République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supèrieur et la Recherche Scientifique
Université de Saida Dr. Moulay Tahar

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

POLYCOPIÉ SUR

Analyse stochastique

Présenté par
Dr. **L**amia **B**ousmaha
lamia.bousmaha@gmail.com

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié est un recueil de cours à l'usage des étudiants en Mathématiques. Il s'adresse plus particulièrement aux étudiants de Master 2 spécialité analyse stochastique, statistique des processus et ses applications (ASSPA). Le contenu est considéré comme une extension directe de la matière calcul stochastique vues en première année Master.

Ce polycopié a pour objectifs principaux :

- Introduire les différentes notions de bases relatives aux équations différentielles stochastiques, démontrer les résultats d'existence et d'unicité des solutions de telles équations tout en appliquant ces résultats pour les différents modèles appliqués notamment en finance, mécaniques et bien même en biologie.
- Montrer le lien mathématique profond entre certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et les processus de diffusion (solutions des EDS).

Introduction générale

Le coeur des outils probabilistes réside dans le calcul stochastique, qui n'est rien autre qu'un calcul différentiel, mais adapté aux trajectoires des processus stochastiques qui ne sont pas différentiables. Le calcul différentiel présente une théorie de l'intégration d'un processus stochastique (intégrant) par rapport à un autre (intégrateur), afin de résoudre des équations différentielles stochastiques qui servent de construire un modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Le processus le plus connu et largement utilisé qui effectue ce calcul est le mouvement Brownien, il est utilisé en mathématiques financières, en économie (par exemple en évolution des prix des actions et des taux d'intérêt obligatoires), en mécanique quantique, en traitement du signal, en chimie, en météorologie, et même en musique.
La théorie de l'intégration des équations différentielles stochastiques a été développée par : N. Wiener ([38]), en 1923, K. Iô ([18, 19, 20]), en 1942 ; 1944 ; 1951, P. Lévy ([29]), en 1948, A. N. Kolmogorov ([26]), en 1931, W. Feller ([15]), en 1936,... La liste des articles et livres connexes est très longue et nous ne le mentionnons pas ici en entier. La théorie la plus connue du calcul stochastique est celle de K. Itô, le père de la théorie de l'intégration stochastique.

Les équations différentielles stochastiques sont les équations qui régissent l'évolution de la plupart des prix des actifs financiers, elles peuvent être vues comme des équations différentielles, ou comme des équations intégrales dans lesquelles interviennent des intégrales stochastiques par rapport à un mouvement Brownien. Un point de vue plus moderne consiste à voir les EDS comme des équations différentielles ordinaires, perturbées par un bruit aléatoire.

La compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.
Les EDP ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17 ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'electromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr d'Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité.
Cependant l'étude systématique des EDP est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20 ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par L. Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est du à L. Hörmander pour la

mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDP reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21 ème siècle. D'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géometrie et en analyse.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisement certaines propriétés de ces solutions.

L'apparition d'ordinateurs extrêmement puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations aux dérivées partielles, même très compliquées par les méthodes numériques. C'est ce qui s'est passé par exemple lorsque vous regardez les prévisions météorologiques, ou bien lorsque vous voyez les images animés d'une simulation d'écoulement d'air sur l'aile d'un avion. Le rôle des mathématiciens est alors de construire des schémas d'approximation, et de démontrer la pertinence des simulations en établissant des estimations a priori sur les erreurs commises. Il est vrai que les méthodes numériques ont aidé à résoudre les EDP, mais elles ont des inconvénients. Pour éviter les complications de ces méthodes, L'approche probabiliste permet aussi d'avoir accées rapidement à une expression de la solution de certaines EDP.

Première partie

Équations différentielles stochastiques

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement les résultats de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite du cours. Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité complet.

1.1 Quelques notions sur les processus stochastiques

Définition 1.1.1. ***(Variable gaussienne).*** *On dit qu'une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une* ***variable aléatoire gaussienne*** *où* ***normale*** *de paramètres (m, σ^2), $(m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*)$ si sa fonction de densité f_X est donnée par*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)^2\Bigg).$$

Dans ce cas, sa loi P_X est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \qquad P_X(A) = \int_A f_X(x)dx,$$

et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Définition 1.1.2. ***(Vecteur gaussien).*** *On dit qu'un vecteur $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est* ***un vecteur aléatoire gaussien*** *si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes i.e.*

$$\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n a_i X_i \text{ est une v.a.r. gaussienne.}$$

Définition 1.1.3. ***(Processus stochastique).*** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathrm{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
En général, $\mathrm{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ et on considère que le processus est indexé par le temps t.

Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $\mathrm{T} \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$).

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

- Pout $t \in \mathrm{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathrm{T} \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus réguliéres.

Définition 1.1.4. *Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est **mesurable** par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.1.5. *On dit que le processus est à **trajectoires continues** (ou est continu) si les applications $t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

*Un processus est dit **càdlàg** (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour **càglàd**.*

Définition 1.1.6. *Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$est un **processus gaussien** si*
$\forall\, n \geq 1, \forall\, t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T^n,\ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.
On dit que Xest centré si pour tout $t \in T,\ \ \mathbb{E}(X_t) = 0$.

Définition 1.1.7. *On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est stationnaire si :*
$\forall\, h \geq 0,\ (X_{t+h})_{t \geq 0} \stackrel{L}{=} (X_t)_{t \geq 0}$ ne dépend pas de $h > 0$, i.e.
pour tout $h > 0$ et tout $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \geq 0,\ X_{t_{1+h}}, X_{t_{2+h}}, \ldots, X_{t_{n+h}} \stackrel{L}{=} X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$.

Définition 1.1.8. *On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est a accroissements stationnaires si : la loi des accroissements $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de $t \geq 0$, i.e. $X_{t+h} - X_t \stackrel{L}{=} X_h$.*

Définition 1.1.9. *On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est a accroissements indépendants si :*
$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T,\ X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

1.1.1 Comparaison des processus

Ètant donnés deux processus stochastiques X et Y définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Quand peut on dire $X = Y$?
Au sens le plus fort ceci se passe si pour tous $(t, \omega) \in \mathrm{T} \times \Omega$ on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$.
Lorsque l'on travaille avec un espace de probabilité on peut avoir une définition moins restrictive en faisant rentrer $\mathbb{P}$ en action :

Définition 1.1.10. *On dira que deux processus X et Y sont **indistinguables** si et seulement si*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \text{pour tout}\ \ t \in \mathrm{T}) = 1.$$

Autrement dit, les trajectoires de X et Y coincident partout presque sûrement. Cela reste encore une définition trés forte. On peut affaiblir cette notion en

Définition 1.1.11. *On dira que X est une **modification** (ou une version) de Y si et seulement si pour tout $t \in \mathrm{T}$*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Autrement dit, pour tout $t \in \mathrm{T}$ les v.a. X_t est Y_t sont presque sûrement égales.
Si X et Y sont indistinguables alors l'un est une modification de l'autre.

Proposition 1.1.1. *[35] Soient* T *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $X = (X_t)_{t\in \mathrm{T}}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in \mathrm{T}}$ *deux processus stochastiques continus alors :*

$$X \text{ et } Y \text{ sont indistinguables} \iff X \text{ est une modification de } Y.$$

Lorsque X et Y ne sont pas définis sur le même espace de probabilité les définitions antérieures n'ont plus de sens. On doit alors considérer une notion de comparaison plus faible que les précédentes.

Définition 1.1.12. *On dira que les processus* X *et* Y *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *définis respectivement sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ *ont même lois fini-dimensionelles si et seulement si pour tous* $n \geq 1, 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *avec* $t_i \in T$ *et* $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *on a*

$$\mathbb{P}(X_{t_i} \in A_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}) = \widetilde{\mathbb{P}}(Y_{t_i} \in A_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Cette dernière notion est, bien entendu, toujours utile lorsque les espaces de probabilité coincident. C'est alors une définition évidement plus faible que la modification ou l'indistingabilité. Elle reste néanmoins la plus pratique car beaucoup plus simple à vérifier.

1.1.2 Filtration

Définition 1.1.13. *Une* ***filtration*** $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est-à-dire*

$$\forall s, t \in T, \quad s < t \Longrightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une filtration de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *alors* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est appelé espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.14.

1. *Si* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une filtration alors on définit la filtration suivante*

$$\mathcal{F}_{t^+} = \Big(\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s\Big).$$

2. *On dit qu'une filtration est continue à droite si*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$$

3. *Soit* $\mathcal{N}$ *la classe des ensembles de* $\mathcal{F}$ *qui sont* $\mathbb{P}$*-négligeables. Si* $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$*, on dit que la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est complète.*
4. *On dit qu'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *satisfait les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et complète.*

Définition 1.1.15. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus et* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.*
On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est* ***adapté*** *à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* $\forall t \geq 0,\ X_t$ est $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Remarque 1.1.1.

1. un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est toujours adapté à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s;\ 0 \leq s \leq t)$.
2. Si $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_0$, et si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ alors toute modification de X est encore adaptée.

Définition 1.1.16. *Un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est* ***progressivement mesurable*** *par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si l'application* $(s, \omega \mapsto X_s(\omega))$ *de* $[0, t] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*.*

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus mesurable et adapté alors il posséde une modification progressivement mesurable.

Définition 1.1.17. ***(Convergence d'une suite de variables aléatoires).***
On considère, sur un espace de probabilité fixé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire réelle X et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ et l'on s'intéresse à la convergence de cette suite. Le caractère aléatoire de la suite met en évidence plusieurs types de convergence :

- *On dit que X_n converge presque sûrement vers X si*

$$\mathbb{P}\bigg(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\bigg) = 1.$$

- *Si $p > 0$, on dénote par $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires X telles que $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$. Si X_n, $X \in L^p$, on dit que X_n converge dans L^P vers X si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

- *On dit que X_n converge en probabilité vers X si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0, \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

Les principaux liens entre ces trois notions de convergence sont résumées dans la proposition suivante.

Proposition 1.1.2. *[27]*

- *La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.*
- *La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.*
- *La convergence dans L^p implique la convergence dans L^q pour tout $q < p$.*
- *Si $X_n \to X$ presque sûrement et $|X_n| \leq Y$ avec $Y \in L^p$ alors $X_n \to X$ dans L^p.*

Rappelons deux théorèmes fondamentaux :

Théorème 1.1.1. *[27]* ***(Théorème de convergence monotone).***
Soit $\{X_n,\ n \geq 0\}$ une suite croissante (ou décroissante) de variables aléatoires et soit $X = \lim X_n$ p.s. Supposons que X soit intégrable. Alors $\mathbb{E}[X] = \lim \mathbb{E}[X_n]$.

Théorème 1.1.2. *[27]* ***(Théorème de convergence dominée).***
Soit $\{X_n,\ n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires convergeant p.s. vers X. Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y intégrable telle que $|X_n| \leq Y$, alors X est intégrable et $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ quand $n \uparrow +\infty$.

1.1.3 Temps d'arrêt

Dans un jeu de hasard, **un temps d'arrêt** est un temps lors duquel le joueur décide d'arrêter de jouer, selon un critère ne dépendant que du passé et du présent. Il peut par exemple décider d'arrêter de jouer dès qu'il a dépensé tout son capital, dès qu'il a gagné une certaine somme, dès qu'il a gagné un certain nombre de fois successives, ou selon toute combinaison de ces critères. Les temps d'arrêt ont donc deux propriétés importantes : ils sont aléatoires, puisqu'ils dépendent du déroulement antérieur du jeu, et ils ne peuvent pas dépendre du futur, puisque le joueur doit à tout moment pouvoir décider s'il arrête ou non.

Définition 1.1.18. *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit maintenant τ une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On dit que τ est un* ***temps d'arrêt*** *de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$,*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Une conséquence importante de la continuité à droite de la filtration est que

Proposition 1.1.3. *[25] Pour $T = \mathbb{R}^+$ ou $T = [0, c]$, on a*
τ est un temps d'arrêt si et seulement si $\forall t \in T,\ \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Définition 1.1.19. *(**Temps d'atteinte**.) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*
Soit

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in \mathcal{F}\},$$

où F est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. Alors τ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.1.20. *Soit τ un temps d'arrêt d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On note*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in F,\ \forall t \geq 0,\ A \cap\ \tau \leq t \in \mathcal{F}_t\}.$$

Alors $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu, appelée ***tribu des événements antérieurs*** *à τ.*

Remarque 1.1.2. Si τ est constant et égal à t alors τ est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.
Si τ est un temps d'arrêt d'une filtration pour laquelle un certain processus est adapté, alors il est possible d'arrêter ce processus au temps τ :

Proposition 1.1.4. *[36] Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ et τ un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ fini presque sûrement. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et progressivement mesurable. Alors le processus $(X_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$.*

1.2 Le mouvement Brownien

Nous pouvons à présent définir le processus le plus important en calcul stochastique, c'est **le mouvement Brownien** appelé aussi processus de Wiener.

1.2.1 Historique

Avant d'être un objet mathématique rigoureux, le mouvement Brownien a été étudié en Botanique, en Finance, et en Physique.

- 1828 : R. Brown (botaniste), observe le mouvement irrégulier de particule du pollen en suspension dans l'eau.
- 1877 : Delsaux, explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction de trajectoire).
- 1900 : L. Bachelier, modélise dans sa thèse "Théorie de la spéculation" les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et gaussiens (problème : le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif).
- 1905 : A. Einstein, détermine la densité de transition du Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur.
- 1906 : M. Schmolushowski, décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.
- 1923 : N. Wiener, réalise une étude rigoureuse du mouvement Brownien, il construit une mesure de probabilités sur l'espace des fonctions continues sous laquelle le processus canonique est un mouvement Brownien.
- 1948 : P. Lévy, s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien.

Remarque 1.2.1. Un mouvement brownien généralement noté B pour Brown ou W pour Wiener.

1.2.2 Définition du mouvement brownien

Définition 1.2.1. *Un processus* $\mathbf{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbf{B_t})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *à valeurs réelles est appelé* ***mouvement Brownien*** *(MB) si :*

1. $\mathbf{B_0} = 0, \quad \mathbb{P}$*-p.s. ;*
2. $\forall\, 0 \leq s \leq t$*, la v.a* $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_s$*;*
3. $\forall\, 0 \leq s \leq t, \mathbf{B_t} - \mathbf{B}_s$ *est de loi* $\mathcal{N}(0, t-s)$.

Autrement dit, le processus $\mathbf{B}$ *part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.*

Remarque 1.2.2. *Lorsque* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est la filtration naturelle de* $(\mathbf{B_t})_{t\geq 0}$*, on dit que* $\mathbf{B}$ *est un mouvement Brownien naturel.*

Caractère gaussien du mouvement Brownien

Théorème 1.2.1. *[16]*

- *Soit* $\mathbf{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbf{B_t})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un mouvement Brownien. Alors il satisfait les propriétés suivantes :*

  (1) $\mathbf{B_0} = 0, \quad \mathbb{P}$*-p.s. ;*

  (2) $\forall\, 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n, \ (\mathbf{B}_{t_1}, \ldots, \mathbf{B}_{t_n})$ *est un vecteur gaussien centré ;*

  (3) $\forall\, s, t \geq 0, \ \mathbb{E}(\mathbf{B}_s\mathbf{B}_t) = \min(s, t)$.

  C'est-à-dire $\mathbf{B}$ *est un processus gaussien réel centré et de fonction de covariane* $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$.
- *Inversement, si un processus* $\mathbf{B}$ *vérifie (1), (2), (3) et si on note* $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ *la filtration naturelle de la famille* $(\mathbf{B_t})_{t\geq 0}$ *alors* $(\Omega, \mathcal{F}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, (\mathbf{B_t})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est un mouvement Brownien (naturel).*

1.2.3 Quelques propriétés du mouvement Brownien

Proposition 1.2.1. *[16] Soit B est un mouvement Brownien, et $s > 0$, $c > 0$ des réels fixés. les processus suivants sont aussi des mouvements Browniens sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

- $\widetilde{\mathbf{B}}_t = -B_t$; *(symétrie)*
- $\widetilde{\mathbf{B}}_t = tB_{\frac{1}{t}}$, $(t > 0)$ et $\widetilde{B}_0 = 0$; *(inversion du temps)*
- $\widetilde{\mathbf{B}}_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$; *(Changement d'échelle "scaling")*
- $\widetilde{\mathbf{B}}_t = B_{t+s} - B_s$; *(retournement du temps)*

Les deux premiers sont des mouvements Browniens relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq o}$, le troisième pour la filtration $(\mathcal{F}_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}$ et le quatrième pour sa filtration naturelle.

Théorème 1.2.2. *[24]* ***(Propriété de Markov simple).***
Soit $s \geq 0$. Le processus $(\widetilde{\mathbf{B}}_t := \mathbf{B}_{t+s} - \mathbf{B}_s, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 1.2.3. *[39]* ***(Propriété de Markov forte).***
Soit τ un temps d'arrêt. Conditionnellement à $\tau < \infty$, le processus $(\widetilde{\mathbf{B}} := \mathbf{B}_{\tau+t} - \mathbf{B}_\tau, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

1.3 Martingales

1.3.1 Espérance conditionnelle

Définition 1.3.1. *Soit X variable aléatoire de l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ [1] et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. $\mathbb{E}_\mathbb{P}(X/\mathcal{B})$ est l'unique variable aléatoire de $L^1(\mathcal{B})$ telle que*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}_\mathbb{P}(X/\mathcal{B}) d\mathbb{P}$$

Corollaire 1.3.1. *Si $X \in L^2(\mathcal{A})$, $\|X\|_2^2 = \|\mathbb{E}_\mathbb{P}(X/\mathcal{B})\|_2^2 + \|X - \mathbb{E}_\mathbb{P}(X/\mathcal{B})\|_2^2$*

1.3.2 Martingales à temps continu

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieur est égal à la somme gagnée au moment présent.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilite filtré.

Définition 1.3.2. *Soit $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et intégrable $(\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}(|\mathbf{M}_t|) < \infty)$, on dit que $\mathbf{M}$ est*

1. On note $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'ensemble des v.a. intégrables. on définit

$$L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left\{ X \text{ v.a.r} \,/ \int_\mathbb{R} |x| d\mathbb{P}_X(x) < +\infty \right\}$$

1. *Une **martingale** si*

$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(\mathbf{M}_t/\mathcal{F}_s\Big) = \mathbf{M}_s.$$

2. *Une **surmartingale** si*

$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(\mathbf{M}_t/\mathcal{F}_s\Big) \leq \mathbf{M}_s.$$

3. *Une **sousmartingale** si*

$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\Big(\mathbf{M}_t/\mathcal{F}_s\Big) \geq \mathbf{M}_s.$$

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ qui vérifie les conditions habituelles. Si τ est un temps d'arrêt, et si $X := (X_t,\, t \geq 0)$ est un processus continu, on note X^τ le processus arrêté $(X_t^\tau = X_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$.

Remarque 1.3.1. Si $(X_t)_{t\in\mathrm{T}}$ est une martingale alors $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout $t \in \mathrm{T}$.

Théorème 1.3.1. *[25] Soit X un processus et φ une fonction convexe telle que $\mathbb{E}|\varphi(X_t)| < \infty$, pour tous t.*

1. *Si X une martingale alors $\varphi(X_t)$ est une sous martingale,*
2. *si X est une sousmartingale et φ est croissante (au sens large) alors $\varphi(X_t)$ est une sous martingale.*

Définition 1.3.3. *Un processus continu adapté $\mathbf{M} := (\mathbf{M}_t)_{t\geq 0}$ est appelé **une martingale locale** (continue) s'il existe une suite croissante $(\tau_n,\, n \geq 1)$ de temps d'arrêt telle que $\tau_n \nearrow \infty$ p.s. et que pour tout n, $\mathbf{M}^{\tau_n} - \mathbf{M}_0$ soit une martingale uniformément intégrable. On dit que la suite de temps d'arrêt (τ_n) **réduit** $\mathbf{M}$.*

Définition 1.3.4. *Un processus $X = (X_t,\, t \geq 0)$ est appelé **une semimartingale continue** s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + \mathbf{M}_t + V_t,$$

où $\mathbf{M}$ est une martingale locale continue et V est un processus à variation finie, avec $\mathbf{M}_0 = V_0 = 0$.

Mouvement Brownien et martingales

Proposition 1.3.1. ***(Propriété de martingale du mouvement Brownien).*** *Le Mouvement Brownien Standard (B_t) est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathrm{T}}$-martingale (à trajectoire) continue*

Preuve.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_{t+s}/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(B_t/\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t/\mathcal{F}_t) \\ &= B_t + \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t) \\ &= B_t \end{aligned}$$

Proposition 1.3.2. *[36] Soit (B_t) un M.B.S. les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathrm{T}}$-martingales :*

1. *$X_t = B_t^2 - t$.*
2. *Pour θ fixé, $N_t = N_t(\theta) := \exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$.*

Théorème 1.3.2. *[16] **(Caractérisation de P. Lévy du mouvement Brownien).***
Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue avec $\mathbf{M_0} = 0$. Si le processus $(\mathbf{M_t}^2 - t)_{t\geq 0}$ est aussi une $\mathcal{F}_t$-martingale, alors $\mathbf{M}$ est un mouvement Brownien.

Le résultat suivant permet de caractériser le mouvement brownien par son crochet parmi les martingales locales à trajectoires continues.

Théorème 1.1. *[6] **(Caractérisation du MB par son crochet).***
Soit $X = (X^1, \cdots, X^d)$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté à trajectoires continues issu de 0. Il y a équivalence entre

(a) *X est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien en dimension d.*

(b) *Les processus $X^1, \cdots, X^d$ sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingales locales continues et de plus*

$$\langle X^i, X^j\rangle_t = \delta_{i,j} t,$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker, $\delta_{i,j} = 1_{\{i=j\}}$.

En particulier, une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale locale continue M issue de 0 est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien si et seulement si $\langle M, M\rangle_t = t$, pour tout $t \geq 0$.

Remarque 1.3.2. Il est crucial que le processus soit à trajectoires continues. Par exemple le processus de Poisson (standard) vérifie la même propriété de crochet mais il est à trajectoires càdlàg.

Quelques inégalités

Théorème 1.3.3. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz).***
En se plaçant sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}^2$) muni du produit scalaire $(f,g) \longrightarrow \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}))^2,\ \left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt.$$

avec E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle .,.\rangle$, et $\forall x \in E$, $\|x\| = \langle x, x\rangle$, ceci définissent bien une norme sur E.

Théorème 1.3.4. *[31] **(Inégalité de Doob).** Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue a droite, alors*

$$\forall p > 1, \quad \left(\mathbb{E}[|\sup_{0\leq s\leq t} X_s|^p]\right) \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0\leq s\leq t} \left(\mathbb{E}[|X_s|^p]\right).$$

Soit (M_t) une martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ p.s. Alors

(a) $\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|M_t|)}{\lambda}, \quad \forall\, t > 0,\ \lambda > 0.$

(b) $\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_t|^2), \quad \forall\, t > 0.$

Remarque 1.3.3. Si T est un temps d'arrêt quelconque, en remplaçant M par la martingale locale arrêtée M^T, on obtient les mêmes inégalités avec T à la place de ∞.

Théorème 1.3.5. *[28] **(Inegalités de Burkholder-Davis-Gundy).** Pour tout réel $p > 0$, il existe des constantes c_p, $C_p > 0$ telles que, pour toute martingale locale continue M, nulle en 0,*

$$c_p \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} |M_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}].$$

1.4 Intégration stochastique (Intégrale d'Itô)

1.4.1 Intégrale stochastique par rapport à un mouvement Brownien

Soit $(B_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement Brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$.
Soit $T > 0$ fixé ($\neq$ temps d'arrêt). Notre but est de construire l'intégrale stochastique

$$\left(\int_0^t H_s dB_s, \quad t \in [0, T]\right),$$

pour un processus (H_t) vérifiant certaines propriétés. Pour cela, on procède en plusieurs étapes.

Première étape

Définition 1.4.1. *Un processus simple prévisible (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) est un processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$ tel que*

$$H_t = \sum_{i=1}^n X_i \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i[},$$

où $0 = t_0 < t_1 < .. < t_n = T$ forme une partition de [0,T] et X_i est une v.a. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}-$mesurable et bornée, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

On voit donc que sur l'intervalle $]t_{i-1}, t_i]$, la valeur du procesus (H_t) est déterminée par l'information $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ d'où le nom de "prévisible" (l'appellation "simple" vient quant à elle du fait que le processus ne prend qu'un nombre fini de valeurs (aléatoires!)). On pose

$$(H \cdot B)_T = \int_0^T H_s dB_s = \sum_{i=1}^n X_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Cette définition de l'intégrale stochastique pour des processus simples prévisibles est univoque (mais ça demande un petit travail de vérification) et l'intégrale est linéaire en H, i.e.

$$((cH + K) \cdot B)_T = c(H \cdot B)_T + (K \cdot B)_T.$$

Proposition 1.4.1. *[31] On a les égalités suivantes :*

$$\mathbb{E}\Big((H \cdot B)_T\Big) = 0 \ \text{et} \ \mathbb{E}\Big((H \cdot B)_T^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 ds\Big).$$

La seconde égalité ci-dessus est appelée **l'isométrie d'Itô**.
Remarquer que si $H(t) \equiv 1$, alors on retrouve l'égalité $\mathbb{E}(B_T^2) = T$.

Remarque 1.4.1. Pour être tout à fait exact, l'isométrie d'Itô dit encore que si H et K sont deux processus simples prévisibles, alors

$$\mathbb{E}\Big((H\cdot B)_T(K\cdot B)_T\Big)=\mathbb{E}\Big(\int_0^T H_sK_s ds\Big).$$

Deuxiéme étape

Soit $(H_t)_{t\in[0,T]}$ un processus simple prévisible comme défini ci-dessus et $t\in[0,T]$. On pose

$$(H\cdot B)_t\equiv\int_0^t H_s dB_s=\Big((H\mathbb{1}_{[0,t]}\cdot B)_T\Big)=\sum_{i=1}^{n}(B_{t_i\wedge t}-B_{t_{i-1}\wedge t}).$$

A nouveau, cette intégrale est linéaire en H et on a par la proposition précédente :

$$\mathbb{E}\Big((H\cdot B)_t\Big)=0$$

et

$$\mathbb{E}\Big((H\cdot B)_t^2\Big)=\Big(((H\mathbb{1}_{[0,t]}\cdot B)_T^2)\Big)=\mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2\mathbb{1}_{[0,t]}(s)ds\Big)=\mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 ds\Big).$$

De plus, en utilisant la remarque 1.4.1, on peut encore calculer

$$\mathrm{Cov}((H\cdot B)_t,(K\cdot B)_s)=E((H\cdot B)_t(K\cdot B)_s)=\mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge s} H_rK_rd_r\Big).$$

Remarque 1.4.2. Si $t\in]t_{k-1},t_k[$, alors

$$(H\cdot B)_t=\sum_{i=1}^{k-1}X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})+X_k(B_t-B_{t_{k-1}}).$$

Proposition 1.4.2. *Le processus* $((H\cdot B)_t)_{t\in[0,T]}$ *est une* ***martingale continue de carré intégrable****.*

Preuve.

Par la remarque ci-dessus et la continuité de (B_t), le processus $((H\cdot B)_t)$ est clairement continu à l'intérieur des intervalles $]t_{k-1},t_k[$. Aux points limites, il est aisé de vérifier que le processus reste continu également. D'autre part, l'isométrie montrée plus haut dit que $((H\cdot B)_t)$ est un processus de carré intégrable, donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}(|(H\cdot B)_t|)\leq\sqrt{\mathbb{E}((H\cdot B)_t^2)}<\infty.$$

De plus, si on suppose que $t \in]t_{k-1}, t_k[$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((H\cdot B)_T/\mathcal{F}_t) &= \sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{E}(X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}/\mathcal{F}_t)) + \mathbb{E}(X_k(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})/\mathcal{F}_t) \\
&+ \sum_{i=n}^{i=k+1}\mathbb{E}(X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}/\mathcal{F}_t)) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}) + X_k\mathbb{E}(B_t-B_{t_{k-1}}/\mathcal{F}_t) \\
&+ \sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{E}(X_i\mathbb{E}(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}/\mathcal{F}_{t_{i-1}})/\mathcal{F}_t \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}X_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}) + X_k(B_t-B_{t_{k-1}}) + 0 = (H\cdot B)_t
\end{aligned}$$

par la remarque ci-dessus. Le processus $(H\cdot B)_t$ est donc une martingale car pour $t \geq s$, on a

$$\mathbb{E}((H\cdot B)_t/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((H\cdot B)_T/\mathcal{F}_t)/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((H\cdot B)_T/\mathcal{F}_s) = (H\cdot B)_s.$$

■

D'aprés l'inégalité de Doob 1.3.4 (b), on a donc :

$$\mathbb{E}\bigg(\sup_{t\in[0,T]}(H\cdot B)_t^2\bigg) \leq 4\mathbb{E}\bigg((H\cdot B)_T^2\bigg) = 4\mathbb{E}\bigg(\int_0^T H_s^2 ds\bigg).$$

Troisième étape

On étend maintenant l'intégrale $(H\cdot B)$ par continuité à l'ensemble

$$\mathcal{H}_T = \bigg\{(H_t)_{t\in[0,T]} : H \text{ est adapté, continu à gauche, limité à droite et tel que } \mathbb{E}\bigg(\int_0^T H_s^2 ds\bigg) < \infty\bigg\}.$$

$\mathcal{H}_T$ est un espace vectoriel normé et complet (ou espace de Banach), muni de la norme $\|\cdot\|_{T,1}$ définie par

$$\|H\|_{T,1}^2 = \mathbb{E}\bigg(\int_0^T H_s^2 ds\bigg).$$

Lemme 1.4.1.1. *$\forall H \in \mathcal{H}_T$, il existe une suite $(H^{(n)})$ de processus simples prévisibles tels que*

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2 ds\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conséquence : Puisque la suite $(H^{(n)})$ converge xonc elle est de Cauchy :

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s^m)^2 ds\bigg) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et donc, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg(\sup_{t\in[0,T]} ((H^{(n)} \cdot B)_t - (H^{(m)} \cdot B)_t)^2\bigg) &= \mathbb{E}\bigg(\sup_{t\in[0,T]} ((H^{(n)} - H^{(m)}) \cdot B)_t)^2\bigg) \\ &\leq 4\mathbb{E}\bigg(\int_0^T ((H_s^{(n)} - H_s^{(m)})^2 ds\bigg) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

La suite de processus $((H^{(n)} \cdot B))$ est donc une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{M}_T$ défini par

$$\mathcal{M}_T = \Big\{(M_t)_{t\in[0,T]} \text{ martingale continue de carré intégrable telle que } M_0 = 0\Big\}$$

et muni de la norme $\|\cdot\|_{T,2}$ definie par

$$\|M\|_{T,2}^2 = \mathbb{E}\bigg(\sup_{t\in[0,T]} M_t^2\bigg).$$

$\mathcal{M}_T$ est un espace complet (i.e. que toute suite de Cauchy dans $\mathcal{M}_T$ converge dans $\mathcal{M}_T$ implique que la suite $((H^{(n)} \cdot B))$ converge dans $\mathcal{M}_T$. Il existe donc un élément $(H \cdot B) \in \mathcal{M}_T$ tel que

$$\mathbb{E}\bigg(\sup_{t\in[0,T]} ((H^{(n)} \cdot B)_t - (H \cdot B)_t)^2\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.1}$$

Nous avons ainsi défini l'application linéaire et continue

$$\begin{cases} \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_T \\ H \mapsto (H \cdot B). \end{cases}$$

Remarque 1.4.3. La formule (1.1) implique en particulier que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\bigg(\sup_{t\in[0,T]} |(H^{(n)} \cdot B)_t - (H \cdot B)_t| > \epsilon\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la suite $((H^{(n)} \cdot B))$ converge uniformément sur $[0, T]$ en probabilité vers $(H \cdot B)$.

Propriétés de l'intégrale stochastique

1. **Linéarité :**

$$((cH + K) \cdot B)_t = c(H \cdot B)_t + (K \cdot B)_t \ p.s.$$

2. **Espérance nulle et isométrie :**

$$\mathbb{E}((H \cdot B)_t) = 0 \ et \ Cov((H \cdot B)t; (K \cdot B)_s) = \mathbb{E}\bigg(\int_0^{t\wedge s} H_r K_r dr\bigg).$$

3. $(H \cdot B)$ est une martingale continue de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}\bigg(\sup_{t\in[0,T]} (H \cdot B)_t^2\bigg) \leq 4\mathbb{E}\bigg(\int_0^T H_s^2 ds\bigg).$$

1.4.2 Intégrale stochastique par rapport à une martingale

On peut définir $\int_0^t H_s dM_s$ de la même manière que $\int_0^t H_s dB_s$ si on suppose que M est une martingale continue de carré intégrable.

1. Pour (H_t) un processus simple donné par $H_t = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t)$, on pose

$$(H \cdot M)_t \equiv \int_0^t H_s dM_s = \sum_{i=1}^{n} X_i (M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t})$$

et on vérifie que

$$\mathbb{E}\Big((H \cdot M)_t\Big) = 0, \quad \mathbb{E}\Big((H \cdot M)_t^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\Big).$$

Remarquons que le terme ds apparaissant dans l'isométrie pour $(H \cdot B)_t$ a logiquement été remplacé par $d\langle M \rangle_s$ pour tenir compte de la variation quadratique $\langle M \rangle_s$ de la martingale qui n'est pas forcément égale à s.

D'autre part, on vérifie que le processus $((H \cdot M)_t)_{t \in [0,T]}$ est également une martingale continue de carré intégrable.

2. L'extension de l'intégrale à un processus (H_t) adapté, continu à gauche, limité à droite et tel que

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T H_s^2 d\langle M \rangle_s\Big) < \infty.$$

est identique à celle efectuée pour $\int_0^t H_s dB_s$.

Propriétés de l'intégrale stochastique

1. Linéarité :$((cH + K) \cdot M)_t = c(H \cdot M)_t + (K \cdot M)_t$ et $(H \cdot (M + N))_t = (H \cdot M)_t + (K \cdot N)_t$.

2. $$\mathbb{E}\Big((H \cdot M)_t\Big) = 0, \quad \mathbb{E}\Big((H \cdot M)_t^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\Big)$$

3. $$\mathrm{Cov}((H \cdot M)_t, (K \cdot N)_t) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s\Big).$$

4. $$\langle (H \cdot M)_t \rangle = \mathbb{E}\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\Big).$$

5. $$\langle (H \cdot M)_t, (K \cdot N)_t \rangle = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Régle : si $X_t = \int_0^t H_s dM_s$ (i.e. $dX_t = H_t dM_t$, alors $d\langle X \rangle_t = H_t^2 d\langle M \rangle_t$.
Noter que si $M_t = \int_0^t K_s dB_s$, alors

$$X_t = \int_0^t H_s K_s dB_s \ \ et \ \ \langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 K_s^2 ds.$$

De même, vu que la proriété de martingale (continue de carré intégrable) est préservée, on peut encore définir $(L \cdot X)_t \equiv \int_0^t L_s dX_s$...etc.

On a maintenant défini une application linéaire et continue

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{H}}_T \times \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_T \\ \\ (H, M) \mapsto (H \cdot M), \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\widetilde{\mathcal{H}}_T$ est l'ensemble des processus (H_t) adaptés, continus à gauche, limités à droite et tels que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 d\langle M\rangle_s) < \infty$.

1.5 Formule d'Itô

Le lemme d'Itô, ou encore formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Ce lemme offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

Considérons une intégrale stochastique de la forme (processus d'Itô)

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1.3}$$

où X_0 est indépendante du mouvement Brownien, et K_s et H_s sont des fonctionnelles nonanticipatives satisfaisant

$$\mathbb{P}\left\{ \int_0^T |K_s| ds < \infty \right\} = 1.$$

$$\mathbb{P}\left\{ \int_0^T H_s^2 ds < \infty \right\} = 1.$$

Le processus (1.3) s'écrit également sous forme différentielle

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t. \tag{1.4}$$

La formule d'Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur une différentielle stochastique.

Lemme 1.5.1. *[1] **(Formule d'Itô)** Soit $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$ une fonction continûment différentiable par rapport à t et deux fois continûment différentiable par rapport à x. Alors le processus stochastique $Y_t = u(t, X_t)$ satisfait l'équation*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) K_s ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) H_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, X_s) H_s^2 ds.$$

Remarque 1.5.1. 1. La formule d'Itô s'écrit aussi sous forme différentielle,

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t)[K_t dt + H_t dB_t] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, X_t) \sigma_t^2 dt.$$

2. Un moyen mnémotechnique pour retrouver la formule est de l'écrire sous la forme

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dX_t^2.$$

où dX_t^2 se calcule en utilisant les règles

$$dt^2 = dt\, dB_t = 0, \quad dB_t^2 = dt.$$

3. La formule se généralise à des fonctions $u(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$, dépendant de n processus définis par $dX_t^{(i)} = K_t^{(i)}dt + H_t^{(i)}dB_t$, en

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}dX_t^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}dX_t^{(i)}dX_t^{(j)},$$

où $dX_t^{(i)}dX_t^{(j)} = H_t^{(i)}H_t^{(j)}dt$.

Théorème 1.5.1. *[25] **(Représentation des martingales browniennes).** Soit M une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\in[0,T]}$. Alors il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$, appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$, tel que*

$$\mathbb{P} - p.s., \quad \forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s.dB_s.$$

Il est important de remarquer que ce résultat implique que, dans la filtration brownienne, les martingales sont continues.

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques (EDS en abrégé) ont été d'abord étudiées par Itô, dans le but de construire les diffusions (c'est-à-dire, processus continus et fortement markoviens dont les générateurs sont des opérateurs différentiels du second ordre). C'est d'ailleurs dans ce but qu'il avait introduit le calcul stochastique.

Ce chapitre est consacré aux équations différentielles stochastiques, qui motivèrent les premiers travaux d'Itô sur l'intégrale stochastique. Aprés les définitions générales, nous traitons en détail le cas lipschitzien, dans lequel des résultats forts d'existence et d'unicité des solutions peuvent être obtenus.

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit alétoire (étudier l'évolution d'un système physique perturbé par un bruit aléatoire).

2.1 Équations différentielles et EDS

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des "différentielles stochastiques", ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS). Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$x^{\cdot}(t) = b(t, x(t)) \tag{2.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $x^{\cdot}$ et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (2.1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec $b(t, x) = b + cx$. Symboliquement, l'équation (2.1) se réécrit (sous forme différentielle)

$$dx(t) = b(t, x(t))dt. \tag{2.2}$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $(x(t))_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroît, à la date t, selon le taux $b(t, x(t))$. Par exemple, avec $b(t, x) = b(t)x$, l'équation $dx(t) = b(t)x(t)$ dt modélise le cours d'un actif financier $x(t)$ soumis au taux d'intérêt variable $b(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $b(t)$. Il est bien connu que la solution est

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t b(s)ds\right).$$

Les EDS sont des généralisations des équations (2.2) où la dynamique déterministe d'évolution b est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit, qui sera de la forme σdB_t, où B désigne un mouvement brownien et une intensité de bruit $\sigma(t,x)$:

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \tag{2.3}$$

où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps $t(X_t)$ mais pourrait juste dépendre du temps (σ_t) ou de la valeur X_t en $t(\sigma(X_t))$ ou encore être constante σ.

Définition 2.1.1. *En fait, l'écriture (2.3) est symbolique car dB_t n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable !). Il faudrait écrire (2.3) sous la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s \tag{2.4}$$

qui, elle, a un sens si l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$ a un sens. On généralise encore dans la définition suivante la notion d'EDS dans un cadre vectoriel.

Définition 2.1.2. ***(EDS)*** *On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme*

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \tag{$E(b,\sigma)$}$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s,X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s)dB_s^j, \quad 1 \le i \le d \quad \textbf{(cas non homogène)} \tag{2.5}$$

où, m,d sont des entiers positifs,

- *$b(t,x) = (b_i(t,x))_{1\le i\le d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **dérive** ou **drift** de l'EDS,*
- *$\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le m}}$ est une matrice $d\times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **coefficient de diffusion** de l'EDS, et $B = (B^1,...,B^m)$ est un mouvement brownien standard en dimension m.*

Remarque 2.1.1. (cas homogène)

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(X_s)dB_s^j, \quad 1 \le i \le d$$

La solution d'une EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t\ge 0}$. Plus précisément, on a :

Définition 2.1.3. ***(Solution d'une EDS)*** *Une solution de l'EDS $E(b,\sigma)$ est la donnée de*

- *un espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0},\mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles (filtration complète) ;*
- *un $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$-mouvement brownien $B = (B^1,...,B^m)$ dans $\mathbb{R}^m$ défini sur cet espace de probabilité ;*

- *un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté continu $X = (X^1, ..., X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que (2.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a (2.5).*

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x(b, \sigma)$.

On remarquera que lorsqu'on parle de solutions de $E_x(b, \sigma)$, on ne fixe pas a priori l'espace de probabilité filtré ni le mouvement brownien B.

2.2 Existence et unicité

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, Le caractère aléatoire impose plusieurs notions d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS $E(b, \sigma)$.

Définition 2.2.1. ***(Existence, unicité des EDS)*** *Pour l'équation $E(b, \sigma)$, on dit qu'il y a*

- *Existence d'une solution faible : si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X.*
- *Existence d'une solution forte : si $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X qui soit adaptée à la filtration du Brownien porteur.*
- *Unicité faible : si tous les processus X solutions de $E_x(b, \sigma)$ ont même loi.*
- *Unicité trajectorielle : si l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et le Brownien porteur étant fixés, deux solutions quelconques X et X' de $E_x(b, \sigma)$ sont indistinguables au sens où*

$$\mathbb{P}[\exists t \in \mathbb{R} \diagup X_t \neq X_t'] = 0.$$

La solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens, elle ne l'est pas forcément dans l'autre.

L'exemple suivant montre que l'on peut avoir l'existence d'une solution faible plus l'unicite faible mais ni l'existence d'une solution forte ni l'unicité trajectorielle. Pour voir cela, on considère un mouvement brownien β issu de $\beta_0 = y$, et en posant

$$B_t = \int_0^t sgn(\beta_s) d\beta_s,$$

où sgn est la fonction définie par

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$(sgn(x) = 1_{\{x\geq 0\}} - 1_{\{x<0\}}).$$

On a alors :

$$\beta_t = y + \int_0^t sgn(\beta_s) dB_s.$$

En effet : (la propriété d'associativité donne) :

$$\begin{aligned}\int_0^t sgn(\beta_s)dB_s &= \int_0^t sgn(\beta_s)d\Big(\int_0^s sgn(\beta_u)d\beta_u\Big)\\ &= \int_0^t sgn(\beta_s)sgn(\beta_s)d\beta_s\\ &= \int_0^t sgn(\beta_s)^2 d\beta_s\\ &= \beta_t.\end{aligned}$$

Comme $sgn^2(x) = 1$, on remarque facilement que le processus B est bien défini et que B est une martingale locale à trajectoires continues de crochet t.

$$\langle B, B\rangle_t = \int_0^t sgn(\beta_s)^2 d\langle \beta, \beta\rangle_s = \int_0^t ds = t,$$

ainsi, par le Théorème de caractérisation de Paul Lévy, B est donc un mouvement brownien (issu de 0). On voit alors que β est une solution de l'EDS

$$dX_t = sgn(X_t)dB_t, \;\; X_0 = y, \tag{2.6}$$

pour laquelle il y a donc existence faible.

À nouveau, par le Théorème de Lévy, on prouve l'unicité faible : toute solution X de (2.6) est une martingale locale à trajectoires continues et vérifié

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t sgn(X_s)^2 d\langle B, B\rangle_s = \int_0^t ds = t$$

et doit donc être un mouvement brownien (Théorème de Lévy). (toutes les solutions de cette équation sont des MB et sont donc égaux en loi : on a existence et unicité faible).

En revanche, il n'y a pas unicité trajectorielle pour cette équation. En effet, on voit facilement, dans le cas $y = 0$, que β et $-\beta$ sont deux solutions de (2.6) issues de 0 correspondant au même mouvement brownien B.

Montrons que $(-\beta, B, \mathcal{F}_t^{\beta,B})$ est également solution. Observons que $sgn(-x) = -sgn(x)$ pour tout $x \neq 0$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^t sgn(-\beta_s)dB_s &= -\int_0^t sgn(\beta_s)dB_s + 2\int_0^t 1_{\{\beta_s=0\}}dB_s\\ &= -\beta_t + 2\int_0^t 1_{\{\beta_s=0\}}dB_s.\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit d'observer que par l'Isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t 1_{\{\beta_s=0\}}dB_s\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t 1^2_{\{\beta_s=0\}}ds\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t 1_{\{\beta_s=0\}}ds\Big] = \int_0^t \mathbb{P}(\beta_s = 0)ds = 0.$$

$$\Longrightarrow \int_0^t 1_{\{\beta_s=0\}} dB_s = 0.$$

L'unicité trajectorielle n'est pas vérifiée : le processus $-\beta$ est aussi solution de l'équation avec pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}[\beta_t \neq -\beta_t] = \mathbb{P}[2\beta_t \neq 0] = 1,$$

de sorte que β et $-\beta$ sont deux processus solution qui ne sont pas indistinguables.

Pour justifier le dernier point, on a besoin de cette proposition :

Proposition 2.2.1. *[9] On appelle temps local au point* 0 *du mouvement brownien* B*, la limite dans* L^2

$$L_t = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \text{ mesure} \{s \in [0,t];\ |B(s)| \leq \epsilon\}.$$

On a l'égalité suivante, appelée formule de Tanaka :

$$|B(t)| = \int_0^t sgn(B(s))dB(s) + L_t.$$

Remarque 2.2.1. En particulier,

(i) $\int_0^t sgn(B(s))dB(s) = |B(t)| - L_t$ est $\mathcal{F}_t^{|B|}$-mesurable, puisque L_t l'est par définition.

(ii) $|B(t)| - L_t$ est un mouvement brownien.

Le temps local L_t *représente la densité (par unité de longueur) de temps passé au voisinage de l'origine jusqu'au temps* t*.*

On peut voir que, β n'est pas une solution forte de l'équation :
la formule de Tanaka donne

$$|\beta_t| - L_t = \int_0^t sgn(\beta_s)d\beta_s = B_t.$$

Or on sait que

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^a 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(a)da = \int_0^t 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\beta_s d\langle\beta\rangle_s = \int_0^t 1_{[0,\varepsilon]}(|\beta_s|)ds,$$

de plus par la continuité conjointe de $(a,t) \to L_t^a = L^a(\beta)_t$ on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon]}(|\beta_s|)ds = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} L_t^a da = L_t.$$

Donc L_t est $\mathcal{F}^{|\beta|}$-mesurable et par suite $B_t = |\beta_t| - L_t$ est mesurable par rapport à la filtration générée par $|\beta_t|$.

Or β_t n'est évidement pas adapté à la filtration générée par $|\beta_t|$. Donc β n'est pas $\mathcal{F}^B$ adaptée donc il ne s'agit pas d'une solution forte.

(la filtration canonique de B coïncide avec la filtration canonique de $|\beta|$, qui est strictement plus petite que celle de β. En effet, l'événement $\{\beta_t < 0\}$ appartient à $\mathcal{F}^\beta$ mais pas à $\mathcal{F}^{|\beta|}$).

Le résultat suivant relie les différentes notions d'existence et d'unicité :

Théorème 2.2.1. ***(Yamada-Watanabe)*** *S'il y a existence faible et unicité trajectorielle, alors il y a aussi unicité faible. De plus, pour tout choix de l'espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *et du* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-mouvement brownien* B*, il existe pour chaque* $x \in \mathbb{R}^d$ *une (unique) solution forte de* $E_x(b, \sigma)$*.*

Théorème 2.2.2. ***(Cauchy-Lipschitz pour EDS)*** *On suppose qu'il existe une constante* K *positive telle que pour tout* $t \geq 0, x, y \in R^d$

- *Condition de Lipschitz*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$$

- *Croissance linéaire*

$$|b(t,x)| \leq K(1+|x|), \quad |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$$

Alors il y a unicité trajectorielle pour $E_x(b,\sigma)$*. De plus, pour tout espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *et tout* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-mouvement brownien, il existe pour chaque* $x \in R^d$*, une (unique) solution forte pour* $E_x(b,\sigma)$*.*

Remarque 2.2.2. Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, on a besoin de 2 types de conditions.

Une première qui assure l'unicité de la solution grâce au caractère contractant (Lipschitz) des fonctions b et σ.

Une deuxième qui assure que le processus n'explose pas en temps fini afin qu'il soit bien définit sur tout $\mathbb{R}^+$.

Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la croissance linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS.

Remarque 2.2.3. Dans le cas particulier où b et σ sont seulement des fonctions de x et non de t (EDS autonome), la condition 2 est une conséquence de la condition 1.

Pour prouver le théorème d'existence et d'unicité, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.1. ***(Gronwall)*** *Soient* $T > 0$ *et* g *une fonction positive mesurable bornée sur* $[0,T]$*. On suppose qu'il existe des constantes* $a \geq 0, b \geq 0$ *telles que pour tout* $t \in [0;T]$*, on a*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds. \tag{2.7}$$

Alors on a $g(t) \leq a\exp(bt)$ *pour tout* $t \in [0,T]$*.*

Preuve. voir [28].

Preuve du Théorème 2.2.2. Afin d'alléger les notations, on traitera uniquement le cas $d = m = 1$. Commençons par établir l'unicité trajectorielle.

Unicité trajectorielle. On considère deux solutions X et X' de $E(b,\sigma)$ avec $X_0 = X'_0$, définies sur le même espace et avec le même mouvement brownien B. Pour $M > 0$ fixé, on considère le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\{t \geq 0, |X_t| \geq M \text{ } ou \text{ } |X'_t| \geq M\}.$$

D'aprés $E(b,\sigma)$, on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau} b(s,X_s)ds + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(s,X_s)dB_s.$$

Vu que $X^{'}$ est aussi une solution, nous avons l'équation analogue :

$$X^{'}_{t\wedge\tau} = X^{'}_0 + \int_0^{t\wedge\tau} b(s,X^{'}_s)ds + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(s,X^{'}_s)dB_s.$$

On considère $t \in [0,T]$. Par différence, comme $X_0 = X^{'}_0$ et comme $X, X^{'}$ sont bornées par M sur $]0,\tau]$, l'expression de la variance d'une intégrale stochastique L^2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($|\int_0^t f ds|^2 \leq t\int_0^t |f|^2 ds,\ f:[0,t]\to\mathbb{R}$), les hypothèses lipschitziennes et la majoration $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ donnent

(En faisant la différence membre à membre de ces deux équations et par passage à l'espérence, on aura)

$$\begin{aligned}
&h(t) := \mathbb{E}\Big[(X_{t\wedge\tau} - X^{'}_{t\wedge\tau})^2\Big]\\
\leq\ & 2\mathbb{E}\Bigg[\bigg(\int_0^{t\wedge\tau}(b(s,X_s)-b(s,X^{'}_s))ds\bigg)^2\Bigg] + 2\mathbb{E}\Bigg[\bigg(\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X^{'}_s))dB_s\bigg)^2\Bigg]\\
\leq\ & 2\mathbb{E}\Big[(t\wedge\tau)\int_0^{t\wedge\tau}(b(s,X_s)-b(s,X^{'}_s))^2ds\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X^{'}_s))^2ds\Big]\\
\leq\ & 2T\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau}(b(s,X_s)-b(s,X^{'}_s))^2ds\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X^{'}_s))^2ds\Big]\\
\leq\ & 2T\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau}K^2(X_s-X^{'}_s)^2ds\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau}K^2(X_s-X^{'}_s)^2ds\Big]\\
\leq\ & 2K^2(T+1)\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau}(X_s-X^{'}_s)^2\Big]ds\\
\leq\ & 2K^2(T+1)\mathbb{E}\Big[\int_0^{t}(X_{s\wedge\tau}-X^{'}_{s\wedge\tau})^2\Big]ds.
\end{aligned}$$

Si on pose $C = 2K^2(T+1)$; alors on a établi que h vérifie pour $t \in [0,T]$:

$$h(t) \leq C\int_0^t h(s)ds.$$

c'est à dire

$$\mathbb{E}\Big[(X_{t\wedge\tau} - X^{'}_{t\wedge\tau})^2\Big] \leq C\mathbb{E}\Big[\int_0^t (X_{s\wedge\tau} - X^{'}_{s\wedge\tau})^2\Big]ds$$

De plus, par définition de τ, la fonction h est bornée par $4M^2$, l'inégalité de Gronwall (2.2.1) s'applique avec $a = 0$ et $b = C$ (h verifié les conditions du lemme de Gronwall). On obtient $h = 0$, c'est à dire $X_{t\wedge\tau} = X^{'}_{t\wedge\tau}$ ps. Finalement, en faisant tendre M vers l'infini ($M \to +\infty$), on a $\tau \to +\infty$ et donc $X_t = X^{'}_t$ ps. Les processus X et $X^{'}$ sont des modifications à trajectoires continues, ils sont donc indistinguables, ce qui prouve l'unicité trajectorielle.

Passons à présent au deuxième point.

Existence forte. On procède comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose

$$\begin{aligned}
X_t^0 &= x \\
X_t^1 &= x + \int_0^t b(s,x)ds + \int_0^t \sigma(s,x)dB_s \\
X_t^2 &= x + \int_0^t b(s,X_s^1)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^1)dB_s \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

$$X_t^n = x + \int_0^t b(s,X_s^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})dB_s. \tag{2.8}$$

Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n, X_t^n est continu et adapté donc localement borné si bien que le processus $\sigma(t,X_t^n)$ l'est aussi (hypothèse lipschitzienne) et l'intégrale correspondante bien définie.

On fixe maintenant $T > 0$ et on raisonne sur $[0,T]$. On prouve par récurrence qu'il existe C_n tel que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}[(X_t^n)^2] \leq C_n. \tag{2.9}$$

En effet, (2.9) est immédiate si $n = 0$ avec $C_0 = x^2$. Puis, on suppose que (2.9) est vraie au rang $n-1$ et vérifions que cela reste vrai à l'ordre n.

Le calcul du moment d'ordre deux de l'intégrale stochastique se justifie par le fait que $\mathbb{E}[\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2 ds] < \infty$, ce qui découle de la croissance linéaire et de l'hypothèse de récurrence (2.9), c'est à dire : Si $\mathbb{E}[\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2 ds] < \infty$, on a donc

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})dB_s\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2 ds\Big].$$

Comme : $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ $[(a+b+c)^p \leq 3^{p-1}(a^p+b^p+c^p)]$,

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie L^2, et les hypothèses lipschitziennes ; on majore comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^n)^2] &\leq 3\Big(|x|^2 + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t b(s,X_s^{n-1})ds\Big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})dB_s\Big)^2\Big]\Big) \\
&\leq 3\Big(|x|^2 + t\mathbb{E}\Big[\int_0^t b(s,X_s^{n-1})^2 ds\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2 ds\Big]\Big) \\
&\leq 3\Big(|x|^2 + T\mathbb{E}\Big[\int_0^t (K+K|X_s^{n-1}|)^2 ds\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^t (K+K|X_s^{n-1}|)^2 ds\Big]\Big) \\
&\leq 3\Big(|x|^2 + T\mathbb{E}[\int_0^t (2K^2+2K^2|X_s^{n-1}|^2)ds] + \mathbb{E}\Big[\int_0^t (2K^2+2K^2|X_s^{n-1}|^2)ds\Big]\Big) \\
&\leq 3\Big(|x|^2 + 2T\mathbb{E}\Big[\int_0^t (K^2+K^2|X_s^{n-1}|^2)ds\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\int_0^t (K^2+K^2|X_s^{n-1}|^2)ds\Big]\Big) \\
&\leq 3\Big(|x|^2 + 2(T+1)\mathbb{E}\Big[\int_0^t (K^2+K^2|X_s^{n-1}|^2)ds\Big]\Big) \\
&\leq 3\Big(|x|^2 + 2(T+1)\mathbb{E}(K^2+K^2|X_s^{n-1}|^2)\int_0^t ds\Big) \\
&\leq 3\Big(|x|^2 + 2(T+1)(K^2+K^2C_{n-1})t\Big) \\
&\leq 3\Big(|x|^2 + 2T(T+1)(K^2+K^2C_{n-1})\Big) =: C_n.
\end{aligned}$$

ce qui établit (2.9) par récurrence. La majoration (2.9) et l'hypothèse de croissance linéaire sur σ entrainent que la martingale locale $(\int_0^t \sigma(s, X_s^n)^2 dB_s)$ est une vraie martingale bornée dans L^2 pour tout n. Cela va permettre de majorer par récurrence : $\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2]$.

On a :

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}))ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dB_s$$

En utilisant l'inégalité de Doob, l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que les hypothèses lipschitziennes, on déduit que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2\right] \\
\leq\ & 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))du\right|^2 + \sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))dB_u\right|^2\right] \\
\leq\ & 2\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})|du\right)^2\right] + 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))dB_u\right)^2\right]\right) \\
\leq\ & 2\left(T\mathbb{E}\left[\int_0^t (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))^2 du\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))^2 du\right]\right) \\
\leq\ & 2\left(T\mathbb{E}\left[\int_0^t K^2|X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_0^t K^2|X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du\right]\right) \\
\leq\ & 2(T+4)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du\right]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2\right] \leq C_T\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{0\leq r\leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 du\right]. \tag{2.10}$$

avec $C_T = 2(T+4)K^2$. Si on note : $g_n(u) = \mathbb{E}[\sup_{0\leq r\leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2]$ et $g_0(u) = \mathbb{E}[\sup_{0\leq r\leq u} |X_r^0|^2] = x^2$ alors on a établi :

$$g_{n+1}(t) \leq C_T \int_0^t g_n(u)du \tag{2.11}$$

Par ailleurs, par (2.9) et les inégalités précédentes, on voit que les fonctions g_n sont bornées sur $[0, T]$. En effet, $g_0(t) = x^2$ pour $t \in [0, T]$ et par une récurrence utilisant (2.11), on établit que pour tout $n \geq 1$ et $t \in [0, T]$, on a

$$g_n(t) \leq x^2 C_T^n \frac{t^n}{n!}.$$

On obtient alors que

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Comme la norme de L^1 est dominée par la norme de L^2, on aura :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|\right] < \infty.$$

Le théorème de la convergence monotone nous permet de dire que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|\right] < \infty.$$

Ce qui entraîne que p.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\le t\le T} |X_t^{n+1} - X_t^n| < \infty.$$

Mais si $n, m \in N$ avec $n < m$:

$$\sup_{0\le t\le T} |X_t^m - X_t^n| \le \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{0\le t\le T} |X_t^{k+1} - X_t^k| \to 0 \ \textit{quand}\ n, m \to \infty.$$

Et donc p.s la suite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus limite $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ qui est continu. Comme par récurrence (X_t^n) est adapté par rapport à la filtration canonique de B, et donc X l'est aussi a la limite.

Les estimations (2.10) établissent aussi que

$$\begin{aligned} \sup_{0\le s\le T} |X_s - X_s^n| &= \lim_{m\to\infty} \sup_{0\le s\le T} |X_s^m - X_s^n| \\ \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{0\le s\le T} |X_s^k - X_s^{k-1}| \end{aligned}$$

En introduisant la norme L^2, on trouve que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s\le T} |X_s - X_s^n|^2\Big] \le \Big(\sum_{k=n}^{\infty} g_k(T)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 \to 0 \ \textit{quand}, \ n \to \infty$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} L^2 - \lim_{n\to+\infty} \int_0^t b(s, X_s^n)ds &= \int_0^t b(s, X_s)ds, \\ L^2 - \lim_{n\to+\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n)dB_s &= \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \Big(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)\Big)dB_s\Big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)\Big)^2 ds\Big] \\ &\le \mathbb{E}\Big(K^2 \int_0^t |X_s - X_s^n|^2 ds\Big) \\ &\le T^2K^2\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s\le T} |X_s - X_s^n|^2\Big] \to 0 \end{aligned}$$

et on procède de la même manière pour b.

Finalement, en passant à la limite dans l'équation de récurrence (2.9) pour X^n, on obtient que X est une solution forte de $E_x(b, \sigma)$ sur $[0, T]$.

■

2.3 Exemples d'EDS

Nous donnons quelques exemples d'équations pour lesquelles une solution peut être donnée explicitement sous forme d'intégrales. Il n'est pas surprenant que de tels cas solubles sont extrêmement rares.

Exemple1

Considérons l'EDS linéaire avec "bruit additif"

$$dX_t = b(t)X_t dt + \sigma(t)dB_t, \tag{2.12}$$

où b et σ sont des fonctions déterministes. Dans le cas particulier $\sigma \equiv 0$, la solution peut s'écrire simplement

$$X_t = e^{\alpha(t)}X_0, \quad \alpha(t) = \int_0^t b(s)ds. \tag{2.13}$$

Ceci suggère d'appliquer la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire de chercher une solution de la forme $X_t = e^{\alpha(t)}Y_t$. La formule d'Itô appliquée à $Y_t = u(X_t, t) = e^{-\alpha(t)}X_t$ nous donne

$$dY_t = -b(t)e^{-\alpha(t)}X_t dt + e^{-\alpha(t)}dX_t = e^{-\alpha(t)}\sigma(t)dB_t, \tag{2.14}$$

d'où en intégrant et en tenant compte du fait que $Y_0 = X_0$,

$$Y_t = X_0 + \int_0^t e^{-\alpha(s)}\sigma(s)dB_s. \tag{2.15}$$

Ceci donne finalement la solution forte de l'équation (2.12)

$$X_t = X_0 e^{\alpha(t)} + \int_0^t e^{\alpha(t)-\alpha(s)}\sigma(s)dB_s. \tag{2.16}$$

Exemple2

Soit l'EDS linéaire avec "bruit multiplicatif"

$$dX_t = b(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t, \tag{2.17}$$

avec à nouveau b et σ des fonctions déterministes. Nous pouvons alors écrire

$$\frac{dX_t}{X_t} = b(t)dt + \sigma(t)dB_t. \tag{2.18}$$

En intégrant le membre de gauche, on devrait trouver $log(X_t)$, mais ceci est-il compatible avec le calcul d'Itô ? Pour s'en assurer, posons $Y_t = u(X_t) = log(X_t)$. Alors la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{2X_t^2}dX_t^2 \\ &= b(t)dt + \sigma(t)dB_t - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 dt. \end{aligned} \tag{2.19}$$

En intégrant et en reprenant l'exponentielle, on obtient donc la solution forte

$$X_t = X_0 \exp\left\{ \int_0^t [b(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2]ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s \right\}. \tag{2.20}$$

En particulier, si $b \equiv 0$ et $\sigma \equiv \gamma$, on retrouve la martingale $X_t = X_0 \exp\{\gamma B_t - \gamma^2 \frac{t}{2}\}$, appelée mouvement Brownien exponentiel.

2.3.1 EDS affine

Les EDS affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les EDS affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel, ie. $d = m = 1$.

Équations linéaires

Soit l'EDS suivante :

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t, \quad X_0 = x \tag{2.21}$$

On a

$$e^t dX_t = -e^t X_t dt + dB_t$$

ou encore

$$e^t dX_t + e^t X_t dt = dB_t.$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties assure que :

$$d(e^t X_t) = e^t dX_t + X_t e^t dt$$

Ce qui donne :

$$d(e^t X_t) = dB_t$$

et donc, la solution s'écrit :

$$X_t = x + e^{-t} B_t. \tag{2.22}$$

Ornstein-Uhlenbeck : équation $b(t, x) = -bx$ $(b > 0)$ et $\sigma(x) = \sigma$. Il s'agit de l'équation de Langevin :

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t \tag{2.23}$$

c'est à dire avec $b(t, x) = -bx$, et $\sigma(x) = \sigma$. La solution est donnée par

$$X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s. \tag{2.24}$$

Sans le terme σdB_t, l'équation $dX_t = -bX_t dt$ se résout immédiatement en $X_t = Ce^{-bt}$. Pour tenir compte du terme σdB_t, on fait « varier la constante C» :

$$\begin{array}{rcl} dCe^{-bt} - bCe^{-bt} dt & = & dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t \\ dC & = & \sigma e^{bt} dB_t \\ C & = & X_0 + \int_0^t \sigma e^{bs} dB_s \end{array}$$

et, avec $X_t = Ce^{-bt}$, l'expression (2.24) est obtenue.

Il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce cas se généralise au contexte vectoriel.

Équation : $b(t, x) = b_t x$ et $\sigma(x) = \sigma_t x$. On suppose les processus $(b_t)_{t \geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ bornés ou vérifiant l'intégrabilité $\int_0^T |b_t| dt < +\infty$, $\int_0^T |\sigma_t|^2 dt < +\infty$.

L'EDS

$$dX_t = X_t (b_t dt + \sigma_t dB_t), \quad X_0 = x \tag{2.25}$$

admet pour solution

$$X_t = x\exp\left(\int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right). \tag{2.26}$$

Pour le voir, on suppose X positivement borné sur $[0,T]$ (minoré par $1/n$, majoré par n) ; sinon, on introduit le temps d'arrêt $T_n = \inf(t : X_t \leq 1/n\, ou\, X_t > n)$ et on arrête les processus à ces dates. On applique la formule d'Itô à $X_{t\wedge T_n}$ et à la fonction ln (qui est C^2 sur $[1/n, n]$). De l'équation (2.25), on déduit $d\langle X, X\rangle_t = X_t^2\sigma_t^2 dt$. Le processus $Y_t = \ln(X_{t\wedge T_n})$ vérifie alors

$$dY_t = \frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{2}\frac{d\langle X, X\rangle_t}{X_t^2} = (b_t dt + \sigma_t dB_t) - \frac{\sigma_t^2}{2}dt = (b_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2)dt + \sigma_t dB_t,$$

ce qui prouve le résultat (2.26).

Black et Scholes. C'est le cas particulier de (2.26) où $b(t,x) = bx$ et $\sigma(t,x) = \sigma x$, ie.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \quad telque\ : S_0 > 0 \tag{2.27}$$

Cette EDS modélise l'évolution d'un cours S soumis à un taux d'intérêt déterministe μ et à une perturbation stochastique $\sigma S_t dB_t$. Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion σ est appelé volatilité. Noter que la partie déterministe de l'accroissement de $S_t(\mu S_t)$ et sa partie aléatoire (σS_t) sont toutes les deux proportionnelles à la valeur courante, S_t, en t (ce qui est typique des modèles de croissance). La solution de l'équation (2.27) est définie par :

$$S_t = S_0\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right),$$

où S_0 est le cours observé à la date 0. Cela signifie que l'on cherche un processus adapté $(S_t)_{t\geq 0}$ tels que les intégrales $\int_0^t S_s ds$ et $\int_0^t S_s dB_s$ aient un sens, et qui vérifie pour chaque t :

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s.$$

On retrouve le mouvement brownien géométrique.

On remarque qu'on peut écrire $X_t = e^{\mu t}M_t$ où $M_t = x_0\exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$ est une martingale.

On voit donc que X_t n'est pas une martingale (ni une martingale locale) a cause du terme multiplicative $e^{\mu t}$ dependant de t.

Résolution de l'EDS (2.27) **:** Faisons tout d'abord un calcul formel : Posons $Y_t = \log(S_t)$ où S_t est un processus d'Itô avec $K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$.
Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log x$ on obtient, en supposant que S_t est positif :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

$$log(S_t) = log(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s}dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}d\langle S, S\rangle_s$$

On a :

$$\begin{aligned}\langle S,S\rangle_s &= \langle \int_0^t \sigma S_s dB_s, \int_0^t \sigma S_s dB_s\rangle = \langle \int_0^t \sigma S_s dB_s\rangle \\ &= \int_0^t \sigma^2 S_s^2 d\langle B,B\rangle_s = \int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds\end{aligned}$$

et $dS_s = S_s(\mu ds + \sigma dB_s)$

$$\begin{aligned}log(S_t) &= log(S_0) + \int_0^t \frac{S_s(\mu ds + \sigma dB_s)}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds \\ &= log(S_0) + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s\end{aligned}$$

En utilisant le faite que $Y_t = log(S_t)$, on obtient :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}Y_t = log(S_t) &= log(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \\ \exp(log(S_t)) &= \exp(log(S_0))\exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)\end{aligned}$$

Il semble donc que :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right) \ avec \ : S_0 = x_0$$

soit une solution de l'équation de (2.27).

Équations affines

On suppose que $b(t,x) = b_t x + c_t$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x + \delta_t$, c'est à dire qu'on considère l'EDS affine générale

$$dX_t = X_t(b_t dt + \sigma_t dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t. \tag{2.28}$$

Elle a une solution construite à partir de la solution Z de l'EDS linéaire $dZ_t = Z_t(b_t dt + \sigma_t dB_t)$ de condition initiale $Z_0 = 1$, ie.

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$$

donnée, avec $\widetilde{c}_t = c_t - \sigma_t \delta_t$, par

$$X_t = Z_t\left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s ds + \delta_s dB_s\right). \tag{2.29}$$

Avec la formule d'Itô, on vérifie que (2.29) satisfait effectivement l'équation (2.28) :

$$\begin{aligned}dX_t &= Z_t(Z_t^{-1}(\widetilde{c}_t dt + \delta_t dB_t)) + X_t(b_t dt + \sigma_t dB_t) + d\langle Z_t, Z_t^{-1}\delta_t B_t\rangle_t \\ &= \widetilde{c}_t dt + \delta_t dB_t + X_t(b_t dt + \sigma_t dB_t) + \sigma_t \delta_t dt \\ &= X_t(b_t dt + \sigma_t dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t.\end{aligned}$$

Chapitre 3

Exponentielle Stochastique

3.1 Exponentielle stochastique

Lemme 3.1.1. ***(Formule d'Itô)*** *Pour toute fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a*

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s}_{martingale\, locale} + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s}_{variation\, finie}.$$

Proposition 3.1.1. *Soit M une martingale locale. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, Le processus*

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle_t\right)$$

est une martingale locale.

Preuve. Si $F(x, y)$ est une fonction de classse $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, la formule d'Itô entraîne que :

$$F(M_t, \langle M, M \rangle_t) = F(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(M_s, \langle M, M \rangle_s) dM_s$$

$$+ \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(M_s, \langle M, M \rangle_s) d\langle M, M \rangle_s.$$

Le processus $F(M_t, \langle M, M \rangle_t)$ est une martingale locale dés que sa partie à variation finie s'annule, ie. lorsque F vérifie la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Il est facile de vérifié que cette condition est satisfaite par la fonction suivante

$$F(x, y) = \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} y\right).$$

■

Remarque 3.1.1. Avec $F(x,y) = \exp(x - y/2)$ (prendre $\lambda = 1$),

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = F(x,y)$$

donc

$$F(M_t, \langle M, M\rangle_t) = F(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(M_s, \langle M, M\rangle_s) dM_s$$

s'écrit

$$\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_0 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s dM_s$$

ou en écriture symbolique d'EDS : $d\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M)dM$, ce qui généralise l'équation $dy = ydx$ de solution $y(x) = \exp(x)$ avec la condition $y(0) = 1$ ou l'équation $dy = ydg$ de solution $y(t) = \exp(g(t))$ si g est à variaition finie nulle en 0 et avec la condition initiale $y(0) = 1$. Cette propriété justifie l'appelation «exponentielle stochastique» de M pour $\mathcal{E}(M)$.

Proposition 3.1.2. *Soit $f \in L^2_{loc}(B)$. Si pour une constante C finie, on a*

$$\int_0^t f^2(s)ds \leq C \qquad p.s., \text{ alors}$$

$\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)$ est une vraie martingale de carré intégrable, et pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)_t] = 1$.

Si $f \in L^2_{loc}(B)$ est à valeurs complexes, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds \leq C \Longrightarrow \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{E}\left(\int_0^\cdot f_s dB_s\right)\right|^2\right] < \infty \text{ et } \mathbb{E}\left[\mathcal{E}\left(\int_0^\cdot f_s dB_s\right)\right] = 1.$$

Preuve. Notons $Z_t = \mathcal{E}(\int_0^\cdot f(s)dB_s)_t$.
On commence par supposer que pour tout $s \in [0,t]$, $|f(s)| \leq k$, et on montre que

$$fZ \in L^2_{[0,t]}(B) = \left\{H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : \text{ progressif avec } \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] < +\infty\right\}$$

pour assurer que $\int_0^t Z_s f(s) dB_s$ est une (vraie) martingale et que $\mathbb{E}[Z_t] = 1$.

Pour l'exponentielle stochastique, la formule d'Itô s'écrit

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s f(s) dB_s.$$

L'inégalité de convexité $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ donne

$$Z_u^2 \leq 2\left(1 + \left(\int_0^u Z_s f_s dB_s\right)^2\right), u \leq t.$$

L'isométrie d'Itô nous permettre de calculer le moment d'ordre 2 de $\int_0^u Z_s f(s)dB_s$, et on obtient pour $u \leq t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_u^2] &\leq 2\Big(1+\int_0^u \mathbb{E}[Z_s^2 f_s^2]ds\Big) \\
&\leq 2\Big(1+k^2\int_0^u \mathbb{E}[Z_s^2]ds\Big).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Puisque $\mathbb{E}[Z_s^2]$ n'est pas finie, on considère les temps d'arrêt $T_n = \inf(t \geq 0 : Z_t \geq n),\ n \geq 1$, qui réduisent la martingale locale Z. En faisant commme précédement, on peut remplacer (3.1) par

$$\mathbb{E}[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u \leq T_n\}}] \leq \mathbb{E}[Z_{u\wedge T_n}^2] \leq 2\Big(1+k^2\int_0^u \mathbb{E}[Z_s^2\mathbf{1}_{\{s\leq T_n\}}]ds\Big).$$

Le lemme de Gronwall [2.2.1] assure que $\mathbb{E}[Z_s^2\mathbf{1}_{\{u\leq T_n\}}] \leq 2\exp(2k^2 s)$ et par convergence monotone lorsque $n \to +\infty$, $\mathbb{E}[Z_s^2] \leq 2\exp(2k^2 s)$. On a donc Z_s de carré intégrable et borné dans L^2 pour $s \in [0,t]$. Cela garantit $fZ \in L^2_{[0,t]}(B)$ et $\mathbb{E}[Z_t] = 1$.

Dans le cas général, on pose $f_n = (f \wedge n) \vee (-n)$ et on applique le cas précédent à f_n. Par convergence monotone $\int_0^t f_n(u)^2 du \nearrow \int_0^t f(u)^2 du,\ n \longrightarrow +\infty$, et par isométrie et convergence dominée $\int_0^t f_n(u)dB_u \xrightarrow{L^2} \int_0^t f(u)dB_u$ car

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t f_n(u)dB_u - \int_0^t f(u)dB_u\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t (f_n(u)-f(u))^2 du\Big].$$

On a donc

$$\int_0^t f_n(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_n(s)^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t f_n(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds$$

et (comme la convergence en probabilité se conserve en appliquant une application continue) on a avec des notations évidentes $Z_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z(t),\ \ n \longrightarrow +\infty$. Puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n(t)^2] &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(2\int_0^t f_n(s)dB_s - (4-3)\int_0^t f_n(s)^2 ds\Big)\Big] \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\exp\Big(4\int_0^t f_n(s)dB_s - 8\int_0^t f_n(s)^2 ds\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \times \mathbb{E}\Big[\exp\Big(6\int_0^t f_n(s)^2 ds\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 1 \times \exp(3C)
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas précédent pour avoir

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(4\int_0^t f_n(s)dB_s - 8\int_0^t f_n(s)^2 ds\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathcal{E}\Big(\int_0^t 4 f_n(s)dB_s\Big)\Big] = 1.$$

On a donc $(Z_n(t))_{n\geq 1}$ uniformément intégrable. D'aprés le Théorème de Vitali, la convergence $Z_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z(t)$ se renforce en $Z_n(t) \xrightarrow{L^1} Z(t)$ et on a en particulier $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}[Z_n(t)] = \mathbb{E}[Z(t)]$, ce qui assure $\mathbb{E}[Z(t)] = 1$. On a aussi $\mathbb{E}[Z_n(t)/\mathcal{F}_s] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[Z(t)/\mathcal{F}_s]$ et $\mathbb{E}[Z_n(t)/\mathcal{F}_s] = Z_n(s) \xrightarrow{L^1} Z(s)$. D'où $\mathbb{E}[Z(t)/\mathcal{F}_s] = Z(s)$ et Z est donc une martingale.

Puis, on a mieux que l'uniforme intégrabilité dans L^1 : en effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n(t)^3] &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(3\int_0^t f_n(s)dB_s - \frac{3}{2}\int_0^t f_n(s)^2 ds\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(3\int_0^t f_n(s)dB_s - \frac{18-15}{2}\int_0^t f_n(s)^2 ds\Big)\Big] \\
&\le \mathbb{E}\Big[\exp\Big(6\int_0^t f_n(s)dB_s - 18\int_0^t f_n(s)^2 ds\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \mathbb{E}\Big[\exp\Big(15\int_0^t f_n(s)^2 ds\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\le \mathbb{E}\Big[\mathcal{E}\Big(\int_0^t f_n(s)dB_s\Big)_t\Big]\exp(15C/2) = \exp(15C/2).
\end{aligned}$$

justifie que $(Z_n(t))_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable dans L^2. On en déduit alors que $Z_n(t) \longrightarrow Z(t)$ et donc $Z(t) \in L^2$.
Pour le cas complexe, on écrit $f = Re(f) + iIm(f)$ et on se ramène assez facilement au cas réel.

■

Exercice Soit σ un processus adapté continu de $\mathrm{L}^2\ (\Omega \times \mathbb{R})$ et

$$X_t = \int_0^t \sigma(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds.$$

On pose : $Y_t = \exp(X_t)$ et $Z_t = Y_t^{-1}$.

1. Expliciter la dynamique de Y, c'est à dire exprimer dY_t.

2. Montrer que Y est une martingale locale. Donner une condition sur σ pour que ce soit une martingale.

3. Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$ dans ce cas. Expliciter les calcules quand $\sigma = 1$.

4. Calculer dZ_t.

Solution

1. Soit $X_t = \displaystyle\int_0^t \sigma(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds.$

   On a $\quad dX_t = \sigma(t)dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2(t)dt.$

   Soit $Y_t = \exp(X_t)$.

   On applique la formule d'Itô avec $f(x) = \exp(x)$.

$$\begin{aligned}
dY_t &= \exp(X_t)dX_t + \tfrac{1}{2}\exp(X_t)\sigma^2(t)dt \\
&= Y_t(\sigma(t)dB_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2(t)dt) + \tfrac{1}{2}Y_t\sigma^2(t)dt, \\
&= Y_t\sigma(t)dB_t
\end{aligned}$$

Donc

$$dY_t = Y_t\sigma(t)dB_t$$

2. le processus Y est une martingale locale (résultat de la martingale exponontielle). C'est une martingale si :

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t Y_t^2\sigma^2(t)dt\Big) < \infty.$$

Ce critère n'est pas trés bon, nous en verrons d'autre par la suite.
Si σ est une constante, Y est un brownien géométrique avec drift nul. En particulier,

$$Y_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

est une (vraie) martingale.

3. Vérifions à titre d'exercice dans ce cas les conditions d'intégrabilité :

$$Y_t = \exp(X_t) = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|Y_t|) &= \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}\Big[\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\Big] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(\frac{-x^2}{2t})dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t - \frac{x^2}{2t}\right)dx = 1
\end{aligned}$$

En particulier, si $\sigma = 1$ le processus $\exp(B_t - \frac{t}{2})$ est une martingale.

4. Soit $Z_t = \frac{1}{Y_t}$. Pour calculer dZ_t, on peut utiliser la formule d'Itô

$$\begin{aligned}
dZ_t &= \frac{-1}{Y_t^2}(Y_t\sigma(t)dB_t) + \frac{1}{2}\frac{2}{Y_t^3}(Y_t^2\sigma^2(t))dt \\
&= \frac{-\sigma(t)}{Y_t}dB_t + \frac{\sigma^2(t)}{Y_t}dt \\
&= -Z_t\sigma(t)dB_t + \sigma^2(t)Z_t dt \\
&= Z_t(-\sigma(t)dB_t + \sigma^2(t)dt)
\end{aligned}$$

ce qui va s'écrire finalement

$$Z_t = Z_0 \exp\Big(-\int_0^t \sigma(s)dB_s + \int_0^t \sigma^2(s)ds\Big),$$

formule que l'on peut obtenir directement en inversant l'exponentielle.

Chapitre 4

Logarithme stochastique

4.1 Théorème de Girsanov

La propriété de martingale est liée à la probabilité utilisée : si on change $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$, une martingale X (pour $\mathbb{P}$) n'a pas de raison de rester une martingale pour $\mathbb{Q}$, Dans ce cours, on étudie comment se transforme une martingale (locale) quand on change la probabilité $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. La réponse est donnée par le Théorème de Girsanov (4.1.1).
On considère $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$, on a donc $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$, et on note $D_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t}$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$.

Le processus D vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 4.1.1. *[36] **(Processus dérivée de Radon-Nikodym).***

1. *D est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale uniformément intégrable.*
2. *D admet une modification càdlàg ; pour cette version et pour tout temps d'arrêt T, on a $D_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_T}$.*
3. *Si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ (i.e. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$) alors pour tout $t \geq 0$, $D_t > 0$ p.s.*

Proposition 4.1.2. ***(Logarithme stochastique).*** *Soit D une martingale locale continue strictement positive. Alors, il existe une unique martingale locale, à trajectoire continues, L appelée logarithme stochastique de D, telle que :*

$$D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) = \mathcal{E}(L)_t. \tag{4.1}$$

De plus, L est donnée par l'expression :

$$L_t = \ln D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s. \tag{4.2}$$

Pour prouver cette Proposition, on a besoin de ce résultat

Proposition 4.1.3. *[27] Soit M une martingale locale continue, nulle en 0. Si M est à variation bornée, alors $M \equiv 0$.*

Preuve du Proposition (4.1.2).
Unicité Si $D = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t) = \exp(L'_t - \frac{1}{2}\langle L', L'\rangle_t)$ pour tout $t \geqslant 0$ alors $L_t - L'_t = \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t - \frac{1}{2}\langle L', L'\rangle_t$, pour tout $t \geqslant 0$ ce qui exige $L = L'$ par la Proposition (4.1.3).

Existence Si on prend L donné par (4.2), on remarque que

$$\langle L, L\rangle_t = \int_0^t \frac{d\langle D, D\rangle_s}{D_s^2}.$$

Comme $D > 0$ et ln est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, on applique la formule d'Itô à $\ln D$:

$$\ln D_t = \ln D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle D, D\rangle_s}{D_s^2} = L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t.$$

En appliquant exp, on obtient la formule (4.1).

■

Par abus de language, on indique la probabilité par rapport à laquelle une martingale est considérée (on écrira ainsi : soit X une $\mathbb{P}$-martingale ou une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale et on notera $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ pour une espérance relative à $\mathbb{P}$).

Proposition 4.1.4. ***($\mathbb{P}$-martingale et $\mathbb{Q}$-martingale).*** *Soit $\mathbb{Q} \backsim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. Soit L le logarithme stochastique associé à la martingale $D_t = (d\mathbb{Q}/d\mathbb{P})_{|\mathcal{F}_t}$ qu'on suppose continue.*
Soient X un processus continue adapté et T un temps d'arrêt tel que $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale alors X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale. En particulier, Si XD est une $\mathbb{P}$-martingale locale alors X est une $\mathbb{Q}$-martingale lacale.

Preuve. La seconde partie de la proposition découle facilement de la première partie qu'on se contente de prouver.
D'après la Proposition (4.1.1), on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|X_{T\wedge t}|] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_{T\wedge t}D_{T\wedge t}|] < +\infty.$$

Donc $X_t^T \in L^1(\mathbb{Q})$.
Puis considérons $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$.
Comme $A \cap \{T > s\} = A \cap \{T \leq s\}^c \in \mathcal{F}_s$ et $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge t}D_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge s}D_{T\wedge s}], \tag{4.3}$$

par propriété de $\mathbb{P}$-martingale pour $(XD)^T$. On a aussi $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_T$ car pour tout $u \geq 0$,
si $s \leq u$, $A \cap \{T > s\} \cap \{T \leq u\} \in \mathcal{F}_s \cap \mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_u$;
si $s > u$, $A \cap \{T > s\} \cap \{T \leq u\} = \emptyset \in \mathcal{F}_u$.
Comme aussi $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_s$, on a donc $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_{T\wedge s} \subset \mathcal{F}_{T\wedge t}$, l'égalité (4.3) se réécrit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}}X_{T\wedge s}],$$

car on rappelle que par la Proposition (4.1.1) :

$$D_{T\wedge t} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_{T\wedge t}}, \quad D_{T\wedge s} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_{T\wedge s}}.$$

Par ailleurs, comme il est évident que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T\leq s\}}X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T\leq s\}}X_{T\wedge s}],$$

(car dans ces deux intégrales $X_{T\wedge t} = X_T = X_{T\wedge s}$). Il vient que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A X_{T\wedge s}]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_s$. Cela établit que X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale.

■

Théorème 4.1.1. *[36] **(Girsanov).** Soit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ et soit L le logarithme stochastique (supposé à trajectoires continues) associé à la martingale $D_t = (d\mathbb{Q}/d\mathbb{P})_{|\mathcal{F}_t}$. Si M est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale locale continue, alors le processus $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-martingale locale continue.*

Sous les hypothèses du Théorème 4.1.1, notons $\widetilde{M} = G^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}(M)$. Alors l'application $G^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}$ vérifie :

- $G^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}$ envoie l'ensemble des $\mathbb{P}$-martingales locales continues dans l'ensemble des $\mathbb{Q}$-martingales locales continues.
- On a
$$G^{\mathbb{Q}}_{\mathbb{P}} \circ G^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}} = Id.$$
- De plus, $G^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}$ commute avec l'intégrale stochastique, i.e. si H est un processus localement borné alors $H.G^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}} = G^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}(H.M)$.

4.2 Utilisation de Girsanov

Dans les applications pratiques du Théorème de Girsanov (Théorème 4.1.1), on ne dispose pas en général de la probabilité $\mathbb{Q}$ mais de ce qui joue le rôle du logarithme stochastique L de sa dérivée de Radon-Nikodym $D = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. On reconstruit alors la probabilité $\mathbb{Q}$ comme suit :

- on part d'une martingale locale continue L telle que $L_0 = 0$;
- alors $\mathcal{E}(L)_t$ est une martingale locale continue à valeurs strictement positives, c'est donc une surmartingale ;
- cela assure l'existence p.s. de la limite $\mathcal{E}(L)_\infty$; en plus, d'aprés le lemme de Fatou, on a
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] \leq 1 \tag{4.4}$$
puisque
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] = \mathbb{E}[\lim_{t\longrightarrow+\infty} \mathcal{E}(L)_t] = \mathbb{E}[\liminf_{t\longrightarrow+\infty} \mathcal{E}(L)_t] \leq \liminf_{t\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \leq 1,$$
car, si $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_s] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_0] = 1$.

Mais si on a égalité dans (4.4), on a bien mieux

Proposition 4.2.1. *[36] Si la condition suivante est satisfaite*
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] \leq 1, \tag{4.5}$$
alors $\mathcal{E}(L)$ est une vraie martingale uniformément intégrable.

Théorème 4.2.1. *[36] **(Condition de Novikov).** Soit L une martingale locale continue telle que $L_0 = 0$. Considérons les conditions suivantes :*

1. $\mathbb{E}\left[\exp \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right] < +\infty$;
2. *L est une martingale uniformément intégrable et* $\mathbb{E}\left[\exp(\frac{1}{2}L_\infty)\right] < +\infty$;
3. *$\mathcal{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable.*

Alors on a les implications $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3$.

Corollaire 4.1. *[36] **(Girsanov brownien 1).** Soient B un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien et L satisfaisant (4.5) (en satisfaisant une des conditions de Novikov du Théorème (4.2.1). Alors $\widetilde{B} = B - \langle B, L \rangle$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.*

Corollaire 4.2. *[36] **(Girsanov brownien 2).** Soient B un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien, et pour T fixé, $f \in L^2_{[0,T]}(B)$ telle que $L_t = \int_0^t f(s)dB_s$ satisfait (4.5) (en satisfaisant une des conditions de Novikov du Théorème (4.2.1). Soit Q de densité (par rapport à $\mathbb{P}$)*

$$D_T = \exp\left(\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right).$$

Sous $\mathbb{Q}$, le processus B s'écrit

$$B_t = B_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^t f(s)ds,$$

où $B^{\mathbb{Q}}$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.

Corollaire 4.3. *[9] **(Cameron-Martin).** Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien et $f \in L^2([0,T])$.*

1. *La variable aléatoire*

$$D_T = \exp\left(\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right).$$

   est une densité de probabilité qui définit une probabilité $\mathbb{Q}$ (par $d\mathbb{Q} = D_t d\mathbb{P}$)

2. *Le processus*

$$B_t^{\mathbb{Q}} = B_t - \int_0^{t\wedge T} f(s)ds$$

   est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Autrement dit, sous $\mathbb{Q}$, le $\mathbb{P}$-mouvement brownien B s'écrit

$$B_t = B_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^t f(s)ds.$$

4.3 Utilisation de Girsanov pour les EDS

Le théorème de Girsanov permet de démontrer l'existence d'une solution faible à des EDS n'admettant pas forcément de solution forte.

Proposition 4.3.1. *On considère l'EDS suivante :*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dB_t, \tag{4.6}$$

où B est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

1. *Il y a existence faible lorsque b est une fonction bornée.*
2. *Il y a unicité faible sur $[0,T]$ lorsque b est presque sûrement carré intégrable sur $[0,T]$: Soit pour $i = 1, 2$ X^i une solution sur $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, (\mathcal{F}_t^i)_{t\geq 0}, \mathbb{P}^i)$ associée au mouvement brownien B^i et de condition initiale μ (indépendante de $i = 1, 2$). Alors (X^1, B^1) et (X^2, B^2) ont la même loi sous $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ resp. (unicité faible) si*

$$\mathbb{P}^i\left(\int_0^T \|b(t, X_t^i)\|^2 dt < +\infty\right) = 1.$$

Preuve. Pour simplifier la preuve, on suppose $d = 1$.

Existence faible. En partant de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et B un mouvement brownien, on construit une solution faible par le théorème de Girsanov. Pour cela, on considère $L_t = \int_0^t b(s, B_s)dB_s$ (bien défini parce que b est bornée) et on pose

$$Z_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp\left(\int_0^t b(s, B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b(s, B_s)^2 ds\right),$$

alors Z est une $\mathcal{F}_t^B$-martingale sous $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}_+$ puisque le caractère borné de b entraîne

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t b(s, B_s)^2 ds\right) \leq \exp(t\|b\|_\infty/2) < +\infty,$$

pour tout $t \geq 0$, de sorte que le critère de Novikov est bien rempli. Le théorème de Girsanov assure que sous $\mathbb{Q}^b$ définie par $d\mathbb{Q}^b_{|\mathcal{F}_t^B} = Z_t d\mathbb{P}$ sur chaque $\mathcal{F}_t^B$, le prcessus

$$\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t b(s, B_s)ds$$

est un $\mathbb{Q}^b$-mouvement brownien. Ainsi, sous $\mathbb{Q}^b$, le processus B est solution de

$$X_t = \widetilde{B}_t + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

qui est précisément l'EDS (4.6) dirigée par $\widetilde{B}$. On a donc construit une probabilité $\mathbb{Q}^b$ et des processus $(B, \widetilde{B})$ tels que $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}^b$ et B est solution faible de (4.6).

Unicité faible. Soient T une date déterministe fixée et μ une loi initiale. Pour $k \geq 1$ et $i = 1, 2$, on considère

$$\tau_k^i = T \wedge \inf\left(0 \leq t \leq T : \int_0^t \|b(s, X_s^i)\|^2 ds \geq k\right).$$

Comme précédemment, le critère de Novikov assure que

$$Z_t^{k,i} = \exp\left(\int_0^{t\wedge\tau_k^i} b(s, X_s^i)dB_s^i - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_k^i} \|b(s, X_s^i)\|^2 ds\right)$$

est une martingale. On définit alors des probabilités par $d\mathbb{Q}^{k,i} = Z_T^{k,i} d\mathbb{P}^i$. Le théorème de Girsanov assure alors que sous $\mathbb{Q}^{k,i}$

$$X^i_{t\wedge\tau_k^i} = X_0^i + \int_0^{t\wedge\tau_k^i} b(s, X_s^i)ds + B^i_{t\wedge\tau_k^i}, \quad 0 \leq t \leq T$$

est un mouvement brownien standard de loi initiale μ, arrêté à τ_k^i. De plus, on montre que τ_k^i, $(B_t^i : t \leq \tau_k^i)$ et $Z_T^{k,i}$ s'expriment en termes de $X^i_{t\wedge\tau_k^i}$ indépendamment de $i = 1, 2$.

Pour $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ et $A \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^{2(n+1)})$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^1((X^1_{t_0}, B^1_{t_0}, \ldots, X^1_{t_n}, B^1_{t_n}) \in A, \tau_k^1 = T) &= \int_{\Omega^1} \frac{1}{Z_T^{k,1}} 1_{\{(X^1_{t_0}, B^1_{t_0}, \ldots, X^1_{t_n}, B^1_{t_n}) \in A, \tau_k^1 = T\}} d\mathbb{Q}^{k,1} \\
&= \int_{\Omega^2} \frac{1}{Z_T^{k,2}} 1_{\{(X^2_{t_0}, B^2_{t_0}, \ldots, X^2_{t_n}, B^2_{t_n}) \in A, \tau_k^2 = T\}} d\mathbb{Q}^{k,2} \qquad (4.7) \\
&= \mathbb{P}^2((X^2_{t_0}, B^2_{t_0}, \ldots, X^2_{t_n}, B^2_{t_n}) \in A, \tau_k^2 = T),
\end{aligned}$$

où L'équation (4.7) est obtenue du fait que sous $\mathbb{Q}^{k,i}$, X^{i,τ_k^i} est un mouvement brownien (arrêté, de loi initiale μ). L'hypothèse sur b implique $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}^i(\tau_k^i = T) = 1$, $i = 1, 2$. On peut donc passer à la limite $k \to +\infty$ pour conclure.

■

Remarque 4.3.1. La condition sur b est trop faible pour que le Théorème de Cauchy-lipschitz 2.2.2 s'applique. Le théorème de Girsanov permet de montrer l'existence faible d'une solution.

– On peut affaiblir l'hypothèse b bornée en croissance sous-linéaire :

$$\|b(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|),\ 0 \leq t \leq T,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

– On met ainsi en évidence l'effet régularisant du mouvement brownien B (en fait $\widetilde{B}$) dans (4.6) puisque sans $\widetilde{B}$, l'équation différentielle ordinaire

$$x_t = \int_0^t b(s, x_s)ds$$

n'admet pas de solution en général quand b est seulement suposé borné.

Une extension de la Proposition 4.3.1 a été donnée par le résultat suivant pour une EDS avec un coefficient de diffusion plus général.

Théorème 4.3.1. *[9] **(Théorème de Beneš).** Soient $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (globalement) lipschitzienne et ne s'annulant pas et B un mouvement brownien réel standard. L'EDS*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

admet une solution faible qui est unique en loi.

L'hypothèse cruciale dans ce théorème est que le coefficient de diffusion ne s'annule pas : le processus diffuse tout le temps, ce qui permet d'appliquer le théorème de Girsanov. D'une manière générale, La non-nullité du coefficient de diffusion joue un rôle fondamentale dans l'étude de la régularité des lois de solutions d'EDS, via la théorie du calcul de Malliavin. [30]

Chapitre 5

Propriétés élémentaires du flot

Dans le cadre lipschitzien, nous montrons que la solution d'une équation différentielle stochastique est un processus de Markov. On va travailler ici avec des conditions initiales déterministes ce qui permet de prendre comme filtration la filtration naturelle du mouvement brownien $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geq 0}$. On suppose que les fonctions b et σ vérifie les hypothèses du théorème Cauchy Lipschitz. D'après le résultat précédent, on peut construire pour tout $(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, la solution de l'EDS

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t b(r, X_r^{s,x})dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{s,x})dB_r, \quad s\leq t\leq T. \tag{5.1}$$

et l'on conviendra que $X_t^{s,x} = x$ *si* $0\leq t\leq s$.

Dans le cas déterministe, si $\sigma = 0$, le flot de l'équation différentielle, noté $\varphi_t^{s,x}$ dans ce cas, possède de nombreuses propriétés ; en particulier :

1. $\varphi_t^{s,x}$ est Lipschitz en (s,x,t);
2. pour $r\leq s\leq t$, $\varphi_t^{r,x} = \varphi_t^{s,\varphi_s^{r,x}}$;
3. si $s\leq t$, $x\to\varphi_t^{s,x}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas stochastique, $X_t^{s,x}$ possède aussi des propriétés du même type.

5.1 Propriété de Markov

Nous allons établir la propriété de Markov pour les solutions de l'EDS (5.1) comme conséquence de la propriété de flot.

Proposition 5.1.1. *Soit $x\in\mathbb{R}^n$; soient $0\leq r\leq s\leq t$. On a*

$$X_t^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}, \ \mathbb{P}-P.s.$$

Preuve.

$$\forall s,y,t, \quad X_t^{s,y} = y + \int_s^t b(u, X_u^{s,u})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{s,y})dB_u.$$

Il se suit que, $\mathbb{P}-$ P.s ;

$$\forall t, \quad X_t^{s,X_s^{r,x}} = X_s^{r,x} + \int_s^t b(u, X_u^{s,X_s^{r,x}})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{s,X_s^{r,x}})dB_u.$$

On remarque que $X^{r,x}$ est aussi solution de cette dernière EDS sur $[s,T]$ puisque

$$\begin{aligned}
X_t^{r,x} &= x + \int_r^t b(u, X_u^{r,x})du + \int_r^t \sigma(u, X_u^{r,x})dB_u \\
&= x + \int_r^s b(u, X_u^{r,x})du + \int_r^s \sigma(u, X_u^{r,x})dB_u + \int_s^t b(u, X_u^{r,x})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{r,x})dB_u \\
&= X_s^{r,x} + \int_s^t b(u, X_u^{r,x})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{r,x})dB_u \\
&\Rightarrow X_t^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}.
\end{aligned}$$

L'unicité des solutions d'une EDS à coefficients Lipschitz donne alors en fait à l'indistinguabilité près sur $[s,T] - X_t^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}$.

■

Remarque 5.1.1. En fait, par continuité, l'égalité $X_t^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}$ a lieu pour tout x et pour tout $0 \leq r \leq s \leq t \leq T$ en dehors d'un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable.

Nous allons à présent établir la propriété de Markov. Rappelons qu'un processus X est markovien s'il ne dépend du passé que par l'intermédiaire du présent. Mathématiquement cela conduit à la définition suivante :

Définition 5.1.1. ***(Propriété de Markov)*** *On dit qu'un processus (X_t) verifié la propriété de Markov par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ à laquelle il est progressivement mesurable si pour toute fonction borélienne bornée f, et pour tout $s \leq t$, on a*

$$\mathbb{E}(f(X_t) \setminus \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t) \setminus X_s), \ \mathbb{P}{-}P.s.$$

Montrons la propriété de Markov pour les solutions de l'EDS (5.1) par rapport à la tribu du mouvement brownien B.

Théorème 5.1.1. *Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $s \in [0,T]$. $(X_t^{s,x})_{0\leq t\leq T}$ est un processus de Markov par rapport à la filtration du MB et si f est mesurable et bornée alors, pour $s \leq r \leq t$,*

$$\mathbb{E}(f(X_t^{s,x}) \setminus \mathcal{F}_r) = \Lambda(X_r^{s,x}) \ \mathbb{P}{-}P.s.$$

avec $\Lambda(y) = \mathbb{E}[f(X_t^{r,y})]$. c'est à dire

$$\mathbb{E}(f(X_t^{s,x}) \setminus \mathcal{F}_r) = \mathbb{E}[f(X_t^{r,X_r^{s,x}})].$$

Preuve. Soient $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. D'après la propriété du flot, on a $X_t^{s,x} = X_t^{r,X_r^{s,x}}$. De plus, on a $X_t^{r,y}$ est mesurable par rapport à la tribu des accroissements du mouvement brownien $\sigma\{B_{r+u} - B_r, u \in [0, t-r]\}$. Donc,

$$X_t^{r,y} = \Phi(y, B_{r+u} - B_r; \, 0 \leq u \leq t-r),$$

où Φ est mesurable. Par suite,

$$X_t^{s,x} = X_t^{r,X_r^{s,x}} = \Phi(X_r^{s,x}, B_{r+u} - B_r; \, 0 \leq u \leq t-r).$$

On remarque aussi que $X_r^{s,x}$ est $\mathcal{F}_r$-mesurable et noter que $\mathcal{F}_r$-est indépendante de la tribu $\sigma\{B_{r+u} - B_r, u \in [0, t-r]\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X_t^{s,x}) \setminus \mathcal{F}_r) &= \mathbb{E}\bigg(f\{\Phi(X_r^{s,x}, B_{r+u} - B_r;\ 0 \le u \le t-r)\} \setminus \mathcal{F}_r\bigg) \\
&= \mathbb{E}\big[f\{\Phi(y, B_{r+u} - B_r;\ 0 \le u \le t-r)\}\big] \setminus y = X_r^{s,x} \\
&= \mathbb{E}\big[f(X_t^{r,y})\big] \setminus y = X_r^{s,x} \\
&= \Lambda(X_r^{s,x}).
\end{aligned}$$

Ce qui montre la propriété annoncée.

■

Remarque 5.1.2. 1. Si g est mesurable et, par exemple bornée,

$$\mathbb{E}\bigg(\int_r^T g(u, X_u^{s,x})du \setminus \mathcal{F}_r\bigg) = \Gamma(r, X_r^{s,x}),$$

où $\Gamma(r,y) = \mathbb{E}\bigg[\displaystyle\int_r^T g(u, X_u^{r,y})du\bigg]$.

2. Si b et σ ne dépendent pas du temps, on dit que l'EDS est autonome ; on peut montrer que la loi de $X_t^{s,x}$ est la même que la loi de $X_{t-s}^{0,x}$. On a alors :

$$\mathbb{E}(f(X_t^{s,x}) \setminus \mathcal{F}_r) = \mathbb{E}[f(X_{t-r}^{0,y})] \setminus y = X_r^{s,x}.$$

Chapitre 6

Équations différentielles stochastiques rétrogrades

L'objectif de ce cours est de présenter la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades, EDSR en abrégé ou en anglais BSDE (Backwards stochastics differentials equations) qui sont des nouveaux types des équations différentielles stochastiques (EDSs), leurs valeur est donnée en temps finale T. De nombreux mathématiciens ont contribué et contribuent toujours à la théorie des EDSR ; il m'est impossible de tous les citer. Néanmoins, signalons les travaux de E. Pardoux et S. Peng [32, 33, 34] et l'article de N. El Karoui, S. Peng et M-C. Quenez [14].

Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $(B_t)_{0\leq t\leq T}$, $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \text{ avec}, \ 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition terminale $Y_T = \xi$ où ξ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme les EDS, ces équations doivent être comprise au sens intégral i.e.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \ 0 \leq t \leq T.$$

Cette appellation (rétrograde), provient de fait que le processus contrairement à d'autres EDS est déteminé à partir de la condition finale $Y_T = \xi$.

Les EDSR ont été introduites en 1973 par J-M. Bismut [2] dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z. Il a fallu attendre le début des années 90 et le travail de E. Pardoux et S. Peng [32] pour avoir le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où f n'est pas linéaire.

Depuis de nombreux travaux ont été effectués ; la théorie n'a cessé de se développer en raison de ses relations étroites avec les mathématiques financières et les EDP.

6.1 Présentation du problème

6.1.1 Construction

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ ($\xi \in \mathcal{F}_T$).

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{dY_t}{dt} = f(Y_t),\ t \in [0,t],\ \text{ avec, }\quad Y_T = \xi, \tag{6.1}$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t (en imposant que la solution au moment t ne dépende que du passé) c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple le cas où $f \equiv 0$. Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe (n'est adaptée que si ξ est déterministe). La meilleure approximation - disons dans L^2 - adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_r dB_r.$$

On peut écrire ceci autrement, en effet :

$$Y_t = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_r dB_r, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Pour un $t = T$, on a

$$\begin{aligned} Y_T &= \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T Z_r dB_r \\ \xi &= \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_r dB_r + \int_t^T Z_r dB_r \\ \xi &= Y_t + \int_t^T Z_r dB_r. \end{aligned}$$

On a alors

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_r dB_r,\ \text{ i.e. }\ -dY_t = -Z_t dB_t,\ \text{ avec, }\ Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z qui permet de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t,\ \text{ avec, }\ Y_T = \xi.$$

En pratique, dans le domaine financier par exemple, ξ peut présenter une fonction du prix d'une action à l'instant T et la filtration représente dans ce cas les informations existantes sur le marché à chaque instant t.

Résoudre l'équation (6.1), c'est trouver une stratégie de couverture en utilisant un actif sans risque [10]. Si cette équation admet une solution, elle ne sera qu'aléatoire, car il dépend de ξ et à un instant $t \in [0,T]$, elle est $\mathcal{F}_T$ mesurable c'est à dire il dépend du futur T, ce qui est contre les règles dans les marchés financiers, d'où la nécessité de trouver des solutions avec la condition supplémentaire tel que ces dernières n'anticipent pas sur le futur c'est-à-dire qu'elles soient adaptées à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, c'est pour cela qu'on a introduit les EDSR.

6.1.2 Vocabulaire et notations

Dans toute la suite, nous considérerons un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien (MB) de dimension d défini sur cet espace avec T est un réel strictement positif. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle augmentée, c'est-à-dire la σ-algèbre générée par le mouvement brownien $(B_t)_{t\in[0,T]}$ et les ensembles de probabilitée nulle. Nous allons définir deux espaces fonctionnels de processus $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ et $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

1. $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$: est l'espace vectoriel formé par des processus $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

   et $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.

2. $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: est l'espace vectoriel formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty,$$

   où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = \mathrm{trace}(zz^*)$.
   $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Les espaces $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}^2_c$ et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dans tout ce chapitre, l'application aléatoire f est définie sur $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ ($\mathcal{F}_T$-mesurable) et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \ 0 \leq t \leq T, \quad Y_T = \xi,$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \ 0 \leq t \leq T. \tag{6.2}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale.
Immédiatement, présentons le solution de l'EDSR (6.2).

Définition 6.1.1. *Une solution de l'EDSR (6.2) est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ à valeur dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ vérifiant :*

1. *Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;*
2. *$\mathbb{P} - p.s.$ $\int_0^T \{|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\}dr < \infty$;*
3. *$\mathbb{P} - p.s.$, on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \ 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 6.1.1. *Il est important de rappeller les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales de l'équation (6.2) étant bien définies, Y est une semi-martingale continue ; ensuite, comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus Y appartient à $\mathcal{S}^2$.

Proposition 6.1.1. *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, positif, appartenant à $M^2(\mathbb{R})$ et une constante positive λ tels que*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \quad |f(t,y,z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (6.2) telle que $Z\in M^2$ alors Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a, pour tout $t\in[0,T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r,Y_r,Z_r)dr + \int_0^t Z_r dB_r.$$

En utilisant l'hypothèse sur f, on obtient

$$\begin{aligned} |Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^T |f(r,Y_r,Z_r)|dr + \left|\int_0^T Z_r dB_r\right| \\ &\leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda\|Z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right| + \lambda\int_0^t |Y_r|dr. \end{aligned}$$

On pose

$$\varsigma = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda\|Z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right|.$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et par l'utilisation de l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; par suite ς est une variable aléatoire de carré intégrable.

Comme Y est un processus continu qui vérifié

$$|Y_t| \leq \varsigma + \lambda\int_0^t |Y_r|dr,$$

par le lemme de Grönwall, on aura

$$|Y_t| \leq \varsigma e^{\lambda t},$$

d'où :

$$\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t| \leq \varsigma e^{\lambda T},$$

ce qui prouve que Y appartient à $\mathcal{S}^2$, puisque ς est de carré intégrable.

■

Lemme 6.1.1. *Soient $Y\in\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z\in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s\cdot Z_s dB_s,\ t\in[0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG) donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t Y_r\cdot Z_r dB_r\Big|\Big] &\le C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |Y_r|^2\|Z_r\|^2 dr\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\\ &\le C\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|\Big(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big)^{\frac{1}{2}}\Big],\end{aligned}$$

Par suite, comme $ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t Y_r\cdot Z_r dB_r\Big|\Big] &\le \frac{C}{2}\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\Big]+\mathbb{E}\Big[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big]\Big)\\ &\le C'\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\Big]+\mathbb{E}\Big[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big]\Big), \qquad (6.3)\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat puisque la quantité (6.3) est finie par hypothèse.

■

6.2 Le cas Lipschitz

6.2.1 Le résultat fondateur de Pardoux-Peng.

Ce résultat est dû à E. Pardoux et S. Peng [32] ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire et lipschitzien par rapport aux deux variables y et z.

Soient le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\le t\le T}$ progressivement mesurable et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
Considérons les hypothèses **(L)** suivantes :

1. Condition de Lipschitz en (y,z) ; Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}$-p. s., pour tout t,y,y',z,z',
$$|f(t,y,z)-f(t,y',z')| \le \lambda(|y-y'|+\|z-z'\|);$$
2. Condition d'intégrabilité :
$$\mathbb{E}\Big[|\xi|^2+\int_0^T |f(r,0,0)|^2 dr\Big] < \infty.$$

Un cas simple : Commençons par le cas simple où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\le t\le T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR
$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0\le t\le T. \qquad (6.4)$$

Lemme 6.2.1. *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\le t\le T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR (6.4) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve.

L'existence : Supposons que (Y, Z) soit une solution de (6.4) vérifiant $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t \backslash \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\Big[\xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r \backslash \mathcal{F}_t\Big], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Puisque $\int_0^T Z_r dB_r$ est une martingale on a $\mathbb{E}\Big(\int_0^T Z_r dB_r \backslash \mathcal{F}_t\Big) = 0$. On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ en fait dans $\mathcal{S}_c^2$ puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\Big[\xi + \int_0^T F_r dr - \int_0^t F_r dr \backslash \mathcal{F}_t\Big] - \mathbb{E}\Big[\int_0^T Z_r dB_r - \int_0^t Z_r dB_r \backslash \mathcal{F}_t\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\xi + \int_0^T F_r dr \backslash \mathcal{F}_t\Big] - \int_0^t F_r dr. \end{aligned}$$

Si on pose :

$$M_t = \mathbb{E}\Big[\xi + \int_0^T F_r dr \backslash \mathcal{F}_t\Big],$$

on a donc

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr,$$

M est une martingale brownienne carré intégrable. D'après le théorème de représentation des martingales, il existe un processus prévisible Z de carré intégrable appartenant à M^2 tel que

$$M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t Z_r dB_r, \qquad t \in [0, T].$$

Donc

$$\begin{aligned} Y_t &= M_t - \int_0^t F_r dr = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr, \\ &= M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que (Y, Z) est une solution de l'EDSR (6.4) puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= Y_t - Y_T \\ &= M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr - \Big(M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T F_r dr\Big) \\ &\Rightarrow Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r. \end{aligned}$$

L'unicité : est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$.
Si $(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})$ est une autre solution,

$$\widetilde{Y} = Y_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^T F_r dr \backslash \mathcal{F}_t\Big),$$

d'où l'unicité de Y.
En ce qui concerne l'unicité de Z, elle est garantie par le théorème de représentation des martingales.

■

Nous montrons à présent le théorème d'existence de Pardoux et Peng.

Théorème 6.2.1. ***Pardoux-Peng 90.*** *Sous l'hypothèse (L), l'EDSR (6.2) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui même de sorte que $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'EDSR (6.2) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.
Pour (U,V) élément de $\mathcal{B}^2$, on définit $(Y,Z) = \Psi(U,V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,U_r,V_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r,\ \ 0 \le t \le T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$. En effet, posons $F_r = f(r,U_r,V_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$\begin{aligned} |F_r| &\le |f(r,U_r,V_r) - f(r,0,0)| + |f(r,0,0)| \\ &\le |f(r,0,0)| + \lambda|U_r| + \lambda\|V_r\|, \end{aligned}$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme 6.2.1 pour obtenir une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$. (Y,Z) appartient à $\mathcal{B}^2$: l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition 6.1.1, Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$. L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui même est donc bien définie.

Soient (U,V) et (U',V') deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et $(Y,Z) = \Psi(U,V)$, $(Y',Z') = \Psi(U',V')$. Notons $\hat{y} = Y - Y'$ et $\hat{z} = Z - Z'$. On a, $\hat{y}_T = \xi - \xi = 0$ et

$$d\hat{y}_t = -\{f(t,U_t,V_t) - f(t,U'_t,V'_t)\}dt + \hat{z}_t dB_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2) &= \alpha e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 dt + 2e^{\alpha t}|\hat{y}_t|d\hat{y}_t + \langle e^{\alpha t}|\hat{z}_t|^2\rangle dt \\ &= \alpha e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 dt + e^{\alpha t}\|\hat{z}_t\|^2 dt + 2e^{\alpha t}|\hat{y}_t|[\{f(t,U_t,V_t) - f(t,U_t,V_t)\}dt + \hat{z}_t dB_t] \\ &= \alpha e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 dt + 2e^{\alpha t}\hat{y}_t\hat{z}_t \cdot dB_t + e^{\alpha t}\|\hat{z}_t\|^2 dt - 2e^{\alpha t}\hat{y}_t \cdot \{f(t,U_1,V_1) - f(t,U_2,V_2)\}dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient

$$e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|\hat{y}_r|^2 + 2\hat{y}_r \cdot \{f(r,U_r,V_r) - f(r,U'_r,V'_r)\})dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}\hat{y}_r \cdot \hat{z}_r dB_r,$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant $\hat{u}$ et $\hat{v}$ pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement,

$$e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr \le \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|\hat{y}_r|^2 + 2\lambda|\hat{y}_r||\hat{u}_r| + 2\lambda|\hat{y}_r|\|\hat{v}_r\|)dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}\hat{y}_r \cdot \hat{z}_r dB_r.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on a $2ab \le \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr &\le \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha + 2\lambda^2/\epsilon)|\hat{y}_r|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}\hat{y}_r \cdot \hat{z}_r dB_r \\ &\quad + \epsilon\int_t^T e^{\alpha r}(|\hat{u}_r|^2 + \|\hat{v}_r\|^2)dr, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\epsilon}$, on a, notant $R_\epsilon = \epsilon \int_0^T e^{\alpha r}(|\hat{u}_r|^2 + \|\hat{v}_r\|^2)dr$,

$$\forall t \in [0,T], \quad e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr \leq R_\epsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r}\hat{y}_r \cdot \hat{z}_r dB_r. \tag{6.5}$$

D'après le Lemme 6.1.1, la martingale locale $\{\int_0^t e^{\alpha r}\hat{y}_r \cdot \hat{z}_r dB_r\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à $\mathcal{S}^2$ et Z, Z' appartiennent à M^2.

En particulier, prenant l'espérance-ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente-, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg] \leq \mathbb{E}[R_\epsilon]. \tag{6.6}$$

Revenant à l'inégalité (6.5), les inégalités BDG fournissent-avec C universelle-

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\bigg] &\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + C\mathbb{E}\bigg[\bigg(\int_0^T e^{2\alpha r}|\hat{y}_r|^2\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg] \\
&\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + C\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}|\hat{y}_t|\bigg(\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg],
\end{aligned}$$

puis, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\bigg] &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\bigg] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg] \\
\frac{1}{2}\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\bigg] &\leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg] \\
\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\bigg] &\leq 2\mathbb{E}[R_\varepsilon] + C^2\mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg].
\end{aligned}$$

En ajoutant la quantité $\mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg]$ aux deux membres à la dernière inégalité, on obtient

$$\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\bigg] + \mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg] \leq 2\mathbb{E}[R_\varepsilon] + C^2\mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg] + \mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg].$$

Prenant en considération l'inégalité (6.6), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2\bigg] + \mathbb{E}\bigg[\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg] &\leq 3\mathbb{E}[R_\varepsilon] + C^2\mathbb{E}[R_\varepsilon] \\
\mathbb{E}\bigg[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\bigg] &\leq (3 + C^2)\mathbb{E}[R_\epsilon],
\end{aligned}$$

et par suite, revenant à la définition de R_ϵ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{y}_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{z}_r\|^2 dr\Big] &\le \varepsilon(3+C^2)\mathbb{E}\Big[\int_0^T e^{\alpha t}|\hat{u}_r|^2 dr + \int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{v}_r\|^2 dr\Big]\\ &\le \varepsilon(3+C^2)\mathbb{E}\Big[T(\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{u}_t|^2) + 1\int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{v}_r\|^2 dr\Big]\\ &\le \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\hat{u}_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\hat{v}_r\|^2 dr\Big].\end{aligned}$$

Prenons ϵ tel que $\epsilon(3+C^2)(1\vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui même si on le munit de la norme

$$\|U,V\|_\alpha = \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|U_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|V_r\|^2 dr\Big]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach. Cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (6.2) dans $\mathcal{B}^2$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in M^2$ puisque la Proposition 6.1.1 implique qu'un telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$.

$\blacksquare$

Remarque 6.2.1. À partir de maintenant, l'expression "la solution de l'EDSR " signifiera la solution de l'EDSR vérifiant $Z\in M^2$.

6.2.2 Le rôle de Z.

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r dB_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 6.2.1. *Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR (6.2) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T. On suppose, outre l'hypothèse (L), que ξ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et que $f(t,y,z)=0$ dès que $t\ge\tau$.*

Alors $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t=0$ si $t\ge\tau$.

Preuve. Soit $t\in[0,T]$. On a $\mathbb{P}$- p.s.,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r.$$

Si $t\le\tau$ alors $t\wedge\tau = t$ et donc $Y_{t\wedge t} = Y_t$. Soit à présent $t\ge\tau$ alors

$$\begin{aligned}Y_{t\wedge t} &= Y_\tau\\ &= \xi + \int_\tau^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dB_r\\ &= \xi - \int_\tau^T Z_r dB_r, \quad \textit{comme}\;\; f(t,y,z)=0 \textit{ dès que } t\ge\tau.\end{aligned}$$

On a alors

$$Y_\tau = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_\tau) = \xi,$$

et par suite

$$\int_\tau^T Z_r dB_r = 0.$$

Ce qui donne

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_r dB_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 dr\right] = 0,$$

et finalement que

$$Z_r 1_{r\geq\tau} = 0.$$

Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau, Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse,

$$\begin{aligned}
Y_\tau &= \varepsilon + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dB_r \\
&= \varepsilon + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^t Z_r dB_r - \int_t^T Z_r dB_r \\
&= \varepsilon + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^t Z_r dB_r \\
&= Y_t + \int_\tau^t f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^t Z_r dB_r = Y_t + 0 - 0 \\
&= Y_t.
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

■

Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0), \quad Y_T = \xi,$$

6.3 EDSRs linéaires et théorème de comparaison

6.3.1 EDSR linéaires

Nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; Y est donc un réel et Z est une matrice de dimension $1 \times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 6.3.1. *Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ progressivement mesurable et borné. Soient $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable, à valeur réelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\}dr - \int_t^T Z_r dB_r,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\Big(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_r\Gamma_r dr/\mathcal{F}_t\Big), \qquad \forall t \in [0,T],$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_r \cdot dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr\right).$$

Preuve. Remarquons d'abord que le processus Γ vérifie :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t \cdot dB_t), \qquad \Gamma_0 = 1.$$

En effet, soient $G = G_{t\in[0,T]}$ et $H = H_{t\in[0,T]}$ deux processus définis par : $G_t = \displaystyle\int_0^t b_s dB_s$ et $H_t = \displaystyle\int_0^t \left(a_s - \frac{1}{2}|b_s|^2\right) ds$.

Γ s'exprime alors comme : $\Gamma_t = \exp(G_t + H_t)$. On applique la formule d'Itô pour $h(x,y) = e^{x+y}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= 1 + \int_0^t \Gamma_s b_s dB_s + \int_0^t \Gamma_s(a_s - \frac{1}{2}|b_s|^2)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma_s|b_s|^2 ds;\\ &= 1 + \int_0^t \Gamma_s b_s dB_s + \int_0^t \Gamma_s a_s ds.\end{aligned}$$

d'où le résultat.

D'autre part, Comme b est borné, l'inégalité de Doob montre que le processus Γ appartient bien à $\mathcal{S}^2$.

De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y,Z) à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser $f(t,y,z) = a_t y + z b_t + c_t$ et de vérifier que **(L)** est satisfaite. Y appartient à $\mathcal{S}^2$ par la Proposition 6.1.1.

La formule d'intégration par parties donne

$$d(\Gamma Y)_t = \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y\rangle_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + \Gamma_t Y_t b_t \cdot dB_t,$$

ce qui montre que le processus $\left(\Gamma_t Y_t + \displaystyle\int_0^t \Gamma_r c_r dr\right)$ est une martingale locale qui est en fait une vraie martingale car $c \in \mathrm{M}^2$ et Γ, Y sont dans $\mathcal{S}^2$.

Par suite

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_r c_r dr = \mathbb{E}\Big(\Gamma_T Y_T + \int_0^T \Gamma_r c_r dr/\mathcal{F}_t\Big),$$

ce qui donne finalement

$$\Gamma_t Y_t = \mathbb{E}\Big(\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_r c_r dr/\mathcal{F}_t\Big).$$

■

Remarque 6.3.1. Notons que si $\xi \geq 0$ et si $c_t \geq 0$ alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $Y_t \geq 0$. Cette remarque va nous permettre d'obtenir le théorème de comparaison.

Pour illustrer ce résultat prenons le cas où a et c sont nuls. On a alors

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi \exp\left(\int_t^T b_r \cdot dB_r - \frac{1}{2}\int_t^T |b_r|^2 dr\right)\Big|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*(\xi|\mathcal{F}_t),$$

où $\mathbb{P}^*$ est la mesure de densité par rapport à $\mathbb{P}$

$$L_T = \exp\left(\int_0^T b_r \cdot dB_r - \frac{1}{2}\int_0^T |b_r|^2 dr\right).$$

Une autre façon de voir cela, plus dans l'esprit "probabilité risque neutre", est de regarder l'EDSR sous $\mathbb{P}^*$. En effet, sous $\mathbb{P}^*$, $W_t = B_t - \int_0^t b_r dr$ est un MB -c'est le théorème de Girsanov. Or l'équation peut s'écrire

$$-dY_t = Z_t b_t dt - Z_t dB_t = -Z_t dW_t, \qquad Y_T = \xi.$$

Donc, sous $\mathbb{P}^*$, Y est une martingale, ce qui montre aussi la formule.
On retrouve ainsi les changements de mesures de probabilité du type "transformation de Girsanov".

6.3.2 Théorème de comparaison

Le théorème de comparaison permet de comparer les solutions de deux EDSR (dans $\mathbb{R}$) dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs. Ce théorème est dû à l'origine à S. Peng [33].

Théorème 6.1. *Supposons que $k = 1$ et que (ξ, f), (ξ', f') vérifient l'hypothèse (L). On note (Y, Z) et (Y', Z') les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que :*

$$\mathbb{P}-p.s., \ \ \xi \leq \xi^{'} \text{ et } f(t, Y_t, Z_t) \leq f^{'}(t, Y_t, Z_t), \ \ m \otimes \mathbb{P} - P.P. \ (m \text{ mesure de Lebesgue}).$$

Alors,

$$\mathbb{P} - p.s., \qquad \forall t \in [0, T], \qquad Y_t \leq Y'_t.$$

Si de plus, $Y_0 = Y'_0$, alors $\mathbb{P}$-p.s., $Y_t = Y'_t$, $0 \leq t \leq T$ et $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y_t, Z_t)$, $m \otimes \mathbb{P}$-p.p. En particulier, dès que $\mathbb{P}(\xi \leq \xi^{'}) > 0$ ou $f(t, Y_t, Z_t) \leq f^{'}(t, Y_t, Z_t)$ sur un ensemble de $m \otimes \mathbb{P}$-mesure strictement positive alors $Y_0 \leq Y'_0$.

Preuve. La preuve s'effectue par linéarisation. On cherche une équation satisfaite par $S = Y' - Y$, en notant $E = Z' - Z$ et $\zeta = \xi' - \xi$,

$$S_t = \zeta + \int_t^T (f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r))dr - \int_t^T E_r dB_r.$$

On découpe l'accroissement des f en trois morceaux en écrivant

$$\begin{aligned} f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r) \ &= \ f'(r, Y'_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z'_r) + f'(r, Y_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z_r) \\ &\quad + f'(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r) \ \ (\textit{qui est positif ici}). \end{aligned}$$

On introduit deux processus a et b : a est à valeurs réelles et b est un vecteur (colonne) de dimension d. On pose :

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{f'(r, Y'_r, Z'_r) - f'(r, Y_r, Z'_r)}{S_r} & \text{si} \quad S_r \neq 0 \\ \\ a_r = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour définir b, on doit introduire une autre notation : pour $0 \leq i \leq d$, $Z_r^{(i)}$ est la ligne dont les $d - i$ dernières composantes sont celles de Z'_r et les i premières celles de Z_r. Pour $1 \leq i \leq d$, on pose :

$$\begin{cases} b_r^i = \dfrac{f'(r, Y_r, Z_r^{(i-1)}) - f'(r, Y_r, Z_r^{(i)})}{E_r^i} & \text{si} \quad E_r^i \neq 0 \\ \\ b_r^i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que, puisque f' est Lipschitz, ces deux processus sont progressivement mesurables et bornés.

Avec ces notations, on a

$$S_t = \zeta + \int_t^T (a_r S_r + b_r E_r + c_r) dr - \int_t^T E_r dB_r,$$

où $c_r = f'(r, Y_r, Z_r) - f(r, Y_r, Z_r)$. Par hypothèse, on a $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$. Utilisant la formule «explicite» pour les EDSR linéaires- Proposition (6.3.1), on a

$$S_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\Big(\zeta \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr \; \mathcal{F}_t\Big), \qquad \forall t \in [0, T],$$

avec, pour $0 \leq r \leq T$,

$$\Gamma_r = \exp\Big\{ \int_0^r b_s \cdot dB_s - \frac{1}{2} \int_0^r |b_s|^2 ds + \int_0^r a_s ds \Big\}.$$

La dernière formule montre que $S_t \geq 0$, dès que $\zeta \geq 0$ et $c_r \geq 0$.

Pour la seconde partie du résultat, si de plus $S_0 = 0$ on a :

$$0 = \mathbb{E}\Big(\zeta \Gamma_T + \int_0^T c_r \Gamma_r dr\Big),$$

et la variable aléatoire intégrée est positive. Par conséquent, elle est nulle $\mathbb{P}-p.s.$ ce qui termine la preuve de ce théorème en remarquant que dans ce cas $\zeta = 0$ et $c_r = 0$.

■

Remarque 6.3.2. On peut supposer que $f(t, Y'_t, Z'_t) \leq f'(t, Y'_t, Z'_t)$ au lieu de $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ pour obtenir le résultat précédent. Il suffit de faire une linéarisation en partant de l'écriture :

$$\begin{aligned} f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r) \quad &= \quad f'(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y'_r, Z'_r) \;\; (\textit{supposé positif}) \\ &\quad + f(r, Y'_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z'_r) + f(r, Y_r, Z'_r) - f(r, Y_r, Z_r). \end{aligned}$$

Chapitre 7

Calcul stoquastique de Stratonovich

Il existe plusieurs approches pour calculer l'intégrale stoquastique, où L'intégrand et l'intégrateur sont tous les deux des processus stochastiques. Parmis ces approches : **Itô** et **Stratonovich**.
L'intégrale de Stratonovich (développée simultanément par Ruslan Stratonovich et Donald Fisk) est une intégrale stochastique, l'alternative la plus courante à l' intégrale d'Itô. Bien que l'intégrale d'Itô soit le choix habituel en mathématiques appliquées, l'intégrale de Stratonovich est fréquemment utilisée en physique.

Dans certaines circonstances, les intégrales dans la définition de Stratonovich sont plus faciles à manipuler. Contrairement au calcul d'Itô, l'intégrales de Stratonovich est conçu de telle manière que ses règles de base, telles que la règle de la chaîne du calcul ordinaire et l'intégration par parties sont les mêmes que dans le calcul standard (par exemple Rogers et Williams (1990)). Les processus doivent être adapté, tout comme dans le calcul d'Itô. Puisque les intégrales stochastiques de Stratanovich peuvent être réduite aux intégrales de Itô, la théorie des équations différentielles stochastiques standard peut être utilisée pour les équations différentielles stochastiques au sens de Stratanovich. On note également que l'intégrale de Stratanovich est plus adapté aux généralisations du calcul stochastique sur les variétés (voir Rogers et Williams (1990)).

7.1 Intégrale de Stratonovich

Une définition directe de l'intégrale de Stratonovich, notée $\int_0^t H(s) \circ dX(s)$, est donée comme une limite en moyenne carré (L^2) des sommes approximatives de Stratonovich

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(H(t_{i+1}^n) + H(t_i^n))(X(t_{i+1}^n) + X(t_i^n)),$$

où les partitions (t_i^n) deviennent de plus en plus fines. Dans le calcul de Stratonovich, l'approximation des sommes de la valeur moyenne de H sur l'intervalle (t_i^n, t_{i+1}^n), $\frac{1}{2}(H(t_{i+1}^n) + H(t_i^n))$, est prise, alors que dans l'intégrale Itô, la valeur la plus à gauche de $Y(t_i^n)$ est prise. une autre définition de l'intégrale de Stratanovich est donnée en utilisant l'intégral d'Itô.

Définition 7.1.1. ***(Lien entre les deux intégrales).*** *Soient X et H des processus adaptés continus, tels que l'intégrale stochastique $\int_0^t H(s)dX(s)$ est définie. L'intégrale de Stratanovitch est défini par*

$$\int_0^t H(s) \circ dX(s) = \int_0^t H(s)dX(s) + \frac{1}{2}\langle H, X\rangle(t),$$

avec ;

$$\langle H, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Le différentiel de Stratonovich est défini par

$$H(t) \circ dX(t) = H(t)dX(t) + \frac{1}{2}d\langle H, X\rangle(t).$$

Intégration par parties : règle de produit de Stratonovich

Théorème 7.1.1. *[27] On suppose que tous les termes ci-dessous soient définis,*

$$X(t)H(t) - X(0)H(0) = \int_0^t X(s) \circ dH(s) + \int_0^t H(s) \circ dX(s),$$
$$d(X(t)H(t)) = X(t) \circ dH(t) + H(t) \circ dX(t).$$

Changement de variables : règle de la chaîne de Stratonovich

Théorème 7.1.2. *[27] Soient X continu et f trois fois continûment différentiable (de classe C^3), alors*

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) &= \int_0^t f'(X(s)) \circ dX(s), \\ df(X(t)) &= f'(X(t)) \circ dX(t) \end{aligned}$$

Conversion d'une EDS au sens de Stratonovich en une EDS au sens d'Itô

Théorème 7.1.3. *[27] Supposons que $X(t)$ vérifie l'EDS suivante dans le sens Stratonovich*

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t),$$

avec $\sigma(x)$ deux fois continûment différentiable. Alors $X(t)$ satisfait l'EDS suivante dans le sens d'Itô

$$X(t) = b(X(t)) + \frac{1}{2}\sigma'(X(t))\sigma(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t).$$

Ainsi le coefficient de dérive infinitésimal dans la diffusion Itô est $b(x) + \frac{1}{2}\sigma'(x)\sigma(x)$ et le coefficient de diffusion est le même $\sigma(x)$.

7.2 Itô et Stratonovich

7.2.1 Intégrale d'Itô

Définition 7.2.1. *Soient $B : [0,t]\times\Omega \to \mathbb{R}$ un mouvement brownien ainsi que $H : [0,t]\times\Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B, alors l'intégrale d'Itô est définie par :*

$$\int_0^t H_s dB_s = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^n H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \text{ dans } \mathrm{L}^2(\Omega),$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ est une subdivision de $[0, t]$ de pas $\delta = \sup_{i=1,...,n} (t_i - t_{i-1})$.

Lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, ces sommes considérées comme des sommes de Riemann-Stieltjes pour chaque trajetoire du mouvement brownien donné, ne convergent pas en général ; la raison en est que le mouvement brownien n'est pas à variations bornées. L'usage de la convergence quadratique est le point essentiel de cette définition.

Formule d'Itô

Formule d'Itô Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus d'Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \quad \forall t \leq \mathrm{T} \quad \mathbb{P} - p.s.,$$

avec, $K_s \in \mathbb{L}^1$ et $H_s \in \mathbb{L}^2$,

et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds.$$

Propriétés

Avec les notations précédentes, le processus stochastique $(Y_t)_{t\geq O}$ défini, pour tout t réel positif, par $Y_t = \int_0^t H_s dB_s$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Y_t est une martingale ;
2. $\mathbb{E}(Y_t^2) = \int_0^t \mathbb{E}(H_s^2) ds$;
3. $\mathbb{E}(\int_0^t H_t dB_t) = 0$.

7.2.2 Intégrale de Stratonovich

Définition 7.2.2. *Soient $B : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un mouvement brownien et $H : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un processus de carré intégrable adapté à la filtration brownienne. Alors l'intégrale de Stratonovich est définie par :*

$$\int_0^t H_s \circ dB_s = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{H_{t_{i+1}} + H_{t_i}}{2} \Big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \Big) \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2(\Omega),$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ est une subdivision de $[0,t]$ de pas $\delta = \sup_{i=1,\dots,n} (t_i - t_{i-1})$ tend vers 0 *(intégrale de Riemann-Stieltjes).*

Formule d'Itô sous forme Stratonovich

Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Stratonovich

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s \circ dB_s, \quad \forall t \leq T,$$

et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \circ dX_s.$$

7.3 Le lien entre les deux intégrales

Il est possible de convertir d'une intégrale à l'autre par l'équation suivante :

$$\int_0^t H_s \circ dB_s = \int_0^t H_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds,$$

avec ;

$$< H, B >_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Exemple Soient $t > 0$ et $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien réel. Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ une partition de l'intervale $[0, t]$.

- Calculer l'intégrale $\int_0^t B_s dB_s$ au sens d'Itô.
  - Méthode 1 :

$$\begin{aligned}\int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}}B_{t_i} - B_{t_{i-1}}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}B_t^2 - \tfrac{1}{2}t.\end{aligned}$$

  - Méthode 2 :
    Si $f(x) = x^2$ et $X_t = B_t$ donc,

$$\begin{aligned} B_t^2 &= 2\int_0^t B_s dB_s + \tfrac{1}{2}\int_0^t 2ds \\ \Longrightarrow \int_0^t B_s dB_s &= \tfrac{1}{2}B_t^2 - \tfrac{1}{2}t.\end{aligned}$$

- Calculer l'intégrale $\int_0^t B_s dB_s$ au sens de Stratonovich.
  - Méthode 1 :

$$\begin{aligned}\int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(B_{t_i} + B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \tfrac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}B_t^2.\end{aligned}$$

  - Méthode 2 :

$$\begin{aligned} B_t^2 &= 2\int_0^t B_s \circ dB_s \\ \Longrightarrow \int_0^t B_s \circ dB_s &= \tfrac{1}{2}B_t^2.\end{aligned}$$

- Convertir l'intégrale d'Itô à Stratonovich.

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s \circ dB_s &= \int_0^t B_s dB_s + \int_0^t B_s^2 ds \\ &= \tfrac{1}{2}B_t^2 - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}t \\ &= \tfrac{1}{2}B_t^2. \end{aligned}$$

Exercice Soient $T > 0$ et $(B_t)_{0 \le t \le T}$ un mouvement Brownien standard. Soit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ une partition de l'intervalle $[0, T]$, et soit

$$e_t = \sum_{k=1}^{N} e_{t_{k-1}} 1_{[t_{k-1}, t_k)}(t)$$

un processus élementaire , adapté à la filtration canonique du mouvement Brownien.

L'intégrale de Stratonovich du processus e_t contre le mouvement Brownien est définie par :

$$\int_0^T e_t \circ dB_t = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_{t_k} + e_{t_{k-1}}}{2} \Delta B_k \quad où\ \Delta B_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}.$$

Autrement dit, si l'intégrale d'Itô correspond à une méthode d'intégration "rectangle à gauche", L'intégrale de Stratonovich correspond à une méthode d'intégration "point milieu". L'intégrale de Stratonovich $\int_0^T X_t \circ dB_t$ d'un processus adapté X_t est alors définie comme la limite de la suite $\int_0^T e_t^{(n)} \circ dB_t$, où $e^{(n)}$ est une suite de processus élémentaires convergeant vers X_t dans L^2. On admettra que cette limite existe et qu'ele est indépendante de la suite approximante $e^{(n)}$.

1. Calculer l'intégrale au sens de Stratonovich du mouvement Brownien contre lui-même

$$\int_0^T B_t \circ dB_t.$$

2. Soit $g : R \longrightarrow R$ une fonction de classe C^2, et soit X_t un processus adapté satisfaisant

$$X_t = \int_0^t g(X_s) \circ dB_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

Soit Y_t le processus defini par l'intégrale d'Itô

$$Y_t = \int_0^t g(X_s) dB_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

Montrer que pout tout $t \in [0, T]$,

$$X_t - Y_t = \frac{1}{2} \int_0^t g'(X_s) g(X_s) ds.$$

Solution

1. Soit $t_k = t_k(n) = k2^{-n}$ et $N = [2^n T]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^T B_t \circ dB_t &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^N \frac{B_{t_k} + B_{t_{k-1}}}{2} \Delta B_k \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^N (B_{t_k}^2 - B_{t_{k-1}}^2) \\ &= \frac{1}{2} B_T^2.\end{aligned}$$

2. On choisit une partition $t_k(n)$ comme ci-dessus. Alors les processus

$$X_t^{(n)} = \sum_{k=1}^N \frac{g(X_{t_k}) + g(X_{t_{k-1}})}{2} \Delta B_k$$

$$Y_t^{(n)} = \sum_{k=1}^N g(X_{t_{k-1}}) \Delta B_k,$$

avec $N = N(t)$ correspondant à l'intervalle de la partition contenant t, convergent respectivement vers X_t et Y_t lorsque $n \longrightarrow \infty$. Leur différence s'écrit

$$X_t^{(n)} - Y_t^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [g(X_{t_k}) - g(X_{t_{k-1}})] \Delta B_k.$$

La formule de Taylor implique

$$g(X_{t_k}) - g(X_{t_{k-1}}) = g'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + O(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}).$$

Or

$$\begin{aligned}X_{t_k} - X_{t_{k-1}} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(X_s) \circ dB_s \\ &= g(X_{t_{k-1}}) \Delta B_k + \int_{t_{k-1}}^{t_k} [g(X_s) - g(X_{t_{k-1}})] \circ dB_s \\ &= g(X_{t_{k-1}}) \Delta B_k + O(t_k - t_{k-1}).\end{aligned}$$

On en conclut que

$$g(X_{t_k}) - g(X_{t_{k-1}}) = g'(X_{t_{k-1}}) g(X_{t_{k-1}}) \Delta B_k + O(\Delta B_k) + O(t_k - t_{k-1}).$$

En substituant dans l'expression de $X_t^{(n)} - Y_t^{(n)}$, on obtient donc

$$X_t^{(n)} - Y_t^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [g'(X_{t_{k-1}}) g(X_{t_{k-1}}) \Delta B_k^2 + O(\Delta B_k^2) + O((t_k - t_{k-1}) \Delta B_k)].$$

En procédant comme dans la preuve de la formule d'Itô, on peut remplacer ΔB_k^2 par Δt_k, et il suit

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} [X_t^{(n)} - Y_t^{(n)}] = \frac{1}{2} \int_0^t g'(X_s) g(X_s) ds.$$

Deuxième partie

Équations différentielles stochastiques et équations aux dérivées partielles

Chapitre 8

Diffusions

Dans l'étude des diffusions, il est particulièrement intéressant de considérer la dépendance des solutions dans la condition initiale $X_0 = x$. La propriété de Markov affirme que l'état X_t en un temps donné t détermine univoquement le comportement à tous les temps futurs. Ceci permet de démontrer la propriété de semi-groupe, qui généralise celle du flot d'une équation différentielle ordinaire. Un semi-groupe de Markov peut être caractérisé par son générateur, qui s'avère être un opérateur différentiel du second ordre dans le cas des diffusions.

8.1 Propriété de Markov

Définition 8.1.1. ***(Processus de Diffusion).*** *On appelle diffusion un processus stochastique vérifiant la propriété de Markov forte et à trajectoires continues obéissant à une équation differentielle stochastique de la forme suivante :*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \qquad t \geq s > 0, \qquad X_s = x. \tag{8.1}$$

Définition 8.1.2. ***(Diffusion d'Itô).*** *Une diffusion d'Itô homogène dans le temps est un processus stochastique $\{X_t(\omega)\}_{t\geq 0}$ satisfaisant une équation différentielle stochastique de la forme*

$$dX_t = \underbrace{b(X_t)}_{\text{Coeff-dérive}} dt + \underbrace{\sigma(X_t)}_{\text{Coeff-diffusion}} dB_t,$$

où :

- B_t : *est un mouvement Brownien standard de dimension m ;*

- $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *coefficient de dérive ;*

- $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, *coefficient de diffusion,*

tels que L'EDS (8.1) admette une unique solution en tout temps.

Nous noterons la solution de (8.1) $X_t^{s,x}$.
L'homogénéité en temps, c'est-à-dire le fait que b et σ ne dépendent pas du temps, a la conséquence importante suivante.

Lemme 8.1.1. *Les processus $\{X_{s+h}^{s,x}\}_{h\geq 0}$ et $\{X_h^{0,x}\}_{h\geq 0}$ ont la même loi.*

Nous noterons $\mathbb{P}^x$ la mesure de probabilité sur la tribu engendrée par toutes les variables aléatoires $X_t^{0,x}$, $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$, définie par

$$\mathbb{P}^x\{X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k\} = \mathbb{P}\{X_{t_1}^{0,x} \in A_1, \ldots, X_{t_k}^{0,x} \in A_k\}$$

pour tout choix de temps $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ et de boréliens $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$. Les espérances par rapport à $\mathbb{P}^x$ seront notées $\mathbb{E}^x$.

Théorème 8.1.1. ***(Propriété de Markov pour les diffusions d'Itô)****. Pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}^x(\varphi(X_{t+h}) \setminus \mathcal{F}_t)(w) = \mathbb{E}^{X_t(w)}(\varphi(X_h)), \tag{8.2}$$

le membre de droite désignant la fonction $\mathbb{E}^y(\varphi(X_h))$ évaluée en $y = X_t(w)$.

Preuve. Considérons pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $s \geq t$ la fonction

$$F(y,t,s,\omega) = X_s^{t,y}(\omega) = y + \int_t^s b(X_u(\omega))du + \int_t^s \sigma(X_u(\omega))dB_u(\omega).$$

On notera que F est indépendante de $\mathcal{F}_t$. Par unicité des solutions de l'EDS (8.1), on a

$$X_s(\omega) = F(X_t(\omega), t, s, \omega).$$

Posons $\sigma(y,\omega) = \varphi \circ F(y,t,t+h,\omega)$. On vérifie que cette fonction est mesurable. La relation (8.2) est alors équivalente à

$$\mathbb{E}(\sigma(X_t,\omega)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\varphi \circ F(y,0,h,\omega))|_{y=X_t(\omega)}.$$

On a

$$\mathbb{E}(\sigma(X_t,\omega)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(g(y,\omega)/\mathcal{F}_t)|_{y=X_t(\omega)}.$$

En effet, cette relation est vraie pour des fonctions de la forme $g(y,\omega) = \phi(y)\psi(\omega)$, puisque

$$\mathbb{E}(\phi(X_t)\psi(\omega)/\mathcal{F}_t) = \phi(X_t)\mathbb{E}(\psi(\omega)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi(y)\psi(\omega)/\mathcal{F}_t)|_{y=X_t(\omega)}.$$

Elle s'étend alors à toute fonction mesurable bornée en approximant celle-ci par une suite de combinaisons linéaires de fonctions comme ci-dessus. Or il suit de l'indépendance de F et de $\mathcal{F}_t$ que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sigma(y,\omega)/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(\sigma(y,\omega)) \\
&= \mathbb{E}(\varphi \circ F(y,t,t+h,\omega)) \\
&= \mathbb{E}(\varphi \circ F(y,0,h,\omega)), \quad \textit{par le Lemme } (8.1.1).
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en évaluant la dernière égalité en $y = X_t$.

■

Comme pour le mouvement Brownien, la propriété de Markov se généralise à des temps d'arrêt.

Théorème 8.1.2. ***(Propriété de Markov forte pour les diffusions d'Itô)****. Pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et tout temps d'arrêt τ fini presque sûrement,*

$$\mathbb{E}^x(\varphi(X_{\tau+h}) \setminus \mathcal{F}_\tau)(w) = \mathbb{E}^{X_\tau(w)}(\varphi(X_h)). \tag{8.3}$$

Ce résultat signifie que la solution X de l'EDS vérifie la propriété de Markov forte par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$: pour tout temps d'arrêt fini τ, la loi conditionnelle du "futur" $(X_{\tau+t} : t \geq 0)$ connaissant le "passé" $\mathcal{F}_\tau$ est la loi de X partant de X_τ, qui ne dépend que du présent à l'instant τ

8.2 Semigroupes et générateurs

8.2.1 Semigroupes de Markov

Définition 8.2.1. ***(Semi-groupe de Markov).*** *A toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on associe pour tout $t \geq 0$ la fonction $T_t\varphi$ définie par*

$$(T_t\varphi)(x) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_t)). \tag{8.4}$$

L'opérateur linéaire T_t est appelé le semi-groupe de Markov associé à la diffusion.

Par exemple, si $\varphi(x) = 1_A(x)$ est la fonction indicatrice d'un Borélien $A \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$(T_t 1_A)(x) = \mathbb{P}^x\{X_t \in A\}.$$

Le nom de semi-groupe est justifié par le résultat suivant.

Lemme 8.2.1. ***(Propriété de semi-groupe).*** *Pour tous t, $h \geq 0$, on a*

$$T_h o T_t = T_{t+h}. \tag{8.5}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
(T_h o T_t)((\varphi)(x) &= (T_h(T_t\varphi))(x) \\
&= \mathbb{E}^x((T_t\varphi)(X_h)) \\
&= \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^{X_h}(\varphi(X_t))) \\
&= \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^x(\varphi(X_{t+h}) \setminus \mathcal{F}_t)) \quad \textit{(par la propriété de Markov)} \\
&= \mathbb{E}^x(\varphi(X_{t+h})) \\
&= (T_{t+h}\varphi)(x).
\end{aligned}$$

■

De plus, on a les propriétés suivantes :

1. T_t préserve les fonctions constantes : $T_t(c1_{\mathbb{R}^n}) = c1_{\mathbb{R}^n}$;
2. T_t préserve les fonctions non-négatives : $\varphi(x) \geq 0,\ \forall x \Longrightarrow (T_t\varphi)(x) \geq 0,\ \forall x$;
3. T_t est contractante par rapport à la norme L^∞ :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(T_t\varphi)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mathbb{E}^x(\varphi(X_t))| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathbb{E}^x(1) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|.$$

Le semi-groupe de Markov est donc un opérateur linéaire positif, borné par rapport à la norme L^∞. En fait, il est de norme opérateur 1.

La propriété de semi-groupe implique que le comportement de T_t sur tout intervalle $[0, \varepsilon]$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, détermine son comportement pour tout $t \geq 0$. Il est donc naturel de considérer la dérivée de T_t en $t = 0$.

8.2.2 Générateur de diffusion

Définition 8.2.2. ***(Générateur d'une diffusion d'Itô).*** *Le générateur infinitésimal L d'une diffusion d'Itô est défini par son action sur une fonction test φ via*

$$(L\varphi)(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{(T_h\varphi)(x) - \varphi(x)}{h}. \tag{8.6}$$

Le domaine de L est par définition l'ensemble des fonctions φ pour lesquelles la limite (8.6) existe pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 8.2.1. Formellement, la relation (8.6) peut s'écrire

$$L = \left.\frac{dT_t}{dt}\right|_{t=0}.$$

Par la propriété de Markov, cette relation se généralise en

$$\frac{d}{dt}T_t = \lim_{h\to 0_+}\frac{T_{t+h}-T_t}{h} = \lim_{h\to 0_+}\frac{T_h - id}{h}T_t = LT_t,$$

et on peut donc écrire formellement

$$T_t = \exp(tL).$$

La relation entre le générateur L et les coefficients b et σ se justifié par la proposition suivante :

Proposition 8.2.1. *Soit X solution de l'EDS (8.1), alors X est un processus de Markov dont le générateur est l'opérateur différentiel donné par*

$$L\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{8.7}$$

lorsque φ est deux fois continûment différentiables à support compact où $a = \sigma\sigma^*$.

Preuve. Considérons le cas $n = m = 1$. Soit φ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact, et soit $Y_t = \varphi(X_t)$. Par la formule d'Itô,

$$Y_h = \varphi(X_0) + \int_0^h \varphi'(X_s)b(X_s)ds + \int_0^h \varphi'(X_s)\sigma(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^h \varphi''(X_s)\sigma(X_s)^2 ds.$$

En prenant l'espérance, comme l'espérance de l'intégrale d'Itô est nulle, on trouve

$$\mathbb{E}^x(Y_h) = \varphi(x) + \mathbb{E}^x\bigg(\int_0^h \varphi'(X_s)b(X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^h \varphi''(X_s)\sigma(X_s)^2 ds\bigg), \tag{8.8}$$

d'où

$$\frac{\mathbb{E}^x(\varphi(X_h)) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathbb{E}^x(\varphi'(X_s)b(X_s))ds + \frac{1}{2h}\int_0^h \mathbb{E}^x(\varphi''(X_s)\sigma(X_s)^2)ds.$$

En prenant la limite $h \to 0_+$, on obtient

$$(L\varphi)(x) = \varphi'(x)b(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)\sigma(x)^2.$$

Les cas où $n \geq 2$ ou $m \geq 2$ se traitent de manière similaire, en utilisant la formule d'Itô multidimensionnelle.

■

Exemple (Générateur du mouvement Brownien). Soit B_t le mouvement Brownien de dimension m. C'est un cas particulier de diffusion, avec $b = 0$ et $\sigma = \mathbf{1}$. Son générateur est donné par

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} \Delta.$$

C'est donc le Laplacien à un facteur $\frac{1}{2}$ prés.
En dimension 1, $L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Chapitre 9

Diffusions et opérateurs aux dérivées partielles

Le but de ce chapitre est de montrer les liens qui peuvent exister entre la théorie des processus stochastiques et les équations aux dérivées partielles (EDP). Les processus stochastiques utilisés sont des processus possédant la propriété de Markov. L'idée principale est de montrer que l'espérance mathématique de fonctionnelles de ces processus fournit une représentation probabiliste de solutions de certaines équations, i.e. les processus de diffusions obtenus comme solution d'EDS à partir de processus de Wiener, nous permettent de représenter les solutions des EDP du second ordre.
L'approche probabiliste permet d'avoir accées rapidement à une expression de la solution pour des domaines D de géométrie (relativement) arbitraire. De plus, elle ouvre la porte à des techniques de simulations de ces solutions d'EDP (méthode de Monte-Carlo) pour approximer les espérences.

9.1 Diffusion et EDP

Dans cette section, on va présenter quelques rapports entre les diffusions et les équations aux dérivées partielles. Grace à la formule d'Itô, il est possible de donner une interprétation probabiliste à certaines équations aux dérivées partielles, ce qui permet ainsi de prouver l'existance de solutions.

9.1.1 Formule de Dynkin

La formule de Dynkin est essentiellement une généralisation de l'expression (8.8) à des temps d'arrêt. Elle fournit une première classe de liens entre diffusions et équations aux dérivées partielles.

Proposition 9.1.1. *[27] **(Formule de Dynkin).** Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ une diffusion de générateur L, $x \in \mathbb{R}^n$, τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}^x(\tau) < \infty$, et $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact. Alors*

$$\mathbb{E}^x[\varphi(X_\tau)] = \varphi(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau (L\varphi)(X_s)ds\right].$$

Preuve. Considérons le cas $n = m = 1$, m étant la dimension du mouvement Brownien. En procédant comme dans la preuve de la Proposition (8.2.1), on obtient

$$\mathbb{E}^x[\varphi(X_\tau)] = \varphi(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau (L\varphi)(X_s)ds\right] + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau g(X_s)\varphi'(X_s)dB_s\right]. \tag{9.1}$$

Il suffit donc de montrer que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. Or pour toute fonction h bornée par M et tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)dB_s\right] = \mathbb{E}^x\left[\int_0^N 1_{\{s<\tau\}} h(X_s)dB_s\right] = 0,$$

en vertu de la $\mathcal{F}_s$-mesurabilité de $1_{\{s<\tau\}}$ et $h(X_s)$. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x\left[\left(\int_0^\tau h(X_s)dB_s - \int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)dB_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}^x\left[\int_{\tau\wedge N}^\tau h(X_s)^2 ds\right] \\ &\leq M^2\mathbb{E}^x(\tau - \tau\wedge N),\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $N \to \infty$, en vertu de l'hypothèse $\mathbb{E}^x(\tau) < \infty$, par convergence dominée. On peut donc écrire

$$0 = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)dB_s\right] = \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau h(X_s)dB_s\right],$$

ce qui conclut la preuve, en substituant cette conclusion dans (9.1) pour la fonction bornée $h = g\varphi'$ (continue à support compact).
La preuve dans le cas général est analogue.

EDP de type Dirichlet

On considére le cas où le temps d'arrêt τ est le temps de première sortie d'un ouvert borné $D \subset \mathbb{R}^n$. Si le problème avec conditions au bord

$$\begin{cases} (Lu)(x) = \theta(x), & x \in D, \\ u(x) = \psi(x), & x \in \partial D. \end{cases} \tag{9.2}$$

admet une unique solution (par exemple le cas si D, θ et ψ sont suffisamment réguliers). En substituant φ par u dans la formule de Dynkin, on obtient la relation

$$u(x) = \mathbb{E}^x\left(\psi(X_r) - \int_0^\tau \theta(X_s)ds\right). \tag{9.3}$$

- Pour $\psi = 0$ et $\theta = -1$, $u(x)$ est égal à l'espérance de τ, partant de x.
- Pour $\theta = 0$ et ψ l'indicatrice d'une partie A du bord ∂D alors $u(x)$ est la probabilité de quitter D par A.

Ainsi, si l'on sait résoudre le problème (9.2), on obtient des informations sur le temps et le lieu de sortie τ, X_τ respectivement de la diffusion X de D.

Exemple (Temps de sortie moyen du mouvement Brownien d'une boule)
Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \mathbb{R}\}$ la boule de rayon R centrée à l'origine. Soit

$$\tau_K = \inf\{t > 0 : x + \mathbf{B}_t \notin K\} \tag{9.4}$$

et soit

$$\tau(N) = \tau_K \wedge N. \tag{9.5}$$

La fonction $\varphi(x) = \|x\|^2 \mathbb{1}_{\|x\| \leq R}$ est à support compact et satisfait $\Delta(\varphi(x)) = 2n$ pour $x \in K$. On peut par ailleurs la prolonger en dehors de K de manière qu'elle soit lisse et à support compact. En substituant dans la formule de Dynkin, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x(\|x + \mathbf{B}_{\tau(N)}\|^2) &= \|x\|^2 + \mathbb{E}^x\left(\int_0^{\tau(N)} \frac{1}{2}\Delta\varphi(\mathbf{B}_s)ds\right) \\
&= \|x\|^2 + n\mathbb{E}^x(\tau(N)).
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Comme $\|x + \mathbf{B}_{\tau(N)}\| \leq R$, faisant tendre N vers l'infini, on obtient par convergence dominée

$$\mathbb{E}^x(\tau_K) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{n}. \tag{9.7}$$

9.1.2 Les équations de Kolmogorov

La seconde classe de liens entre équations différentielles stochastiques et équations aux dérivées partielles est constituée par les équations de Kolmogorov, qui sont des problèmes aux valeurs initiales.
En dérivant par rapport à t la formule de Dynkin, dans le cas particulier $\tau = t$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_t\varphi)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}^x(\varphi(X_t)) = \mathbb{E}^x((L\varphi)(X_t)) = (T_t L\varphi)(x),$$

que l'on peut abréger sous la forme

$$\frac{d}{dt}T_t = T_t L.$$

Nous avons vu précèdemment que l'on pouvait aussi écrire formellement $\frac{d}{dt}T_t = LT_t$. Par conséquent, les opérateurs L et T_t commutent.

Théorème 9.1.1. ***(Equation de Kolmogorov rétrograde).*** *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact.*

1. *La fonction*

$$u(t,x) = (T_t\varphi)(x) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_t)) \tag{9.8}$$

satisfait le problème aux valeurs initiales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = (Lu)(t,x), & t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{9.9}$$

2. *Si $w(t,x)$ est une fonction bornée, continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en x, satisfaisant le problème (9.9), alors $w(t,x) = (T_t\varphi)(x)$.*

Preuve.

1. On a $u(0,x) = (T_0\varphi)(x) = \varphi(x)$ et

$$\begin{aligned}(Lu)(t,x) &= \lim_{h\longrightarrow 0_+} \frac{(T_h \circ T_t\varphi)(x) - (T_t\varphi)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\longrightarrow 0_+} \frac{(T_{t+h}\varphi)(x) - (T_t\varphi)(x)}{h}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}(T_t\varphi)(x) = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x).\end{aligned}$$

2. Si $w(t,x)$ satisfait le problème (9.9), alors on a

$$\widetilde{L}w = 0 \quad \textit{où} \;\; \widetilde{L}w = \frac{\partial w}{\partial t} + Lw.$$

   Fixons $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Le processus $Y_t = (s-t, X_t^{0,x})$ admet $\widetilde{L}$ comme générateur. Soit

$$\tau_R = \inf\{t > 0 : \;\|X_t\| \geq R\}.$$

   La formule de dynkin montre que

$$\mathbb{E}^{s,x}(w(Y_{t\wedge\tau_R})) = w(s,x) + \mathbb{E}^{s,x}\left(\int_0^{t\wedge\tau_R} (\widetilde{L}w)(Y_u)du\right) = w(s,x).$$

   Faisant tendre R vers l'infini, on obtient

$$w(s,x) = \mathbb{E}^{s,x}(w(Y_t)), \;\forall t \geq 0.$$

   En particulier, prenant $t = s$, on a

$$w(s,x) = \mathbb{E}^{s,x}(w(Y_s)) = \mathbb{E}(w(0, X_s^{0,x})) = \mathbb{E}(\varphi(X_s^{0,x})) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_s)).$$

■

La linéarité de l'équation de Kolmogorov rétrograde implique qu'il suffit de la résoudre pour une famille complète de conditions initiales φ pour connaître la solution pour toute condition initiale.
Un premier cas important est celui où l'on connaît toutes les fonctions propres et valeurs propres de L. Dans ce cas, la solution générale se décompose sur les fonctions propres, avec des coefficients dépendant exponentiellement du temps.

Remarque 9.1.1. *Dans le cas du mouvement Brownien, dont le générateur est $L = \frac{1}{2}\Delta$, l'équation de Kolmogorov rétrograde (9.9) est l'équation de la chaleur.*

Exemple (Mouvement Brownien). Les fonctions propres du générateur $L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ du mouvement Brownien unidimensionnel sont de la forme $\exp(ikx)$. Décomposer la solution sur la base de ces fonctions propres revient à résoudre l'équation de la chaleur par transformation de Fourier. On sait que la solution s'écrit

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2t/2}\widehat{\varphi}(k)e^{ikx}dk, \tag{9.10}$$

où $\widehat{\varphi}(k)$ est la transformée de Fourier de la condition initiale.

Un second cas important revient à décomposer formellement la condition initiale sur une "base" de distributions de Dirac. En pratique, cela revient à utiliser la notion de densité de transition.

Définition 9.1.1. ***(Densité de transition).*** *On dit que la diffusion $\{X_t\}_t$ admet la densité de transition $p_t(x, y)$, aussi notée $p(y, t|x, 0)$, si*

$$\mathbb{E}^x(\varphi(X_t)) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) p_t(x, y) dy \tag{9.11}$$

pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Par linéarité, la densité de transition, si elle existe et est lisse, satisfait l'équation de Kolmogorov rétrograde (le générateur L agissant sur la variable x), avec la condition initiale $p_0(x, y) = \delta(x - y)$.

Exemple (Mouvement Brownien et noyau de la chaleur). Dans le cas du mouvement Brownien unidimensionnel, la densité de transition est donnée par

$$p(y, t|x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi t}} e^{-(x-y)^2/2t},$$

qui est appelé le noyau de la chaleur. C'est également la valeur de l'intégrale (9.10) avec $\widehat{\varphi}(k) = e^{-iky}/\sqrt{2\Pi}$, qui est bien la transformée de Fourier de $\varphi(x) = \delta(x - y)$.
L'adjoint du générateur L est par définition l'opérateur linéaire L^* tel que

$$\langle L\phi|\psi\rangle = \langle \phi|L^*\psi\rangle, \tag{9.12}$$

pour tout choix de fonctions ϕ, $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiables, avec ϕ à support compact, où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel de L^2. En intégrant $\langle L\phi|\psi\rangle$ deux fois par parties, on obtient

$$(L^*\psi)(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} ((gg^T)_{i,j}\psi)(y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} (f_i\psi)(y).$$

Théorème 9.1.2. ***(Equation de Kolmogorov progressive).*** *Si X_t possède une densité de transition lisse $p_t(x, y)$, alors celle-ci satisfait l'équation*

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = L_y^* p_t(x, y), \tag{9.13}$$

la notation L_y^* signifiant que L^* agit sur la variable y.

Preuve. La formule de Dynkin, avec $\tau = t$, implique

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) p_t(x, y) dy &= \mathbb{E}^x(\varphi(X_t)) \\ &= \varphi(x) + \int_0^t \mathbb{E}^x((L\varphi)(X_s)) ds \\ &= \varphi(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (L\varphi)(y) p_s(x, y) dy. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps, et en utilisant (9.12), il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) p_t(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (L\varphi)(y) p_t(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) (L_y^* p_t)(x, y) dy,$$

d'où le résultat.

■

Supposons que la loi X_0 admette une densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors X_t aura une densité donnée par

$$\rho(t,y) = (S_t\rho)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x,y)\rho(x)dx.$$

En appliquant l'équation de Kolmogorov progressive (9.13), on obtient l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,y) = L_y^*\rho(t,y),$$

que l'on peut aussi écrire formellement

$$\frac{d}{dt}S_t = L^*S_t.$$

Le générateur adjoint L^* est donc le générateur du semi-groupe adjoint S_t.

Corollaire 9.1.1. *Si $\rho_0(y)$ est la densité d'une mesure de probabilité satisfaisant $L^*\rho_0 = 0$, alors ρ_0 est une mesure stationnaire de la diffusion. En d'autres termes, si la loi de X_0 admet la densité ρ_0, alors X_t admettra la densité ρ_0 pour tout $t \geq 0$.*

9.1.3 Formule de Feynman-Kac

La formule de Feynman-Kac montre qu'on peut également lier des propriétés d'une diffusion à celles d'équations paraboliques où le générateur contient un terme linéaire en u.
L'ajout d'un terme linéaire dans le générateur peut s'interpréter comme le fait de "tuer" la diffusion avec un certain taux. Le cas le plus simple est celui d'un taux constant. Soit ζ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ, indépendante de B_t. Posons

$$\widetilde{X}_t = \begin{cases} X_t, & si \quad t < \zeta\,; \\ \Delta, & si \quad t \geq \zeta\,; \end{cases} \tag{9.14}$$

où Δ est un "état cimetière" que l'on a ajouté à $\mathbb{R}^n$. On vérifie que grâce au caractère exponentiel de ζ, $\widetilde{X}_t$, est un procesus de Markovn sur $\mathbb{R}^n \cup \{\Delta\}$. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction test mesurable bornée, on aura (si l'on pose $\varphi(\Delta) = 0$)

$$\mathbb{E}^x(\varphi(\widetilde{X}_t)) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_t)1_{\{t<\zeta\}}) = \mathbb{P}\{\zeta > t\}\mathbb{E}^x(\varphi(X_t)) = e^{-\lambda t}\mathbb{E}^x(\varphi(X_t)).$$

Il suit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{E}^x(\varphi(\widetilde{X}_h)) - \varphi(x)}{h} = -\lambda\varphi(x) + (L\varphi)(x),$$

ce qui montre que le générateur infinitésimal de $\widetilde{X}$ est l'opérateur différentiel

$$\widetilde{L} = L - \lambda.$$

Plus généralement, si $V : \mathbb{R}^n \to R$ est une fonction continue, bornée inférieurement, on peut construire une variable aléatoire ζ telle que

$$\mathbb{E}^x(\varphi(\widetilde{X}_t)) = \mathbb{E}^x(\varphi(X_t)e^{-\int_0^t V(X_s)ds}).$$

Dans ce cas le générateur de $\widetilde{X}_t$ sera

$$\widetilde{L} = L - q,$$

c'est-à-dire $(\widetilde{L}\varphi)(x) = (L\varphi)(x) - V(x)\varphi(x)$.

Théorème 9.1.3. ***(Formule de Feynman-Kac).*** *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to R$ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact, et soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée inférieurement.*

1. *La fonction*
$$u(t,x) = \mathbb{E}^x\left[e^{-\int_0^t V(X_s)ds}\varphi(X_t)\right] \tag{9.15}$$
satisfait le problème aux valeurs initiales
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = (Lu)(t,x) - V(x)u(x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{9.16}$$
2. *Si $w(t,x)$ est une fonction continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en x, bornée pour x dans un compact, satisfaisant le problème (9.16), alors $w(t,x)$ est égale au membre de droite de (9.15).*

L'intérêt d'une telle formule est de pouvoir donner une solution d'EDP sous forme d'espérance. À l'aide de méthodes de Monte-Carlo pour approximer les espérances, on peut simuler la solution de l'EDP.

Preuve.

1. Soit $Y_t = \varphi(X_t)$ et $Z_t = e^{-\int_0^t V(X_s)ds}$, et soit $u(t,x)$ donnée par (9.15). Alors
$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\Big[\mathbb{E}^x(u(t,X_h)) - u(t,x)\Big] &= \frac{1}{h}\Big[\mathbb{E}^x\Big(\mathbb{E}^{X_h}(Y_tZ_t) - \mathbb{E}^x(Y_tZ_t)\Big] \\ &= \frac{1}{h}\Big[\mathbb{E}^x\Big(\mathbb{E}^x(Y_{t+h}e^{-\int_0^t V(X_{s+h})ds} \setminus \mathcal{F}_h) - Y_tZ_t\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{h}\mathbb{E}^x\Big[Y_{t+h}Z_{t+h}e^{\int_0^h V(X_s)ds} - Y_tZ_t\Big] \\ &= \frac{1}{h}\mathbb{E}^x\Big[Y_{t+h}Z_{t+h} - Y_tZ_t\Big] - \frac{1}{h}\mathbb{E}^x\Big[Y_{t+h}Z_{t+h}\Big(e^{\int_0^h V(X_s)ds} - 1\Big)\Big]. \end{aligned}$$
Lorsque h tend vers 0, le premier terme de la dernière expression tend vers $\partial_t u(t,x)$, alors que le second tend vers $V(x)u(t,x)$.
2. Si $w(t,x)$ satisfait le problème (9.16), alors on a
$$\widetilde{L}w = 0 \quad \textit{où} \quad \widetilde{L}w = -\frac{\partial w}{\partial t} + Lw - Vw.$$

Fixons $(s,x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et posons $Z_t = z + \int_0^t V(X_s)ds$. Le processus $Y_t = (s-t, X_t^{0,x}, Z_t)$ est une diffusion admettant comme générateur
$$\widehat{L} = -\frac{\partial}{\partial s} + L + V\frac{\partial}{\partial z}.$$

Soit $\phi(s,x,z) = e^{-z}w(s,x)$. Alors $\widehat{L}\phi = 0$, et la formule de Dynkin montre que si τ_R est le temps de sortie d'une boule de rayon R, on a
$$\mathbb{E}^{s,x,z}(\phi(Y_{t\wedge\tau_R})) = \phi(s,x,z).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} w(s,x) = \phi(s,x,0) &= \mathbb{E}^{s,x,0}(\phi(Y_{t\wedge\tau_R})) \\ &= \mathbb{E}^x\Big(\phi(s-t\wedge\tau_R, X^{0,x}_{t\wedge\tau_R}, Z_{t\wedge\tau_R})\Big) \\ &= \mathbb{E}^x\Big(e^{-\int_0^{t\wedge\tau_R} V(X_u)du} w(s-t\wedge\tau_R, X^{0,x}_{t\wedge\tau_R})\Big), \end{aligned}$$

qui tend vers $\mathbb{E}^x(e^{-\int_0^t V(X_u)du} w(s-t, X_t^{0,x}))$ lorsque $\mathbb{R}$ tend vers l'infini. En particulier, pour $t=s$ on trouve

$$w(s,x) = \mathbb{E}^x(e^{-\int_0^s V(X_u)du} w(0, X_s^{0,x})),$$

qui est bien égal à la fonction $u(t,x)$ définie dans (9.15).

■

En combinaison avec la formule de Dynkin, la formule de Feynman-Kac admet peut être généralisée à des temps d'arrêt. Si par exemple $D \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine régulier, et que τ désigne le temps de première sortie de D, alors sous des conditions de régularité sur les fonctions $V, \varphi, \theta : \overline{D} \to \mathbb{R}$, la quantité

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x\left(e^{-\int_0^{t\wedge\tau} V(X_s)ds}\varphi(X_{t\wedge\tau}) - \int_0^{t\wedge\tau} e^{-\int_0^s V(X_u)du}\theta(X_s)ds\right)$$

satisfait le problème avec valeurs initiales et aux bords

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = (Lu)(t,x) - V(x)u(t,x) - \theta(x), &\quad t>0,\ x\in D, \\ u(0,x) = \varphi(x), &\quad x \in D, \\ u(t,x) = \varphi(x), &\quad x\in\partial D. \end{aligned}$$

En particulier, si τ est fini presque sûrement, prenant la limite $t\to\infty$, on obtient que

$$u(x) = \mathbb{E}^x\left(e^{-\int_0^{\tau} V(X_s)ds}\varphi(X_\tau) - \int_0^{\tau} e^{-\int_0^s V(X_u)du}\theta(X_s)ds\right)$$

satisfait le problème

$$\begin{cases} (Lu)(x) = V(x)u(x) + \theta(x), & x\in D, \\ u(x) = \varphi(x), & x\in\partial D. \end{cases} \tag{9.17}$$

On remarquera que dans le cas $V=0$, on retrouve les relations (9.2) – (9.3).

Exemple. Soit $D =]-a,a[$ et $X_t = x + B_t$. Alors $u(x) = \mathbb{E}^x(e^{-\lambda\tau})$ satisfait

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u''(x) = \lambda u(x), & x\in D, \\ u(-a) = u(a) = 1. \end{cases} \tag{9.18}$$

La solution générale de la première équation est de la forme $u(x) = c_1 e^{\sqrt{2\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{2\lambda}x}$. Les constantes d'intégration c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions aux bords, et on trouve

$$\mathbb{E}^x(e^{-\lambda\tau}) = \frac{cosh(\sqrt{2\lambda}x)}{cosh(\sqrt{2\lambda}a)}. \tag{9.19}$$

En évaluant la dérivée en $\lambda = 0$, on retrouve $\mathbb{E}^x(\tau) = a^2 - x^2$, qui est un cas particulier de (9.7), mais (9.19) détermine tous les autres moments de τ ainsi que sa densité.

En résolvant l'équation avec les conditions aux bords $u(-a) = 0$ et $u(a) = 1$ on obtient

$$\mathbb{E}^x(e^{-\lambda\tau}1_{\{\tau_a<\tau_{-a}\}}) = \frac{sinh(\sqrt{2\lambda}(x+a))}{sinh(\sqrt{2\lambda}\cdot 2a)},$$

qui nous permet de retrouver $\mathbb{P}^x\{\tau_a < \tau_{-a}\} = (x+a)/(2a)$, mais aussi

$$\mathbb{E}^x(\tau 1_{\{\tau_a<\tau_{-a}\}}) = \frac{(a^2-x^2)(3a+x)}{6a},$$

$$\mathbb{E}^x(\tau \setminus \tau_a < \tau_{-a}) = \frac{(a-x)(3a+x)}{3}.$$

9.2 Problème de martingales

On considére l'EDS $E(b,\sigma)$

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

où $b(t,x) = b(x)$ et $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ sont des fonctions boréliennes et localement bornées.
Il est important de pouvoir attacher des martingales continues aux processus que nous avons construits. On note $C_c^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ de classe C^k à support compact.

Théorème 9.2.1. *Soient $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, et*

$$Lf(x) := \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d(\sigma\sigma^*)_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x). \tag{9.20}$$

Si X est une solution de $E(b,\sigma)$, alors

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds \quad \text{est une martingale.}$$

Preuve. Par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)dB_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)d\langle B^i, B^j\rangle_s \\
&= M_t + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)b_i(X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)\sum_{k=1}^m\sigma_{ik}(X_s)\sigma_{jk}(X_s)ds \\
&= M_t + \int_0^t Lf(X_s)ds,
\end{aligned}$$

avec M une martingale. Ce qui prouve le résultat cherché.

■

Remarque 9.2.1. Sous les hypothèses lipschitziennes sur les coefficients b et σ, X est un processus de Markov fort continu tel que pour toute $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ soit une martingale, où L est l'opérateur différentiel du second ordre défini dans (9.20). On dira que X est une diffusion (homogène) de covariance $a = \sigma\sigma^*$ et de drift b. Les EDS apportent une construction explicite de diffusions.

Le processus X permet de donner une approche ou une interprétation probabiliste de nombreux résultats analytiques concernant l'opérateur L. Ces liens entre probabilités et analyse ont été une motivation importante pour l'étude des équations différentielles stochastiques.

Dans la suite, $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ désigne une application borélienne et localement bornée, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $a(x)$ est une matrice symétrique positive (c'est-à-dire, pour tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\lambda_i\lambda_j \geq 0$). On se met dans l'espace canonique $(\Omega := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$ avec processus canonique $(X_t)_{t\geq 0}$.

Définition 9.2.1. ***(Problème de martingale).*** *Une probabilité $\mathbb{P}^x$ sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ est une solution du problème de martingale (a, b), issu de $x \in \mathbb{R}^d$, si*

(a) $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$ *;*

(b) *pour toute $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds$$

est une $\mathbb{P}^x$-martingale par rapport à la filtration canonique de X, où

$$Lf(x) := \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Il y a équivalence entre existence faible/unicité faible de $E^x(b, \sigma)$ et existence/unicité pour le problème de martingale $(b, \sigma\sigma*)$.

Théorème 9.2.2. **(i)** *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Il y a existence faible pour $E^x(b, \sigma)$ si et seulement si le problème de martingale $(b, \sigma\sigma*)$ issu de x a une solution.*

(ii) *Il y a unicité faible pour $E(b, \sigma)$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il y a au plus une solution pour le problème de martingale $(b, \sigma\sigma*)$ issu de x.*

Preuve. Si X est une solution de $E^x(b, \sigma)$, alors la loi de X dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ est une solution pour le problème de martingale $(b, \sigma\sigma*)$ issu de x (notons que si $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, alors elle est aussi une $(\mathcal{F}_t^X)$-martingale). La réciproque est admise, et est une conséquence du Theorem V.20.1 de Rogers et Williams (1987) [37] qui dit que si $\mathbb{P}^x$ est une solution pour le problème de martingale $(b, \sigma\sigma*)$ issu de x, alors on peut construire dans un certain espace filtré une solution X pour l'EDS $E^x(b, \sigma)$ telle que X a pour loi $\mathbb{P}^x$.

■

Chapitre 10

Mouvement brownien et équations aux dérivées partielles

Des liens importants existent entre probabilité et analyse via les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent reliés à des opérateurs différentiels linéaires. Comme nous allons le voir, la solution de certaines équations aux dérivées partielles linéaires admet une représentation en termes du mouvement brownien. Cela montre l'importance du mouvement brownien en mathématiques, ainsi que dans les autres sciences d'où proviennent ces équations. L'opérateur le plus simple est celui de Laplace Δ et il est directement relié au mouvement brownien. On étudie dans ce chapitre les connexions entre mouvement brownien et équations liées au laplacien (équation de Laplace, problème de Dirichlet, équation de la chaleur, formule de Feynman Kac).

10.1 Fonctions harmoniques

Le laplacien Δu d'une fonction C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ est défini par

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Le mouvement brownien est lié à cet opérateur linéaire Δ, pour la raison simple suivante :
Soit B un mouvement brownien de dimension d issu de $a \in \mathbb{R}^d$, i.e., $B(\cdot) - a$ est un mouvement brownien issu de 0. Si $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, la formule d'Itô montre que

$$F(B_t) = F(B_0) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta F(B_s) ds + \int_0^t \nabla F(B_s).\, dB_s. \tag{10.1}$$

Si $\Delta F = 0$, alors $F(B)$ est une martingale locale.

Définition 10.1.1. ***(Fonction harmonique).*** *Une fonction $u : D \to \mathbb{R}$ est dite* ***harmonique*** *sur le domaine (ouvert, connexe) $D \subset \mathbb{R}^d$ si u est une fonction de classe C^2 sur D qui vérifie l'équation de Laplace*

$$\Delta u = 0 \text{ dans } D.$$

Exemple

1. En dimension 2 : $u(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ et $u(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$ sont harmoniques.
2. En dimension d : $u(x_1, x_2, \dots, x_d) = 1/|x|^{d-2}$ est une fonction harmonique sur $D = \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

La propriété suivante joue un rôle essentiel pour relier les solutions d'EDP à des espérances de processus arrêtés en des temps de sortie de domaine. Dans la suite, pour G ouvert, on note pour B mouvement brownien :

$$\tau_G = \inf(t \geq 0 : B_t \notin G) \text{ le temps d'entrée dans } G^c,$$

$$\sigma_G = \inf(t > 0 : B_t \notin G) \text{ le temps de sortie de } G.$$

On note que le temps de sortie de G est plus grand que le temps d'entrée dans G^c : $\sigma_G \geq \tau_G$. Par exemple si G est ouvert et B part de ∂G, on a $\tau_G = 0$ mais $\sigma_G > 0$ si B commence par entrer dans G.

Proposition 10.1.1. *[9] Soit G un ouvert borné avec $\overline{G} \subset D$ et B un mouvement brownien issu de $a \in G$. Si $u : D \to \mathbb{R}$ est harmonique sur D alors la fonction alèatoire*

$$M_t = u(B_{t\wedge\tau_G}) - u(a)$$

est une martingale centrée pour le mouvement brownien issu de a.

Définition 10.1.2. ***(Formule de la moyenne).*** *Une fonction réelle u satisfait à la propriété de la valeur moyenne sur D si pour toute boule ouverte $B(a, r)$ telle que $\overline{B}(a, r) \subset D$, on a*

$$u(a) = \int_{\partial B(a,r)} u(x)\lambda_{a,r}(dx), \tag{10.2}$$

où $\lambda_{a,r}$ est la probabilité uniforme sur la sphère $\partial B(a, r)$ de centre a et de rayon r.

Cette propriété signifie que la valeur de u en tout point a s'obtient comme moyenne de u sur n'importe quelle boule centrée en a, d'adhérence incluse dans D.
Le volume de la boule $B(a, r)$ est

$$Vol(B(a, r)) = \frac{2r^d\Pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})} := V_r$$

et son aire de surface est

$$S_r = \partial r Vol(B(a, r)) = \frac{2r^{d-1}\Pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{d}{r}V_r,$$

ainsi, on déduit l'expression suivante pour les intégrales sur les boules :

$$\int_{B(a,r)} f(x)dx = \int_0^r S_\rho \int_{\partial B(a,\rho)} f(x)\lambda_{a,\rho}(dx)d\rho.$$

Proposition 10.1.2. *[9] Soit $u : D \to \mathbb{R}$. Alors u est harmonique sur D ssi u vérifie la formule de la moyenne (10.2).*

Proposition 10.1.3. *[9]* ***(Principe du maximum).*** *Soit u une fonction harmonique sur D. Alors*

(i) *la fonction u atteint son maximum sur tout compact $F \subset D$ sur le bord ∂F de F ;*

(ii) *Si u atteint son maximum en un point intérieur à D et si l'ouvert D est connexe alors u est constante sur D.*

Dans la suite, nous utilisons les notations $\mathbb{P}^a$, $\mathbb{E}^a$ pour rappeler que le mouvement brownien B part de a.

10.2 Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet consiste à résoudre l'équation de Laplace sur un ouvert D avec des conditions aux bords imposées (sur ∂D). Etant donné un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ et $f : \partial D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, le **problème de Dirichlet** (D, f) consiste à trouver une fonction $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{D}$ et de classe C^2 sur D telle que

$$\begin{cases} \Delta u = & 0, \quad \textit{sur } D, \\ \\ u_{\backslash \partial D} = & f. \end{cases} \tag{10.3}$$

Il s'agit d'un problème bien connu qu'on peut résoudre analytiquement de façon explicite en utilisant la transformation de Fourier sur certains domaines très particuliers. L'approche probabiliste permet d'avoir accés rapidement à une expression de la solution pour des domaines D de géométrie (relativement) arbitraire. De plus, elle ouvre la porte à des techniques de simulations de ces solutions d'EDP (méthode de Monte-Carlo). Cependant pour simplifier, nous supposons que D est borné.

Ce problème porte le nom du mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Théorème 10.2.1. ***(Dirichlet 1).*** *On considère le problème de Dirichlet* (10.3). *Soit*

$$u(x) = \mathbb{E}^x[f(B_{\tau_D})], \quad x \in \overline{D}. \tag{10.4}$$

(1) *Si* $\mathbb{E}^x[|f(B_{\tau_D})|] < +\infty, \ \forall x \in D$, *alors* u *donnée par* (10.4) *vérifie* (10.3).

(2) *Si* f *est bornée et*

$$\mathbb{P}^a(\tau_D < +\infty) = 1, \quad \forall a \in D$$

alors toute solution bornée du problème de Dirichlet (D, f) *s'écrit* (10.4).

Si D est borné alors la condition dans (1) au dessus est satisfaite car B_{τ_D} reste dans D et f est finie sur un domaine borné.

D'aprés le Théorème (10.2.1), pour résoudre le problème de Dirichlet (10.3), il reste seulement à voir la continuité sur ∂D de u donnée par (10.4), c'est à dire

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \to a}} \mathbb{E}^x[f(B_{\tau_D})] = f(a), \quad a \in \partial D. \tag{10.5}$$

Ceci est lié à la notion de régularité du bord.

Preuve. On commançe par montrer (2) puis (1).

(2) On suppose d'abord qu'il existe u vérifiant le problème de Dirichlet (10.3). Soient $x \in D$ et $D^\epsilon = \{z \in D : dist(z, D^c) > \epsilon\}$ le ϵ-intérieur de D. Pour ϵ assez petit, $x \in D^\epsilon$. On applique alors la Proposition (10.1.1) et en prenant l'espérance de la martingale obtenue, on a

$$u(x) = \mathbb{E}^x[u(B_{t \wedge \tau_{D^\epsilon}})].$$

Par hypothèse, on a $\tau_{D^\epsilon} < +\infty$ p.s. $(D^\epsilon \subset D)$ (D étant borné, il est inclus dans un rectangle fini. Comme les coordonnées de B sont des mouvements browniens unidimensionnels, il suffit d'utiliser que le temps de sortie d'un intervalle borné est fini en dimension

1). On utilise le théorème de convergence dominée (u bornée sur $\overline{D}$ puisque D est borné) pour faire successivement $t \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$: d'abord comme $\tau_{D^\epsilon} < +\infty$ p.s.

$$u(x) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}^x[u(B_{t\wedge\tau_{D^\epsilon}})] = \mathbb{E}^x[u(B_{\tau_{D^\epsilon}})].$$

Puis comme $D = \bigcup_{\epsilon>0} D^\epsilon$, on a $\tau_{D^\epsilon} \nearrow \tau_D$ lorsque $\epsilon \to 0$ donc par continuité de B et de u, à nouveau par convergence dominée :

$$u(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}^x[u(B_{\tau_{D^\epsilon}})] = \mathbb{E}^x[u(B_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x[f(B_{\tau_D})],$$

où la dernière égalité vient de la condition au bord du problème de Dirichlet (10.3) avec $B_{\tau_D} \in \partial D$. Finalement, si $x \in \partial D$, $\tau_D = 0$ et on a $u(x) = f(x)$. Si elle existe, la solution de (10.3) est donc unique et nécessairement donnée par (10.4).
On montre maintenant (1).

(1) On considère une fonction u donnée par (10.4). Comme pour (2), il est immédiat que $u(x) = f(x)$ si $x \in \partial D$. Pour montrer que u est harmonique dans D, on montre que u vérifie la formule de la moyenne, ce qui est équivalent par la Proposition (10.1.2).
Soit $B(a,r) \subset D$. Quand B part de $a \in B(a,r) \subset D$, comme $\tau_{B(a,r)} \le \tau_D$, on a $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}} \subset \mathcal{F}_{\tau_D}$ et par conditionnement on a

$$u(a) = \mathbb{E}^a[f(B_{\tau_D})] = \mathbb{E}^a[\mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}]].$$

Mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^a[f(B_{\tau_D})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] &= \mathbb{E}^a[f(B_{\tau_D} - B_{\tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= \mathbb{E}^a[f(B^{(\tau_{B(a,r)})}_{\tau_D-\tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= \mathbb{E}^a[f(B^{(\tau_{B(a,r)})}_{\tau'_D} + B_{\tau_{B(a,r)}})/\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= u(B_{\tau_{B(a,r)}}),
\end{aligned}$$

car par la propriété de Markov forte, $B_t^{(\tau_{B(a,r)})} := B_{t+\tau_{B(a,r)}} - B_{\tau_{B(a,r)}}$, $t \ge 0$, est un mouvement brownien issu de 0, indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}$ et donc sachant $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}$, $B^{(\tau_{B(a,r)})}_{t+\tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}}$ est un mouvement brownien partant de $B_{\tau_{B(a,r)}} \in \partial B(a,r)$ pour lequel $\tau'_D := \tau_D - \tau_{B(a,r)}$ reste le temps de sortie D (il s'agit de τ_D, reinitialisé à la date $\tau_{B(a,r)}$).

$$u(a) = \mathbb{E}^a[u(B_{\tau_{B(a,r)}})]. \tag{10.6}$$

On observe que le mouvement brownien standard issu de a est isotrope : aucune direction n'est priviliégiée par le processus, ie. la loi de B est invariante par les rotations de centre a. Par conséquent, la loi du point de sortie de B de la boule $B(a,r)$ est invariante aussi par les rotations de centre a. Comme la probabilité uniforme $\lambda_{a,r}$ est la seule loi sur la sphère $\partial B(a,r)$ invariante par rotation (de centre a), il s'agit nécessairement de la loi de $B_{\tau_{B(a,r)}}$: $\mathbb{P}_a(B_{\tau_{B(a,r)}} \in .) = \lambda_{a,r}$. Finalement avec (10.2), on réécrit (10.6) par

$$u(a) = \mathbb{E}^a[u(B_{\tau_{B(a,r)}})] = \int_{\tau_{B(a,r)}} u(y)\lambda_{a,r}(dy).$$

ce qui établit la formule de la moyenne donc l'harmonicité par la Proposition (10.1.2), c'est à dire l'équation de Laplace sur D.

■

Régularité du bord

Pour avoir une solution au problème de Dirichlet (10.3) à partir de (10.4), il reste à voir la continuité sur ∂D, ie. (10.5).

Définition 10.2.1. ***(Régularité).*** *On rappelle que* $\sigma_D = \inf(t > 0 : B_t \notin D)$ *est le temps de sortie de* D *d'un mouvement brownien* B*.*

1. *Un point* $x \in \partial D$ *est régulier pour* D *si* $\mathbb{P}^x(\sigma_D = 0) = 1$*.*
2. *Le domaine* D *est régulier si tous ses points frontières le sont :*

$$\mathbb{P}^x(\sigma_D = 0) = 1, \quad \forall x \in \partial D.$$

En d'autres termes, la régularité demande que le mouvement brownien partant de ∂D *sorte immédiatement de* D*.*

Proposition 10.2.1. *[12]* ***(Régularité du bord).*** *Soient* $d \geq 2$ *et* $a \in \partial D$*. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La condition* (10.5) *est remplie pour toute fonction mesurable bornée* $f : \partial D \to \mathbb{R}$*, continue en* a*.*
2. *Le point* a *est régulier pour* D*.*
3. *Pour tout* $\epsilon > 0$*, on a*

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \to a}} \mathbb{P}^x(\tau_D > \epsilon) = 0.$$

Théorème 10.2.2. *[9]* ***(Dirichlet 2).*** *Si le domaine* D *est régulier, alors la fonction* u *donnée par* (10.4) *est l'unique solution du problème de Dirichlet, ie.* u *est* C^2 *sur* D *et continue sur* $\overline{D}$ *et* (10.3) *est satisfait.*

10.3 Equation de la chaleur

Les lois de la thermodynamique expliquent que la solution u du problème de Dirichlet (D, f) en (10.3) est le champ de température à l'équilibre à l'intérieur D d'un récipient dont les parois ∂D sont maintenues à température f (en supposant $f \geq 0$). On s'intéresse maintenant aux équations de Laplace avec évolution dans le temps : par exemple, considèrons une plaque infiniment mince isolée homogène et infinie. La température $u(t; y, z)$ au point (y, z) à l'instant $t \geq 0$ se détermine en fonction de la température initiale $f(\cdot)$ comme la solution de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad \textit{avec } u(0, \cdot) = f(\cdot).$$

Le coefficient $\sigma > 0$ décrit la diffusion de la chaleur dans la plaque, supposée homogène de sorte que σ ne dépend pas de (y, z).

En dimension d quelconque, on appelle **équation de la chaleur**, le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u, \\ u(0, \cdot) = f. \end{array} \right. \tag{10.7}$$

Remarque 10.3.1. *L'équation de la chaleur modélise la "diffusion" de la chaleur dans un fil : $u(t,x)$ représente la température du filament au point x au temps t. Et f représente le "profil" initial de la température sur le fil.*

Nous allons relier l'EDP (10.7) à des objets probabilistes. On considére d'abord la loi de B_t sachant $\mathcal{F}_s$: par indépendance et stationnarité des accroissements, en écrivant $B_t = B_t - B_s + B_s$, on constate qu'il s'agit de la loi gaussienne (conditionnelle) $\mathcal{N}_d(B_s, (t-s)I_d)$ de densité donnée au point y et en notant $B_s = x$,

$$p(t-s;x,y) = g_{t-s}(y-x).$$

La densité de transition $p(t;x,y)$ vérifie

$$p^{-1}\frac{\partial p}{\partial t}(t;x,y) = -\frac{d}{2t} + \frac{|y-x|^2}{2t^2}$$

et que

$$p^{-1}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}(t;x,y) = -\frac{1}{t} + \frac{(y_i-x_i)^2}{t^2},$$

de sorte que la fonction $p = p(t-s;x,y)$ est solution de l'équation progressive (dite forward) (i.e., dans la variable y de la position future)

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t;x,y) = \frac{1}{2}\Delta_y p(t;x,y), \quad \lim_{t\searrow 0} p(t;x,y)\,dy = \delta_x,$$

avec δ_x est la mesure de Dirac en x et aussi par symétrie solution de l'équation rétrograde (dite backward) (i.e., dans la variable x de la position passée)

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t;x,y) = \frac{1}{2}\Delta_x p(t;x,y), \quad \lim_{t\searrow 0} p(t;x,y)\,dx = \delta_y.$$

Ces relations justifient que $p(t;x,y)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, et on l'appelle le noyau de la chaleur.

Proposition 10.3.1. *Supposons pour la condition initiale f que $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|e^{-c|x|^2}dx < +\infty$ pour une constante $c > 0$. Alors, la fonction*

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(B_t)]$$

est solution de l'équation de la chaleur (10.7) sur $[0,t_0[\times\mathbb{R}^d$ avec $t_0 = 1/(2c)$.

Preuve. On a $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(y)p(t;x,y)dy$, par définition.
La propriété d'intégrabilité de f permet de dériver sous le signe intégrale pour $t \in [0, 1/(2c)$ et d'avoir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int f(y)\frac{\partial p(t;x,y)}{\partial t}dy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \int f(y)\frac{\partial^2 p(t;x,y)}{\partial x_i^2}dy,$$

ce qui implique d'aprés l'équation rétrograde pour p que u est solution de (10.7) sur cet intervalle de temps avec la bonne condition initiale.

■

10.4 Formule de Feynman-Kac

On considére l'équation aux dérivées partielles parabolique linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u - ku, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d\,; \\ u(0,\cdot) = f. \end{cases} \tag{10.8}$$

Le terme supplémentaire $k(x)$ représente le taux de dissipation de la chaleur au point x dans le cas où $k \geq 0$. Dans le cas où k n'est pas positive, on interprétera plutôt cette équation avec $f \geq 0$ comme décrivant la densité $u(t,x)$ au temps t et au point x de particules diffusant dans l'espace qui se multiplient dans les sites x tels que $k(x) \leq 0$ (à un taux $-k$) et qui sont tuées dans les sites tels que $k(x) \geq 0$ (à un taux k). Puisque cette équation se réduit, si $k = 0$, à l'équation de la chaleur, le résultat suivant n'est pas étonnant.

Proposition 10.4.1. *On suppose que $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ sont boréliennes avec f à croissance sous-exponentielle et k bornée. Alors toute solution $u(t,x)$ de l'EDP parabolique linéaire (10.10) de classe $C^{1,2}$ dont le gradient est à croissance sous-exponentielle (uniformément en temps), est donnée par la formule*

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^t k(B_s)ds\right)\right]. \tag{10.9}$$

En particulier, une telle solution est unique.

Preuve. On fixe $t > 0$, on applique la formule d'Itô au temps $s \in]0,t[$ à $s \mapsto u(t-s, B_s)\exp(-\int_0^s k(B_r)dr)$ et en utilisant l'EDP (10.10). Il vient que

$$d\left[u(t-s,B_s)\exp\left(-\int_0^s k(B_r)dr\right)\right]$$

$$\begin{aligned} = \Bigg[-k(B_s)u(t-s,B_s)ds - \frac{\partial u(t-s,B_s)}{\partial t}ds + \nabla u(t-s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\Delta u(t-s,B_s)ds\Bigg] \\ \times \exp\left(-\int_0^s k(B_r)dr\right) \\ = \exp\left(-\int_0^s k(B_r)dr\right) \times \nabla u(t-s,B_s)dB_s. \end{aligned}$$

En intègrant entre $s = 0$ et $s = t$,

$$\begin{aligned} \exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)u(0,B_t) - u(t,B_0) &= \exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)f(B_t) - u(t,B_0) \\ &= \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(B_r)dr\right)\nabla u(t-s,B_s)dB_s. \end{aligned}$$

Puisque l'intégrale stochastique est une martingale L^2 d'aprés les hypothèses de croissance sous-exponentielle du gradient de u et de bornitude de k, l'espérance sous $\mathbb{P}^x$ est nulle. On obtient alors

$$\mathbb{E}^x\left[\exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)f(B_t) - u(t,B_0)\right] = 0.$$

Comme $B_0 = x$ sous $\mathbb{P}^x$, on trouve

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x\left[\exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)f(B_t)\right],$$

ce qui prouve la formule de Feynman-Kac (10.9).

■

Le cas d'un domaine Soit D un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, k mesurable bornée sur D, et u une solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u - ku, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d\,; \\ u(0,\cdot) = f & \textit{sur } \overline{D} \\ u(\cdot,x) = 0 & \textit{pour } x \in \partial D \end{cases} \tag{10.10}$$

qui soit continue sur $\mathbb{R}_+ \times \overline{D}$, de classe $C^{1,2}$ bornée et à dérivées bornées. On peut vérifier qu'alors,

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x\left[f(B_t)1_{t<\tau_D}\exp\left(-\int_0^t k(B_s)ds\right)\right],$$

avec τ_D est le temps de sortie de D.
Pour cela, on applique la formule d'Itô à $s \mapsto u(t-s, B_{s\wedge\tau_D})\exp(-\int_0^s k(B_{r\wedge\tau_D})dr)$. Noter que pour $x \in \partial D$, $\tau_D = 0$ sous $\mathbb{P}^x$ et on récupère la condition au bord $u(\cdot,x) = 0$ pour $x \in \partial D$.

Remarque 10.4.1. *Dans le cas où on a une EDP avec des coefficients non constants, l'importance de la méthode probabiliste est bien apparue car l'application de la méthode des différences finies sur cette EDP est difficile à cause des coefficients non constant, c'est-à-dire, dépendent de la variable de l'espace, cette dépendance rend la solution non stable parfois. La méthode probabiliste nous donne une bonne représentation de la solution grâce à la formule de Feynman-Kac. Plus on augmente le nombre des trajectoires dans la méthode de Monte-Carlo on obtient une solution plus précise avec une erreur faible.*

Bibliographie

[1] N. Berglund. Martingales et calcul stochastique. *Master 2 Recherche de Mathématiques.* Université d'Orléans. Version de Janvier 2014.

[2] J. M. Bismut. Conjugate convex functions in optimal stochastic control, *J. Math. Anal. Appl.* 44 (1973), 384-404.

[3] P. Bougerol. Calcul stochastique des martingales continues. M2-Probabilités et Finance. Université Pierre et Marie Curie, Paris 6. 3 Décembre 2015.

[4] N. Bouleau. *Processus stochastiques et Applications*. Hermann, 2000.

[5] J. C. Breton. Calcul stochastique. *M2 Mathématiques*, Université de Rennes 1. Septembre-Décembre 2014. Version du 5/12/14.

[6] J. C. Breton. Processus stochastiques. *M2 Mathématiques*, Université de Rennes 1. Octobre-Décembre 2020.

[7] P. Briand. *Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades*, Mars 2001.

[8] K. L. Chung, R. J. Williams. *Introduction to stochastic integration*. Birkh auser, 1990.

[9] F. Comets, T. Meyre. *Calcul stochastique et modèles de diffusions*. Cours et exercices corrigés. Dunod. Paris, 2006.

[10] F. Coquet, V. Mackevicius et J. Mémin. Stability in D of martigales and backward equations under discretigation of filtration. *Stochastic Processus and their Application*, **75**, (1998), 235-248.

[11] R. Durrett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. Wadsworth, 1984.

[12] R. Durett. *Stochastic calculus (A practical introduction)*.CRC Press 1996.

[13] R. Elie et I. Kharroubi. Calcul stochastique appliqué à la finance.

[14] N. El Karoui, S. Peng, and M-C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Math. Finance 7 (1997), no. 1, 1-71.

[15] W. Feller. *Zur Theorie der Stochastischen Prozesse (Existenzund Eindeutigkeitssatze)*. Math. Ann.,113, 113-160 (1936).

[16] L. Gallardo. *Mouvement Brownien et calcul d'Itô*, cours et exercices corrigés. 2008.

[17] H. Guiol. Calcul Stochastique Avancé. *TIMB/TIMC - IMAG*, 2006.

[18] K. Itô. *Differential Equations Determining Markov processes*. Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai, **244**, 1352-1400 (1942).

[19] K. Itô. *Stochastic Integral*. Proc. Imp. Acad. Tokyo,**20**, 519-524 (1944).

[20] K. Itô. *Stochastic Differential Equations*. Memoirs of the Amer. Math. Soc. 4 (1951).

[21] M. Jeanblanc. Cours de Calcul stochastique. *DESS IM EVRY*. Option Finance, Septembre 2002.

[22] M. Jeanblanc. Cours de Calcul stochastique. *Master 2IF EVRY*, Septembre 2006.

[23] M. Jeanblanc et T. Simon. Elements de calcul stochastique. IRBID, Septembre 2005.

[24] A. Kandouci. Cours Calcul stochastique et Applications, plateforme de l'université de Saida. 2021.

[25] I. Karatzas, S-E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1987.

[26] A. N. Kolmogoroff. *Über Die Analytischen Methodenin der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Math. Annalen,104, 415-458(1931).

[27] F. C Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications*, second edition 2005. Imperial college press.

[28] J. F. Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Springer, Coll. Mathématiques et applications, vol. **71**, 2013.

[29] P. Lévy. *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, Paris (1948) Second edition (1965).

[30] P. Malliavin. *Stochastic Analysis*. Springer, Berlin, 1997.

[31] O. Lévêque, EPFL, *Cours de Probabilites et Stochastic Calculus*, Semestre d'hiver 2004-2005.

[32] E. Pardoux and S. Peng. Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems Control Lett.* 14 (1990), no. 1, 55-61.

[33] E. Pardoux and S. Peng. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations, Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte, NC, 1991)(B. L. Rozovskii and R. B. Sowers, eds.),Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 176, Springer, Berlin, 1992, pp. 200-217.

[34] E. Pardoux and S. Peng, Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDE's, Probab. Theory Related Fields 98 (1994), no. 2, 209-227.

[35] P. Protter. Stochastic integration and differential equations.Springer. 2004.

[36] D. Revuz, M. Yor. continous martingales and brownian motion. Springer, 1991.

[37] L.C.G. Rogers, D. Williams. Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. II, Itô Calculus. Wiley, 1987.

[38] N. Wiener. Differential Space. *J. Math. Phys.* **2**, 131-134 (1923).

[39] L. Zambotti. Calcul stochastique et processus de diffusion. Université Pierre-et-Marie-Curie, *M2 "Probabilités et Modèles Aléatoires"*. Année 2017-2018. Version du 14 décembre 2017.