République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement et de la recherche scientifique

Université Dr Moulay Tahar de Saida

Faculté des sciences et technologies

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Licence

Spécialité : Mathématiques

Option Analyse

Thème

Application des séries entières pour la résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2

Présenté par : Amara Mohamed Amine

Soutenu le : 14 / 06 /2012

Devant le jury composé de :

Président : K.Djorfi — Maitre assistant -A-
Rapporteur : G.Djellouli — Maitre de conférences-A-
Examinateur : D.Djebbouri — Maitre assistant-B-

Année Universitaire 2011-2012

Application des séries entières pour la résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2

M.A. Amara & G. Djellouli

14 Juin 2012

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps, toute l'équipe pédagogique de *notre promo* et les responsables de la formation, pour avoir assuré la partie théorique durant le cursus

Je remercie également Monsieur G. Djellouli Maitre de conférence A pour l'aide et les conseils concernant les missions évoquées dans ce mémoire, qu'il m'a apporté lors des différents suivis.

Je tiens également à exprimer ma gratitude en vers Monsieur K. Djorfi d'avoir accepté d'être le président de ce jury.

Je tien a remercie vivement aussi D. Djebbouri d'avoir accepté de faire partir de ce jury.

Introduction

En mathématiques et particulièrement en analyse, une série entière est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$$

où les coefficients a_n forment une suite réelle ou complexe. La série est dite entière du faît qu'elle fait intervenir des puissances entières. La théorie des séries entières exprime la majorité des fonctions usuelles comme somme de séries. Ceci permet de démontrer des propriétés de ces fonctions, de calculer des sommes compliquées et également de résoudre des équations différentielles. Les séries entières apparaissent en analyse, mais aussi en combinatoire en tant que fonction génératrice et se généralisent dans la notion de série formelle. Dans la théorie des nombres, le concept de nombre p-adique est proche de celui de série entière. Dans ce mémoire on s'intere exceptionelement à l'utilisation de séries entières comme expressions de la forme solution de quelques types d'équations différentielles à coefficient non constantes

Chapitre 1

Séries entières

1.1 Introduction

On souhaite étudier les fonctions de la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$. Ce sont des sommes de séries de fonctions, on étudiera le problème de convergence, on observera leur régularité et on verra que grand nombre de fonctions usuelles peuvent s'écrire ainsi.

1.2 Séries entières

Définition 1.2.1. *On appelle série entière de coefficients a_n la série de fonction de terme général $u_n(x) = a_n x^n$ (avec la convention $x^0 = 1$, soit $u_0(x) = a_0$) On notera souvent $\sum a_n x^n$ une telle serie. La variable x peut être réelle ou complexe. On dit que la série ainsi définié edt bien défini si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$converge . L'ensemble où la série est bien définie est appelé domaine de convergence de la série entière.*

1.3 Rayon de convergence

Le rayon de convergence d'une série caractérise à peu près les modes de convergence de la série de fonctions $\sum a_n x^n$ et les propriétés analytiques de la somme.

Lemme 1.3.1. ***d'Abel*** *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_n$ soit bornée. Alors :*
- La série $(\sum a_n x^n)$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.
- La série $(\sum a_n x^n)$ est normalement convergente pour $|x| < r$ pour tout $0 < r < |x_0|$.

Démonstration. La suite $(a_n x_0^n)_n$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n x_0^n| \leq M$. Alors pour $|x| < |x_0|$ et $n \geq 0$: $|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n\, x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ est une série géometrique de raison $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, donc convergente. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ est convergente et par conséquent la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < |x_0|$. Soit $0 < r < |x_0|$ et soit $|x| \leq r$. $|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$ Comme $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{x_0}\right)^n$ est une série numérique convergente, donc la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est normalement convergente pour tout x tel que $|x| < r$ et tout r tel que $0 < r < |x_0|$. □

Théorème 1.3.1. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière ; alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que : 1- $(\sum a_n x^n)$ converge absolument dans$]-R, R[$. 2- $(\sum a_n x^n)$ diverge si $|x| > R$. 3- Soit $I = \left\{r \in \mathbb{R}^+ : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{converge}\right\} \subset \mathbb{R}^+ . I, \emptyset . car\ 0 \in I$.*

Démonstration. On distinguera trois cas : $I = \{0\}$, $I = \mathbb{R}^+$ et $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^+$. $I = \{0\}$. On pose $R = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.Ceci implique que $|x| > 0$ et par suite $x \notin I$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ diverge. Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ diverge . Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge pour $|x| > 0$. Soit $x_1 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |x_1| < |x|$. La série $(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r_1^n|)$ est convergente d'après le lemme d'Abel et donc $x_1 \in I$. D'où la contradiction avec le fait que $I = \{0\}$. $I = \mathbb{R}^+$. On pose $R = \infty$. On doit prouver que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge pour tout $r \succ 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Il existe $r > 0$ tel que $|x| < r$. Ceci implique $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ et d'après le théorèmede comparaison la série $(\sum a_n x^n)$ converge absolument. $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^*$, I ,$\{0\}$ et I ;$\mathbb{R}^*$. a) I est majoré. En effet, soit $r \in \mathbb{R}^* \backslash I$ et supposons que r n'est pas un majorant de I. Il existerait alors $r_1 \in I$ tel que $r < r_1$. D'après la définition de I, la série $(\sum |a_n| x_1^n)$ est convergente ainsi que $(\sum |a_n| x^n)$ (car $|a_n| r^n < |a_n| r_1^n$) et donc $r \in I$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $r \in \mathbb{R}^* \backslash I$. I est alors un ensemble non vide et majoré donc admet une borne supérieure $R = \sup_{r \in I} I$. Pour conclure, on doit prouver que $(\sum a_n x^n)$ converge absolument pour tout x, $|x| < R$ et diverge pour tout x, $|x| > \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \mathbf{R}$. Il existe $\rho \in I$ tel que $|x| < \rho < \mathbf{R}$. Comme la série $(\sum |a_n| \rho^n)$converge, $(\sum |a_n| \cdot |x_n|)$ converge en vertu du théorème de comparaison $(\sum a_n x^n)$ est alors absolument convergente. Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| > \mathbf{R}$. Ceci implique que $|x| < I$ et donc la série $\sum |a_n x^n|$ diverge. Montrons que $\sum a_n x^n$ diverge. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $\sum a^n x_n$ converge, d'après le lemme d'Abel, la série $(\sum a_n x_1^n)$ est absolument convergente pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$,vérifiant $R < |x_1| < |x|$ et donc $|x_1| \in I$. On a alors nécessairement $|x_1| \leq \mathbf{R} = \sup_{r \in I} I$ et ceci est en contradiction avec l'hypothès $\mathbf{R} < |x_1| < |x|$. □

Définition 1.3.1. *Le nombre* $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ : (\sum |a_n| r^n)$ *converge*$\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*est appelé rayon de convergence de la série* $(\sum a_n r^n)$.

Remarque 1.3.1. *Le rayon de convergence d'une série* $(\sum a_n x^n)$ *est caractérisé par : 1- Si* $|x| < R$*; la série est absolument convergente. 2- Si* $|x| > R$*; donc la série diverge. 3- Si* $|x| = R$ *est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.*

Exemple 1.3.1. *Série entière de rayon de convergence infini :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0\ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{n!}$$

- *Série entière de rayon de convergence nul :* $\sum n! x^n$.

- *Série entière de rayon de convergence :* $R \in]o, +\infty[: \sum \frac{x^n}{R^n}$

1.3.1 Caractirisation du rayon de convergence

Un outil pratique : la règle de d'Alembert.

Théorème 1.3.2. *Soit (u_n) une suite de complexe telle que :*

- Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$

- Le suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $l \in [0 + \infty]$

- Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Démonstration. Posons $\ell = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. En utilisant le critère de d'Alembert on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = \ell|x|.$$

Ceci implique : Si $l|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{l}$ alors la série est absolument convergente

Si $\ell|x| > 1 \iff |x| > \frac{1}{\ell}$ alors la série est divergente D'après la remarque, $R = \frac{1}{\ell}$.

Posons $\ell = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. En utilisant le critère de Cauchy :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \ell|x|$$

puis on adopte le même raisonnement que précédemment, on aboutit à la mêmeconclusion ; $R = \frac{1}{\ell}$. □

Exemple 1.3.2. *a)* $\sum \frac{x_n}{n!}$. *On a $a_n = \frac{1}{n!}$, utilisons le critère de D'Alembert :*

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc le rayon de convergence est $R = \infty$. La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$. *Ona*

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{n}{n+1}\right|^n = 1.$$

Le rayon de convergence est $R = 1$.La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$et divergente si $|x| > 1$.

1.4 Opérations sur les séries entières

Définition 1.4.1. *Soit $\sum a_n x^n$,$\sum b_n x^n$ deux séries entières ayant respectivement R et $R\prime$ pour rayon de convergence.*
– Si R, R', le rayon de convergence R'' de la série $\sum(a_n+b_n)x^n$ est $R'' = min\{R, R'\}$.
– Si $R = R'$ le rayon de convergence de la série $\sum(a_n + b_n)x^n$ est $R'' \geq R$.

Démonstration. Supposons que $R' < R$. **1)** $|x| < R' \Longrightarrow |x| < R$. Les deux séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes. Comme $|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$, il en découle que $\sum((a_n + b_n)x^n)$ converge absolument pour $|x| < R'' = min\{R, R'\}$. **2)** Si $|x| > R'$, deux cas de figure se présentent : **a)** Si $R' < |x| < R$, la série $\sum b_n x^n$ converge absolument et $\sum a_n x^n$ diverge. Donc $\sum(a_n + b_n)x^n$diverge. **b)** Si $R' < R < |x|$, les deux séries divergent. Montrons $\sum(a_n + b_n)x^n$ diverge. Raisonnonspar l'absurde Si $\sum(a_n + b_n)x^n$ converge alors d'après le lemme d'Abel, la série $\sum(a_n + b_n)x^n$converge absolument pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $|x_0| < |x|$ et en particulier pour x_0 vérifiant $R' < |x0| < R < |x|$.d'où la contradiction. Si $R = R'$. Il est clair que la série converge absolument si $|x| < R = R'$.Le rayon de convergence $R'' \geq R = R'$. □

Exemple 1.4.1. *Soient les deux séries $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-2^n}{2^n}\right) x^n$. Les deux séries ont pour rayon de convergence $R = 1$. Par contre la série somme $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$, a pour rayon de convergence $R'' = 2$.*

1.5 Propriétés analytiques de la somme d'une série entière

Sur $]-R, R[$, on calcule avec la somme d'une série entière comme avec un polynôme.

1.5.1 Dérivation

Définition 1.5.1. *On appelle série entière dérivée d'une série entière* $\sum a_n x^n$ *la série entière* $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum (n+1) a_{n+1} x^n$.

Lemme 1.5.1. *Une série entière* $\sum_{n=0} a_n x^n$ *et la série dérivée formelle* $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ *ont le même rayon de convergence.*

Théorème 1.5.1. *La somme d'une série entière de rayon de convergence* R *est de classe* C^∞ *et indéfiniment dérivable terme à terme sur* $]-R,R[$ *. De plus,* $\forall x \in]-R,R[$, *on a*

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} x^n.$$

1.5.2 Intégration :

Théorème 1.5.2. *Si* $\sum a_n x^n$ *est une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *alors la série entière* $\sum \frac{an}{n+1} x^{n+1}$ *est aussi de rayon de convergence* R *et sa somme :*

$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{an}{n+1} x^{n+1}$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$.

1.6 Fonctions développables en série entière

On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ avec $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

1.6.1 Série de Taylor

Définition 1.6.1. *On appelle série de Taylor d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ Si f est développable en série entière sur$]-r,r[$ alors f y est de classe C^∞, sa série de Taylor est de rayon de convergence $R \geq r$ et pour tout $x \in]-r,r[$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^n.$$

Autrement dit, une fonction développable en série entière est égale à la somme de sa série de Taylor.

Remarque 1.6.1. *Si f est développable en série entière alors f est de classe C^∞.*

Remarque 1.6.2. *Si f est de classe C^∞, pour étudier si f est développable en série entière, on peut étudier si*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

On peut pour cela exploiter l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exemple 1.6.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ et vérifiant*

$$\| f^{(n)} \|_\infty \leq M K^n n!$$

avec $M \in \mathbb{R}^+$ et $K > 0$. Montrons que f est développable en série entière en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \mid x^{n+1} \mid \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty |x^{n+1}|}{(n+1)!} \leq M K^{n+1} |x|^{n+1}$$

Pour $|x| \leq 1/|K|$ on a $(K|x|)^{n+1} \longrightarrow 0$ et donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \longrightarrow f(x)$. Ainsi f est développable en série entière sur $]-r,r[$ avec $r = 1/K$.

Remarque 1.6.3. ***Attention*** *: il existe des fonctions de classe C^∞ qui ne sont pas développables en série entière.*

On retrouve la formule du binôme.

Exemple 1.7.1. *Calculons* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$. *On a immédiatement* $R = +\infty$. *Pour* $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x^2)^n = x\, e^{-x^2}.$$

Chapitre 2

Résolution des équations différentielles par des séries entières.

2.1 SOLUTION AUTOUR D'UN POINT ORDINAIRE

2.1.1 Equations d'ordre 2 à coefficients non-constants

Plusieurs problèmes de physiques, font appel à des équations linéaires d'ordre 2, mais avec des coefficients qui changent au cours du temps (vieillissement des composants électroniques, ou des structures, perte de masse, perte d'élasticité, etc.). Dès lors l'équation se présente sous la forme plus générale :

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

Exemple 2.1.1. *Équation de Bessel :*

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0, \quad \nu = cte$$

Équation de Legendre :

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \alpha\left(\alpha + 1\right) y = 0, \qquad \alpha = cte$$

Équation d'Hermite :

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad \lambda = cte$$

Équation de Hill :

$$y'' + F(x)\,y \quad avec\ F(x + 2\pi) = F(x)$$

Dans le présent chapitre, nous allons d'abord considérer les équations dont les coefficients sont des polynômes. De plus nous allons considérer les solutions au voisinage d'un *point ordinaire* x_0 où $P(x)$ est non nul (on parlera de *point singulier* x_0 où $P(x_0) = 0$) Dès lors on peut ramener l'équation sous la forme canonique :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en divisant les deux membres par $P(x)$

2.1.2 Forme solution par une série entière

Lorsque nous avions considéré une équation du second ordre à coefficients constants, nous avions introduit la forme solution par une exponentielle :

$$ay'' + by'cy = 0 \leftarrow \ y = ke^x$$

or l'exponentielle peut aussi s'écrire sous la forme d'une série de puissances :

$$y = k\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = ke^x$$

Rappelons que l'exponentielle a été une invention commode d'écriture d'une certaine série adaptée pour résoudre l'équation différentielle du premier ordre. Lorsque l'équation différentielle du second ordre est à coefficients constants, alors on a ressorti la forme exponentielle du placard car elle servait encore comme forme solution. Dans le cas général, nous aurons donc une série qui est la forme solution que l'on pourra baptiser série de Bessel ou série de Legendre, en correspondance avec l'équation de Bessel ou l'équation de Legendre, en lieu du nom exponentielle en correspondance avec l'équation linéaire à coefficients constants.

Exemple 2.1.2. *Solution en série entière pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants*

Soit à exprimer la solution de l'équation suivante sous la forme d'une série entière :

$$y'' + y = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet ; Selon les méthodes classique, nous savons que les formes $y_1 = C\cos x$ et $y_2 = C_2 \sin x$ sont solutions de cette équation. Proposons que la forme suivante soit solution de cette équation :

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Comme l'équation doit être valide sur tout le domaine des réels : $x \in \mathbb{R}$, il faut que cette série soit convergente sur tout le domaine des réels. En dérivant et en réintroduisant la forme solution dans l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ y' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ y = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

Soit, par un changement d'indice $n \rightsquigarrow n-2$ dans la première sommation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

C'est à dire aussi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or cette condition doit être satisfaite pour n'importe quelle valeur de x . La seule façon est que tous les coefficients de la série soient nuls :

$$[(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nous obtenons donc une relation de récurrence entre les coefficients. Nous avons cependant besoin de fixer la valeur des 2 coefficients afin déterminer tous les autres

$a_0 = C_1$ et $a_1 = C_2$ Alors que $a_2 = 0$. Le reste des coefficients suivent :

$$\begin{cases} a_0 = C_1 \\ a_3 = \dfrac{a_0}{3.2} = \dfrac{C_1}{3.2} \\ a_6 = \dfrac{a_3}{6.5} = \dfrac{a_0}{6.5.3.2} = \dfrac{C_1}{\prod_{j=1}^{j=2}(9j^2-3j)} \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ a_{3k} = -\dfrac{a_{3k-3}}{3k(3k-1)} = \dfrac{C_1}{\prod_{j=1}^{j=2} 9j^2 - 3j} \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ \text{D'autre part} \\ a_1 = C_2 \\ a_4 = \dfrac{a_1}{4.3} = \dfrac{C_2}{4.3} \\ a_7 = \dfrac{a_4}{7.6} = \dfrac{a_1}{7.6.4.3} = \dfrac{C_2}{\prod\limits_{j=1}^{j=2}(3j+1)3j} \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ a_{3k+1} = \dfrac{a_{3k-2}}{3k(3k+1)} = \dfrac{C_2}{\prod\limits_{j=1}^{j=k} 9j^2 + 3j} \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_5 = 0 \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ a_{3k+2} = 0 \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

D'où l'expression de la solution homogène :

$$\begin{aligned} y_h &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = C_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{\prod\limits_{j=1}^{j=n} 9j^2 - 3j} + C_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{\prod\limits_{j=1}^{j=n} 9j^2 + 3j} \\ &= C_1 y_{1h}(x) + C_2 y_{2h}(x) \end{aligned}$$

Exemple 2.1.4. *Solution a l'équation D'AIRY autour du point $x_0 = 1$. Soit à trouver la série entière de la forme*

$$y_h = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

autour du point $x_0 = 1$pour l'équation d'Airy :

$$y'' - xy = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet

$$\begin{cases} y_h = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n \\ y_h = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \\ y_h = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

Soit, par un changement d'indice dans la première sommation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

D'autre part, on peut observer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n - [(x-1)+1] \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-1} (x-1)^n = 0$$

Comme l'équation doit être valide indépendamment de la valeur de $x \in \mathbb{R}$, il faut que tous les coefficients des puissances $(x-1)^n$ soient nuls :

$$2.1.a_2(x-1)^0 - a_0(x-1)^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-1)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} (x-1)^n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2.a_2 - a_0 = 0 \\ et \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n - a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Encore une fois nous avons une relation de récurrence pour déterminer les coefficients à partir des trois premiers, par saut de trois coefficients :

$$\begin{cases} a_0 = C_1 \\ a_1 = C_2 \\ a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{C_1}{2} \\ a_3 = \frac{a_0 + a_1}{3.2} = \frac{C_1}{3.2} + \frac{C_2}{3.2} \\ a_4 = \frac{a_2 + a_1}{4.3} = \frac{C_1}{4.3.2} + \frac{2C_2}{4.3.2} \\ a_5 = \frac{a_3 + a_2}{5.4} = \frac{4C_1}{5.4.3.2} + \frac{C_2}{5.4.3.2} \\ a_6 = \frac{a_4 + a_3}{5.4} = \frac{5C_1}{6.5.4.3.2} + \frac{6C_2}{6.5.4.3.2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-3}}{n(n-1)} = \frac{\alpha_k.a_0}{k!} + \frac{\beta_k.a_1}{k!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Comme les termes α_k et β_k deviennent de plus en plus complexes à évaluer, nous ne pouvons passer une existence à trouver la formule exacte. Ce travail est mieux géré en introduisant la formule de récurrence dans un calculateur symbolique (comme MAPLE). Cette fois-ci, nous devons nous contenter de donner les premiers termes de l'expression solution :

$$\begin{aligned} y_h &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n = C_1\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \ldots\right] \\ &+C_2\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \ldots\right] \end{aligned}$$

2.1.3 Domaine de validité

Dans cette partie nous nous préoccupons du domaine de validité de l'expression en série entière comme solution de l'équation différentielle du second ordre autour du point ordinaire x_0.

Définition 2.1.1. *Une fonction $f(x)$ est dite analytique au point x_0 si on peut l'exprimer par un développement en série de entière au voisinage de ce point*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad \forall\, |x - x_0| < D$$

- *Dans l'équation :*

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

un point x_0 est dit point ordinaire si $P(x) \neq 0$

- *Dans l'équation :*

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

un point x_0 est dit point singulier si $P(x) = 0$

2.1.4 Conditions d'existence d'une solution en série entière

Théorème 2.1.1. (du *Boyce & Diprima*)*Si, dans l'équation différentielle :*

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \text{ et } q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$$

tels que

$$y_h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_{1h}(x) + a_1 y_{2h}(x)$$

sont analytiques en x_0, alors il existe une solution en forme de série entière qui satisfait cette équation : De plus le rayon de convergence pour $y_{1h}(x)$ et $y_{2h}(x)$ est au moins égale au plus petit des rayons de convergence pour les séries qui représentent $p(x)$ ou $q(x)$

Remarque 2.1.1. *Dans l'équation d'Airy, comme le polynôme $P(x) = 1$ est analytique en n'importe quel point x_0, les solutions étaient analytiques autour des points ordinaires $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$ (elles sont analytiques en n'importe quel point x_0). Une solution peut avoir un rayon de convergence plus grand que celui indiqué par le théorème. Le théorème précédent ne donne donc qu'une indication très conservatrice du rayon de convergence.*

Exemple 2.1.5. *Trouver le rayon de convergence autour de x_0 pour la solution de l'équation de Legendre :*

$$(1-x^2)y" - 2xy' + \alpha(\alpha-1)y = 0, \qquad \alpha = cte$$

En effet ; Notons que les coefficients :

$$P(x) = 1 - x^2,\ Q(x) = -2x \text{ et } R(x) = \alpha(\alpha-1)$$

sont des polynômes. De plus les racines de $P(x)$ sont respectivement $\begin{cases} x_1 = +1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ et sont donc à distance de 1 de x_0. D'après le théorème, le rayon minimal de convergence pour la série entière solution est donc :

$$D = \min(|x_1 - x_0|) = \|+1-0\| = 1$$

Mais il se peut que son domaine soit plus étendu.

Exemple 2.1.6. *Déterminer le rayon minimal de convergence pour les solutions en série de l'équation suivante*

$$(1+x^2)y" + 2xy' + 4x^2y = 0,$$

autour du point $x_0 = 0$, puis autour du point $x_0 = \frac{1}{2}$

En effet ; Identification des coefficients :

$$P(x) = 1 + x^2,\ Q(x) = 2x \text{ et } R(x) = 4x^2$$

Ce sont tous des polynômes. Les racines pour $P(x)$ sont : $\begin{cases} x_1 = +i \\ x_2 = -i \end{cases}$ Le rayon minimum de convergence autour de x_0 est donc

$$D = \min\left(|x_1 - x_0|\,,\ |x_2 - x_0|\right) = \|i - 0\| = 1$$

pour la série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-0)^n$$

Le rayon minimum de convergence autour de $x_0 = \frac{1}{2}$ est donc

$$D = \min\left(|x_1 - x_0|\,,\ |x_2 - x_0|\right) = \left\| i + \frac{1}{2} \right\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

pour la série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x + \frac{1}{2})^n$$

Remarque 2.1.2. *D'après le théorème d'unicité de la solution d'une équation du second ordre linéaire*

$$y" + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

avec conditions initiales, si les coefficients sont des fonctions continues, alors la solution est unique sur l'intervalle ouvert I où ces fonctions sont continues. Or

$$\begin{cases} p(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \\ q(x) = \dfrac{4x^2}{1+x^2} \end{cases}$$

sont continues pour $-\infty < x < \infty$. Donc la solution unique s'étend donc sur tout l'espace des réels. D'un autre côté, le théorème du présent chapitre ne garantit qu'une solution en forme de série entière que dans les limites du plus petit rayon de convergence pour les développements en série de $p(x)$ ou $q(x)$. C'est-à-dire ici, pour $-1 < x < 1$ autour du point .$x_0 = 0$. Il est alors possible que la solution unique admette un développement en série entière autour de $x_0 = 0$, et qui ne soit valide sur tout l'espace *des réels. Il faut alors comprendre que les différentes séries entière ne représentent qu'une approximation locale autour de chaque x_0, de la solution unique, et ne peuvent prétendre représenter la solution unique au complet. Ce point de vue est très important pour les solutions en ingénierie, car il est rare que l'on trouve la solution unique, seulement la série entière qui représente la solution unique dans certaines limites.*

Exemple 2.1.7. *Trouver si possible une solution en série entière pour l'équation suivante :*

$$y" + (\sin x)y' + \left(1 + x^2\right) y =$$

autour de et déterminer le rayon de convergence de cette solution.x_0

en effet ; Identification des coefficients :

$$\begin{cases} p(x) = \sin x \\ q(x) = 1 + x^2 \end{cases}$$

De plus, on sait que $\sin x$ admet un développement en série de Taylor (série de entière à coefficients fixés) autour de x_0, avec un intervalle de convergence $-\infty < x < \infty$. De même, $q(x)$ admet un développement en série de Taylor autour de $x_0 = 0$ qui est : $q(x) = 1 + x^2$, avec un intervalle de convergence $-\infty < x < \infty$. Dès lors il existe une solution unique sur $-\infty < x < \infty$ et cette solution peut être représentée totalement par la série entière autour de x_0 :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

qui a un intervalle de convergence de $-\infty < x < \infty$.

2.2 SOLUTION PAR LES SÉRIES : POINT SINGULIER RÉGULIER

Dans l'équation :

$$P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

x_0 est un point singulier si $.P(x_0)$ Généralement, les points singuliers sont peu nombreux. On pourrait décider d'ignorer la solution autour de ces points, et simplement remplacer les produits défaillants dont le fonctionnement aurait par hasard passé par un de ces points singuliers (cas des voitures citrons par exemple). Cependant, dans plusieurs cas d'ingénierie, la réponse du système réel (un pont qui s'écroule, un voyage vers un trou noir qui se passe mal) a plutôt pour conséquence de casser votre carrière. Afin de prévoir le comportement des solutions autour de ces points, et même éventuellement exploiter ses propriétés, la solution n'étant plus représentable par une série entière autour ce point, nous allons nous tourner vers la série de Laurent lorsqu'on a affaire à des points singuliers isolés :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{(x-x_0)^n}$$

2.2.1 Quelques troubles avec les solutions aux point singuliers

Exemple 2.2.1. *CAS DE COEFFICIENTS NON ANALYTIQUES Soit l'équation différentielle suivante :*

$$x^2y" - 2y = 0$$

qui admet un point singulier en x_0 *. Que peut-t-on dire des solutions et de leur représentation par les séries entière.*

En effet ; Nous pouvons voir par inspection que

$$y_1(x) = x^2 \text{ et } y_2(x) = x^{-1}$$

sont des formes solutions indépendantes valides sur tout l'espace des réels moins le point origine $I = \{x < 0 \ \text{ et } x > 0\}$. La solution générale qui est valide sur $I = \{x < 0 \ \text{ et } x > 0\}$ est donc

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x^2 + c_2x^{-1}$$

Si on veut que la solution soit bornée lorsque $x \to 0$, la seule solution possible est que :

$$y_h(x) = c_1x^2$$

En effet, la même équation dans sa forme standard :

$$y" + p(x)y' + q(x)y = y" - \frac{2}{x^2}y = 0$$

montre que $q(x) = -\frac{2}{x^2}$, n'est pas analytique en $x_0 = 0$. Dès lors le théorème (9) ne peut s'appliquer pour trouver la solution sous forme d'une série entière De plus, $y_2(x) = x^{-1}$n'admet aucun développement en série de Taylor autour de $x_0 = 0$ En conséquence le présent problème n'admet aucune représentation en série entiere autour du point singulier $x_0 = 0$

Exemple 2.2.2. *Conditions initiales non applicables au point singulier. Soit à considérer l'équation suivante :*

$$x^2y" - 2xy' + 2y = 0$$

au point singulier $x_0 = 0$ Que peut-on dire de la solution spécifique si on donne comme conditions initiales $y_0 = y(0)$ et $y'(0) = y_1$

En effet, Par inspection, on peut vérifier que les formes suivantes :

$$y_{1h}(x) = x \text{ et } y_{2h}(x) = x^2$$

sont des solutions possibles et indépendantes entre-elles. Elles sont même analytiques au point x_0. Cependant, il est impossible d'introduire les conditions initiales afin de déduire les coefficients dans :

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x + c_2x^2$$

car ces conditions sont données pour un point singulier

2.2.2 Point singulier régulier

On parle de point singulier régulier (ou singularité faible) si le rapport $\frac{Q(x)}{P(x)}$ se limite à $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_1}{(x - x_0)}$ et que le rapport $\frac{R(x)}{P(x)}$ se limite à

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{c_1}{(x - x_0)} + \frac{c_2}{(x - x_0)^2}$$

ou autrement formulée :

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q'x)}{P(x)} \text{ existe et } \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R'x)}{P(x)} \text{ existe}$$

Autrement, on parlera de point singulier complexe ou point singulier irrégulier

Exemple 2.2.3. *Déterminer si les points singuliers de l'équation de Legendre sont réguliers :*

$$(1-x^2)y" - 2xy' + \alpha(\alpha-1)y = 0, \qquad \alpha = cte$$

En effet ; Les points singuliers sont :

$$P(x) = 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = +1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}(x-x_1)\frac{Q'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x1}(x-1)\frac{2x}{(x-1)(x+1)} = 1 \\ \lim_{x\to x_0}(x-x_1)^2\frac{R'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \end{aligned}$$

Les deux limites existent donc il s'agit d'un point singulier régulier. Ce sera pareil en $x_2 = -1$

2.3 SOLUTION PAR LES SÉRIES : LA MÉTHODE DE FROBENIUS

2.3.1 De point singulier régulier à l'équation d'Euler-Cauchy.

Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients non-constants suivant :

$$P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

autour d'un point singulier régulier $x_0 = 0$ Si $x_0 \neq 0$, il suffira de faire un changement de variable : $t = (x - x_0)$, de sorte que la nouvelle équation admette un point singulier en $t_0 = 0$. Le fait que $x_0 = 0$ soit un point singulier régulier implique que nous avons l'existence des limites suivantes :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_0}(x-0)\,p(x)=\widetilde{p}_0\\
\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_0}(x-0)^2\,q(x)=\widetilde{q}_0
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que $xp(x)$ et $x^2q(x)$ sont analytiques en $x_0 = 0$ (admettent un développement en série entière

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{p}_k(x-0)^n \text{ et } x^2q(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{q}_k(x-0)^n$$

autour du point x_0) Pour introduire les séries représentant $xp(x)$ et $x^2q(x)$ dans l'équation différentielle, nous devons d'abord diviser par $P(x)$, puis multiplier par x^2.

$$\begin{aligned}
&\{P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left\{y" + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0 \text{ si } x\neq 0\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left\{x^2y" + x\left(x\frac{Q(x)}{P(x)}\right)y' + \left(x^2\frac{R(x)}{P(x)}\right)y = 0 \text{ si } x\neq 0\right.\\
\Leftrightarrow\ &\{x^2y" + x\,(xp(x))\,y' + (x^2q(x))\,y = 0 \text{ si } x\neq 0
\end{aligned}$$

de sorte que nous arrivons à :

$$\left\{x^2y" + x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{p}_k(x-0)^n\right)y' + \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{q}_k(x-0)^n\right)y = 0 \text{ si } x\neq 0\right.$$

puisque $xp(x)$ et $x^2q(x)$ sont analytiques en $x_0 = 0$ (admettent un développement en série entière autour du point x_0) Lorsque x est quasiment sur zéro, on peut limiter les expansions en séries au premier terme sans trop en changer l'équation, ce qui nous amène à l'équation d'Euler-Cauchy au voisinage très proche de zéro :

$$x^2y" + x\,(\widetilde{p}_0)\,y' + (\widetilde{q}_0)\,y = 0 \text{ si } 0 < |x| << 1$$

2.3.2 Solution en série par la méthode de Frobenius

Ordinairement, plusieurs termes dans les expressions analytiques de $xp(x)$ et $x^2q(x)$ persistent si x s'éloigne un peu plus du point singulier régulier $x_0 = 0$. Dès lors on doit écrire ces coefficients par un développement limité au n^{ème} ordre :

$$x^2y" + x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{p}_n x^n\right)y' + \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{q}_n x^n\right)y = 0 \text{ si } x \neq 0$$

On observe alors que les coefficients d'Euler qui étaient originellement $\widetilde{p}_0$et $\widetilde{q}_0$, sont maintenant des séries $\sum_{k=0}^{k=n}\widetilde{p}_k x^k$et $\sum_{k=0}^{k=n}\widetilde{q}_k x^k$. Il est alors naturel de chercher des formes solutions (y_f à l'équation par des solutions d'Euler multipliées par une série semblable.

$$\begin{aligned} x^2y" + x\left(\widetilde{p}_0\right)y' + \left(\widetilde{q}_0\right)y &= 0 \rightarrow y_f = x^m \\ x^2y" + x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{p}_k x^n\right)y' + \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{q}_k x^n\right)y &= 0 \rightarrow y_f = x^m\sum_{n=0}^{+\infty}a_k x^n \end{aligned}$$

Ceci nous amène à la méthode de Frobenius.

Théorème 2.3.1. *Si une équation différentielle de la forme*

$$y" + \frac{\widetilde{p}(x)}{x}y' + \frac{\widetilde{q}(x)}{x^2}y = 0, \quad \forall\, x \neq 0$$

possède et $\widetilde{p}(x)$ et $\widetilde{q}(x)$ analytiques en $x_0 = 0$. Alors il existe au moins une solution de la forme :

$$y(x) = x^m\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$$

où m est un nombre réel ou complexe choisi de sorte que $a_0 \neq 0$.

Exemple 2.3.1. *Soit à résoudre l'équation de la forme suivante :*

$$2x^2y" - xy' + (1+x)y = 0$$

Il est évident que cette équation admet un point singulier en $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_0} x\frac{-x}{2x^2} = -\frac{1}{2}\\
\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_0} x^2\frac{1+x}{2x^2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mieux encore, nous identifions facilement les termes des séries représentant $xp(x)$ et $x^2q(x)$:

$$\begin{cases} xp(x) = -\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{p}_n x^n = \widetilde{p}_0 + 0 + 0 + ... \\ x^2q(x) = \frac{1+x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{q}_n x^n = \widetilde{q}_0 + \widetilde{q}_1 x + 0 + 0 + ... \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{p}_0 = -\frac{1}{2} \\ \widetilde{q}_0 = \frac{1}{2} \\ \widetilde{q}_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A présent, pour résoudre la dite équation, nous allons supposer la forme solution préconisée par le théorème :

$$\begin{cases} y(x) = x^m\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+m} \\ y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)a_n x^{n+m-1} \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)(n+m-1)\,a_n x^{n+m-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ 2x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)(n+m-1)\,a_n x^{n+m-2} - x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)a_n x^{n+m-1} + (1+x)\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+m} = 0 \right.$$

Soit de nouveau l'équation remaniée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}2(n+m)(n+m-1)\,a_n x^{n+m} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)a_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+m+1} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}2(n+m)(n+m-1)\,a_n x^{n+m} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)a_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+m} + \sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1} x^{n+m} = 0$$

Encore une fois, la seule façon pour que cette équation soit valide pour une valeur quelconque de x autour de zéro, est que tous les coefficients satisfassent les relations suivantes

$$\begin{cases} 2(0+m)(0+m-1)a_0 - (0+m)a_0 + a_0 = 0 \\ 2(n+m)(n+m-1)a_n - (n+m)a_n + a_n + a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

La première équation est appelée équation indicielle (rappelez-vous l'équation caractéristique) car elle permet de déterminer l'indice m .

$$\begin{cases} [2m(m-1) - m + 1]\, a_0 = 0 \\ avec\ a_0 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 3m^2 - 3m + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les racines de l'équation indicielle,m_1 et m_2 sont les indices de la singularité (aussi appelées exposants à la singularité) au point $x_0 = 0$. Elles déterminent le comportement de la solution au voisinage du point singulier considéré. L'autre équation devient alors :

$$2(n+1)na_n - (n+1)a_n + a_n + a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+1)}, \quad \forall n = 1, 2, 3, ...$$

$$ou$$

$$2(n+\frac{1}{2})\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n - (n+\frac{1}{2})a_n + a_n + a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \quad \forall n = 1, 2, 3, ...$$

Et les coefficients successifs pour les séries correspondantes sont données par :

$$\begin{cases} a_0 = C_1 \\ a_1 = \frac{a_0}{1.3} = \frac{C_1}{1.3} \\ a_2 = -\frac{a_1}{2.5} = \frac{a_0}{5.3.2} = (-1)^2 \frac{C_1}{\prod_{j=1}^{j=2} j(2j+1)} \\ .... = ... \\ a_k = -\frac{a_{k-1}}{k(2k+1)} = \frac{(-1)^k C_1}{\prod_{j=1}^{j=k} 2j^2 + j} \\ .... = ... \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1 = C_2 \\ a_1 = \frac{a_0}{1.1} = \frac{C_2}{1.1} \\ a_2 = -\frac{a_1}{2.3} = \frac{a_0}{3.2.1.1} = \frac{(-1)^2 C_2}{\prod_{j=1}^{j=2} j(2j-1)} \\ .... = ... \\ a_k = -\frac{a_{k-1}}{k(2k-1)} = \frac{(-1)^k C_2}{\prod_{j=1}^{j=k} 2j^2 - j} \\ .... = ... \end{cases}$$

Et finalement la solution générale :

$$\begin{aligned} y_g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = C_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\prod_{j=1}^{j=n} 2j^2+j} + C_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{\prod_{j=1}^{j=n} 2j^2-j} \\ &= C_1 y_{1h}(x) + C_2 y_{2h}(x) \end{aligned}$$

2.3.3 Solution formelle pour l'équation à coefficients non-constants

Lors du chapitre précédent, nous avons abordé la solution d'une équation à coefficients non-constants à l'aide d'exemples. Nous allons maintenant présenter la méthode formelle de résolution, avec les divers cas possibles. Considérons de nouveau l'équation différentielle linéaire à coefficients non-constants :

$$P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

autour d'un point singulier régulier $x_0 = 0$. Le fait que x_0 soit un point singulier régulier implique que nous avons l'existence des limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \frac{Q'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_0} xp(x) = \lim_{x\to 0} \widetilde{p}(x) = \widetilde{p}_0 \\ \lim_{x\to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} \widetilde{q}(x) = \widetilde{q}_0 \end{aligned}$$

Après quelques manipulations (division par $p(x)$ et multiplication par x^2), l'équation différentielle ci-dessus était devenue :

$$x^2 y" + x\left(xp(x)\right)y' + \left(x^2 q(x)\right)y = 0, \quad \forall x \neq 0$$

C'était de sorte que nous arrivions à la forme :

$$x^2 y" + x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{p}_n (x-0)^n\right) y' + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{q}_n (x-0)^n\right) y = 0 \quad \forall x \neq 0$$

Nous cherchons donc (méthode de Frobenius) la forme solution par :

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où m est un nombre réel ou complexe choisi tel que $a_0 \neq 0$ En dérivant et en réinjectant la forme solution dans l'équation :

$$\begin{cases} y(x) = x^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+m} \\ y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+m) a_n x^{n+m-1} \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m-2} + x\widetilde{p}(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+m) a_n x^{n+m-1} + \widetilde{q}(x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+m} = 0 \right.$$

C'est-à-dire :

$$x^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m-2} \right) + x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{p}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+m) a_n x^{n+m-1} \right)$$

$$+ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{q}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+m} \right) = 0$$

donc

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m} \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{p}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+m) a_n x^{n+m} \right)$$

$$+ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{q}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+m} \right) = 0$$

Et, si on développe le premier terme versus les autres termes des séries :

$$a_0 \left(m(m-1) + \widetilde{p}_0 m + \widetilde{q}_0 \right) x^m + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m} \right) + \widetilde{p}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+m) a_n x^{n+m} +$$

$$\widetilde{q}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+m} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{p}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+m) a_n x^{n+m} \right) + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{q}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+m} \right) = 0$$

Or, grâce à la propriété suivante sur le produit de séries :

$$a_0\left(m(m-1)+\widetilde{p}_0 m+\widetilde{q}_0\right)x^m+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+m)\left(n+m-1\right)+\widetilde{p}_0(n+m)+\widetilde{q}_0\right]a_n x^{n+m}+$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{n=k-1}a_n\left[(n+m)\widetilde{p}_{n-k}+\widetilde{q}_{n-k}\right]x^{n+m}=0\right)$$

Et si l'on pose les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} F(m) &= m(m-1)+\widetilde{p}_0 m+\widetilde{q}_0 \\ F(n+m) &= (n+m)(n+m-1)+\widetilde{p}_0(n+m)+\widetilde{q}_0 \end{aligned}$$

L'équation devient :

$$a_0 F(m)x^m+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n F(n+m)x^{n+m}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{n=k-1}a_n\left[(n+m)\widetilde{p}_{n-k}+\widetilde{q}_{n-k}\right]x^{n+m}=0\right)$$

Cette équation n'est satisfaite pour un grand nombre de valeurs de x que si les coefficients des puissances de x sont tous nuls. Ce qui nous amène alors aux relations à satisfaire :

$$\begin{cases} F(m)=m(m-1)+\widetilde{p}_0 m+\widetilde{q}_0=0 \\ a_n F(n+m)+\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}a_k\left[(k+m)\,\widetilde{p}_{n-k}+\widetilde{q}_{n-k}\right]=0 \end{cases}$$

La première équation $F(m)=0$ est appelée équation indicielle car elle permet de déterminer l'indice m. Les racines de l'équation indicielle,$m_1$et m_2 sont les indices de la singularité au point $x_0=0$. La deuxième équation :

$$a_n F(n+m)+\sum_{k=0}^{k=n-1}a_k\left[(k+m)\,\widetilde{p}_{n-k}+\widetilde{q}_{n-k}\right]=0$$

est une relation de récurrence pour trouver le coefficient suivant a_n à partir des coefficients a_{n-1}, $a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ précédemment fixés. De l'équation indicielle, nous allons distinguer trois cas possibles :

- Cas 1 : deux racines réelles distinctes et m_1 et m_2
- Cas 2 : une racine double $m_1 = m_2$
- Cas 3 : deux racines distinctes mais espacées d'un nombre entier :$m_1 = m_2 + l$, $l = 1, 2, 3...$

2.3.4 CAS 1 : DEUX RACINES DISTINCTES

$$F(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(\widetilde{p}_0 - 1)m + \widetilde{q}_0 = 0 \\ avec\ (\widetilde{p}_0 - 1)^2 - 4\widetilde{q}_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{1 - \widetilde{p}_0 + \sqrt{(\widetilde{p}_0 - 1)^2 - 4\widetilde{q}_0}}{2} \\ m_2 = \dfrac{1 - \widetilde{p}_0 - \sqrt{(\widetilde{p}_0 - 1)^2 - 4\widetilde{q}_0}}{2} \end{cases}$$

Dans ce cas on a deux formes solutions distinctes :

$$y_g(x) = \underbrace{C_1 x^{\overbrace{\frac{1 - \widetilde{p}_0 + \sqrt{(\widetilde{p}_0 - 1)^2 - 4\widetilde{q}_0}}{2}}^{m_1}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,n)} x^n\right)}_{y_1'(x)}$$

$$+ \underbrace{C_2 x^{\overbrace{\frac{1 - \widetilde{p}_0 - \sqrt{(\widetilde{p}_0 - 1)^2 - 4\widetilde{q}_0}}{2}}^{m_2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_2,n)} x^n\right)}_{y_2(x)}, \ \forall x \neq 0$$

Avec les coefficients successifs qui sont donnés par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{(m_1,0)} = C_1 \\ a_{(m_1,1)} = \dfrac{-a_{(m_1,0)}\left[m_1\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1\right]}{F(1+m_1)} = \dfrac{-C_1\left[m_1\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1\right]}{(1+m_1)\,m_1 + (1+m_1)\,\widetilde{p}_0 + \widetilde{q}_0} \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ a_{(m_1,n)} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_{(m_1,k)}\left[(k+m_1)\,\widetilde{p}_{n-k} + \widetilde{q}_{n-k}\right]}{F(n+m_1)} \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_{(m_2,0)} = C_2 \\ a_{(m_2,1)} = \dfrac{-a_{(m_2,0)}\left[m_2\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1\right]}{F(1+m_2)} = \dfrac{-C_2\left[m_2\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1\right]}{(1+m_2)\,m_2 + (1+m_2)\,\widetilde{p}_0 + \widetilde{q}_0} \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ a_{(m_2,n)} = \dfrac{-\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_{(m_2,k)}\left[(k+m_2)\,\widetilde{p}_{n-k} + \widetilde{q}_{n-k}\right]}{F(n+m_2)} \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. *Les relations pour calculer les coefficients successifs deviennent de plus en plus complexes à cause des termes innombrables $\widetilde{p}_{n-k}$ et $\widetilde{q}_{n-k}$ Aussi, lorsque les séries de $xp(x)$ ou $x^2q(x)$ ne se limitent pas à trois termes et moins, il est préférable de revenir à l'équation originale, pour déterminer la relation de récurrence pour les coefficients $a_{(m,n)}$*

CAS 1 : DEUX RACINES DISTINCTES $(\widetilde{p}_0 - 1)^2 = 4\widetilde{q}_0$

$$F(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(\widetilde{p}_0 - 1)m + \widetilde{q}_0 = 0 \\ avec\ (\widetilde{p}_0 - 1)^2 - 4\widetilde{q}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ m_1 = m_2 = \frac{1-\widetilde{p}_0}{2} \right.$$

Dans ce cas, nous ne possédons qu'une des formes solutions :

$$y_1(x) = C_1 x^{\frac{1-\widetilde{p}_0}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,n)} x^n\right)$$

Avec les coefficients successifs qui sont donnés par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{(m_1,0)} = C_1 \\ a_{(m_1,1)} = \dfrac{-a_{(m_1,0)}\left[m_1\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1\right]}{F(1+m_1)} = \dfrac{-C_1\left[m_1\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1\right]}{(1+m_1)\,m_1 + (1+m_1)\,\widetilde{p}_0 + \widetilde{q}_0} \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ a_{(m_1,n)} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_{(m_1,k)}\left[(k+m_1)\,\widetilde{p}_{n-k} + \widetilde{q}_{n-k}\right]}{F(n+m_1)} \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_{(m_2,0)} = C_2 \\ a_{(m_2,1)} = \dfrac{-a_{(m_2,0)}\left[m_2\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1\right]}{F(1+m_2)} = \dfrac{-C_2\left[m_2\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1\right]}{(1+m_2)\,m_2 + (1+m_2)\,\widetilde{p}_0 + \widetilde{q}_0} \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ a_{(m_2,n)} = \dfrac{-\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} a_{(m_2,k)}\left[(k+m_2)\,\widetilde{p}_{n-k} + \widetilde{q}_{n-k}\right]}{F(n+m_2)} \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. *Les relations pour calculer les coefficients successifs deviennent de plus en plus complexes à cause des termes innombrables $\widetilde{p}_{n-k}$ et $\widetilde{q}_{n-k}$ Aussi, lorsque les séries de $xp(x)$ ou $x^2q(x)$ ne se limitent pas à trois termes et moins, il est préférable de revenir à l'équation originale, pour déterminer la relation de récurrence pour les coefficients $a_{(m,n)}$*

CAS 1 : DEUX RACINES DISTINCTES $(\widetilde{p}_0 - 1)^2 = 4\widetilde{q}_0$

$$F(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(\widetilde{p}_0 - 1)m + \widetilde{q}_0 = 0 \\ avec\ (\widetilde{p}_0 - 1)^2 - 4\widetilde{q}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ m_1 = m_2 = \frac{1-\widetilde{p}_0}{2} \right.$$

Dans ce cas, nous ne possédons qu'une des formes solutions :

$$y_1(x) = C_1 x^{\frac{1-\widetilde{p}_0}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,n)} x^n\right)$$

Afin de déterminer la seconde forme solution indépendante, nous appliquons comme d'habitude la méthode de variation de la constante (variation de paramètre) :

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) \Rightarrow \begin{cases} y_2 = u.y_1 \\ y_2' = u'y_1 + u.y_1' \\ y" = u"y_1 + 2u'y_1' + u.y"_1 \end{cases}$$

et en réinjectant ces expressions dans l'équation de départ et en regroupant en fonction de la variable u :

$$x^2u"(y_1) + xu'\underbrace{(2xy_1' + \widetilde{p}(x)y_1)}_{\neq 0} + u\underbrace{(x^2y"_1 + x\widetilde{p}(x)y_1' + \widetilde{q}(x)y_1)}_{=0} = 0$$

Le coefficient de u est nul puisque y_1 est une forme solution de l'équation. et en divisant le tout par x^2y_1 :

$$u" + \left(\frac{2x^2y_1' + x\widetilde{p}(x)y_1}{x^2y_1}\right)u' = u" + \left(x\frac{y"_1}{y_1} + \frac{1}{x}\widetilde{p}(x)\right)u' = 0$$

Or la quantité $\frac{y_1'}{y_1}$ équivaut à

$$\frac{m_1x^{m_1-1}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,\ n)}x^n\right) + x^{m_1}\left(a_{(m_1,\ 1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_{(m_1,\ n+1)}x^n\right)}{x^{m_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,\ n)}x^n\right)} = \frac{m_1}{x}$$

$$+\frac{\left(a_{(m_1,\ 1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_{(m_1,\ n+1)}x^n\right)}{x^{m_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,\ n)}x^n\right)}$$

et que

$$\widetilde{p}(x) = \widetilde{p}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{p}_n x^n$$

l'équation en u' se ramène à :

$$u'' + \left(\frac{2m_1}{x} + \frac{\widetilde{p}_0}{x} + \frac{\left(a_{(m_1,\,1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{(m_1,\,n+1)} x^n \right)}{\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,\,n)} x^n \right)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{p}_n x^{n-1} \right) u' = 0$$

Mais, comme :

$$m_1 = \frac{1 - \widetilde{p}_0}{2}$$

et que les autres termes de la série sont, soit une constante, soit des puissances positives de x :

$$\frac{u''}{u'} + \left(-\frac{1}{x} - \frac{\left(a_{(m_1,\,1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{(m_1,\,n+1)} x^n \right)}{\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,\,n)} x^n \right)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{p}_n x^{n-1} \right)$$

$$\Rightarrow \ \ln u' = -\ln x - \sum_{n=0}^{+\infty} d_{(m_1,\,n)} x^n \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} d_{(m_1,\,n)} x^n \right)$$

Soit par expansion de la fonction exponentielle en série de puissances, la fonction u elle-même deviendrait :

$$u = \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{(m_1,\,n)} x^n$$

D'où finalement l'expression de la deuxième forme solution :

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{m_1} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,\,n)} x^n \right) \sum_{n=1}^{+\infty} C_{(m_1,\,n)} x^n = y_1(x) \ln x + x^{m_1} \sum_{n=1}^{+\infty} b_{(m_1,\,n)} x^n$$

Et la solution générale est alors :

$$y_g(x) = C_1 \left(x^{\frac{1-\widetilde{p}_0}{2}} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_{\left(\frac{1-\widetilde{p}_0}{2},\,n\right)} + \frac{C_2}{C_1} b_{\left(\frac{1-\widetilde{p}_0}{2},\,n\right)} \right] x^n \right)$$

$$\underbrace{+C_2(\ln x)\left(x^{\frac{1-\tilde{p}_0}{2}}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\left(\frac{1-\tilde{p}_0}{2},\, n\right)}x^n\right)}_{y_1(x)},\ x>0$$

Remarque 2.3.2. *Par d'autres considérations, on peut montrer que la seconde forme solution peut aussi s'écrire*

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{m_1}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left.\frac{\partial a_{(m_1,\, n)}}{\partial m}\right|_{m=m_1}\right)x^n$$

Toutefois, il n'est pas aisé de manipuler les dérivées pour identifier les coefficients $b_{(m_1,k)}$ *Aussi, préfère-t-on la substitution directe de*

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{m_1}\sum_{n=1}^{+\infty} b_{(m_1,\, n)}x^n$$

dans l'équation d'origine pour trouver la relation de récurrence sur les $b_{(m_1,n)}$ *Parfois même, il est préférable d'utiliser la méthode de réduction d'ordre :*

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{\xi=0}^{\xi=x}\left(\frac{e^{-\int p(t)dt}}{y^2(\xi)}\right)d\xi$$

pour déterminer plus élégamment la seconde forme solution, une fois l'expression analytique de $y_1(x)$ *trouvée.*

Soit à trouver la solution pour l'équation suivante :

$$x(x-1)y" + (3x-1)y' + y = 0$$

Cette équation admet un point singulier en $x_0 = 0$.

$$\begin{cases} P(x) = x(x-1) \\ Q(x) = 3x-1 \\ R(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{p}(x) = xp(x) = x\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{3x-1}{x-1} \\ \tilde{q}(x) = x^2q(x) = x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{x(3x-1)}{x-1} \end{cases}$$

Soit l'équation remaniée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)(n+m-1)\,a_n x^{n+m} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+m)(n+m-1)+(n+m)\right]a_n x^{n+m-1} +$$

$$3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)a_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+m} = 0$$

$$\Updownarrow m = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\,a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left[n(n-1)+n\right]a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-a_0\left(0(0-1)+0\right)x^{0-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\,a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}n^2 a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = 0$$

c'est-à-dire, après changement d'indice dans certaines sommations :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\,a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_{n+1} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = 0$$

d'où la relation de récurrence à satisfaire :

$$n(n-1)\,a_n - (n+1)^2 a_{n+1} + 3n a_n + a_n$$

On en conclue que :

$$\begin{aligned}
\left[n(n-1)+3n+1\right]a_n &= (n+1)^2 a_{n+1} \\
\left[n^2+2n+1\right]a_n &= (n+1)^2 a_{n+1} \\
a_n &= a_{n+1}
\end{aligned}$$

De sorte que l'expression de la première forme solution est :

$$y_1(x) = x^0\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = \frac{1}{1-x}$$

Soit l'équation remaniée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)(n+m-1)a_n x^{n+m} - \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+m)(n+m-1)+(n+m)]a_n x^{n+m-1} +$$

$$3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+m)a_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+m} = 0$$

$$\Updownarrow m = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}[n(n-1)+n]a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-a_0(0(0-1)+0)x^{0-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}n^2 a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = 0$$

c'est-à-dire, après changement d'indice dans certaines sommations :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = 0$$

d'où la relation de récurrence à satisfaire :

$$n(n-1)a_n - (n+1)^2 a_{n+1} + 3na_n + a_n$$

On en conclue que :

$$\begin{aligned} [n(n-1)+3n+1]a_n &= (n+1)^2 a_{n+1} \\ [n^2+2n+1]a_n &= (n+1)^2 a_{n+1} \\ a_n &= a_{n+1} \end{aligned}$$

De sorte que l'expression de la première forme solution est :

$$y_1(x) = x^0\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = \frac{1}{1-x}$$

Pour trouver la seconde forme solution, nous utilisons la méthode de réduction d'ordre :

$$u'(x) = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} = (1-x)^2 e^{-\int \frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}dx} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 x} \Rightarrow u(x) = \ln x \Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\ln x$$

d'où la solution générale :

$$y_g(x) = \frac{C_1}{1-x} + \frac{C_2}{1-x}\ln x$$

CAS 2 : DEUX RACINES DISTANCÉES PAR UN NOMBRE ENTIER Dans ce cas

$$F(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(\widetilde{p}_0 - 1)m + \widetilde{q}_0 = 0 \\ avec\ (\widetilde{p}_0 - 1)^2 - 4\widetilde{q}_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{1-\widetilde{p}_0 + \sqrt{(\widetilde{p}_0-1)^2 - 4\widetilde{q}_0}}{2} = m_2 + l \\ l = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

alors la première forme solution est comme avant :

$$y_1(x) = x^{m_1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,n)}x^n\right) = x^{\frac{1-\widetilde{p}_0+\sqrt{(\widetilde{p}_0-1)^2-4\widetilde{q}_0}}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,n)}x^n\right)$$

Cependant, comme la seconde forme solution comporte une partie qui est semblable à la première, il est nécessaire de la modifier pour lever la dégénérescence :

$$y_2(x) = x^{m_1+l}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1+l,n)}x^n\right) = x^{m_1}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{(m_1+l,n)}x^{n+l}$$

de sorte que nous devons plutôt avoir :

$$y_2(x) = \lambda y_1(x)\ln x + x^{m_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_2,n)}x^n\right)$$

d'où la forme de la solution générale :

$$y_g(x) = (C_1 + \lambda \ln x)\, x^{m_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_1,n)}x^n\right) + C_2 x^{m_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{(m_2,n)}x^n\right)$$

Exemple 2.3.2. *Soit à trouver la solution de l'équation suivante :*

$$x(x-1)y'' - xy'^{\circ}y = 0$$

Cette équation admet un point singulier en $x_0 = 0$

$$\begin{cases} P(x) = x(x-1) \\ Q(x) = -x \\ R(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{p}(x) = xp(x) = x\dfrac{Q'x)}{P(x)} = \dfrac{-x}{x-1} \\ \widetilde{q}(x) = x^2q(x) = x^2\dfrac{R'x)}{P(x)} = \dfrac{x}{x-1} \end{cases}$$

Ce point singulier est régulier et identification de et : 0 p

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_0} xp(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{-x}{x-1} = 0 = \widetilde{p}_0 \\ \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R'x)}{P(x)} &= \lim_{x\to x_0} x^2q(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{x}{x-1} = 0 = \widetilde{q}_0 \end{aligned}$$

L'équation indicielle et les exposants à la singularité sont alors :

$$F(m) = m^2 + (\widetilde{p}_0 - 1)m + \widetilde{q}_0 = 0 \Leftrightarrow \{m^2 - m = 0 \Rightarrow \{m_1 = 1, \ et \ m_2 = 0$$

Première forme solution : Il est encore préférable de réintroduire la forme solution avec l'exposant à la singularité fixée :

$$\begin{cases} y(x) = x^{m_1}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^n \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_n x^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ (x^2 - x)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+1} = 0 \right.$$

Soit l'équation remaniée et changement d'indice :

$$\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_nx^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1} = 0\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\sum_{n=0}^{+\infty}n^2a_nx^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_nx^n = 0\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)^2a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_nx^n = a_0 0(0+1)x^0\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)^2a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_nx^n = 0$$

ce qui donne les relations suivantes à satisfaire :

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 0(0+1) = 0 \\ (n-1)^2a_{n-1} - (n+1)na_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right.$$

Il s'ensuit que tous les coefficients sont tous nuls : $a_1 = a_2 = ... = 0$, hormis le premier et a_0

$$y_1(x) = x^{m_1}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n = C_1x = x$$

Seconde forme solution : nous appliquons la méthode de réduction d'ordre :

$$u'(x) = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} = \frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{-1}{x-1}dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \Rightarrow u(x) = \ln x + \frac{1}{x} \Rightarrow y_2(x)$$

$$= y_1(x)\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) = x\ln x + 1$$

Et la solution générale à trouver est donc :

$$y_g(x) = C_1x + C_2(x\ln x + 1)$$

2.4 Résolution de l'équationde bessel

2.4.1 l'équation de bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \quad v = cte$$

nous allons concidérer deus cas de bessel : $v = 0, v = \frac{1}{2}$.

2.4.2 l'équetion de bessel d'ordre zéro

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

Résolution formelle :

$$\left\{\begin{array}{r} y(x) = x^m \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} a_k x^{k+m} \\ y'(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} a_k (k+m) x^{k+m-1} \\ y''(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} a_k (k+m)(k+m-1) x^{k+m-2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x^2 \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} a_k (k+m)(k+m-1) x^{k+m-2} + \\ +x \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} a_k (k+m) x^{k+m-1} + x^2 \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} a_k x^{k+m} = 0 \end{array}\right.$$

Identification des coefficient $\bar{p}_0$ et $\bar{q}_0$:

$$\begin{array}{c} \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(X)}{P(X)} = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} xP(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1 = P_0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(X)}{P(X)} = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} x^2 q(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2} = 0 = q_0 \end{array}$$

l'équation remanièe

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k (k+m)(k+m-1) x^{k+m} + \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k (k+m) x^{k+m} + \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k x^{k+m+2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 [m(m-1) + m] x^m + a_1 [m(m+1) + (m+1)] x^{m+1} + \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n (n+m)(n+m-1) x^{n+m} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n (n+m) x^{n+m} + + \sum_{n=2}^{k=\infty} a_{n-2} x^{n+m} = 0$$

Nous avons alors les relations suivantes :

$$a_0\left[m(m-1)+m\right]=0$$
$$a_1\left[m(m+1)+(m+1)\right]=0$$
$$a_n\left[(n+m)(n+m-1)+(n+m)\right]+a_{n-2}=0$$

la première equation est l'équation indicielle, ce qui nous donne :

$$F(m)=\left[m(m-1)+m\right]0 \Longrightarrow \begin{array}{c} m_1=0 \\ m_2=0 \end{array}$$

Si la première équation est choisie comme équation indicielle,alors la seconde équation impose :

$$a_1\left[0(0+1)+(0+1)\right]=0 \Longrightarrow\ a_1=0$$

Et la troisième équation est la relation de récurrence :

$$a_n\left[(n+m)\,(n+m-1)+(n+m)\right]+a_{n-2}=0 \Longrightarrow a_n=\frac{-a_{n-2}}{\left[(n+m)\,(n+m-1)+(n+m)\right]}$$

$$=\frac{-a_{n-2}}{(n+m)^2}$$

Puisqu'il s'agit d'une racine double,alors la première forme solution est :

$$y_1(x)=x^{m_1}(1+\sum_{k=1}^{k=\infty}a_{(m_1,k)}x^k)$$

Avec les coefficients successifs $a_{(m_1,k)}$ en fonction de $a_{(m_1,0)}$:

$$\begin{cases} a_{(m_1,0)} = C_1 \\ a_{(m_1,1)} = 0 \\ a_{(m_1,2)} = \dfrac{-a_{(m_1,0)}}{(2+m_1)^2} = \dfrac{-C_1}{2^2} \\ a_{a_{(m_1,3)}} = 0 \\ a_{(m_1,4)} = \dfrac{-a_{(m_1,2)}}{(4+m_1)^2} = \dfrac{(-1)^2 C_1}{4^2} \\ \dots = \dots \\ a_{(m_1,2k)} = \dfrac{(-1)^k a_{(m_1,0)}}{2^{2k}(k!)^2} \\ \dots = \dots \end{cases}$$

D'ou l'éxpression de la premiére forme solution :

$$y_1(x) = a_{(m_1,0)}(1 + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(K!)^2}), \forall x > 0$$

La série obtenue est applée la fonction de bessel de type Ietd'ordre zero :

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(K!)^2}, \forall x > 0$$

la seconde forme solution est donnée par

$$y_2(x) = y_1(x) ln x + x^{m_1} \sum_{k=1}^{k=\infty} (\left.\frac{\partial a_{(m,k)}}{\partial m}\right|_{m=m_1}) x^k$$

Or :

$$a_{(m,2k)} = \frac{(-1)^k a_{(1,0)}}{(m+2)^2(m+4)^2 \dots (m+2k-2)^2(m+2k)^2}$$

Mais on constate que :

$$\frac{a'_{(m,2k)}}{a_{(m,2k)}} = -2\left[\frac{1}{(m+2)} + \frac{1}{(m+4)} + \dots + \frac{1}{(m+2k-2)} + \frac{1}{(m+2k)}\right]$$

Donc

$$\left.\frac{\partial a'_{(m,2k)}}{\partial m}\right|_{m=m1} = -2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{(2k-2)}+\frac{1}{2k}\right]a_{(m_1,2k)}$$

$$= -\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right]a_{(m_1,2k)} = -H_k a_{(m_1,2k)}$$

Et ladeuxième forme solution est donc :

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + x^{m_1}a_0(1+\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k+1}H_k x^{2k}}{2^{2k}(K!)^2})$$

En lieu de la deuxième forme solution, on considèr souvent la combinaison $y_1(x)$ et $y_2(x)$ comme suit :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \frac{2}{\pi}[y_2(x)+y_1(x)(y-\ln 2)] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k+1}H_k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right)+J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+y\right)\right] \end{aligned}$$

Cette fonction est appelée fonction de Bassel de type et d'ordre zéro.D'autres appellations : fonction de Neumann,ou fonction de Weber[3] sont aussi utilisés la littérature. Et la solution générale de Bassel est donc :

$$y_g(x) = C_1 J_0(x), \text{ avec } \left\{\begin{array}{r} J_0(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}, \ \forall x>0 \\ y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k+1}H_k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right)+J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+y\right)\right] \end{array}\right.$$

2.4.3 L'équation de Bassel d'ordre un-demi

$$x^2y''+xy'+(x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2)y=0$$

Résolution formule :

$$x^2\sum_{k=0}^{k=\infty}a_k(k+m)(k+m-1)x^{k+m-2}+x\sum_{k=0}^{k=\infty}a_k(k+m)x^{k+m-1}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\sum_{k=0}^{k=\infty}a_kx^{k+m}=0$$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}a_k(k+m)(k+m-1)x^{k+m}+\sum_{k=0}^{k=\infty}a_k(k+m)x^{k+m}+\sum_{k=0}^{k=\infty}a_k(k+m)x^{k+m+2}-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=\infty}a_kx^{k+m}=0$$

C'est -a-dire,aprés les changements d'indices :

$$a_0\left[m(m-1)+m\right]x^m+a_1\left[m(m+1)+(m+1)\right]x^{m+1}-\frac{1}{4}a_0x^m-\frac{1}{4}a_1x^{m+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{k=\infty}a_n(n+m)(n+m-1)x^{n+m}+\sum_{n=2}^{k=\infty}a_n(n+m)x^{n+m}+\sum_{n=2}^{k=\infty}a_{n-2}x^{n+m}-\sum_{n=0}^{k=\infty}a_nx^{n-m}=0.$$

de sorte que nous avons trois relations à satisfaire :

$$\begin{cases} a_0\left[m(m-1)+m-\frac{1}{4}\right]=0 \\ a_1\left[m(m+1)+(m+1)-\frac{1}{4}\right]=0 \\ a_n\left[(n+m)(n+m-1)+(n+m)-\frac{1}{4}\right]+a_{n-2}=0 \end{cases}$$

La premiére nous sert d'équation indicielle,ce qui nous donne :

$$F_{\frac{1}{4}}(m)=\left[m(m-1)+m-\frac{1}{4}\right]=0\Rightarrow\begin{cases} m_1=+\frac{1}{2} \\ m_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comme les indices sont distancés par un nombre entier,nous allons considérer d'abord l'indice le plus élevé pour trouver la premiére forme solution.De sorte que la seconde relation nous impose :

$$a_1\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)+\left(\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)-\frac{1}{4}\right]=0\Longrightarrow a_1=0$$

de sorte que les coefficients sont :

$$
\begin{cases}
a_{(-\frac{1}{2},0)} = C_1 \\
a_{(-\frac{1}{2},2)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},0)}}{2(2-1)} = \frac{-C_1}{2!} \\
a_{(-\frac{1}{2},4)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},2)}}{4(4-1)} = \frac{-a_{(\frac{1}{2},0)}}{4\times3\times2\times1} = \frac{(-1)^2C_1}{4!} \\
\dots = \dots \\
a_{(-\frac{1}{2},2k)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},2k-2)}}{2k(2k-1)} = \dots = \frac{(-1)^k a_{(-\frac{1}{2},0)}}{(2k)!} = \frac{(-1)^kC_1}{(2k)!}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a_{(-\frac{1}{2},1)} = C_2 \\
a_{(-\frac{1}{2},3)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},0)}}{3(3-1)} = \frac{-C_1}{3!} \\
a_{(-\frac{1}{2},5)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},2)}}{5(5-1)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},0)}}{5\times4\times3\times2} = \frac{(-1)^2C_1}{5!} \\
\dots = \dots \\
a_{(-\frac{1}{2},2k)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},2k-2)}}{2k(2k-1)} = \dots = \frac{(-1)^k a_{(-\frac{1}{2},0)}}{(2k-1)!} = \frac{(-1)^kC_1}{(2k-1)!}
\end{cases}
$$

On constate qu'ici,on a eu besoin d'aucune terme logarithmique pour obtenir une seconde forme solution indépendante :

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left(a_0 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} + a_1 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = a_0 \frac{\cos x}{x^{\frac{1}{2}}} + a_1 \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}$$

en ne retenant que la partie non multiple de $y_1(x)$ on nomme la fonction de Bassel d'ordre moins un-demi suivant :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x, \quad \forall x > 0$$

de sorte que les coefficients sont :

$$\begin{cases} a_{(-\frac{1}{2},0)} = C_1 \\ a_{(-\frac{1}{2},2)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},0)}}{2(2-1)} = \frac{-C_1}{2!} \\ a_{(-\frac{1}{2},4)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},2)}}{4(4-1)} = \frac{-a_{(\frac{1}{2},0)}}{4\times3\times2\times1} = \frac{(-1)^2C_1}{4!} \\ \ldots = \ldots \\ a_{(-\frac{1}{2},2k)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},2k-2)}}{2k(2k-1)} = \ldots = \frac{(-1)^k a_{(-\frac{1}{2},0)}}{(2k)!} = \frac{(-1)^k C_1}{(2k)!} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{(-\frac{1}{2},1)} = C_2 \\ a_{(-\frac{1}{2},3)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},0)}}{3(3-1)} = \frac{-C_1}{3!} \\ a_{(-\frac{1}{2},5)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},2)}}{5(5-1)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},0)}}{5\times4\times3\times2} = \frac{(-1)^2C_1}{5!} \\ \ldots = \ldots \\ a_{(-\frac{1}{2},2k)} = \frac{-a_{(-\frac{1}{2},2k-2)}}{2k(2k-1)} = \ldots = \frac{(-1)^k a_{(-\frac{1}{2},0)}}{(2k-1)!} = \frac{(-1)^k C_1}{(2k-1)!} \end{cases}$$

On constate qu'ici,on a eu besoin d'aucune terme logarithmique pour obtenir une seconde forme solution indépendante :

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left(a_0 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} + a_1 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = a_0 \frac{\cos x}{x^{\frac{1}{2}}} + a_1 \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}$$

en ne retenant que la partie non multiple de $y_1(x)$ on nomme la fonction de Bassel d'ordre moins un-demi suivant :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x, \quad \forall x > 0$$

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudier les séries entières, qui possèdent des propriétés spéciales (convergence uniforme, régularité de la fonction somme, etc...).Il s'agit des polynômes infinis et les polynômes sont faciles à manipuler (dérivation et intégration) l'utilisations des séries entière n'est pas limité à la résolution de certaines équations différentielles ils permettent dans certains cas des représentations simples de fonctions très complexes (fonctions transcendantes) Le domaine d'application des séries entière est très vaste. Ils permettent de donner des approximations numériques de façon précise (fonctionnement d'une calculatrice) le calcul numérique d'intégrales ; Calcul approché de valeurs numériques de certaines fonctions (exponentielle, logarithme, . . .) et généralization de certaines fonctions au cas complexe.

Réferences

- Cours sur les séries entières, Mohammed Jai
- Université en Ligne. Mathématiques. Séries entières.
- Theorie et applications des équations des équations différentielles Frank Ayres JR.