$

En outre  $Q = Q^*$ ,  $PQ = Q$  et  $QP = P$ .

**Preuve.** Il est facile de montrer que

$$\|(I - aPP^*)^k PR\| \leq \left[ \frac{\|P\|^2 - c^2(P)}{\|P\|^2 + c^2(P)} \right]^k \|PR\| \quad \text{pour tout } R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Alors, du fait que  $Q_n = \sum_{k=0}^n (I - aPP^*)^k aPP^*$  et  $Q - Q_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (I - aPP^*)^k aPP^*$

Nous voyons que  $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$  existe et que (1.9) est satisfaite. Un calcul simple montre que  $Q^2 = Q$  et puisque  $Q_n$  est symétrique alors  $Q$  est symétrique, aussi  $PQ_n = Q_n$  alors que  $PQ = Q$ .

Finalement, en prenant les limites dans (1.8), nous voyons que  $PP^*Q = PP^*$  et donc que  $\|QP - P\|^2 = \|(I - Q)PP^*(I - Q)\| = 0$  alors  $QP = P$ .

**Remarque 1.5.1.** *En général  $Q_n$  n'est pas une projection et si l'on remplace dans (1.8)  $P$  par un opérateur borné  $T$  à image fermée, alors  $Q$  est la projection orthogonale sur l'image de  $T$ .*

**Deuxième méthode :**

Nous devons d'abord rappeler quelques résultats sur les projections.

**Proposition 1.5.2.** *Soient  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  deux projections. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (I - P - Q)^{2n} = [(I - P)(I - Q)]^n + (QP)^n \quad (1.10)$$

**Preuve.** Par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$  il est facile de vérifier que

$$(I - P - Q)^2 = (I - P)(I - Q) + QP \quad (1.11)$$

Supposons que (1.10) est vrai pour  $n$ . Alors :

$$\begin{aligned} (I - P - Q)^{2(n+1)} &= (I - P - Q)^{2n}(I - P - Q)^2 \\ &= [[(I - P)(I - Q)]^n + (QP)^n][(I - P)(I - Q) + QP] \\ &= [(I - P)(I - Q)]^{n+1} + (QP)^{n+1} \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

**Proposition 1.5.3.** *Soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection. Alors :*

$$\|I - P - P^*\| = \|I + P - P^*\| = \|I - P + P^*\|$$

**Preuve.** Il est facile de vérifier que :

$$(I - P - P^*)^2 = (I - P + P^*)(I - P^* + P) = (I - P + P^*)(I - P + P^*)^*$$

Donc, puisque  $I - P - P^*$  est symétrique, on a :

$$\begin{aligned} \|I - P - P^*\|^2 &= \|(I - P - P^*)^2\| \\ &= \|(I - P + P^*)(I - P + P^*)^*\| \\ &= \|I - P + P^*\|^2 \end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\begin{aligned} \|I - P - P^*\| &= \|I - P + P^*\| \\ &= \|I - P^* + P\| \end{aligned}$$
□

**Proposition 1.5.4.** *Soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection. Alors :*

$$\max\{\|P\|, \|I - P\|\} = \|I - P - P^*\|$$

**Preuve.** Montrons d'abord que :

$$\max\{\|P\|, \|I - P\|\} \leq \|I - P - P^*\| \tag{1.12}$$

En effet :  $2(I - P) = I - P - P^* + I - P + P^*$  alors  
 $2\|I - P\| \leq \|I - P - P^*\| + \|I - P + P^*\|.$

En utilisant la Proposition 1.5.3 on trouve :

$$\|I - P\| \leq \|I - P - P^*\| \tag{1.13}$$

Nous avons aussi :  $2P = I + P - P^* - (I - P - P^*)$  alors  $2\|P\| \leq \|I - P - P^*\| + \|I - P + P^*\|$ , on obtient :

$$\|P\| \leq \|I - P - P^*\| \quad (1.14)$$

Alors d'après (1.13) et de (1.14) nous obtenons (1.12). Inversement, en utilisant (1.10) avec  $Q = P^*$ , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (I - P - P^*)^{2n} = [(I - P)(I - P^*)]^n + (P^*P)^n$$

Puisque  $(I - P - P^*)$ ,  $(I - P)(I - P^*)$  et  $P^*P$  sont des opérateurs hermitiens, on obtient :

$$\begin{aligned} \|I - P - P^*\|^{2n} &= \|(I - P - P^*)^{2n}\| \\ &\leq \|[(I - P)(I - P^*)]^n\| + \|(P^*P)^n\| \\ &\leq \|(I - P)(I - P^*)\|^n + \|P^*P\|^n \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|I - P - P^*\|^{2n} \leq \|I - P\|^{2n} + \|P\|^{2n} \leq 2[\max\{\|(I - P)\|, \|P\|\}]^{2n}$$

alors que

$$\|I - P - P^*\| \leq \max\{\|P\|, \|I - P\|\} \quad (1.15)$$

Et la preuve de la proposition résulte de (1.10) et (1.15). □

**Proposition 1.5.5.** Soient  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  deux projections. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, [(I - P)(I - Q)]^{n+1} = [(I - P)(I - Q)]^n + (I - P)(QP)^n(I - Q) \quad (1.16)$$

**Preuve.** Par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 1$ , puisque  $(I - P - Q)^2 = (I - P)(I - Q) + QP$  on constate que :

$$\begin{aligned} [(I - P)(I - Q)]^2 &= [I - P - Q + PQ]^2 \\ &= (I - P - Q)^2 + (I - P - Q)PQ + PQ(I - P - Q) + (PQ)^2 \\ &= (I - P)(I - Q) + QP - QPQ - PQP + (PQ)^2 \\ &= (I - P)(I - Q) + (I - P)QP(I - Q) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que (1.16) a été établi pour  $n \geq 1$ .

En utilisant l'hypothèse de récurrence on constate que :

$$\begin{aligned} [(I - P)(I - Q)]^{n+2} &= [(I - P)(I - Q)]^{n+1}(I - P)(I - Q) \\ &= [[(I - P)(I - Q)]^n + (I - P)(QP)^n(I - Q)](I - P)(I - Q) \end{aligned}$$

alors que :

$$[(I-P)(I-Q)]^{n+2} = [(I-P)(I-Q)]^{n+1} + (I-P)(QP)^n(I-Q)(I-P)(I-Q) \quad (1.17)$$

Mais :  $P(I-Q)(I-P)(I-Q) = -PQ(I-P)(I-Q) = PQP(I-Q)$   
D'où :  $(I-P)(QP)^n(I-Q)(I-P)(I-Q) = (I-P)(QP)^{n+1}(I-Q)$ .  
Faisant usage de cette identité dans (1.17), nous obtenons :

$$[(I-P)(I-Q)]^{n+2} = [(I-P)(I-Q)]^{n+1} + (I-P)(QP)^{n+1}(I-Q)$$

Et la proposition est prouvée. □

**Proposition 1.5.6.** *Soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection,  $P \neq 0$ ,  $P \neq I$  Alors :*

$$\|P\| = \|I - P\| = \|I - P - P^*\| = \|I + P - P^*\| = \|I - P + P^*\|$$

**Preuve.** En utilisant la Proposition 1.5.3 et la Proposition 1.5.4, il suffit de montrer que  $\|P\| = \|I - P\|$

Supposons d'abord que  $\|I - P\| > 1$ . Prenant  $Q = P^*$  dans (1.16) on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, [(I-P)(I-P^*)]^{n+1} = [(I-P)(I-P^*)]^n + (I-P)(P^*P)^n(I-P^*)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \|I - P\|^{2n+2} &\leq \|I - P\|^{2n} + \|I - P\| \| (PP^*)^n \| \|I - P^*\| \\ &\leq \|I - P\|^{2n} + \|I - P\|^2 \|P\|^{2n} \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \|I - P\|^{2n} \leq \frac{\|P\|^{2n} \|I - P\|^2}{\|I - P\|^{2n} - 1}.$$

$$\text{D'où : } \|I - P\| > 1 \Rightarrow \|I - P\| \leq \|P\|.$$

De la symétrie entre  $P$  et  $I - P$  Nous obtenons :

$$\|P\| > 1 \Rightarrow \|P\| \leq \|I - P\|$$

$$\text{Donc } \|P\| > 1 \Rightarrow \|I - P\| \geq \|P\| > 1 \Rightarrow \|P\| \geq \|I - P\| \Rightarrow \|P\| = \|I - P\|$$

$$\text{La seule autre possibilité est de } \|P\| = \|I - P\| = 1 \quad \square$$

**Proposition 1.5.7.** *Soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection. Alors :*

$$\|P - P^*\|^2 = \|P\|^2 - 1 \quad (1.18)$$

**Preuve.** il est facile de constater que  $(P - P^*)(P^* - P) = (I - P - P^*)^2 - I$ .

$$\text{Puisque } \|P - P^*\|^2 = \|(P - P^*)(P^* - P)\|.$$

Donc, nous obtenons :  $\|P - P^*\|^2 = \|I - P - P^*\|^2 - 1$  et la proposition est démontrée. □

**Proposition 1.5.8.** *Soient  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  deux projections telles que  $PQ = Q, QP = P$ . Alors :*

$$\|Q - P\| \leq \|Q^* - Q\| + \|P - P^*\| \quad (1.19)$$

**Preuve.**  $(Q^* - P^*)(Q - P) = (Q^* - Q)(Q - P) + (Q - P)(Q - P) + (P - P^*)(Q - P)$   
et  $(Q - P)(Q - P) = Q - Q - P + P = 0$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \|Q - P\|^2 &= \|(Q^* - P^*)(Q - P)\| \\ &\leq \|(Q^* - Q)(Q - P)\| + \|(P - P^*)(Q - P)\| \\ &\leq \|P - Q\| \|Q^* - Q\| + \|P - Q\| \|P - P^*\| \end{aligned}$$

et la proposition est démontrée. □

**Corollaire 1.5.1.** *Soient  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  deux projections telles que  $PQ = Q$  et  $QP = Q$  et  $Q$  est orthogonale. Alors :*

$$\|P - Q\| = \|P - P^*\| \quad (1.20)$$

**Preuve.**  $(I - P^*)(I - P) = (Q - P^*)(Q - P) + (I - Q)$

Donc :

$$\begin{aligned} \|I - P\|^2 &= \|(I - P^*)(I - P)\| \\ &\leq \|(Q - P^*)(Q - P)\| + \|I - Q\| \\ &\leq \|Q - P\|^2 + 1 \end{aligned}$$

Et par conséquent  $\|P\|^2 = \|I - P\|^2 \leq \|Q - P\|^2 + 1$ .

(1.18) implique que  $\|P^* - P\|^2 \leq \|Q - P\|^2$ .

Et résultat suit maintenant en utilisant (1.19). □

Nous sommes maintenant en position d'écrire un algorithme.  
Si  $a \in \mathbb{R}^+$ , posons :

$$S = P + aPP^*(I - P) = P[I - a(I - P^*)(I - P)] \quad (1.21)$$

Alors  $S$  est une projection et  $SP = P, PS = S$ .

En outre, si  $\mathcal{R} = i(S^* - S)$  et  $K = i(P^* - P)$ , on a :

$$\mathcal{R} = K(I - a - aK^2) \quad (1.22)$$

Aussi  $I - a\|P\|^2 = I - a(1 + \|K\|^2) \leq I - a - aK^2$ .  
 Donc si  $0 < a < \frac{2}{\|P\|^2}$  on constate que  $\|\mathcal{R}\| = C(a)\|K\|$  avec  $C(a) < 1$ .  
 La recherche de la valeur  $a$  qui minimise  $C(a)$  conduit à la condition :

$$\frac{2(1-a)}{3\sqrt{a}} \sqrt{\frac{1-a}{3}} = \|K\|(1 - a(1 + \|K\|^2))$$

Qui a les deux solutions doubles  $a = \frac{1}{3\|K\|^2+1}$  et  $a = \frac{4}{3\|K\|^2+4}$ .  
 Avec les valeurs correspondantes  $C(a) = \frac{2\|K\|^2}{3\|K\|^2+1}$  et  $C(a) = \frac{\|K\|^2}{3\|K\|^2+4}$ .  
 Alors que le meilleur choix est  $a = \frac{4}{3\|K\|^2+4} = \frac{4}{3\|P\|^2+1}$ .

□

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal :

**Proposition 1.5.9.** *Soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection. Définir de façon récurrente :*

$$Q_0 = P; \quad Q_{n+1} = Q_n \frac{3\|Q_n\|^2 + 1 + 4Q_n^*(I - Q_n)}{3\|Q_n\|^2 + 1} \quad (1.23)$$

Alors :

$$\|Q_{n+1}\| = \|Q_n\| \frac{\|Q_n\|^2 + 3}{3\|Q_n\|^2 + 1}; \quad \|Q_n\| = \frac{1 + \left(\frac{\|P\|-1}{\|P\|+1}\right)^{3^n}}{1 - \left(\frac{\|P\|-1}{\|P\|+1}\right)^{3^n}} \quad (1.24)$$

et la suite des projections  $(Q_n)$  converge uniformément vers  $Q$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , avec  $Q = Q^*$ ,  $PQ = Q$  et  $QP = P$ . Plus précisément :

$$\|Q - Q_n\| = \frac{2 \left( \sqrt{\frac{\|P\|-1}{\|P\|+1}} \right)^{3^n}}{1 - \left( \frac{\|P\|-1}{\|P\|+1} \right)^{3^n}} \quad (1.25)$$

**Preuve.** On prend :  $\mathcal{R}_n = i(Q_n^* - Q_n)$ . Alors :  $\mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n \frac{3\|\mathcal{R}_n\|^2 - 4\mathcal{R}_n^2}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4}$  alors que

$$\frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4} - \mathcal{R}_{n+1} = \frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4} - \mathcal{R}_n \frac{3\|\mathcal{R}_n\|^2 - 4\mathcal{R}_n^2}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4} = \frac{(2\mathcal{R}_n - \|\mathcal{R}_n\|)^2 (\|\mathcal{R}_n\| + \mathcal{R}_n)}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4} \geq 0$$

et

$$\frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4} + \mathcal{R}_{n+1} = \frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4} + \mathcal{R}_n \frac{3\|\mathcal{R}_n\|^2 - 4\mathcal{R}_n^2}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4} = \frac{(2\mathcal{R}_n + \|\mathcal{R}_n\|)^2 (\|\mathcal{R}_n\| - \mathcal{R}_n)}{3\|\mathcal{R}_n\|^2 + 4} \geq 0$$

on constate que  $0 \in \sigma(\|\mathcal{R}_n\| + \mathcal{R}_n) \cup \sigma(\|\mathcal{R}_n\| - \mathcal{R}_n)$ , où  $\sigma(\|\mathcal{R}_n\| + \mathcal{R}_n)$  est le spectre ponctuel de  $(\|\mathcal{R}_n\| + \mathcal{R}_n)$ , puisque  $\|\mathcal{R}_n\| = \sup_{\rho \in \sigma(\mathcal{R}_n)} |\rho|$  alors  $0 \in \sigma(\frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} - \mathcal{R}_{n+1}) \cup \sigma(\frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} + \mathcal{R}_{n+1})$  et par conséquent

$$\|\mathcal{R}_{n+1}\| = \frac{\|\mathcal{R}_n\|^3}{3\|\mathcal{R}_n\|^2+4} \quad (1.26)$$

Puisque  $\|Q_n\|^2 = 1 + \|\mathcal{R}_n\|^2$ , il s'ensuit que :

$$\|Q_{n+1}\|^2 = \frac{(\|Q_n\|^2 - 1)^3}{(3\|Q_n\|^2 + 1)^2} + 1 = \|Q_n\|^2 \frac{(\|Q_n\|^2 + 3)^2}{(3\|Q_n\|^2 + 1)^2}$$

ce qui établit la première égalité de (1.24) qui est équivalente à

$$\frac{\|Q_{n+1}\| - 1}{\|Q_{n+1}\| + 1} = \left( \frac{\|Q_n\| - 1}{\|Q_n\| + 1} \right)^3 \quad (1.27)$$

ce qui donne par itération

$$\frac{\|Q_n\| - 1}{\|Q_n\| + 1} = \left( \frac{\|P\| - 1}{\|P\| + 1} \right)^{3^n}$$

on obtient rapidement la deuxième égalité de (1.24). Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_n\| = 1$  et Par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{R}_n\| = 0$ .

d'après (1.19) on constate que si  $m, n \in \mathbb{N}$ , on a  $\|Q_m - Q_n\| \leq \|\mathcal{R}_m\| + \|\mathcal{R}_n\|$  ce qui montre que  $(Q_n)$  est une suite de Cauchy et alors que  $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$  existe et satisfait à la condition de la proposition.

Finalement, (1.25) résulte de (1.20) et (1.24) et la proposition est prouvée. □

**Remarque 1.5.2.** *La suite  $(Q_n)$  est une suite de projections qui a la même image que  $P$  et converge uniformément très rapide vers  $Q$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .*

# Chapitre 2

## Inverses Généralisés des Matrices

Dans ce chapitre on va étudier les types les plus célèbres d'inverses généralisés ( pseudo-inverses ) des matrices ( opérateurs linéaires bornés, cas de dimensions finies ) et les relations entre ces types.

En particulier, les types suivants de pseudo-inverses ont été étudiés :

- Le pseudo-inverse de *Moore-Penrose* dans le cas des matrices carrées non inversibles, mais généralisable à toute algèbre de matrices à valeurs dans un corps.

- Le  $1^k$ -inverse et le  $G^k$ -inverse qui sont utilisables pour le calcul des approximations tel que  $1^k$ -inverse d'une matrice  $A$  est une matrice  $X$  qui vérifie l'équation  $(AX)^k A = A$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Si de plus  $A$  est un  $1^k$ -inverse de  $X$ , alors  $X$  est dit  $G^k$ -inverse.

- Le pseudo-inverse de *Bott-Duffin* qui est utilisable pour résoudre les systèmes par exemple dans la théorie des réseaux électriques.

- Le pseudo-inverse du *Groupe* ou  $\{1, 2, 5\}$ -inverse, il existe seulement pour les matrices d'indice  $k = 1$ .

- Le pseudo-inverse de *Drazin* qui détermine la matrice qui constitue un point fixe dans la multiplication par l'exponentiel des matrices carrées au delà de rang fini.

## 2.1 Inverse de Moore-Penrose

### Les Equations de Penrose

En 1955 **Penrose** a montré que, pour toute matrice finie  $A$  ( carré ou rectangulaire ) des éléments réels ou complexes, il y a une unique matrice  $X$  vérifiant les quatre équations ( appelées les équations de **Penrose** )

$$AXA = A \quad (1)$$

$$XAX = X \quad (2)$$

$$(AX)^* = AX \quad (3)$$

$$(XA)^* = XA \quad (4)$$

où  $A^*$  désigne la transposée ( cas réel ) ou l'adjointe ( cas complexe ) de  $A$ . Cet inverse est appelé l'inverse de **Moore-Penrose**, et on le note par  $A^\dagger$ .

Si  $A$  est inversible, il est claire que  $X = A^{-1}$  trivialement vérifie les quatre équations. Puisque l'inverse de **Moore-Penrose** est unique il suit que l'inverse de **Moore-Penrose** d'une matrice inversible est le même comme l'inverse ordinaire.

Dans ce chapitre nous nous intéressons a plusieurs inverses généralisés qui satisfont quelques équations de **Penrose**.  $\mathbb{C}^{m \times n}$  [ $\mathbb{R}^{m \times n}$ ] dénote la classe des matrices  $m \times n$  complexes [réelles].

**Définition 2.1.1.** Pour toute  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , soit  $A\{i, j, \dots, k\}$  l'ensemble des matrices  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  qui satisfont les équations (i), (j), ..., (k) parmi les équations (1) – (4). Une matrice  $X \in A\{i, j, \dots, k\}$  est appelée un  $\{i, j, \dots, k\}$ -inverse de  $A$ , et est notée par  $A^{(i,j,\dots,k)}$ .

**Exemple 2.1.1.** Si  $A\{1, 2, 3, 4\}$  est non vide, alors il est constitué d'un seul élément.

**Preuve.** Soit  $X, Y \in A\{1, 2, 3, 4\}$ . Alors

$$\begin{aligned} X &= X(AX)^* = XX^*A^* = X(AX)^*(AY)^* \\ &= XAY = (XA)^*(YA)^*Y = A^*Y^*Y \\ &= (YA)^*Y = Y \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.1.1.** [18] Si  $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . tels que  $AB^* = 0$  et  $B^*A = 0$ , alors :

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

**Théorème 2.1.2.** Si  $A = BC$  où  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{m \times r}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{r \times n}$ , et  $r = \text{rang}(A) = \text{rang}(B) = \text{rang}(C)$ , alors  $A^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$ .

**Preuve.** Remarquons que  $B^*B$  et  $CC^*$  sont des matrices dans  $\mathbb{C}^{r \times r}$  de rang égale à  $r$ . Soit  $X = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$ . On va montrer que  $X$  vérifie les quatre équations de **Penrose**. On a

$AX = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$ , donc  $(AX)^* = AX$ . En outre

$XA = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = C(CC^*)^{-1}C$ , donc  $(XA)^* = XA$ . Par conséquent les équations (3) et (4) de **Penrose** sont vérifiées.

pour vérifier les équations (1) et (2) nous utilisons  $XA = C^*(CC^*)^{-1}C$  pour obtenir  $A(XA) = BC(C^*(CC^*)^{-1}C) = BC = A$ .

Et  $(XA)X = C^*(CC^*)^{-1}CC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = X$ . Par conséquent  $X = A^\dagger$ .

□

**Exemple 2.1.2.** Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $r = \text{rang}(A) = 1$ ,  $A = BC$  où  $B \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$  et  $C \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$ . En fait,

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [ 1 \ 1 \ 2 ].$$

Alors  $B^*B = [5]$ ,  $CC^* = [6]$ . Par conséquent

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot [ 1 \ 2 ] = \frac{1}{30} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Constructions de $\{i, j, \dots, k\}$ -inverses

### Existence et construction de $\{1\}$ -inverses

Il est facile de construire un  $\{1\}$ -inverse de la matrice  $R \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  ( où  $\mathbb{C}_r^{m \times n}$  est l'ensemble des matrices  $m \times n$  de rang  $r$  ) donnée par

$$R = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

En effet, pour toute  $L \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ , la matrice  $n \times m$

$$S = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

est un  $\{1\}$ -inverse de (2.1).

La construction de  $\{1\}$ -inverses pour une matrice quelconque  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  est simplifiée par la transformation  $A$  dans une forme normale, indiquée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.2.1.** Soit  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ , et soit  $E \in \mathbb{C}_m^{m \times m}$  et  $P \in \mathbb{C}_n^{n \times n}$  tels que

$$EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Alors pour toute  $L \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ , la matrice  $n \times m$

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} E \quad (2.3)$$

est un  $\{1\}$ -inverse de  $A$ . Les matrices partitionnées (2.2) et (2.3) doivent être convenablement interprétées dans le cas  $r = m$  ou  $r = n$ .

**Preuve.** Réécriture (2.2) que

$$A = E^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \quad (2.4)$$

il est facile de vérifier que les  $X$  données par (2.3) satisfont  $AXA = A$ .

Dans le cas trivial  $r = 0$ , lorsque  $A$  est donc la matrice nulle  $m \times n$ , une matrice  $n \times m$  est un  $\{1\}$ -inverse.

Nous notons que puisque  $P$  et  $E$  sont à la fois inversible, le rang de  $X$  est le rang de la matrice partitionnée dans (2.3). Compte tenu de la forme de la dernière matrice,

$$\text{rang } X = r + \text{rang } L$$

Puisque  $L$  est arbitraire, il s'ensuit que un  $\{1\}$ -inverse de  $A$  existe et a un rang compris entre  $r$  et  $\min\{m, n\}$ . Le Théorème 2.2.1 montre que toutes les matrices finies complexes ont un  $\{1\}$ -inverse, et indique comment peut les construire de tels inverses.

□

**Exemple 2.2.1.** Calcul d'un  $\{1\}$ -inverse de la matrice  $A$  tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}$$

en utilisant (2.3) avec

$$E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

et une matrice arbitraire  $L \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ . Utilisation de la matrice de permutation  $P$  tel que :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et la sous-matrice correspondante  $K$  tel que

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 - 2i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 2 & 1 + i \end{bmatrix}$$

nous écrivons

$$EAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & 1 - 2i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 2 & 1 + i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et prenant } L = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 1}$$

Puisque  $m = 3$ ,  $n = 6$ ,  $r = 2$ , le  $\{1\}$ -inverse de  $A$  est

$$\begin{aligned} X &= P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} E \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \alpha \\ 0 & 0 & \vdots & \beta \\ 0 & 0 & \vdots & \gamma \\ 0 & 0 & \vdots & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i\alpha & \frac{1}{3}\alpha & \alpha \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ i\beta & \frac{1}{3}\beta & \beta \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i\gamma & \frac{1}{3}\gamma & \gamma \\ i\delta & \frac{1}{3}\delta & \delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Remarquons dans le cas général, les scalaires  $i\alpha$ ,  $i\beta$ ,  $i\gamma$ ,  $i\delta$  ne sont pas imaginaires pure puisque  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  sont complexes.

**Théorème 2.2.2.** Soit  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  tel que :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

où  $b, c, d$  dans (2.5) sont des matrices et  $a$  est une matrice  $r \times r$  inversible, où on peut écrire la matrice  $A$  sous la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & ca^{-1}b \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Alors le  $\{1\}$ -inverse de la matrice  $A$  est :

$$X = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

où le 0 représente une matrice des zéros.

**Preuve.** D'après (2.5) et (2.7) on a :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ ca^{-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & ca^{-1}b \end{bmatrix}$$

$I_r$  la matrice unitaire  $r \times r$ . Ceci implique que  $AXA = A$  puisque  $d = ca^{-1}b$  donc  $X$  est un  $\{1\}$ -inverse de  $A$ .

**Exemple 2.2.2.** Soit  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ , le  $\{1\}$ -inverse est  $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  puisque

$$AXA = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

### Propriétés de $\{1\}$ -inverses

Certaines propriétés de  $\{1\}$ -inverses sont données dans le Lemme 2.2.1. Pour une matrice  $A$  donnée, on note tout  $\{1\}$ -inverse par  $A^{(1)}$ . Remarquons que, en général,  $A^{(1)}$  ne définit pas une matrice unique. Pour tout scalaire  $\lambda$  nous définissons  $\lambda^\dagger$  par

$$\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1} & (\lambda \neq 0) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases} \quad (a2)$$

Il convient de rappeler qu'une matrice  $E$  carrée est appelée idempotente si  $E^2 = E$ . Les matrices idempotentes sont intimement liées aux inverses généralisées.

**Lemme 2.2.1.** [3] soit  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors,

- (a)  $(A^{(1)})^* \in A^*\{1\}$
- (b) Si  $A$  est inversible  $A^{(1)} = A^{-1}$
- (c)  $\lambda^\dagger A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}$
- (d)  $\text{rang } A^{(1)} \geq \text{rang } A$
- (e) Si  $S$  et  $T$  sont inversibles,  $T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in SAT\{1\}$
- (f)  $AA^{(1)}$  et  $A^{(1)}A$  sont idempotentes et ont le même rang comme  $A$

**Lemme 2.2.2.** soit  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ . Alors,

- (a)  $A^{(1)}A = I_n$  si et seulement si  $r = n$
  - (b)  $AA^{(1)} = I_m$  si et seulement si  $r = m$
- où  $I_p$  est la matrice identité d'ordre  $p \in \mathbb{N}^*$

**Preuve.**(a) soit  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ . Alors la matrice  $A^{(1)}A$  est d'après le Lemme 2.2.1, idempotente et inversible. Multiplions  $(A^{(1)}A)^2 = A^{(1)}A$  par  $(A^{(1)}A)^{-1}$  on obtient  $A^{(1)}A = I_n$ .

$A^{(1)}A = I_n \Rightarrow \text{rang } A^{(1)}A = n \Rightarrow \text{rang } A = n$ , d'après le Lemme 2.2.1 (f).  
La preuve de (b) est similaire.

### Existence et construction de $\{1, 2\}$ -inverses

Il a été noté premièrement par *Bjerhammar* [5] que l'existence d'un  $\{1\}$ -inverse d'une matrice  $A$  implique l'existence d'un  $\{1, 2\}$ -inverse. Cette observation est facile à vérifier, est déclarée comme un lemme pour la commodité du référence.

**Lemme 2.2.3.** Soient  $Y, Z \in A\{1\}$ , et soit

$$X = YAZ$$

Alors  $X \in A\{1, 2\}$ .

**Preuve.** Puisque les matrices  $A$  et  $X$  se produisent de façon symétrique par (1) et (2),  $X \in A\{1, 2\}$  et  $A \in X\{1, 2\}$  sont équivalentes, et dans les deux cas on peut dire que  $A$  et  $X$  sont  $\{1, 2\}$ -inverses les uns des autres.

De (1) et (2) et le fait que le rang d'un produit des matrices ne dépasse pas le rang de tout autre facteur, il suit tout de suite que si  $A$  et  $X$  sont  $\{1, 2\}$ -inverses les uns des autres, ils ont le même rang. *Bjerhammar* [5] a remarqué, que si  $X$  est un  $\{1\}$ -inverse de  $A$  et de même rang comme  $A$ , il est un  $\{1, 2\}$ -inverse de  $A$ .

□

**Théorème 2.2.3.** Etant donné  $A$  et  $X \in A\{1\}$ ,  $X \in A\{1, 2\}$  si et seulement si  $\text{rang } X = \text{rang } A$ .

**Preuve.** Si : Il est clair  $R(XA) \subset R(X)$ . Mais  $\text{rang}XA = \text{rang}A$  d'après le Lemme 2.2.1 (f), et ainsi, si  $\text{rang}X = \text{rang}A$ ,  $R(XA) = R(X)$ . Alors,

$$XAY = X$$

pour certains  $Y$ . Multiplié par  $A$  donne

$$AX = AXAY = AY$$

et donc

$$XAX = X$$

La réciproque est évidente d'après les équations (1) et (2) de **Penrose**.

□

Un corollaire équivalent est le suivant :

**Corollaire 2.2.1.** *Deux des trois assertions suivantes impliquent la troisième :*

$$X \in A\{1\}$$

$$X \in A\{2\}$$

$$\text{rang}X = \text{rang}A$$

Compte tenu du Théorème 2.2.3, le  $\{1\}$ -inverse obtenu à partir de la forme normale de Hermite est un  $\{1, 2\}$ -inverse si l'on prend  $L = 0$ . En d'autres termes,

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} E \quad (a3)$$

est un  $\{1, 2\}$ -inverse de  $A$  où  $P$  et  $E$  sont inversibles et satisfont (2.2).

**Corollaire 2.2.2.** [3] *Si  $X$  et  $Y$  sont  $\{1, 2\}$ -inverses d'une matrice  $A$ ,  $XY$  est une projection sur  $R(X)$  parallèlement à  $N(Y)$ , et  $YX$  est une projection sur  $R(Y)$  parallèlement à  $N(X)$ .*

### Existence et construction de $\{1, 2, 3\}$ -, $\{1, 2, 4\}$ - et $\{1, 2, 3, 4\}$ -inverses

Juste que **Bjerhammar** [5] a montré que l'existence d'un  $\{1\}$ -inverse implique l'existence d'un  $\{1, 2\}$ -inverse, **Urquhart** [23] a montré que l'existence d'un  $\{1\}$ -inverse implique l'existence d'un  $\{1, 2, 3\}$ -inverse et un  $\{1, 2, 4\}$ -inverse de toute matrice finie. Afin de montrer que les ensembles  $A\{1, 2, 3\}$  et  $A\{1, 2, 4\}$  ne sont pas vides pour toute  $A$  donnée, nous allons utiliser le  $\{1\}$ -inverse d'une matrice associée à  $A$  et proche de  $A$ . Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.2.4.** *Pour toute matrice  $A$  finie*

$$\text{rang}AA^* = \text{rang}A = \text{rang}A^*A$$

**Preuve.** Si  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , les deux matrices  $A$  et  $AA^*$  ont  $m$  lignes. Pour montrer que  $\text{rang}AA^* = \text{rang}A$ , il suffit donc, de montrer que chaque relation linéaire entre les lignes de  $A$  maintenue pour la ligne correspondante de  $AA^*$ , et vice versa. Toute relation non triviale linéaire entre les lignes d'une matrice  $H$  est équivalent à l'existence d'un vecteur ligne non nul  $x^*$  tel que  $x^*H = 0$ . On a, évidemment

$$x^*A = 0 \Rightarrow x^*AA^* = 0$$

et, inversement

$$\begin{aligned} x^*AA^* = 0 &\Rightarrow 0 = x^*AA^*x = (A^*x)^*A^*x \\ &\Rightarrow A^*x = 0 \Rightarrow 0 = (A^*x)^* = x^*A \end{aligned}$$

Ici, on a pour tout  $y$  vecteur colonne des éléments complexes  $y^*y$  est la somme des carrés des valeurs absolues des éléments, et cette somme ne s'annule que si chaque élément est égal à zéro.

Enfin, en appliquant ce résultat à la matrice  $A^*$  qui donne  $\text{rang}A^*A = \text{rang}A^*$ , et bien sûr, le  $\text{rang}A^* = \text{rang}A$ .

□

**Corollaire 2.2.3.** *Pour toute matrice finie  $A$ ,  $R(AA^*) = R(A)$  et  $N(AA^*) = N(A)$ .*

**Preuve.** Cela découle du Lemme 2.2.4.

□

En utilisant le Lemme précédent, nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.2.4.** *Pour toute matrice finie  $A$  des éléments complexes,*

$$Y = (A^*A)^{(1)}A^* \in A\{1, 2, 3\} \tag{2.8}$$

*Et*

$$Z = A^*(AA^*)^{(1)} \in A\{1, 2, 4\} \tag{2.9}$$

**Preuve.** Appliquons le Corollaire 2.2.3 à  $A^*$ , on a

$$R(A^*A) = R(A^*)$$

et ainsi,

$$A^* = A^*AU \tag{2.10}$$

pour certains  $U$ . Prenons l'adjointe qui donne

$$A = U^* A^* A \quad (2.11)$$

Par conséquent,

$$A Y A = U^* A^* A (A^* A)^{(1)} A^* A = U^* A^* A = A$$

Donc,  $Y \in A\{1\}$ . Mais  $\text{rang} Y \geq \text{rang} A$  d'après le Lemme 2.2.1 et  $\text{rang} Y \leq \text{rang} A^* = \text{rang} A$  par la définition de  $Y$ . Par conséquent

$$\text{rang} Y = \text{rang} A$$

et, d'après le Théorème 2.2.3,  $Y \in A\{1, 2\}$ .

Enfin, (2.10) et (2.11) donnent

$$A Y = U^* A^* A (A^* A)^{(1)} A^* A U = U^* A^* A U$$

qui est clairement hermitienne. Ainsi, la relation (2.8) est également prouvée.

□

Un  $\{1, 2\}$ -inverse d'une matrice  $A$  est un  $\{2\}$ -inverse, et de même, un  $\{1, 2, 3\}$ -inverse est aussi un  $\{1, 3\}$ -inverse et un  $\{2, 3\}$ -inverse. Ainsi, si nous pouvons établir l'existence d'un  $\{1, 2, 3, 4\}$ -inverse, nous démontrons l'existence d'un  $\{i, j, \dots, k\}$ -inverse pour tous les choix possibles de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$ . On a montré dans l'exemple 2.1.1 que si un  $\{1, 2, 3, 4\}$ -inverse existe, il est unique. Donc le problème qui se pose est bien l'existence de l'inverse de **Moore-Penrose**,  $A^\dagger$  ce qui est justifié dans le théorème suivant.

**Théorème 2.2.5.** *Pour toute matrice finie  $A$  d'éléments complexes,*

$$A^{(1,4)} A A^{(1,3)} = A^\dagger \quad (2.12)$$

**Preuve.** Soit  $X$  une matrice finie d'éléments complexes vérifie (2.12). Il en résulte du Lemme 2.2.3 que  $X \in A\{1, 2\}$ . En outre, (2.12) donne

$$A X = A A^{(1,3)}, \quad X A = A^{(1,4)} A$$

Mais,  $A A^{(1,3)}$  et  $A^{(1,4)} A$  sont hermitiens d'après la définition de  $A^{(1,3)}$  et  $A^{(1,4)}$ . Donc

$$X \in A\{1, 2, 3, 4\}$$

et comme le  $\{1, 2, 3, 4\}$ -inverse est unique alors  $X = A^\dagger$ .

□

### Forme explicite de $A^\dagger$

*C.C. MacDuffee* était apparemment le premier qui a souligné, dans les communications privées en 1959, qu'une factorisation de rang maximum d'une matrice  $A$  conduit à une formule explicite pour son inverse de **Moore-Penrose**,  $A^\dagger$ .

**Théorème 2.2.6.** *Si  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ ,  $r > 0$ , elle a une factorisation de rang maximum*

$$A = FG \quad (2.13)$$

$$A^\dagger = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^* \quad (2.14)$$

**Preuve.** Premièrement, nous devons montrer que  $F^*AG^*$  est inversible. D'après (2.13)

$$F^*AG^* = (F^*F)(GG^*) \quad (2.15)$$

et les deux facteurs du membre à droite sont des matrices  $r \times r$ . En outre, d'après le Lemme 2.2.4, les deux membres sont de rang  $r$ . Donc  $F^*AG^*$  est le produit de deux matrices non singulières, et donc inversible.

En outre, (2.15) donne

$$(F^*AG^*)^{-1} = (G^*G)^{-1}(F^*F)^{-1}$$

Désignons par  $X$  le membre à droite de (2.14), alors

$$X = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* \quad (2.16)$$

Cette expression de  $X$  vérifie les équations de **Penrose** (1) – (4). Comme  $A^\dagger$  est le seul élément de  $A\{1, 2, 3, 4\}$ , (2.14) est donc établie.

□

### Construction de $\{2\}$ -inverses de rang donné

D'après l'équation (2) de **Penrose** il est facile de déduire que

$$\text{rang}A^{(2)} \leq r$$

On note aussi que la matrice nulle  $n \times m$  est une  $\{2\}$ -inverse de rang 0, et toute  $A^{(1,2)}$  est un  $\{2\}$ -inverse de rang  $r$ , d'après le Théorème 2.2.3. Pour  $r > 1$ , il est une construction pour un  $\{2\}$ -inverse de rang  $s$  pour  $s$  compris entre 0 et  $r$  en utilisant la factorisation de rang maximum. Soit  $X_0 \in A\{1, 2\}$  ayant une factorisation

$$X_0 = YZ$$

Alors,  $Y \in \mathbb{C}_r^{m \times r}$  et  $Z \in \mathbb{C}_r^{r \times n}$ , et l'équation (2) de *Penrose* devient

$$YZAYZ = YZ$$

Compte tenu du Lemme 2.2.2, la multiplication à gauche par  $Y^{(1)}$  et à droite par  $Z^{(1)}$

$$ZAY = I_r \tag{2.17}$$

Soit  $Y_s$  donne la sous-matrice de  $Y$  composée des  $s$  premières colonnes, et  $Z_s$  la sous-matrice de  $Z$  composée des  $s$  premières lignes. Alors  $Y_s$  et  $Z_s$  sont de rang maximum  $s$ , et il résulte de (2.17) que

$$Z_s A Y_s = I_s \tag{2.18}$$

Maintenant, soit

$$X_s = Y_s Z_s$$

Alors,  $\text{rang} X_s = s$ , (2.18) donne

$$X_s A X_s = X_s$$

### Indice d'une matrice

On peut ajouter les équations suivantes aux 4 équations de *Penrose*, ces équations sont applicables seulement pour les matrices carrées et importantes pour définir l'inverse de *Drazin* et l'inverse du *Groupe*

$$A^k X A = A^k \tag{1^k}$$

$$A X = X A \tag{5}$$

$$A^k X = X A^k \tag{5^k}$$

$$A X^k = X^k A \tag{6^k}$$

où  $k$  est un entier positif.

Il est facile de vérifier que l'ensemble des trois équations (1<sup>k</sup>), (2) et (5) est équivalent à l'ensemble

$$A X = X A \tag{5}$$

$$A^{k+1} X = A^k \tag{7}$$

$$A X^2 = X \tag{8}$$

il est évident aussi que si (7) est vérifiée pour certains  $k$  entier positif, alors il est valable pour tout entier  $\ell > k$ . Il résulte aussi de (7) que

$$\text{rang } A^k = \text{rang } A^{k+1} \tag{9}$$

**Définition 2.2.1.** *Le plus petit entier positif  $k$  pour lequel (9) est vérifié, est appelé l'indice de  $A$ , est notée par  $\text{Ind } A$ .*

**Lemme 2.2.5.** *Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\text{Ind } A = k$ . Alors :  
toutes les matrices  $\{A^\ell : \ell \geq k\}$  ont le même rang, la même image et le même noyau.*

**Preuve.** Remarquons d'abord que (9) nécessite un certain entier positif  $k$ .  
Il résulte de (9) que

$$R(A^{k+1}) = R(A^k) \quad (2.19)$$

Par conséquent (7) est valable pour un certains  $X$ , et la multiplication à gauche par  $A^{\ell-k}$  donne

$$A^\ell = A^{\ell+1}X (\ell \geq k) \quad (2.20)$$

Il résulte de (2.20) que toutes les matrices  $\{A^\ell : \ell \geq k\}$  ont la même image et le même rang et le fait que  $A^k$  et  $A$  ont le même rang, il s'ensuit qu'ils ont le même noyau.

□

**Théorème 2.2.7.** *Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*  
(a)  $\text{Ind } A = k$ .  
(b) *Le plus petit exposant positif pour lequel (7) est valable est  $k$ .*  
(c) *Si  $A$  est singulière et  $m(\lambda)$  son polynôme minimal,  $k$  est la multiplicité de  $\lambda = 0$  comme un zéro de  $m(\lambda)$ .*

**Preuve.** (a)  $\Leftrightarrow$  (b). Il est clair que (2.20) implique

$$\text{rang } A^{\ell+1} = \text{rang } A^\ell \quad (2.21)$$

(2.21) implique

$$R(A^{\ell+1}) = R(A^\ell)$$

de sorte que (2.20) est vérifiée. Ainsi (2.21) et (2.20) sont équivalentes, ce qui prouve (a)

(b)  $\Leftrightarrow$  (c). Soit

$$m(\lambda) = \lambda^\ell p(\lambda)$$

où  $p(0) = 0$ . Soit  $k$  défini par (b), nous devons maintenant montrer que  $k = \ell$ . on a

$$p(A)A^\ell = 0$$

Si  $\ell > k$  alors

$$0 = p(A)A^\ell X = p(A)A^{\ell-1}$$

où  $\lambda^{\ell-1}p(\lambda)$  est de degré inférieur à  $m(\lambda)$ , qui est une contradiction avec la définition du polynôme minimal.

Puisque  $p(0) \neq 0$ , nous pouvons écrire

$$m(\lambda) = c\lambda^\ell(1 - \lambda q(\lambda)) \quad (2.22)$$

où  $c \neq 0$  et  $q$  est un polynôme. Il s'ensuit que

$$A^{\ell+1}q(A) = A^\ell \quad (2.23)$$

Si  $\ell < k$ , ce serait en contradiction avec (b).

□

## 2.3 $1^k$ – et $G^k$ –inverse

Dans cette section  $\mathbb{K}$  désigne le corps des nombres réels ou complexes et les coefficients de nos matrices appartiennent à ce corps.

**Définition 2.3.1.** Soit  $A$  une matrice de type  $m \times n$  et  $k$  un entier positif. Un  $G^k$ –inverse de  $A$  est une matrice  $X$  de type  $n \times m$  satisfaisant les deux équations :

$$\begin{cases} (AX)^k A = A; \\ (XA)^k X = X. \end{cases} \quad (2.24)$$

Si  $X$  vérifie la première équation, alors  $X$  s'appelle  $1^k$ –inverse de  $A$ . Un  $G^1$ –inverse est dit aussi  $g$ –inverse réflexif ou  $\{1, 2\}$ –inverse de  $A$ , et un  $1^1$ –inverse est dit simplement  $g$ –inverse ou un  $\{1\}$ –inverse de  $A$ . Par l'inverse généralisé on désigne un  $1^k$  ou un  $G^k$ –inverse.

**Remarque 2.3.1.** Soit  $X$  un  $1^k$ –inverse de  $A$ , alors

$$(AX)^{2k} = (AX)^k, \quad (XA)^{2k} = (XA)^k$$

En effet, comme  $A = (AX)^k A = A(XA)^k$ , on a

$$(AX)^{2k} = ((AX)^k A)X(AX)^{k-1} = AX(AX)^{k-1} = (AX)^k$$

$$(XA)^{2k} = (XA)^{k-1}X(A(XA)^k) = (XA)^{k-1}XA = (XA)^k$$

**Lemme 2.3.1.** Toute matrice possède un  $G^k$ –inverse, qui n'est pas en général unique.

**Preuve.** Soient  $P$  et  $Q$  deux matrices inversibles telles que

$$A = Q \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P, \text{ avec } r = \text{rang}(A)$$

Si on prend  $X = P^{-1} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$ , avec  $S^k = I_r$ , alors  $X$  est un  $G^k$ -inverse de  $A$ .

Prenons  $X' = P^{-1} \begin{bmatrix} S & SY \\ Z & ZY \end{bmatrix} Q^{-1}$ , avec  $Y$  et  $Z$  des matrices non nulles, alors on obtient

$$(AX')^k = Q \begin{bmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, (AX')^k = A$$

$$(X'A)^k = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ ZS^{k-1} & 0 \end{bmatrix} P \text{ et } (X'A)^k X' = X'$$

ce qui montre que  $X'$  est un autre  $G^k$ -inverse de  $A$

□

**Exemple 2.3.1.** Soit  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . On remarque que  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -1 & c \end{bmatrix}$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombre complexes, est un  $1^2$ -inverse de  $A$ , tandis que  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  est un  $1^2$ -inverse de  $A$  qui n'est pas un  $G^2$ -inverse.

un  $G^2$ -inverse de  $A$  serait  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Remarque 2.3.2.** Un  $\{1\}$ -inverse ( resp.  $\{1, 2\}$ -inverse ) est un  $1^k$ -inverse ( resp.  $G^k$ -inverse ).

En effet, soit  $X$  un  $\{1\}$ -inverse de  $A$ . Alors

$$A = AXA = (AX)A, (AX) = (AX)^2$$

et une simple récurrence montre que  $(AX)^k A = A$  pour tout  $k \geq 2$ .

## 2.4 Inverse de Bott-Duffin

Considérons le système contraint

$$Ax + y = b, \quad x \in L, \quad y \in L^\perp \tag{2.25}$$

où  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{C}^n$  et  $L$  un sous-espace de  $\mathbb{C}^n$ . Ces systèmes se posent par exemple dans la théorie des réseaux électriques ;

voir, par exemple, **Bott** et **Duffin** [6], nous concluons que (2.25) est équivalent au système suivant :

$$(AP_L + P_{L^\perp})z = b \quad (2.26)$$

Et que  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  est une solution de (2.25) si et seulement si

$$x = P_L z, \quad y = P_{L^\perp} z = b - AP_L z \quad (2.27)$$

où  $z$  est une solution de (2.26)

Si la matrices  $(AP_L + P_{L^\perp})$  est inversible, alors (2.25) est compatible pour tout  $b \in \mathbb{C}^n$  et la solution

$$x = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}b, \quad y = b - Ax$$

est unique. La transformation

$$P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1}$$

a été introduite et étudiée par **Bott** et **Duffin** [6], qui est appelé l'inverse de *contrainte*  $A$ . Puisque cet inverse existe seulement quand  $(AP_L + P_{L^\perp})$  est inversible, on peut considérer d'une manière générale les expressions du type :

$$P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{(i,j,\dots,k)} \quad (1 \leq i, j, \dots, k \leq 4)$$

**Définition 2.4.1.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et soit  $L$  un sous-espace de  $\mathbb{C}^n$ . Si  $(AP_L + P_{L^\perp})$  est inversible, l'inverse de **Bott-Duffin** de  $A$  par rapport à  $L$ , notée par  $A_{(L)}^{(-1)}$ , est défini par

$$A_{(L)}^{(-1)} = P_L(AP_L + P_{L^\perp})^{-1} \quad (2.28)$$

Certaines propriétés de  $A_{(L)}^{(-1)}$  sont recueillies dans le Théorème suivant :

**Théorème 2.4.1.** Si  $(AP_L + P_{L^\perp})$  est inversible. Alors

(a) l'équation (2.25) a pour tout  $b$ , l'unique solution

$$x = A_{(L)}^{(-1)}b \quad (2.29)$$

$$y = (I - AA_{(L)}^{(-1)})b \quad (2.30)$$

(b)  $A$ ,  $P_L$ , et  $A_{(L)}^{(-1)}$  satisfont

$$P_L = A_{(L)}^{(-1)}AP_L = P_LAA_{(L)}^{(-1)} \quad (2.31)$$

$$A_{(L)}^{(-1)} = P_LA_{(L)}^{(-1)} = A_{(L)}^{(-1)}P_L \quad (2.32)$$

**Preuve.** (a) Résulte de l'équivalence de (2.25) et (2.26) - (2.27).

(b) De (2.28),  $P_L A_{(L)}^{(-1)} = A_{(L)}^{(-1)}$ , en multipliant  $A_{(L)}^{(-1)}(AP_L + P_{L^\perp}) = P_L$  par  $P_L$  on a  $A_{(L)}^{(-1)}AP_L = P_L$ .

Par conséquent,  $A_{(L)}^{(-1)}P_{(L^\perp)} = 0$  et  $A_{(L)}^{(-1)}P_{(L)} = A_{(L)}^{(-1)}$ .

En multipliant (2.30) par  $P_L$  on a  $(P_L - P_L A A_{(L)}^{(-1)})b = 0$  pour tout  $b$ , donc  $P_L = P_L A A_{(L)}^{(-1)}$ .

□

De ces résultats, il s'ensuit que l'inverse de **Bott-Duffin**  $A_{(L)}^{(-1)}$ , quand il existe, est le  $\{1, 2\}$ -inverse de  $(P_L A P_L)$  d'image  $L$  et de noyau  $L^\perp$ .

**Corollaire 2.4.1.** *Si  $AP_L + P_{L^\perp}$  est inversible, alors*

$$(a) A_{(L)}^{(-1)} = (AP_L)_{L, L^\perp}^{(1,2)} = (P_L A)_{L, L^\perp}^{(1,2)} = (P_L A P_L)_{L, L^\perp}^{(1,2)}$$

$$(b) (A_{(L)}^{(-1)})_{(L)}^{(-1)} = P_L A P_L$$

**Preuve.** (a) D'après (2.31),  $\dim L = \text{rang} P_L \leq \text{rang} A_{(L)}^{(-1)}$ . De même, d'après (2.32),  $\text{rang} A_{(L)}^{(-1)} \leq \dim L$ ,  $R(A_{(L)}^{(-1)}) \subset R(P_L) = L$  et  $N(A_{(L)}^{(-1)}) \supset N(P_L) = L^\perp$ . Par conséquent

$$\text{rang} A_{(L)}^{(-1)} = \dim L \quad (2.33)$$

et

$$R(A_{(L)}^{(-1)}) = L, \quad N(A_{(L)}^{(-1)}) = L^\perp \quad (2.34)$$

Maintenant  $A_{(L)}^{(-1)}$  est un  $\{1, 2\}$ -inverse de  $AP_L$  :

$$AP_L A_{(L)}^{(-1)} AP_L = AP_L \text{ d'après (2.31)}$$

Et

$$A_{(L)}^{(-1)} AP_L A_{(L)}^{(-1)} = A_{(L)}^{(-1)} \text{ d'après (2.31) et (2.32)} \quad (2.35)$$

où  $A_{(L)}^{(-1)}$  est un  $\{1, 2\}$ -inverse de  $P_L A$ . L'inverse de  $P_L A P_L$  est prouvé de façon similaire.

(b) Nous montrons d'abord que  $(A_{(L)}^{(-1)})_{(L)}^{(-1)}$  est défini, c.à.d, que  $(A_{(L)}^{(-1)}P_L + P_{L^\perp})$  est inversible. D'après (2.32),  $A_{(L)}^{(-1)}P_L + P_{L^\perp} = A_{(L)}^{(-1)} + P_{L^\perp}$ , qui est une matrice inversible puisque  $L + L^\perp = \mathbb{C}^n$ , d'après (2.34). Maintenant  $P_L A P_L$  est un  $\{1, 2\}$ -inverse de  $A_{(L)}^{(-1)}$ , d'après (a), et (2.33),

$$\text{rang} P_L A P_L = \text{rang} A_{(L)}^{(-1)} = \dim L$$

De plus

$$R(P_L A P_L) \subset R(P_L) = L, \quad N(P_L A P_L) \supset N(P_L) = L^\perp$$

alors

$$R(P_L A P_L) = L, \quad N(P_L A P_L) = L^\perp$$

donc

$$\begin{aligned} P_L A P_L &= (A_{(L)}^{(-1)})_{L, L^\perp}^{(1,2)} \\ &= (A_{(L)}^{(-1)})_{(L)}^{(-1)} \end{aligned}$$

□

## 2.5 Inverse du Groupe

Il résulte de l'équation (5) et du Corollaire 2.2.2 que un  $\{1, 2, 5\}$ -inverse de  $A$ , s'il existe, est un  $\{1, 2\}$ -inverse  $X$  tel que  $R(X) = R(A)$  et  $N(X) = N(A)$ , donc il est unique. On l'appelle l'inverse du **Groupe** de  $A$ , et notée  $A^\sharp$ . Le nom "*inverse du Groupe*" a été donné parce que les puissances positives et négatives d'une matrice donnée  $A$  étant interprétées comme puissances de  $A^\sharp$ , avec le projecteur  $AA^\sharp$  comme l'élément unité, constituent un groupe abélien, l'inverse du **Groupe** est un cas particulier de l'inverse de **Drazin**, ou  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse.

L'inverse du **Groupe** n'est pas restreint aux matrices diagonalisables, mais il n'existe pas pour toutes les matrices carrées. L'inverse du **Groupe** existe si et seulement si  $R(A)$  et  $N(A)$  sont deux sous-espaces supplémentaires. Ceci est équivalent à l'indice de  $A$  égale à 1. Nous avons, par conséquent, le théorème suivant

**Théorème 2.5.1.** *Une matrice carrée  $A$  a un inverse du **Groupe** si et seulement si  $\text{Ind}A = 1$ , c'est à dire*

$$\text{rang}A = \text{rang}A^2 \tag{2.36}$$

*quand l'inverse du **Groupe** existe, il est unique.*

Le théorème suivant donne une autre condition pour l'existence de  $A^\sharp$ , et une formule explicite pour son calcul.

**Théorème 2.5.2.** [8] *Soit une matrice carrée  $A$  a de factorisation de rang maximum*

$$A = FG \tag{2.37}$$

*telles que  $F$  et  $G$  sont deux matrices carrées. Alors  $A$  a un inverse du **Groupe** si et seulement si  $GF$  est inversible, dans ce cas*

$$A^\sharp = F(GF)^{-2}G \tag{2.38}$$

**Preuve. du Théorème 2.5.1** Soit  $r = \text{rang} A$ . Alors  $GF \in \mathbb{C}^{r \times r}$ . Maintenant

$$A^2 = FGFG$$

et si

$$\text{rang} A^2 = \text{rang} GF$$

Par conséquent (2.36) est satisfaite si et seulement si  $GF$  est inversible, et la première partie du Théorème 2.5.1 est établie.

Il est facile de vérifier que les équations (1), (2) de **Penrose** et l'équation (5) sont vraies pour la matrice  $A$  donnée par (2.37) et  $X$  par (2.38).

La formule (2.38) exprime alors l'unicité de l'inverse du **Groupe** si

$$R(A^*) = R(A) \quad (2.39)$$

ou d'une façon équivalente, si

$$N(A^*) = N(A) \quad (2.40)$$

Si (2.39) ou (2.40) est vérifiée on dit que la matrice  $A$  a image hermitienne. le traitement précédent montre que

$$A^\sharp = A_{R(A), N(A)}^{(1,2)}$$

alors

$$A^\dagger = A_{R(A^*), N(A^*)}^{(1,2)}$$

Les deux inverses sont égaux, par conséquent, si et seulement si  $R(A) = R(A^*)$  et  $N(A) = N(A^*)$ . Mais cela est vrai si et seulement si  $A$  a image hermitienne.

□

**Théorème 2.5.3.**  $A^\sharp = A^\dagger$  si et seulement si  $A$  a image hermitienne.

La formule suivante :

$A = PJP^{-1}$ ,  $X = PJ^\dagger P^{-1}$  est vrai tel que  $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Cette formule peut être étendue à partir des matrices diagonalisable à toutes les matrices carrées d'indice 1. Pour le faire, on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.5.1.** [3] Soit  $J$  une matrice carrée sous sa forme de Jordan. Alors  $J$  a image hermitienne si et seulement si elle a un indice 1.

**Preuve.** Si  $J$  est inversible,  $\text{rang} J = \text{rang} J^2$  et  $J$  a image hermitienne.

Si  $J$  a seulement 0 comme une valeur propre, elle est nilpotente. Dans ce cas, il suit facilement de la structure de la forme de **Jordan** que  $\text{rang} J^2 < \text{rang} J$  à moins de  $J$  est la matrice nulle 0, dans ce cas il est trivialement d'image hermitienne.

Si  $J$  a deux valeurs propres nuls et non nulles, elle peut être partitionnée en la forme

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \quad (a4)$$

où  $J_1$  est inversible des valeurs propres non nulles de  $J$ , tandis que  $J_0$  est nilpotente. Le même raisonnement du paragraphe précédent donne,  $\text{rang } J = \text{rang } J^2$ , implique que  $J_0 = 0$ . Il s'ensuit de que  $J$  a image hermitienne.

□

**Théorème 2.5.4.** *Soit  $A$  d'indice 1 et soit*

$$A = PJP^{-1}$$

où  $P$  est inversible et  $J$  est une forme normale de **Jordan** de  $A$ . Alors

$$A^\# = PJ^\dagger P^{-1} \quad (2.41)$$

**Preuve.** Il est facile de vérifier que les relations (1), (2), (5), et (2.36) sont des invariants par similitude. Donc

$$J^\# = P^{-1}A^\#P \quad (2.42)$$

et aussi  $\text{rang } J = \text{rang } J^2$ . Il suit alors du Lemme 2.5.1 et de Théorème 2.5.3, que

$$J^\# = J^\dagger \quad (2.43)$$

et (2.41) résulte de (2.42) et (2.43).

□

**Propriétés 2.5.1.** [3] *Soit  $A^\#$  l'inverse du **Groupe** de la matrice  $A$  alors :*

- (a) Si  $A$  est inversible,  $A^\# = A^{-1}$ .
- (b)  $A^{\#\#} = A$ .
- (c)  $(A^*)^\# = (A^\#)^*$ .
- (e)  $(A^t)^\# = (A^\#)^t$ .

## 2.6 Inverse de Drazin

On a vu que l'inverse du **Groupe** n'existe pas pour toutes les matrices carrées, mais seulement pour les matrices d'indice 1. Cependant, nous allons montrer dans cette section que chaque matrice carrée a un unique  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse, où  $k$  est son indice. Cet inverse, appelé inverse de **Drazin**, il a été étudiée par **M. P. Drazin** [11].

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  d'indice  $k$ . Alors  $R(A^k)$  et  $N(A^k)$  sont des sous-espaces supplémentaires, et la restriction  $A_{[R(A^k)]}$  de  $A$  à  $R(A^k)$  est inversible. Soit  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est défini par

$$Xu = \begin{cases} A_{[R(A^k)]}^{-1}u, & \text{si } u \in R(A^k); \\ 0, & \text{si } u \in N(A^k). \end{cases} \quad (10)$$

Il résulte de cette définition que les relations  $AXu = XAu$  et  $XAXu = Xu$  sont vérifiées pour  $u \in R(A^k)$  et pour  $u \in N(A^k)$ . L'équation (10) affirme que  $AX$  est l'identité dans  $R(A^k)$ , c.à.d,  $AXA^kx = A^kx$  pour tout  $x \in \mathbb{C}^n$ . Par conséquent,  $X$  est aussi un  $\{1^k\}$ -inverse de  $A$ .

La matrice  $X$  est donc l'unique  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse de  $A$ , comme indiqué dans le Théorème 2.6.1 ci-dessous.  $X$  est appelé l'inverse de **Drazin** de  $A$ , on le note par  $A^D$ .

Le lemme suivant est nécessaire pour prouvé l'existence et l'unicité de l'inverse de **Drazin**.

**Lemme 2.6.1.** *Si  $Y$  est un  $\{1^\ell, 5\}$ -inverse d'une matrice carrée, alors*

$$X = A^\ell Y^{\ell+1}$$

*est un  $\{1^\ell, 2, 5\}$ -inverse.*

**Preuve.** On a

$$A^{\ell+1}Y = A^\ell, \quad AY = YA$$

Il est clair que  $X$  satisfait (5). Nous avons alors

$$A^\ell XA = A^{2\ell+1}Y^{\ell+1} = A^{2\ell}Y^\ell = A^{2\ell-1}Y^{\ell-1} = \dots = A^\ell$$

et

$$XAX = A^{2\ell+1}Y^{2\ell+2} = A^{2\ell}Y^{2\ell+1} = \dots = A^\ell Y^{\ell+1} = X$$

**Théorème 2.6.1.** *Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  d'indice  $k$ . Alors  $A$  a un unique  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse, ce qui est exprimable comme un polynôme en  $A$ , et est aussi l'unique  $\{1^\ell, 2, 5\}$ -inverse pour tout  $\ell \geq k$ .*

**Preuve.** La matrice  $q(A)$  de (2.23) est un  $\{1^k, 5\}$ -inverse de  $A$ . Par conséquent, par le Lemme 2.6.1,

$$X = A^k (q(A))^k \quad (2.44)$$

est un  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse. Cela prouvé l'existence d'un inverse.

La matrice  $X$  qui vérifie (7) vérifie (2.20) pour tous les  $\ell \geq k$ . Par conséquent, un  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse de  $A$  est un  $\{1^\ell, 2, 5\}$ -inverse pour tous les  $\ell \geq k$ .

L'unicité sera prouvée en adaptant la preuve de l'unicité de l'inverse du **Groupe** donné dans le Théorème 2.5.1.

Soit  $X, Y \in A\{1^\ell, 2, 5\}$ ,  $E = AX = XA$ , et  $F = AY = YA$ . Remarquons que  $E$  et  $F$  sont idempotents. Alors,  $E = F$ , puisque

$$E = AX = A^\ell X^\ell = AY A^\ell X^\ell = FAX = FE$$

et

$$F = YA = Y^\ell A^\ell = Y^\ell A^\ell XA = YAE = FE$$

□

La preuve est alors terminée exactement comme dans le cas de l'inverse du **Groupe**. Cet unique  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse est l'inverse de **Drazin**, et on le note par  $A^D$ . L'inverse du **Groupe** est le cas particulier de l'inverse de **Drazin** pour les matrices d'indice 1.

L'inverse de **Drazin** a une représentation simple en termes de la forme de **Jordan** :

**Théorème 2.6.2.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ayant la forme de **Jordan**

$$A = XJX^{-1} = X \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} X^{-1} \quad (2.45)$$

où  $J_0$  et  $J_1$  sont des blocs de  $J$ ,  $J_0$  correspond aux valeurs propres nulles de  $A$  et  $J_1$  correspond aux valeurs propres non nulles de  $A$ . Alors

$$A^D = X \begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X^{-1} \quad (2.46)$$

**Preuve.** Soit  $A$  une matrice singulière d'indice  $k$  (c.à.d. le plus grand bloc dans la sous-matrice  $J_0$  est  $k \times k$ ). Alors la matrice donnée par (2.46) est un  $\{1^k, 2, 5\}$ -inverse de  $A$ .

□

**Exemple 2.6.1.** La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

a la forme de **Jordan**

$$A = X \begin{bmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_2(0) \end{bmatrix} X^{-1} = X \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} X^{-1}$$

où

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & -2 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ -1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -2 \\ 2 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 2 & \vdots & -2 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

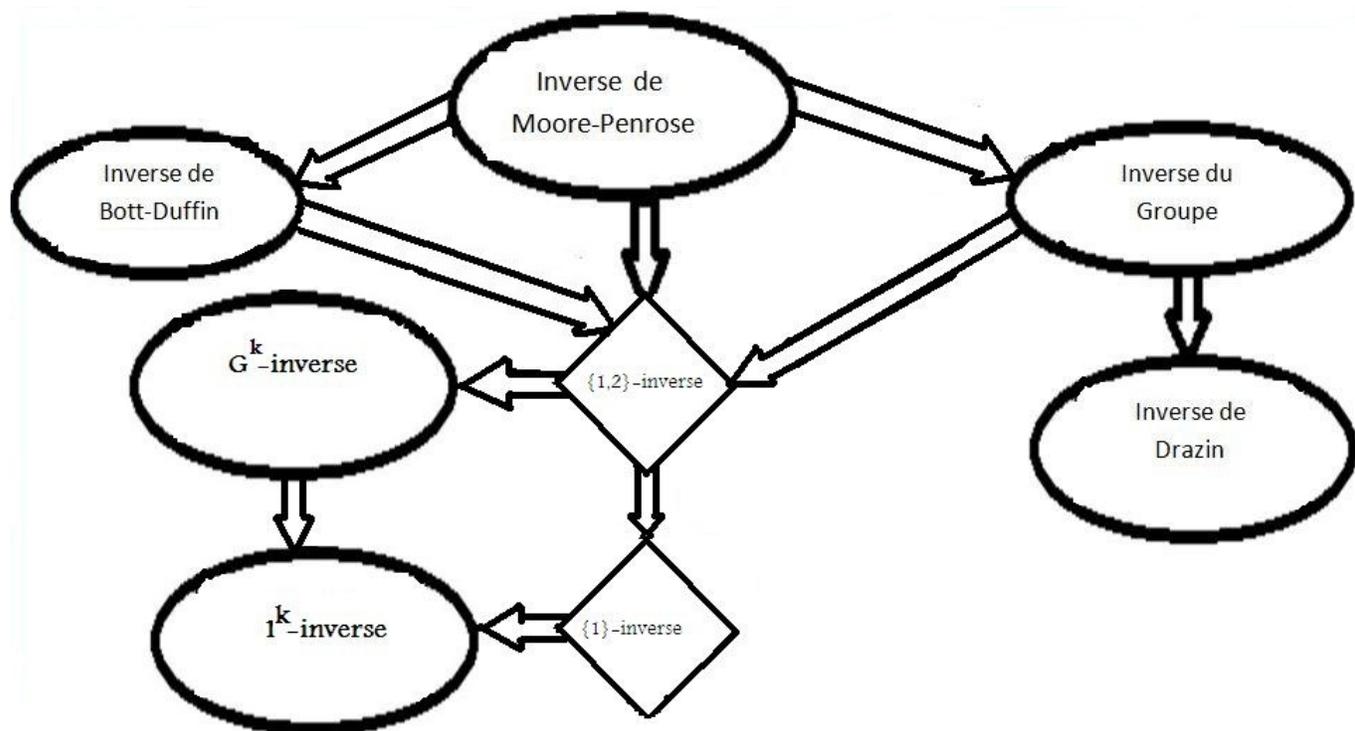
L'inverse de **Drazin**  $A^D$  est, d'après le Théorème 2.6.2,

$$\begin{aligned} A^D &= X \begin{bmatrix} (J_1(1))^{-1} & & & & \\ & (J_2(2))^{-1} & & & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} X^{-1} \\ &= X \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} X^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{4} & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Propriétés 2.6.1.** [3] Soit  $A^D$  l'inverse de **Drazin** de la matrice  $A$  alors :

- (a)  $(A^*)^D = (A^D)^*$ .
- (b)  $(A^t)^D = (A^D)^t$ .
- (c)  $(A^D)^D = A$  si et seulement si l'indice de  $A$  égale a 1.
- (d)  $A^D$  est d'indice 1, et  $(A^D)^\sharp = A^2 A^D$ .
- (e)  $((A^D)^D)^D = A$ .
- (h) Si  $A$  est d'indice  $k$ ,  $R(A^D) = R(A^\ell)$  et  $N(A^D) = N(A^\ell)$  pour tout  $\ell \geq k$ .

Organigramme montrant les relations entre les différents inverses généralisés



# Chapitre 3

## Inverses généralisés des opérateurs linéaires

Dans ce chapitre notre objectif est d'étudier l'inverse généralisé de *Moore-Penrose* des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert. La première section est une brève introduction à l'inversion généralisée des opérateurs linéaires où on a commencé par la définition de *Tseng* [22]. La deuxième et la troisième section concernent respectivement le cas des opérateurs bornés et des opérateurs fermés sur un espace de Hilbert. Dans la section 4 nous approximons  $T^\dagger$  à partir d'un  $\{2\}$ -inverse de l'opérateur linéaire  $T$ , où  $T^\dagger$  est l'inverse de *Moore-Penrose*.

### 3.1 Introduction à des inverses généralisés des opérateurs linéaires

Une définition naturelle d'inverses généralisés dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  est la suivante dû à *Tseng* [22].

**Définition 3.1.1.** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Alors un opérateur  $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  est un inverse généralisé de *Tseng* (i.g. en abrégé) de  $T$  si

$$R(T) \subset D(T^g) \tag{3.1}$$

$$R(T^g) \subset D(T) \tag{3.2}$$

$$T^g T x = P_{\overline{R(T^g)}} x \quad \text{pour tout } x \in D(T) \tag{3.3}$$

$$T T^g y = P_{\overline{R(T)}} y \quad \text{pour tout } y \in D(T^g) \tag{3.4}$$

Cette définition est symétrique en  $T$  et  $T^g$ , donc  $T$  est un i.g de  $T^g$ . Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  peut avoir un i.g unique, ou plusieurs i.g ou il peut n'en avoir aucun.

Nous allons montrer dans le théorème 3.1.1 que  $T$  a un i.g. si et seulement si son domaine est décomposable par rapport à son noyau,

$$D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} (D(T) \cap N(T)^\perp) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \quad (3.5)$$

d'après le Lemme 1.2.1, cette condition est satisfaite si  $N(T)$  est fermé. Donc il est valable pour tous les opérateurs fermés, et en particulier pour les opérateurs bornés. Si  $T$  a des i.g's, alors il a un i.g maximum, dont certaines propriétés sont rassemblées dans le Théorème 3.3.2. Pour les opérateurs bornés d'image fermée, l'i.g maximum coïncide avec l'inverse de **Moore-Penrose**, et sera de même noté par  $T^\dagger$ . Voir le Théorème 3.2.1.

Pour les opérateurs  $T$  sans i.g, on peut faire une approximation à l'i.g maximum  $T^\dagger$  de plusieurs façons, avec l'objectif de conserver le plus grand nombre de ses propriétés utiles que possible. Une telle approximation, dû de **Erdélyi** [12] est décrite dans la Définition 3.3.2 et le Théorème 3.3.3.

Certaines propriétés des i.g, quand ils existent, sont données dans les lemmes suivants, dû à **Arghiriade**, qui seront nécessaires plus tard.

**Lemme 3.1.1.** *Si  $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  est un i.g. de  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , alors  $D(T)$  est décomposable par rapport à  $R(T^g)$ .*

**Preuve.** Résulte de Lemme 1.2.1 puisque, pour tout  $x \in D(T)$

$$P_{\overline{R(T^g)}}x = T^gTx, \quad \text{d'après (3.3)}$$

**Lemme 3.1.2.** *Si  $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  est un i.g. de  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , alors  $T$  est une application injective de  $R(T^g)$  dans  $R(T)$ .*

**Preuve.** Soit  $y \in R(T)$ . Alors

$$y = P_{\overline{R(T)}}y = TT^gy, \quad \text{d'après (3.4)}$$

ce qui montre que  $T(R(T^g)) = R(T)$ . Maintenant, nous montrons que  $T$  est injectif sur  $R(T^g)$ . Soit  $x_1, x_2 \in R(T^g)$  tels que

$$Tx_1 = Tx_2$$

Alors

$$x_1 = P_{\overline{R(T^g)}}x_1 = T^gTx_1 = T^gTx_2 = P_{\overline{R(T^g)}}x_2 = x_2$$

**Lemme 3.1.3.** *Si  $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  est un i.g. de  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , alors :*

$$N(T) = D(T) \cap R(T^g)^\perp \quad (3.6)$$

et

$$C(T) = R(T^g) \quad (3.7)$$

**Preuve.** Soit  $x \in D(T)$ . Alors, d'après le Lemme 3.1.1,

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in R(T^g), \quad x_2 \in D(T) \cap R(T^g)^\perp, \quad x_1 \perp x_2 \quad (3.8)$$

Maintenant

$$x_1 = P_{R(T^g)}x = T^g T(x_1 + x_2) = T^g T x_1$$

donc

$$T^g T x_2 = 0$$

qui, d'après le Lemme 3.1.2, on a

$$T x_2 = 0 \quad (3.9)$$

par conséquent,

$$D(T) \cap R(T^g)^\perp \subset N(T)$$

Réciproquement, soit  $x \in N(T)$  se décomposant comme dans (3.8). Alors

$$\begin{aligned} 0 &= T x = T(x_1 + x_2) \\ &= T x_1. \end{aligned} \text{ d'après (3.9)}$$

et, d'après le Lemme 3.1.2  $x_1 = 0$  et donc

$$N(T) \subset D(T) \cap R(T^g)^\perp$$

Maintenant

$$\begin{aligned} D(T) &= R(T^g) \overset{\perp}{\oplus} (D(T) \cap R(T^g)^\perp), \quad \text{d'après le Lemme 3.1.1,} \\ &= R(T^g) \overset{\perp}{\oplus} N(T) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$R(T^g) = D(T) \cap N(T)^\perp$$

□

L'existence de l'i.g est justifié dans le théorème suivant dû de Tseng.

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Alors  $T$  a un i.g. si et seulement si*

$$D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \quad (3.5)$$

dans ce cas, pour tout sous-espace  $L \subset R(T)^\perp$ , il y a un i.g  $T_L^g$  de  $T$ , avec

$$D(T_L^g) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} L \quad (3.10)$$

et

$$N(T_L^g) = L \quad (3.11)$$

**Preuve.** Si  $T$  a un i.g, alors (3.5) résulte des Lemmes 3.1.1 et 3.1.3. Réciproquement, supposons que (3.5) est vérifiée. Alors

$$R(T) = T(D(T)) = T(C(T)) = R(T_0) \quad (3.12)$$

où  $T_0 = T|_{C(T)}$  est la restriction de  $T$  à  $C(T)$ . L'inverse  $T_0^{-1}$  existe, et satisfait

$$R(T_0^{-1}) = C(T)$$

et, d'après (3.12)

$$D(T_0^{-1}) = R(T)$$

Pour tout sous-espace  $L \subset R(T)^\perp$ , considérons l'extension  $T_L^g$  de  $T_0^{-1}$  avec domaine

$$D(T_L^g) = R(T) \oplus^\perp L$$

et de noyau

$$N(T_L^g) = L$$

De sa définition, il s'ensuit que  $T_L^g$  satisfait

$$D(T_L^g) \supset R(T)$$

et

$$R(T_L^g) = R(T_0^{-1}) = C(T) \subset D(T) \quad (3.13)$$

Pour tout  $x \in D(T)$

$$\begin{aligned} T_L^g T x &= T_L^g T P_{\overline{C(T)}} x, & \text{d'après (3.5)} \\ &= T_0^{-1} T_0 P_{\overline{C(T)}} x, & \text{d'après le Lemme 1.2.1} \\ &= P_{\overline{R(T)}} x, & \text{d'après (3.13).} \end{aligned}$$

Finalment, tout  $y \in D(T_L^g)$  s'écrit, d'après (3.10), comme

$$y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in R(T), \quad y_2 \in L, \quad y_1 \perp y_2$$

et donc

$$\begin{aligned} T T_L^g y &= T T_L^g y_1, & \text{d'après (3.11)} \\ &= T_0 T_0^{-1} y_1 \\ &= y_1 \\ &= P_{\overline{R(T)}} y. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $T_L^g$  est un i.g. de  $T$ .

□

**Théorème 3.1.2.** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  a des i.g.'s est soit  $L$  un sous espace de  $R(T)^\perp$ . Alors les conditions

$$D(T_L^g) = R(T) \oplus^\perp L \quad (3.10)$$

$$N(T_L^g) = L \quad (3.11)$$

déterminent un unique i.g, qui est donc égale à  $T_L^g$  construit dans la preuve du Théorème précédent.

**Preuve.** Soit  $T^g$  est un i.g de  $T$  vérifiant (3.10) et (3.11), et soit  $y \in D(T^g)$  où  $y = y_1 + y_2$ ,  $y_1 \in R(T)$ ,  $y_2 \in L$

Alors

$$\begin{aligned} T^g y &= T^g y_1, & \text{d'après (3.11)} \\ &= T^g T x_1, & \text{pour } x_1 \in D(T) \\ &= P_{\overline{R(T^g)}} x_1, & \text{d'après (3.3)} \\ &= P_{\overline{C(T)}} x_1, & \text{d'après (3.7)} \end{aligned}$$

Nous affirmons que ceci détermine  $T^g$  de façon unique. Car, supposons qu'il y a un  $x_2 \in D(T)$  avec  $y_1 = T x_2$ , alors :

$$T^g y = P_{\overline{C(T)}} x_2$$

par conséquent

$$\begin{aligned} P_{\overline{C(T)}} x_1 - P_{\overline{C(T)}} x_2 &= P_{\overline{C(T)}} (x_1 - x_2) \\ &= 0 \text{ puisque } (x_1 - x_2) \in N(T) \end{aligned}$$

□

## 3.2 Inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire borné

**Définition 3.2.1.** Soit  $T$  un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On dit que  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  est un inverse généralisée de  $T$  ( désigné par  $X(INV)T$  ) Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1)  $\forall x \in \mathcal{H}, T X T x = T x$
- 2)  $\forall y \in \mathcal{H}, X T X y = X y$

Il est alors facile de constater que  $T X$  et  $X T$  sont des projections dans  $\mathcal{H}$ . Remarquons aussi que  $X$  n'est pas en général unique et que si  $T$  est inversible alors  $T^{-1} = X$ .

**Définition 3.2.2.** Soit  $T$  un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On dit que  $T^\dagger$  est un inverse de **Moore-Penrose** de  $T$  ( désigné par  $T^\dagger = IMP(T)$  ) si  $T^\dagger(INV)T$  et  $TT^\dagger$  et  $T^\dagger T$  sont des projections orthogonales.

Il est facile de montrer que  $T^\dagger$  est unique.

Si  $R(T)$  est fermé alors  $T^\dagger$  existe même si  $T$  est fermé à domaine dense.

Soit  $T$  un opérateur linéaire borné à image fermée, défini sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Nous allons donner une méthode pour le calcul de son inverse de **Moore-Penrose**  $T^\dagger$  dans le chapitre 4.

**Théorème 3.2.1.** ( *Petryshyn [20]* ) Si  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  et  $R(T)$  est fermé, alors  $T^\dagger$  est caractérisé comme l'unique solution  $X$  des systèmes équivalents suivants :

- (a)  $TXT = T$ ,  $XTX = X$ ,  $(TX)^* = TX$ ,  $(XT)^* = XT$ ,
- (b)  $TX = P_{R(T)}$ ,  $N(X^*) = N(T)$ ,
- (c)  $TX = P_{R(T)}$ ,  $XT = P_{R(T^*)}$ ,  $XTX = X$ ,
- (d)  $XTT^* = T^*$ ,  $XX^*T^* = X$ ,
- (e)  $XTx = x$  pour tout  $x \in R(T^*)$ ,  
 $Xy = 0$  pour tout  $y \in N(T^*)$ ,
- (f)  $XT = P_{R(T^*)}$ ,  $N(X) = N(T^*)$ ,
- (g)  $TX = P_{R(T)}$ ,  $XT = P_{R(X)}$ .

La notation  $T^\dagger$  est justifiée d'après le Théorème 3.2.1(a), qui sont les quatre équations de **Penrose**.

Si  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  ne satisfait pas (3.5), alors il n'a pas d'i.g, d'après le Théorème 3.1.1. Dans ce cas, on peut faire une approximation de  $T^\dagger$  par un opérateur qui a des propriétés de  $T^\dagger$ , et il se réduit à lui si  $T^\dagger$  existe. Une telle approche, dû de Erdélyi [12] pour les opérateurs fermés, est décrite dans la section suivante.

### 3.3 Inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire fermé à domaine dense

**Définition 3.3.1.** Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  et densément définit. Alors il existe un unique opérateur densément définit  $T^\dagger \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  de domaine

$D(T^\dagger) = R(T) \oplus^\perp R(T)^\perp$  et est les propriétés suivantes ;

- (1)  $TT^\dagger y = P_{\overline{R(T)}} y$ , pour tout  $y \in D(T^\dagger)$ .
- (2)  $T^\dagger T x = P_{N(T)^\perp} x$ , pour tout  $x \in D(T)$ .
- (3)  $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$ .

Cet opérateur  $T^\dagger$  est appelé l'inverse de **Moore-Penrose** de  $T$ .

Pour tout  $y \in D(T^\dagger)$ , soit

$$L(y) = \{x \in D(T) : \|Tx - y\| \leq \|Tu - y\| \forall u \in D(T)\}.$$

ici tout  $u \in L(y)$  est appelée une **solution des moindres carrés** de l'équation de l'opérateur  $Tx = y$ . Le vecteur  $x = T^\dagger y \in L(y)$  et vérifie,  $\|T^\dagger y\| \leq \|x\| \forall u \in L(y)$  et est appelée **la solution des moindres carrés de la norme minimale**.

**Remarque 3.3.1.** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  vérifiant (3.5). L'i.g maximum de  $T$ , noté  $T^\dagger$ , est l'i.g. de  $T$  de domaine

$$D(T^\dagger) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} R(T)^\perp \tag{3.14}$$

et de noyau

$$N(T^\dagger) = R(T)^\perp \tag{3.15}$$

D'après le Théorème 3.1.1, l'i.g.  $T^\dagger$  ainsi défini est unique. Il est maximum et tout autre i.g. de  $T$  est une restriction de  $T^\dagger$ .

En outre,  $T^\dagger$  de domaine dense, d'après (3.14), et de noyau fermé, d'après (3.15). Choisir  $L$  comme un sous-espace dense de  $R(T)^\perp$  montre que un opérateur  $T$  peut avoir une infinité d'i.g's à domaine denses  $T_L^g$ . De plus,  $T$  peut avoir un nombre infini d'i.g's  $T_L^g$  avec un noyau fermé, chacun obtenu en choisissant  $L$  comme un sous-espace fermé de  $R(T)^\perp$ . Cependant,  $T^\dagger$  est l'unique i.g à domaine dense. avec un noyau fermé en vertu du Théorème 3.3.1.

Les opérateurs fermés à domaine dense, les i.g's maximums sont définis par la méthode de construction suivante dû à **Hestenes** [14].

Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  à domaine dense. Puisque  $N(T)$  est fermé, il s'ensuit, de Lemme 1.2.1, que

$$D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \tag{3.5}$$

et donc

$$G(T) = N \overset{\perp}{\oplus} C \tag{3.16}$$

En utilisant **(C)**, **(G)**, et **(D)** dans la première section du chapitre 1. Alors

$$N = J_1 N(T) = G(T) \cap \mathcal{H}_{1,0} \tag{3.17}$$

$$C = \{(x, Tx) : x \in C(T)\} \tag{3.18}$$

De même, puisque  $T^*$  est fermé, il découle de **(B)** de la première section du chapitre 1, que

$$G(T)^\perp = N^* \overset{\perp}{\oplus} C^* \tag{3.19}$$

où

$$N^* = J_2 N(T^*) = G(T)^\perp \cap \mathcal{H}_{0,2} \tag{3.20}$$

$$C^* = \{(-T^*y, y) : y \in C(T^*)\} \quad (3.21)$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1,2} &= G(T) \overset{\perp}{\oplus} G(T)^\perp, \text{ puisque } T \text{ est fermé} \\ &= (N \overset{\perp}{\oplus} C) \overset{\perp}{\oplus} (N^* \overset{\perp}{\oplus} C^*), \text{ d'après (3.16) et (3.19)} \\ &= (C \overset{\perp}{\oplus} N^*) \overset{\perp}{\oplus} (C^* \overset{\perp}{\oplus} N) \\ &= G^\dagger \overset{\perp}{\oplus} G^{\dagger*} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} G^\dagger &= C \overset{\perp}{\oplus} N^* \\ G^{\dagger*} &= C^* \overset{\perp}{\oplus} N \end{aligned}$$

Puisque

$$G^\dagger \cap \mathcal{H}_{1,0} = (0, 0)$$

il s'ensuit que  $G^\dagger$  est le graphe inverse  $G^{-1}(T^\dagger) = \{(T^\dagger y, y) : y \in D(T^\dagger)\}$  de l'opérateur  $T^\dagger \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ , de domaine

$$\begin{aligned} J_2^{-1} P_{\mathcal{H}_{0,2}} G^\dagger &= T(C(T)) \overset{\perp}{\oplus} N(T^*) \\ &= R(T) \overset{\perp}{\oplus} R(T)^\perp, \text{ d'après (3.12) et } (\mathbf{E}) \text{ de la première section dans le chapitre 1} \end{aligned}$$

et de noyau

$$J_2^{-1} N^* = N(T^*) = R(T)^\perp$$

tel que

$$T^\dagger T x = P_{\overline{C(T)}} x, \text{ pour tout } x \in N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T)$$

et

$$T T^\dagger y = P_{\overline{R(T)}} y, \text{ pour tout } y \in R(T) \overset{\perp}{\oplus} R(T)^\perp$$

Donc  $T^\dagger$  est l'i.g maximums d'après la Remarque 3.3.1.

De même,  $G^{\dagger*}$  est le graphe de l'opérateur  $-T^{*\dagger} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , qui est l'i.g maximum de  $-T^*$ .

Cette construction met en évidence les propriétés de l'i.g maximum.

**Théorème 3.3.1.** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  ayant des i.g.'s. Alors  $T^\dagger$  est l'unique i.g à domaine dense et de noyau  $N(T^\dagger)$  fermé.

**Preuve.** Soit  $T^g$  un i.g à domaine dense de  $T$  et de noyau fermé. Alors :

$$\begin{aligned} D(T^g) &= N(T^g) \overset{\perp}{\oplus} C(T^g), \quad \text{d'après Théorème 3.1.1} \\ &= N(T^g) \overset{\perp}{\oplus} R(T), \quad \text{d'après (3.7)} \end{aligned}$$

qui, avec les hypothèses  $\overline{D(T^g)} = \mathcal{H}_2$  et  $N(T^g) = \overline{N(T^g)}$ , donc

$$N(T^g) = R(T)^\perp$$

$T^g$  a le même domaine et le même noyau que  $T^\dagger$ , par conséquent  $T^g = T^\dagger$ , d'après le Théorème 3.1.2.

□

**Théorème 3.3.2.** ( *Hestenes* [14]). *Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  à domaine dense. Alors*

- (a)  $T^\dagger \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ ,
- (b)  $D(T^\dagger) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} N(T^*)$  ,  $N(T^\dagger) = N(T^*)$  ,
- (c)  $R(T^\dagger) = C(T)$  ,
- (d)  $T^\dagger T x = P_{\overline{R(T^\dagger)}} x$  pour tout  $x \in D(T)$  ,
- (e)  $TT^\dagger y = P_{\overline{R(T)}} y$  pour tout  $x \in D(T^\dagger)$  ,
- (f)  $T^{\dagger\dagger} = T$  ,
- (g)  $T^{*\dagger} = T^{\dagger*}$  ,
- (h)  $N(T^{*\dagger}) = N(T)$ ,
- (i)  $(T^*T)^* = T^\dagger T^{*\dagger}$  , et  $N(T^*T) = N(T)$  ,
- (j)  $(TT^*)^\dagger = T^{*\dagger} T^\dagger$  , et  $N(TT^*) = N(T^*)$ .

**Définition 3.3.2.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  et soit  $T_r$  la restriction de  $T$  définie sur*

$$D(T_r) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) , N(T_r) = N(T)$$

*L'existence de  $T_r^\dagger$  est justifié puisque  $T_r$  vérifie (3.5). Les propriétés suivantes de  $T_r^\dagger$  sont vérifiées.*

**Théorème 3.3.3.** ( *Erdélyi* [12]) *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  et soit sa restriction  $T_r$  définie précédemment. Alors*

- (a)  $T_r^\dagger = T^\dagger$  si  $T^\dagger$  existe,
- (b)  $D(T_r^\dagger) = T(C(T)) \overset{\perp}{\oplus} T(C(T))^\perp$  , et en général,  $R(T) \not\subset D(T_r^\dagger)$  ,
- (c)  $R(T_r^\dagger) = C(T)$  ,  $R(T_r^\dagger) = N(T)^\perp$  ,
- (d)  $T_r^\dagger T x = P_{\overline{R(T_r^\dagger)}} x$  pour tout  $x \in D(T_r)$  ,
- (e)  $TT_r^\dagger y = P_{\overline{R(T)}} y$  pour tout  $y \in D(T_r^\dagger)$  ,
- (f)  $D((T_r^\dagger)_r^\dagger) = \overline{N(T)} \overset{\perp}{\oplus} C(T)$  ,
- (g)  $R((T_r^\dagger)_r^\dagger) = T(C(T))$  ,
- (h)  $N((T_r^\dagger)_r^\dagger) = \overline{N(T)}$  ,
- (i)  $T \subset (T_r^\dagger)_r^\dagger$  si (3.5) est vérifié ,
- (j)  $T = (T_r^\dagger)_r^\dagger$  si et seulement si  $N(T)$  est fermé ,
- (k)  $T_r^{\dagger*} \subset (T^*)^\dagger$  si  $T$  est à domaine dense et fermable.

### 3.4 Approximation de l'inverse de Moore-Penrose

Dans cette section on calcul une approximation de l'inverse de *Moore-Penrose*  $T^\dagger$  de  $T$  par son  $\{2\}$ -inverse. Nous avons aussi illustrer cette méthode avec un exemple, nous prouvons tout d'abord un lemme qui est utile pour prouver le théorème principal.

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  densément définit. Soit  $Y_n \subseteq R(T)$  tel que*

$$(a) \quad Y_n \subseteq Y_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$(b) \quad \dim Y_n = n$$

$$(c) \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} = \overline{R(T)}$$

Soit  $Z_n = (I + TT^*)^{-1}Y_n$  et  $X_n = T^*Z_n = T^*(I + TT^*)^{-1}Y_n$ . Alors

$$(1) \quad X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \dots \subseteq \overline{R(T^*)} = N(T)^\perp, \dim X_n = n \text{ et}$$

$$(2) \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n} = \overline{R(T)}$$

$$(3) \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = \overline{R(T^*)}$$

$$(4) \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} TX_n} = \overline{R(T)}.$$

**Preuve.** D'après la définition de  $X_n$ ,  $X_n \subseteq C(T) \subseteq N(T)^\perp = R(T^*)$  pour tout  $n$  et  $X_n \subseteq X_{n+1}$ . Puisque l'opérateur  $T^*(I + TT^*)^{-1} \big|_{\overline{R(T)}}$  est injectif alors  $\dim X_n = n = \dim Y_n$ .

Pour une preuve de (2), nous utilisons l'observation suivante :

$$\overline{(I + TT^*)^{-1}(\overline{R(T)})} = \overline{R(T)}$$

On peut prouver facilement que  $(I + TT^*)^{-1}(N(TT^*)) = N(TT^*)$ . D'après le Théorème de projection 1.2.2,  $\mathcal{H}_2 = N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} N(TT^*)^\perp$ . Alors  $\mathcal{H}_2 = N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} \overline{R(TT^*)}$ . Mais

$$(I + TT^*)^{-1}(\mathcal{H}_2) = D(TT^*) = N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} C(TT^*)$$

Donc

$$\begin{aligned} (I + TT^*)^{-1}(\mathcal{H}_2) &= (I + TT^*)^{-1}(N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} \overline{R(TT^*)}) \\ &= N(TT^*) \overset{\perp}{\oplus} ((I + TT^*)^{-1}(\overline{R(TT^*)})) \end{aligned}$$

De cela on a  $(I + TT^*)^{-1}(\overline{R(TT^*)}) = C(TT^*)$  et que  $\overline{C(TT^*)} = \overline{N(TT^*)}$ . Nous avons  $(I + TT^*)^{-1}(\overline{R(TT^*)}) = \overline{R(TT^*)}$ .

Par conséquent,  $\overline{(I + TT^*)^{-1}(\overline{R(T)})} = \overline{R(T)}$ , d'après la Proposition 1.1.2. Ainsi

$$\begin{aligned} \overline{R(T)} &= \overline{(I + TT^*)^{-1}(\overline{R(T)})} = \overline{(I + TT^*)^{-1}(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n})} \\ &= \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (I + TT^*)^{-1} Y_n} \\ &= \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n}. \end{aligned}$$

Cela prouve (2).

Il est clair que  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} \subseteq \overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$ .

Supposons  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} \subsetneq N(T)^\perp$ . Alors il existe un  $0 \neq z_0 \in N(T)^\perp$  tel que  $z_0 \in (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n})^\perp$ . Alors

$$\langle z_0, T^*(I + TT^*)^{-1}y \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in R(T)$$

Puisque  $T^*(I + TT^*)^{-1}$  est borné ceci est valable pour tous les  $y \in \overline{R(T)}$ .

Nous affirmons que cela est vrai pour tous les  $y \in \mathcal{H}_2$ . Soit  $y \in \mathcal{H}_2$ , alors  $y = u + v$  tel que  $u \in \overline{R(T)}$  et  $v \in R(T)^\perp = N(T^*) \subseteq D(T^*)$ . Ainsi d'après la Proposition 1.1.3,  $T^*(I + TT^*)^{-1}v = (I + T^*T)^{-1}T^*v = 0$ . Ainsi

$$\langle z_0, T^*(I + TT^*)^{-1}y \rangle = \langle z_0, T^*(I + TT^*)^{-1}u \rangle = 0$$

Cela prouve notre affirmation.

Ensuite, puisque  $\overline{C(T)} = N(T)^\perp$ , il existe une suite  $(z_n) \subseteq C(T)$  tel que  $z_n \rightarrow z_0$ . Donc pour tous  $y \in \mathcal{H}_2$ ,

$$\begin{aligned} 0 = \langle z_0, T^*(I + TT^*)^{-1}y \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n, T^*(I + TT^*)^{-1}y \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tz_n, (I + TT^*)^{-1}y \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (I + TT^*)^{-1}Tz_n, y \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(I + T^*T)^{-1}z_n, y \rangle. \end{aligned}$$

Cela montre que  $T(I + T^*T)^{-1}z_n \xrightarrow{w} 0$  ( faiblement ), mais puisque  $T(I + T^*T)^{-1}$  est borné, on a  $T(I + T^*T)^{-1}z_0 = 0$ . Donc  $T(I + T^*T)^{-1}z_0 \in N(T)$ . Soit  $y = (I + T^*T)^{-1}z_0$ . Alors  $Ty = 0$ . Ainsi  $z_0 = (I + T^*T)y = y \in N(T)$ . Donc  $z_0 \in N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$ . Ainsi  $z_0 = 0$ , une contradiction à notre hypothèse. Cela prouve (3).

En utilisant une preuve similaire on obtient (4).

**Remarque 3.4.1.** *On peut noter que le Lemme 3.4.1 montre que si  $R(T)$  est séparable, alors  $R(T^*)$  est séparable.*

**Théorème 3.4.1.** Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  un opérateur densément défini à image séparable  $R(T)$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un  $\{2\}$ -inverse borné  $T_n^{(2)}$  de  $T$  de rang  $n$  tel que

$$D(T^\dagger) = \{y \in \mathcal{H}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y \text{ existe}\}$$

et  $T^\dagger y = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y$  pour tout  $y \in D(T^\dagger)$ .

**Remarque 3.4.2.** On a vu dans le chapitre 2 que le  $\{2\}$ -inverse d'une matrice, peut être exprimé de même pour un opérateur. Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . S'il existe un opérateur linéaire  $T^{(2)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  tel que  $T^{(2)}TT^{(2)} = T^{(2)}$ , alors  $T^{(2)}$  est appelé  $\{2\}$ -inverse de  $T$ .

**Preuve du Théorème 3.4.1.** Supposons que  $R(T)$  est de dimension infinie. Puisque  $R(T)$  est séparable, nous pouvons trouver une suite de sous-espaces  $Y_n$  de  $R(T)$  ayant les propriétés suivantes :

- (1)  $Y_n \subseteq Y_{n+1}$  et  $\dim Y_n = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (2)  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} = \overline{R(T)}$ .

( Par exemple, si  $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$  est un ensemble orthonormé qui s'étend sur  $R(T)$ , alors  $Y_n = \text{span}(\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\})$ ).

Soit  $Z_n$  et  $X_n$  comme dans le Lemme 3.4.1. Alors  $Z_n \subseteq Z_{n+1}$  et  $\dim Z_n = n$ ,  $X_n \subseteq X_{n+1}$  et  $\dim X_n = n$ .

Soit  $P_n : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$  et  $Q_n : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  deux suites de projections orthogonales avec  $R(P_n) = Z_n$  et  $R(Q_n) = X_n$ . Soit  $T_n = P_n T$ . Ici,  $D(T_n) = D(T)$  et  $T_n x \rightarrow T x$  pour tout  $x \in D(T)$ .

Ensuite, nous affirmons que  $R(T_n) = R(P_n) = Z_n$ . Il est clair que  $R(T_n) \subseteq R(P_n) = Z_n$ . Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer  $N(T_n^*) \subseteq N(P_n)$ .

Maintenant, soit  $z \in N(T_n^*)$ . Alors  $T_n^* P_n z = 0$ . Ainsi  $P_n z \in N(T_n^*) = R(T)^\perp$ .

Mais,  $P_n z \in \overline{R(T)}$ . Ainsi  $P_n z = 0$ . Donc  $z \in N(P_n)$ . Notez que  $T_n^* = T^* P_n = T^* |_{R(P_n)} = T^* |_{Z_n}$ .

Alors  $R(T_n^*) = T^* Z_n = X_n = N(T_n)^\perp$ . C'est  $N(T_n) = X_n^\perp$ .  $R(T_n)^\perp = N(T_n^*) = Z_n^\perp$ , et  $R(T_n) = Z_n$ . Alors  $T_n |_{X_n} : X_n \rightarrow Z_n$  est un opérateur bijectif. par conséquent  $\dim X_n = \dim Z_n = n$ .

□

**Construction de  $\{2\}$ -inverses :**

On définit  $T_n^{(2)} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$  par

$$T_n^{(2)}y = \begin{cases} (T_n |_{X_n})^{-1}y, & \text{si } y \in Z_n; \\ 0, & \text{si } y \in Z_n^\perp. \end{cases}$$

Ici  $T_n^{(2)} = T_n^\dagger$  et  $T_n^\dagger$  est borné puisque  $R(T_n)$  est fermé.  $T_n^{(2)}$  est aussi un  $\{2\}$ -inverse de  $T_n$ . Ici  $N(T_n^{(2)}) = Z_n^\perp$  et  $R(T_n^{(2)}) = X_n$ .

Ensuite, nous affirmons que  $T_n^{(2)}$  est aussi un  $\{2\}$ -inverse de  $T$ . Pour cela nous utilisons l'observation suivante :  $T_n^{(2)}y = T_n^{(2)}P_n y$ , pour tous les  $y \in \mathcal{H}_2$ . Soit  $y \in \mathcal{H}_2$ . Alors  $y = u + v$  pour certains  $u \in Z_n$  et  $v \in Z_n^\perp$ .

D'où

$$\begin{aligned} T_n^{(2)}y = T_n^{(2)}(u + v) &= T_n^{(2)}u \quad (T_n^{(2)}(v) = 0, \text{ puisque } v \in Z_n^\perp) \\ &= T_n^{(2)}P_n y \end{aligned}$$

puisque  $T_n^{(2)}$  est un  $\{2\}$ -inverse de  $T_n$ ,

$$\begin{aligned} T_n^{(2)}T_n^{(2)}y = T_n^{(2)}P_n T_n^{(2)}y &= T_n^{(2)}T_n T_n^{(2)}y \\ &= T_n^{(2)}y \end{aligned}$$

On peut maintenant prouver que

$$D(T^\dagger) = \{y \in \mathcal{H}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y \text{ existe}\}$$

Soit  $y \in D(T^\dagger)$ . Alors  $T^\dagger y \in C(T)$ .

Puisque  $Q_n x \longrightarrow x$  pour tout  $x \in C(T) \subseteq N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$ , il est clair que  $Q_n T^\dagger y \longrightarrow T^\dagger y$ . Ensuite, nous montrons que  $Q_n T^\dagger y = T_n^{(2)}y$ , pour tous les  $y \in D(T^\dagger)$ . Des faits  $Q_n T^\dagger y \in X_n$ ,  $(Q_n - I)T^\dagger y \in N(T_n)$  et le Théorème 1.4.1,

$$\begin{aligned} Q_n T^\dagger y = T_n^{(2)}T_n Q_n T^\dagger y &= T_n^{(2)}T_n Q_n T^\dagger y + T_n^{(2)}P_n y - T_n^{(2)}P_n y \\ &= T_n^{(2)}(T_n Q_n T^\dagger y - P_n y) + T_n^{(2)}P_n y \\ &= T_n^{(2)}(T_n Q_n T^\dagger y - P_n T T^\dagger y) + T_n^{(2)}P_n y \\ &= T_n^{(2)}(T_n Q_n - P_n T)T^\dagger y + T_n^{(2)}P_n y \\ &= T_n^{(2)}T_n(Q_n - I)T^\dagger y + T_n^{(2)}P_n y \\ &= T_n^{(2)}P_n y \\ &= T_n^{(2)}y. \end{aligned}$$

Puisque  $Q_n T^\dagger y \longrightarrow T^\dagger y$  pour tout  $y \in D(T^\dagger)$ , et d'après la preuve précédente  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y$  existe et égale à  $T^\dagger y$ .

Cela montre que  $D(T^\dagger) \subseteq \{y \in \mathcal{H}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y \text{ existe}\}$ .

Ensuite, nous prouvons que si  $y \in \mathcal{H}_2$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y$  existe, alors  $y \in D(T^\dagger)$ .

Soit  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y$ . On peut facilement vérifier que  $TT_n^{(2)}$  est une projection avec  $R(TT_n^{(2)}) = TX_n$  et  $N(TT_n^{(2)}) = (TX_n)^\perp$ . Comme d'après le Lemme 3.4.1, il s'ensuit que  $\overline{\cup_{n=1}^\infty TX_n} = \overline{R(T)}$ , notons que  $TT_n^{(2)}y \rightarrow P_{\overline{R(T)}}y$ .

Comme  $T$  est fermé,  $x_0 \in D(T)$  et  $Tx_0 = P_{\overline{R(T)}}y$ .

puisque  $x_0 \in C(T) = R(T^\dagger)$ , il existe  $u \in D(T^\dagger)$  tel que  $x_0 = T^\dagger u$ .

Maintenant,  $P_{\overline{R(T)}}y = Tx_0 = TT^\dagger u = P_{\overline{R(T)}}u$ . Alors  $y - u \in R(T)^\perp = N(T^\dagger)$ . C'est  $y = y - u + u \in D(T^\dagger)$ . Par conséquent  $x_0 = T^\dagger u = T^\dagger y$ . Ceci termine la preuve.  $\square$

**Théorème 3.4.2.** [16] Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  un opérateur densément défini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $R(T)$  est fermé.
- (2)  $T^\dagger$  est borné.
- (3)  $D(T^\dagger) = \mathcal{H}_2$ .
- (4) 0 n'est pas un point d'accumulation de  $\sigma(T^*T)$ .

Si, en plus  $R(T)$  est séparable et  $T_n^{(2)}$  est comme dans le Théorème 3.4.1, alors chacun des assertions ci-dessus est équivalente à :

- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y$  existe pour tout  $y \in \mathcal{H}_2$ .
- (6)  $T_n^{(2)}$  est uniformément borné.

**Théorème 3.4.3.** [16] Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  un opérateur densément défini. S'il existe une suite de projections orthogonales décroissantes  $P_n$  sur  $\mathcal{H}_2$  vers un sous-espace de  $\overline{R(T)}$  avec la propriété  $P_n y \rightarrow P_{\overline{R(T)}}y$  pour tout  $y \in \mathcal{H}_2$  et  $R(P_n T)$  est fermé, alors pour chaque  $n$ , il existe un  $T_n^{(2)}$  tel que

$$D(T^\dagger) = \{y \in \mathcal{H}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y \text{ existe}\}$$

et

$$T^\dagger y = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)}y, \text{ pour tout } y \in D(T^\dagger)$$

On peut prouver ce Théorème par une preuve similaire du Théorème 3.4.1.

**Exemple 3.4.1.** Soit  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  avec

$$D(T) = \{(x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 : (0, 2x_2, 0, 4x_4, \dots) \in \ell^2\}$$

Défini par

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, 2x_2, 0, 4x_4, \dots) \text{ pour tous } (x_1, x_2, \dots) \in D(T).$$

On peut montrer que  $T = T^*$  et  $R(T)$  est fermé. Soit  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  est la base orthogonale pour  $\ell^2$ . Ici  $R(T) = \text{span}(e_2, e_4, \dots, e_{2n}, \dots)$ . Soit  $Y_n = \text{span}\{e_2, e_4, \dots, e_{2n}\}$ . Alors  $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ ,  $\dim(Y_n) = n$  et  $\bigcup_{n=1}^\infty Y_n = R(T)$ .  
Puisque  $T = T^*$ , nous avons  $I + TT^* = I + T^2$ .  
Pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots) \in D(T^2)$ ,

$$(I + T^2)x = (x_1, 5x_2, x_3, 17x_4, \dots, x_{2n-1}, (1 + 4n^2)x_{2n}, \dots)$$

Pour tout  $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2$ ,

$$(I + T^2)^{-1}y = (y_1, \frac{y_2}{5}, y_3, \frac{1}{17}y_4, \dots, y_{2n-1}, \frac{y_{2n}}{1+4n^2}, \dots), \quad y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2.$$

En particulier,  $(I + T^2)^{-1}(e_{2n}) = \frac{e_{2n}}{1+4n^2}$ . D'où  $Z_n = (I + T^2)^{-1}Y_n = Y_n$ .

Aussi  $X_n = T^*Z_n = Y_n$ . Alors  $X_n = Y_n = Z_n$ . Ainsi  $P_n = Q_n$ . C'est  $P_n x = x_2 e_2 + x_4 e_4 + \dots + x_{2n} e_{2n}$  pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$ .  $T_n = P_n T$ , avec  $T_n x = 2x_2 e_2 + 4x_4 e_4 + \dots + 2nx_{2n} e_{2n}$ . Ainsi

$$T_n^{(2)}(y) = \begin{cases} \frac{y_2}{2} e_2 + \frac{y_4}{4} e_4 + \dots + \frac{y_{2n}}{2n} e_{2n} & \text{si } y \in Y_n; \\ 0, & \text{si } y \in Y_n^\perp. \end{cases}$$

Donc d'après le Théorème 3.4.1,  $D(T^\dagger) = \{y \in \ell^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)} \text{ existe}\} = \ell^2$  et

$$T^\dagger y = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(2)} y = (0, \frac{1}{2}y_2, 0, \frac{1}{4}y_4, \dots) \text{ pour tout } y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2$$

# Chapitre 4

## Algorithme de Calcul de L'inverse Généralisé

Le but de ce chapitre est de donner un algorithme simple et efficace pour le calcul de l'inverse de *Moore-Penrose* d'un opérateur donné à condition que nous connaissons déjà certains inverse généralisé de cet opérateur.

Dans la première section on donne quelques conséquences de la décomposition en valeurs singulières ( ou SVD, *Singular Value Decomposition* ) d'une matrice qui est un outil important de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes. La méthode la plus célèbre pour le calcul de l'inverse de *Moore-Penrose* des matrices, dans Matlab par exemple on peut décomposer une matrice en valeurs singulières directement par la commande "*svd*" et calculer leur inverse de *Moore-Penrose* a l'aide de la commande "*pinv*".

Dans la deuxième section nous proposons un algorithme pour un calcul rapide de l'inverse de *Moore-Penrose* des matrices sur n'importe quel ordinateur. L'algorithme est basé sur une factorisation de *Cholesky* de rang maximum. Le cas des matrices singulières symétriques positives est traité par *P. Courrieu* dans [10]. On termine cette section par un programme sous Matlab "*geninv*" pour exécuter l'algorithme précédent.

La troisième section concerne les algorithmes de calcul de l'inverse de *Moore-Penrose* pour les opérateurs bornés puis les opérateurs fermés à domaine dense.

## 4.1 Décomposition en Valeurs Singulières

### Introduction

La décomposition en valeurs singulières ( SVD ) a été prouvé respectivement par **E. Beltrami** et **C. Jordan** en 1873 et 1874, et **J. J. Sylvester** pour les matrices réelles carrées en 1989, par **Autonne** pour les matrices carrées complexes en 1915, et par **Eckart** et **Young** pour les matrices rectangulaires. En parallèle, les valeurs singulières des opérateurs intégrales ont été étudiées par **Schmidt** et **Weyl**. Pour l'histoire voir **Horn** et **Johnson** [15].

La SVD, indique que pour toute  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  avec les valeurs singulières  $\sigma(A) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ , il existe deux matrices unitaires  $U \in U^{m \times m}$  (l'ensemble des matrices  $m \times m$  unitaire) et  $V \in U^{n \times n}$  telle que la matrice  $m \times n$

$$\Sigma = U^*AV = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 \\ & & \sigma_r & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & 0 & & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable. Donc, toute  $m \times n$  matrice complexe est unitairement équivalente à une matrice diagonalisable

$$A = U\Sigma V^*$$

La déclaration correspond à des transformations linéaires est que, pour toute transformation linéaire  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  avec  $\dim R(A) = r$ , il existe deux bases orthogonales  $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  et  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{C}^m$  et  $\mathbb{C}^n$ , respectivement, telle que la matrice correspondante représentative  $A_{\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}}$  est diagonalisable,

$$A_{\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

c.à.d,

$$\begin{cases} Av_j = \sigma_j u_j, & j \in \overline{1, r}, \\ Av_j = 0, & j \in \overline{r+1, n}. \end{cases}$$

L'expression

$$A = U\Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 \\ & & \sigma_r & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & 0 & & \vdots & 0 \end{bmatrix}, \quad U \in U^{m \times m}, \quad V \in U^{n \times n}$$

est appelée la décomposition en valeurs singulières ( SVD abrégé ) de  $A$ .

La SVD est d'une importance fondamentale dans la théorie et le calcul des inverses généralisés, spécialement l'inverse de **Moore-Penrose**. elle est la base d'une théorie spectrale généralisée pour les matrices rectangulaires, et une extension de la théorie classique du spectre pour les matrices normales.

**Exemple 4.1.1.**  $A$  et  $A^*$  sont les mêmes valeurs singulières.

**Exemple 4.1.2.** les matrices Unitaires équivalentes ont les mêmes valeurs singulières.

**Preuve.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , et soit  $U \in U^{m \times m}$  et  $V \in U^{n \times n}$  deux matrices unitaires quelconques. Alors la matrice

$$(UAV)(UAV)^* = UAVV^*A^*U^* = UAA^*U^*$$

est similaire à  $AA^*$ , donc ont les mêmes valeurs propres. Par conséquent, les matrices  $UAV$  et  $A$  ont les mêmes valeurs singulières. Donc  $UAV$  est la décomposition en valeurs singulières.

**Théorème 4.1.1.** Soit  $0 \neq A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ , soit  $\sigma_i(A) \quad i \in \overline{1, r}$ , les valeurs singulières de  $A$ , telles que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (4.1)$$

Soit  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  un système orthonormé des vecteurs propres de  $AA^*$  correspondant à ses valeurs propres non nulles :

$$AA^*u_i = \sigma_i^2 u_i \quad i \in \overline{1, r} \quad (4.2)$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j \in \overline{1, r} \quad (4.3)$$

et les vecteurs  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  définits par

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A^* u_i \quad i \in \overline{1, r} \quad (4.4)$$

Alors  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  est un système orthonormé des vecteurs propres de  $A^*A$  correspond à ses valeurs propres non nulles

$$A^*Av_i = \sigma_i^2 v_i \quad i \in \overline{1, r} \quad (4.5)$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j \in \overline{1, r} \quad (4.6)$$

En outre,

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i \quad i \in \overline{1, r} \quad (4.7)$$

Soit les vecteurs  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  définis par (4.5) et les vecteurs  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  définis par (4.7).

Alors  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  satisfait (4.2) et (4.4).

**Preuve.** Soit  $\{v_i : i \in \overline{1, r}\}$  donné par (4.4). Alors

$$\begin{aligned} AA^*v_i &= \frac{1}{\sigma_i} A^*AA^*u_i \\ &= \sigma_i A^*u_i \quad \text{d'après (4.2)} \\ &= \sigma_i^2 v_i \quad \text{d'après (4.4)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle &= \frac{1}{\Sigma_i \sigma_j} \langle A^*u_i, A^*u_j \rangle \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle AA^*u_i, u_j \rangle \\ &= \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \langle u_i, u_j \rangle \quad \text{d'après (4.2)} \\ &= \delta_{ij} \quad \text{d'après (4.3)}. \end{aligned}$$

Les équations (4.7) découlent de (4.4) et (4.2).

Une conséquence facile du Théorème 4.1.1 est la suivante.

**Théorème 4.1.2.** (*La décomposition en valeurs singulières*). Soit  $0 \neq A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ , et soit

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (4.8)$$

les valeurs singulières de  $A$ .

Alors il existe des matrices unitaires  $U \in U^{m \times m}$  et  $V \in U^{m \times m}$  telle que la matrice

$$\Sigma = U^*AV = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 \\ & & \sigma_r & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & 0 & & \vdots & & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

est diagonalisable.

**Preuve.** Pour  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$

nous construisons deux matrices  $U$  et  $V$  comme suit.

Soit les vecteurs  $\{u_1, \dots, u_r\}$  en  $\mathbb{C}^m$  vérifiant (4.2) et (4.3), ils forment ainsi une base orthonormée de  $R(AA^*) = R(A)$ . Soit  $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$  une base orthonormée de  $R(A)^\perp = N(A^*)$ . Alors l'ensemble  $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{C}^m$  satisfaisant (4.2) et

$$A^*u_i = 0, \quad i \in \overline{r+1, m} \quad (4.9)$$

La matrice  $U$  définie par

$$U = [u_1 \ \dots \ u_r \ u_{r+1} \ \dots \ u_m] \quad (4.10)$$

est donc une matrice  $m \times m$  unitaire.

Soit maintenant les vecteurs  $\{v_1, \dots, v_r\}$  dans  $\mathbb{C}^n$  défini par (4.4). Alors ces vecteurs satisfont (4.5) et (4.6), et forment donc une base orthonormée de  $R(A^*A) = R(A^*)$ . Soit  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  une base orthonormée de  $R(A^*)^\perp = N(A)$ . Alors l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{C}^n$  satisfaisant (4.5) et

$$Av_i = 0, \quad i \in \overline{r+1, n} \quad (4.11)$$

La matrice  $V$  définie par

$$V = [v_1 \ \dots \ v_r \ v_{r+1} \ \dots \ v_n] \quad (4.12)$$

est donc une matrice  $n \times n$  unitaire.

Avec  $U$  et  $V$  données ci-dessus, la matrice

$$\Sigma = U^*AV = (\Sigma[i, j]), \quad i \in \overline{1, m}, \quad j \in \overline{1, n}$$

satisfait

$$\Sigma[i, j] = u_i^*Av_j = 0 \quad \text{if } i > r \text{ où } j > r, \quad \text{d'après (4.9) et (4.11)}$$

et pour  $i, j = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned} \Sigma[i, j] &= u_i^*Av_j \\ &= \frac{1}{\Sigma_j} AA^*u_j, \quad \text{d'après (4.4),} \\ &= \Sigma_j u_i^*u_j, \quad \text{d'après (4.2),} \\ &= \Sigma_j \delta_{ij}, \quad \text{d'après (4.3),} \end{aligned}$$

□

Une décomposition correspondante de  $A^\dagger$  est donnée dans

**Corollaire 4.1.1.** *Soient  $A$ ,  $\Sigma$ ,  $U$  et  $V$  vérifiant les conditions du Théorème 4.1.2. Alors*

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^* \quad (4.13)$$

où

$$\Sigma^\dagger = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0 \right) \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (4.14)$$

**Lemme 4.1.1.** [3] Si  $U$  et  $V$  sont deux matrices unitaires, Alors :

$$(UAV)^\dagger = V^* A^\dagger U^*$$

pour toute matrice  $A$  pour laquelle le produit  $UAV$  est défini.

**Preuve.** (4.13) résulte du Lemme 4.1.1. La forme (4.14) pour  $\Sigma^\dagger$  est évidente.

Soit  $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ , et soit les matrices  $\Sigma$ ,  $U$  et  $V$  comme dans le Théorème 4.1.2. On note  $U_{(k)}$ ,  $V_{(k)}$  et  $\Sigma_{(k)}$  les sous-matrices

$$U_{(k)} = [u_1 \ \dots \ u_k] \in \mathbb{C}^{m \times k}, \quad V_{(k)} = [v_1 \ \dots \ v_k] \in \mathbb{C}^{n \times k}$$

$$\Sigma_{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_k & \\ & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k} \quad (4.15)$$

utilisons cette notation, les *SVD* de  $A$  et  $A^\dagger$  sont

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^* = U_{(r)} \Sigma_{(r)} V_{(r)}^* \quad (4.16)$$

$$A^\dagger = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^* = V_{(r)} \Sigma_{(r)}^{-1} U_{(r)}^* \quad (4.17)$$

Pour  $1 \leq r \leq k$  nous écrivons, de manière analogue,

$$A_{(k)} = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^* = U_{(k)} \Sigma_{(k)} V_{(k)}^* \in \mathbb{C}_k^{m \times n} \quad (4.18)$$

En particulier,  $A = A_{(r)}$ .

□

**Exemple 4.1.3.** Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a

$$A^* A = V \Sigma^* U^* U \Sigma V^* = V (\Sigma^* \Sigma) V^* \quad \text{et} \quad A A^* = U \Sigma V^* V \Sigma^* U^* = U (\Sigma \Sigma^*) U^*$$

donc les colonnes de  $U$  ( vecteurs singuliers à gauche ) sont vecteurs propres pour  $AA^*$  et les colonnes de  $V$  ( vecteurs singuliers à droite ) sont vecteurs propres pour  $A^*A$

La décomposition en valeurs singulières de  $A$  est alors :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.236 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.447 & 0 & 0 & 0 & 0.894 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.894 & 0 & 0 & 0 & 0.447 \end{bmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.236 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.447 & 0 & 0 & 0 & 0.894 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.894 & 0 & 0 & 0 & 0.447 \end{bmatrix}$$

On vérifie que  $\Sigma$  ne possède des valeurs non nulles que sur sa diagonale. De plus, comme montré ci-dessous, multiplions les matrices  $U$  et  $V^*$  par leurs transposées, on obtient la matrice identité :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et de même :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.447 & 0 & -0.894 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.894 & 0 & 0.447 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.447 & 0 & 0 & 0 & 0.894 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.894 & 0 & 0 & 0 & 0.447 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque les deux matrices  $U$  et  $V$  sont unitaires.

Maintenant on calcule  $A^\dagger$  :

$$\begin{aligned}
A^\dagger &= V\Sigma^{-1}U^* \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.447 & 0 & -0.894 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.894 & 0 & 0.447 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2.236} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 4.2 Calcul rapide de $A^\dagger$

### Fondations de l'algorithme

Soit  $A$  une matrice de  $\mathbb{C}_r^{m \times n}$ , prenons la matrice symétrique positive  $A^*A$  de dimension  $n \times n$ , et supposons qu'elle est de rang  $r \leq n$ . On sait qu'il y a une unique matrice triangulaire supérieure  $S$  a  $n - r$  lignes nulles telle que  $S^*S = A^*A$ , tandis que la calcul de  $S$  est une simple extension de la factorisation de **Cholesky** d'habitude des matrices inversibles. Supprimons des lignes nulles de  $S$ , on obtient une matrice a  $r \times n$ , on la note par  $L^*$ , de rang maximum  $r$ , et nous avons

$$A^*A = S^*S = LL^* \quad (4.19)$$

Nous utilisons aussi une relation générale concernant l'inverse de **Moore-Penrose** de la matrice produit  $A = CB$  donnée dans le Théorème 2.1.2

$$(CB)^\dagger = B^*(C^*CBB^*)^\dagger C^* \quad (4.20)$$

Avec  $B = I$ , on obtient d'après (4.20)

$$A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* \quad (4.21)$$

Si  $B = C^*$  et  $A$  est une matrice  $n \times r$  de rang  $r$ , alors on obtient d'après (4.20)

$$(CC^*)^\dagger = C(C^*C)^{-1}(C^*C)^{-1}C^* \quad (4.22)$$

Nous sommes maintenant prêts pour montrer le résultat suivant :

**Théorème 4.2.1.** Avec  $A$  et  $L$  définis comme ci-dessus, on a  $A^\dagger = L(L^*L)^{-1}(L^*L)^{-1}L^*A^*$ .

**Preuve.** utilisons (4.21), qui donne

$$A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^*$$

et d'après les équations (4.19) et (4.22), on obtient

$$(A^*A)^\dagger = (LL^*)^\dagger = L(L^*L)^{-1}(L^*L)^{-1}L^*$$

ce qui termine la preuve. □

La fonction "geninv" suivante donne tous les détails de l'implémentation de la solution ci-dessus, dans un code Matlab, et elle calcul l'inverse de **Moore-Penrose** de toute matrice rectangulaire donnée comme argument. Les deux opérations principales sont la factorisation de **Cholesky** de rang maximum de  $A^*A$  et l'inversion de  $L^*L$ .

### test de calcul

Dans l'article [10] **P. Courrieu** a comparé les performances de la méthode proposée ( de fonction "geninv" ) à celles des quatre algorithmes habituels pour le calcul de l'inverse de **Moore-Penrose** des matrices : la méthode de **Greville** [3], la méthode **SVD** ( Matlab fonction *pinv* ), la factorisation de rang maximum **QR** ( Matlab fonction *qr* ). Tous les algorithmes ont été soigneusement testés dans Matlab ( version 6.5.1) sur un ordinateur personnel commun. **P. Courrieu** a établi que l'algorithme de la fonction "geninv" est le plus rapide parmis les autres algorithmes.

### Programme de la fonction "geninv" sous Matlab

```
function Y = geninv(A)

    [m, n] = size(A); transpose=false;
    if m < n
        transpose=true;
        C = A * A';
        n = m;
    else
        C = A' * A;
    end
    dC = diag(C); tol = min(dC(dC > 0)) * 1e - 9;
    L = zeros(size(C));
```

```

r = 0;
for k = 1 : n
    r = r + 1;
    L(k : n, r) = C(k : n, k) - L(k : n, 1 : (r - 1)) * L(k, 1 : (r - 1))';

    if L(k, r) > tol

        L(k, r) = sqrt(L(k, r));
    if k < n
        L((k + 1) : n, r) = L((k + 1) : n, r)/L(k, r);

    end
else
    r = r - 1; end
end
L = L(:, 1 : r);
M = inv(L' * L);
if transpose
    Y = A' * L * M * M * L';
else
    Y = L * M * M * L' * A';
end

```

**Exemple 4.2.1.** soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -i & 0.5 & 1 & 0 & 1 - 2i \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & i & 2 + 0.5i \\ 2 & 2 & 6 & i & -i & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2i & 1 & 2 & 0 & 2 - 4i \\ 0 & 1 & 0 & 4 & i & 2 & i \\ 3.5 & 2 & 0.5i & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{C}^{6 \times 7}$ . La matrice  $X$  est l'inverse de **Moore-Penrose** de la matrice  $A$ , pour la calculer on utilise la fonction "geninv" précédente sous le code Matlab comme suit :

$$X = \text{geninv}(A) = \begin{bmatrix} 0.0199 - 0.0424i & -0.1854 + 0.0055i & 0.0768 - 0.0081i & 0.0398 - 0.0848i & 0.0176 + 0.0198i & 0.1467 + 0.1258i \\ 0.0202 - 0.0299i & 0.2676 - 0.0016i & -0.0092 + 0.0260i & 0.0405 - 0.0598i & -0.0354 - 0.0047i & -0.0502 + 0.0535i \\ -0.0007 + 0.0088i & -0.0405 - 0.0133i & 0.1588 + 0.0090i & -0.0014 + 0.0175i & 0.0211 - 0.0295i & -0.0885 - 0.0103i \\ 0.0198 + 0.0092i & 0.0056 + 0.0517i & -0.0069 + 0.0054i & 0.0396 + 0.0185i & 0.1864 - 0.0170i & -0.0688 - 0.0453i \\ 0.0396 - 0.0067i & -0.0060 + 0.0122i & 0.0002 + 0.0526i & 0.0792 - 0.0134i & 0.0030 - 0.0475i & -0.0509 + 0.0306i \\ -0.0251 - 0.0083i & -0.1236 - 0.1291i & 0.0240 + 0.0099i & -0.0502 - 0.0166i & 0.1121 + 0.0499i & 0.1084 + 0.0238i \\ -0.0301 + 0.0559i & 0.0592 + 0.0303i & -0.0676 - 0.0413i & -0.0602 + 0.1117i & -0.0302 - 0.0182i & 0.1311 - 0.1393i \end{bmatrix}$$

$X \in \mathbb{C}^{7 \times 6}$  vérifiée les quatre équations de **Penrose** et donne :

$$AXA =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.0000 + 0.0000i & 1.0000 + 0.0000i & -0.0000 - 1.0000i & 0.5000 - 0.0000i & 1.0000 + 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 1.0000 - 2.0000i \\ -0.0000 + 0.0000i & 3.0000 + 0.0000i & 1.0000 - 0.0000i & 1.0000 - 0.0000i & 0.0000 + 0.0000i & 0.0000 + 1.0000i & 2.0000 + 0.5000i \\ 2.0000 + 0.0000i & 2.0000 + 0.0000i & 6.0000 - 0.0000i & -0.0000 + 1.0000i & -0.0000 - 1.0000i & 0.0000 - 0.0000i & 2.0000 + 0.0000i \\ 4.0000 + 0.0000i & 2.0000 + 0.0000i & -0.0000 - 2.0000i & 1.0000 - 0.0000i & 2.0000 + 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 2.0000 - 4.0000i \\ -0.0000 - 0.0000i & 1.0000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 4.0000 + 0.0000i & -0.0000 + 1.0000i & 2.0000 + 0.0000i & 0.0000 + 1.0000i \\ 3.5000 + 0.0000i & 2.0000 - 0.0000i & -0.0000 + 0.5000i & -0.0000 - 0.0000i & 1.0000 + 0.0000i & 1.0000 - 0.0000i & 4.0000 - 0.0000i \end{bmatrix}$$

$$= A \quad (1)$$

Donc la première équation est vérifiée.

On a

$$XAX = \begin{bmatrix} 0.0199 - 0.0424i & -0.1854 + 0.0055i & 0.0768 - 0.0081i & 0.0398 - 0.0848i & 0.0176 + 0.0198i & 0.1467 + 0.1258i \\ 0.0202 - 0.0299i & 0.2676 - 0.0016i & -0.0092 + 0.0260i & 0.0405 - 0.0598i & -0.0354 - 0.0047i & -0.0502 + 0.0535i \\ -0.0007 + 0.0088i & -0.0405 - 0.0133i & 0.1588 + 0.0090i & -0.0014 + 0.0175i & 0.0211 - 0.0295i & -0.0885 - 0.0103i \\ 0.0198 + 0.0092i & 0.0056 + 0.0517i & -0.0069 + 0.0054i & 0.0396 + 0.0185i & 0.1864 - 0.0170i & -0.0688 - 0.0453i \\ 0.0396 - 0.0067i & -0.0060 + 0.0122i & 0.0002 + 0.0526i & 0.0792 - 0.0134i & 0.0030 - 0.0475i & -0.0509 + 0.0306i \\ -0.0251 - 0.0083i & -0.1236 - 0.1291i & 0.0240 + 0.0099i & -0.0502 - 0.0166i & 0.1121 + 0.0499i & 0.1084 + 0.0238i \\ -0.0301 + 0.0559i & 0.0592 + 0.0303i & -0.0676 - 0.0413i & -0.0602 + 0.1117i & -0.0302 - 0.0182i & 0.1311 - 0.1393i \end{bmatrix}$$

$$= X \quad (2)$$

La deuxième équation est vérifiée.

$$(AX)^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2000 - 0.0000i & 0.0000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 0.4000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i \\ -0.0000 - 0.0000i & 1.0000 + 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 0.0000 + 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i \\ -0.0000 + 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 1.0000 + 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i & 0.0000 - 0.0000i \\ 0.4000 - 0.0000i & 0.0000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 0.8000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i \\ -0.0000 + 0.0000i & 0.0000 + 0.0000i & 0.0000 + 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i & 1.0000 - 0.0000i & 0.0000 - 0.0000i \\ -0.0000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 0.0000 - 0.0000i & -0.0000 - 0.0000i & 0.0000 + 0.0000i & 1.0000 - 0.0000i \end{bmatrix}$$

$$= AX \quad (3)$$

La troisième équation est vérifiée.

$$(XA)^* =$$

$$\begin{bmatrix} 0.8663 & 0.0082 + 0.0596i & 0.0007 - 0.0696i & -0.0569 + 0.0554i & 0.2184 - 0.1454i & 0.1765 - 0.0200i & 0.0228 + 0.0116i \\ 0.0082 - 0.0596i & 0.7497 - 0.0000i & 0.0364 + 0.0282i & 0.1505 - 0.1044i & 0.0817 - 0.1222i & -0.1194 + 0.3116i & 0.1239 + 0.0094i \\ 0.0007 + 0.0696i & 0.0364 - 0.0282i & 0.9611 + 0.0000i & 0.0330 + 0.0493i & -0.0535 - 0.1042i & -0.0330 - 0.1099i & 0.0028 + 0.0018i \\ -0.0569 - 0.0554i & 0.1505 + 0.1044i & 0.0330 - 0.0493i & 0.7951 - 0.0000i & 0.0525 + 0.1942i & 0.2522 - 0.0737i & -0.0955 - 0.0297i \\ 0.2184 + 0.1454i & 0.0817 + 0.1222i & -0.0535 + 0.1042i & 0.0525 - 0.1942i & 0.2472 & -0.0571 - 0.0704i & -0.0425 - 0.1774i \\ 0.1765 + 0.0200i & -0.1194 - 0.3116i & -0.0330 + 0.1099i & 0.2522 + 0.0737i & -0.0571 + 0.0704i & 0.4618 - 0.0000i & 0.0404 + 0.1165i \\ 0.0228 - 0.0116i & 0.1239 - 0.0094i & 0.0028 - 0.0018i & -0.0955 + 0.0297i & -0.0425 + 0.1774i & 0.0404 - 0.1165i & 0.9188 - 0.0000i \end{bmatrix}$$

$$= XA \quad (4)$$

La quatrième équation est vérifiée.

Alors la matrice  $X$  est l'inverse de Moore-Penrose de la matrice  $A$ .

### 4.3 Algorithme de calcul l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire

1) Soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection et soit  $Q$  la projection orthogonale qui a la même image que  $P$ . Pour  $t \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$Q(0) = Q; Q(t) = Q_n \left[ I + \frac{8(1 - 2^n t)Q_n^*(I - Q_n)}{3\|Q_n\|^2 + 1} \right] \quad \text{si } 2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}$$

Alors  $Q(2^{-n}) = Q_n$ , comme défini dans la Proposition 1.5.1  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $Q(t)$  est une projection avec la même image que  $P$  et l'application  $Q : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  est continue avec  $PQ(t) = Q(t)$ ;  $Q(t)P = P$ .

La preuve est une simple vérification. toute déformation continue de  $P$  en  $Q$  peut être définie mais celle-ci a la propriété que si  $t \neq 0$ ,  $Q(t)$  est un polynôme en  $P$  et  $P^*$ .

2) Si deux projections orthogonales sont dans la même composante connexe, alors elles peuvent être reliés par des projections orthogonales.

En effet, soit  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  deux projections orthogonales et soit  $t \mapsto P(t)$  une application continue de  $[0, 1]$  dans l'ensemble des projections de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  tel que  $P(0) = Q$  et  $P(1) = P$ . Soit

$$Q_0(t) = P(t); Q_{n+1}(t) = Q_n(t) \frac{3\|Q_n(t)\|^2 + 1 + 4Q_n(t)^*(I - Q_n(t))}{3\|Q_n(t)\|^2 + 1}$$

Alors il est facile de montrer par récurrence que  $Q_n(t)$  est continue en  $t$  et que  $(Q_n(t))$  converge uniformément vers une application continue de  $[0, 1]$  dans l'ensemble des projections orthogonales de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  qui a les propriétés requises.

3) Soit  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  une projection et soit  $Q$  la projection orthogonale qui a la même image que  $P$ . Alors si  $P$  est essentiellement normal ( c.à.d.  $PP^* - P^*P$  est compact ),  $P - Q$  est compact.

**Preuve.** il est facile de vérifier que

$$(PP^* - P^*P)^2 = (P - P^*)(P^* - P)[I + (P - P^*)(P^* - P)]$$

Puisque  $I + (P - P^*)(P^* - P) \geq I$  est inversible.

Alors si  $P$  est essentiellement normal  $(P - P^*)(P^* - P)$  est compact et par conséquence  $P - P^*$  est aussi compact puisque  $i(P - P^*)$  est hermitien.

Maintenant, considérons la suite  $(Q_n)$  définie dans la Proposition 1.5.9. Il est facile de montrer que si  $Q_n$  est essentiellement normal  $Q_{n+1}$  est aussi puisque  $Q_{n+1} - Q_{n+1}^*$  est un multiple de  $Q_n - Q_n^*$ .

Donc  $P - Q = \sum_{n \geq 0} Q_n - Q_{n+1}$  est un opérateur compact ( la série converge uniformément d'après (1.27)).

□

**Première méthode :**

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $T$  un opérateur linéaire borné a image fermée. Soit*

$$B_0 = aT^* ; B_{n+1} = (I - aT^*T)B_n + aT^* = \sum_{k=0}^{n+1} (I - aT^*T)^k aT^* \quad (4.23)$$

où  $a = \frac{2}{\|T\|^2 + c^2(T)}$ .

Alors la suite  $(B_n)$  converge uniformément dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  vers l'opérateur  $C$  qui est l'inverse de **Moore-Penrose** de  $T$ .

Plus précisément :

$$\|C - B_n\| \leq \frac{[\|T\|^2 - c^2(T)]^{n+1}}{[\|T\|^2 + c^2(T)]^{n+1}} \|C\| \quad (4.24)$$

où  $c(T) = \inf_{u \perp N(T)} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}$  appelée la *conorme* ( appelé aussi le *module minimum réduit* ) de  $T$ .

**Preuve.** Nous procédons exactement comme la preuve de la Proposition 1.5.1.

$$\|(I - aT^*T)^k T^* R\| \leq \left[ \frac{\|T\|^2 - c^2(T)}{\|T\|^2 + c^2(T)} \right]^k \|T^* R\| \text{ pour tout } R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (4.25)$$

Alors du fait que  $B_n = \sum_{k=0}^n (I - aT^*T)^k aT^*$  et

$$C - B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (I - aT^*T)^k aT^* \text{ nous constatons que } C = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \text{ existe}$$

et que (4.24) est satisfaite.

De la Proposition 1.5.1, il s'ensuit que  $(TB_n)$  et  $(B_nT)$  convergent vers des projections orthogonales et que  $TB_nT$  converge vers  $T$  et  $CTC = C$  alors que  $C = IMP(T) = T^\dagger$ .

□

Deuxième méthode :

**Proposition 4.3.2.** Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$  un opérateur linéaire fermé densément défini sur  $\mathcal{H}$  avec  $R(T)$  fermé et soit  $B$  un inverse généralisé de  $T$  ( alors  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ). On prend :

$$\begin{aligned} C &= [I - \alpha(I - BT)(I - T^*B^*)]B[I - \beta(I - B^*T^*)(I - TB)] \\ &= [I + \alpha(I - BT)T^*B^*]B[I + \beta B^*T^*(I - TB)] \end{aligned}$$

où  $\alpha \in [0, \frac{2}{\|BT\|^2}]$  et  $\beta \in [0, \frac{2}{\|TB\|^2}]$ . Alors :

- (i)  $TC = TB[I - \beta(I - B^*T^*)(I - TB)]$  ;  $I - CT = (I - BT)[I - \alpha T^*B^*BT]$
- (ii)  $C$  est un inverse généralisé de  $T$
- (iii)  $\|C\| \leq \|B\|$

**Preuve.**

(i) est évidente

(ii)  $T[I - \alpha(I - BT)(I - T^*B^*)] = T$  et  $[I - \beta(I - B^*T^*)(I - TB)]T = T$  Alors que  $TCT = TBT = T$  et

$$\begin{aligned} CTC &= [I - \alpha(I - BT)(I - T^*B^*)]BTC \\ &= [I - \alpha(I - BT)(I - T^*B^*)]BTB[I - \beta(I - B^*T^*)(I - TB)] \\ &= C \end{aligned}$$

(iii)  $\|I - \alpha(I - BT)(I - T^*B^*)\| \leq 1$  et  $\|I - \beta(I - B^*T^*)(I - TB)\| \leq 1$

□

**Proposition 4.3.3.** Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$  un opérateur linéaire fermé densément défini sur  $\mathcal{H}$  avec  $R(T)$  fermé et soit  $B$  un inverse généralisé de  $T$  ( alors  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ) et soit  $C$  l'inverse de **Moore-Penrose** de  $T$  alors :

$$\|B - C\| \leq \|B\|\|TB - TC\| + \|C\|\|BT - CT\|$$

**Preuve.**

$$B - C = BTB - BTC + BTC - CTC \Rightarrow \|B - C\| \leq \|B\|\|TB - TC\| + \|C\|\|BT - CT\|$$

De la même façon :

$$B - C = BTB - CTB + CTB - CTC \Rightarrow \|B - C\| \leq \|C\| \|TB - TC\| + \|B\| \|BT - CT\|$$

Par conséquent :

$$\|B - C\| \leq (\|B\| + \|C\|) \frac{\|TB - TC\| + \|BT - CT\|}{2}$$

□

**Corollaire 4.3.1.** Soit  $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$  un opérateur linéaire fermé densément défini sur  $\mathcal{H}$  avec  $R(T)$  fermé et soit  $B$  un inverse généralisé de  $T$ . On prend :

$$B_0 = B ; B_{n+1} = \frac{3\|B_n T\|^2 + 1 + 4(I - B_n T)T^* B_n^*}{3\|B_n T\|^2 + 1} B_n \frac{3\|TB_n\|^2 + 1 + 4B_n^* T^* (I - TB_n)}{3\|TB_n\|^2 + 1}$$

Alors la suite  $(B_n)$  converge uniformément vers  $C = T^\dagger$ .

**Preuve.**

$$\|B_n - C\| \leq (\|B_n\| + \|C\|) \frac{\|TB_n + TC\| + \|B_n T - CT\|}{2}$$

Alors que l'utilisation de (1.24), (1.25) donne :

$$r = \frac{\|TB\| - 1}{\|TB\| + 1} < 1 ; s = \frac{\|BA\| - 1}{\|BT\| + 1} < 1$$

Nous obtenons ( puisque  $\|B_n\| \leq \|B_n T\| \|C\| \|TB_n\|$ ) que :

$$\|B_n - C\| \leq \|C\| \left[ 1 + \frac{1 + r^{3^n}}{1 - r^{3^n}} \frac{1 + s^{3^n}}{1 - s^{3^n}} \right] \left[ \frac{\sqrt{r}^{3^n}}{1 - r^{3^n}} \frac{\sqrt{s}^{3^n}}{1 - s^{3^n}} \right]$$

cela montre que  $(B_n)$  converge uniformément et vers  $C$ .

□

## Conclusion

Ce travail a pour but d'étudier les différents types d'inverses généralisés qui nécessitent une connaissance de la projection orthogonale. Après l'étude des types les plus connus (le  $\{i, j, \dots, k\}$ -inverse,  $1^k$  et le  $G^k$ -inverse, inverse de *Bott-Duffin*, inverse du *Groupe* et l'inverse de *Drazin* ) et les relations existantes entre ces types, on a déduit que l'inverse de *Moore-Penrose* est le plus proche à l'inverse normale, ensuite on a calculé l'inverse généralisé des opérateurs linéaires bornés et fermés à domaine dense dans les espaces de Hilbert, enfin on a appliqué un programme sous matlab pour les matrices avec seulement l'inverse de *Moore-Penrose* avec des algorithmes de calcul d'inverse de *Moore-Penrose* pour les opérateurs linéaires bornés et fermés à domaine dense.

## Perspectives

Dans ce mémoire le calcul de l'inverse généralisé restreint aux opérateurs bornés et les opérateurs fermés densément définis, peut être il y a une extension pour les opérateurs fermables (Opérateurs presque fermable). On peut aussi faire des programmes de calcul pour les autres types d'inverses généralisés plus que l'inverse de *Moore-Penrose* qu'il a été fait dans ce mémoire et regrouper ces programmes dans un logiciel.

# Bibliographie

- [1] N.I.Akhiezer et I.M.Glazman. Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Volume I, New York, (1966).
- [2] A.Ben Djabri, Mémoire de Magister Sur Les Opérateurs Inverses Généralisés, Université de M'sila, Promotion :2006/2007
- [3] A.Ben-Israel et T.N.E.Greville, Generalized inverses Theory and Applications, New York, (2003).
- [4] M.Sh.Birman et M.Z.Solomjak, Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space, (1987).
- [5] A.Bjerhammar, A generalized matrix algebra, Stockholm (1958), N.124.
- [6] R.Bott et R.J.Duffin, On the algebra of networks, (1953), 99 – 109.
- [7] Z.Boulmarouf, M.Fernandez Miranda, J-Ph. Labrousse, an algorithmic approach to orthogonal projections and Moore-Penrose inverses, (1997), 55 – 63.
- [8] R.E.Cline, Inverses of rank invariant powers of a matrix, SIAM, (1968), 182 – 197.
- [9] A.Cockx, F.Deluzet,S.Gallego, A.Huard, A.Liné, J.C.Michelucci, J.Morchain et V.Roussier-Michon, travaux pratiques de programmation Matlab, (2007-2008).
- [10] P.Courrieu. Fast Computation of Moore-Penrose Inverse Matrices, vol.8, N.2, (2005).
- [11] M.P.Drazin. Pseudo inverses in associative rings and semigroups, Amer. Math. Monthly (1958), 506 – 514.

- 
- [12] I.Erdélyi. A generalized inverse for arbitrary operators between hilbert spaces, (1972), 43 – 50.
- [13] S.Guedjiba, R.Benacer. Inversion généralisée d’opérateurs linéaires et approximation dans les espaces de Banach. Sciences et Technologie N.22, (2004), 23 – 25.
- [14] M.R.Hestenes. Inversion of matrices by biorthogonalization and related results, J. Soc. Indust. Appl. Math. (1958), 51 – 90.
- [15] R.A.Horn and C.R.Johnson. Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).
- [16] S.H.Kulkarni et G.Ramesh. Approximation of Moore-Penrose Inverse of a Closed Operator by a Sequence of Finite Rank Outer Inverses, (2008), 1 – 8.
- [17] J-PH.Labrousse. Inverses généralisés d’opérateur non bornes, Vol.115, N1, (1992).
- [18] S.L.Campbell et C.D.Meyer, Generalized Inverses of Linear Transformations, SIAM (1979).
- [19] G.K.Pedersen, Analysis now, vol.118, New York, (1989).
- [20] W.V.Petryshyn, On generalized inverses and on the uniform convergence of  $(I - \beta K)^n$  with application to iterative methods, J. Math. Anal. Appl. (1967), 417 – 439.
- [21] S.Sawyer, Generalized Inverses :How To Invert A Non-Invertible Matrix, (2006).
- [22] Y.Y.Tseng, Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Nauk SSSR (1949), 431 – 434.
- [23] N.S.Urquhart, Computation of generalized inverse matrices which satisfy specified conditions, SIAM (1968), 216 – 218.
- [24] H.Zekraoui. Thèse de doctorat sur les Propriétés Algébriques des  $G^k$ –inverses des matrices. Université de Batna (2011).

## ملخص المذكرة

الهدف من هذا العمل هو حساب المقلوبات المعممة لمؤثرات خطية مع استنتاج العلاقة بين المقلوبات المعممة المشهورة إضافة إلى ذلك كتابة برنامج ب Matlab لحساب مقلوب معمم لمصفوفة (مؤثر خطي محدود في بعد منتهي) بنوع Moore-Penrose مع خوارزمية لحساب المقلوب المعمم بنفس النوع للمؤثرات الخطية المحدودة والمؤثرات الخطية المغلقة بمجال كثيف.

## Résumé :

*Le but de ce travail est de calculer les inverses généralisés des opérateurs linéaires et trouver les relations entre les différents types d'inverses généralisés les plus connus avec un programme sous Matlab pour le calcul de l'inverse de **Moore-Penrose** des matrices (opérateur linéaire borné en dimension finie) et des algorithmes de calcul de l'inverse de **Moore-Penrose** des opérateurs linéaires bornés et des opérateurs linéaires fermés à domaine dense.*

## Abstract :

*The aim of this work is calculated the generalized inverses of linear operators and found the relationships between different types of generalized inverses the most famous with a Matlab program to calculate the **Moore-Penrose** inverse of matrices (bounded linear operator in finite dimension) and algorithms for calculating the **Moore-Penrose** inverse of bounded linear operators and linear closed operators with domain dense.*