REMERCIEMENT [1]

J'exprime ma profonde gratitude au

Nous remercions, en premier lieu, notre dieu qui a bien voulu nous donner la force pour effectuer le présent travail.

En second lieu, nous tenons à adresser nos remerciements à notre encadreur ***N. Ait ouali*** *pour son aide et ses conseils, en saluant en lui son savoir faire, sa compétence et ces connaissances dont il nous a fait en profiter.*

M^{elle} ***S. Rahmani****, Maitre assistant à l'université de Saida, qui me fait l'honneur de bien vouloir présider le jury de ce mémoire.*

R. Rouane*, Maitre assistant à l'université de Saida, qui a bien voulu accepter de juger ce travail et de faire partie du jury.*

Et aux respectueux enseignants des départements de Mathématique. Et à tous les étudiantes et étudiants de Mathématique. Enfin, à tous les personnes qui nous ont aidé à de ce modeste travail.

1. Saida, 2012

Dedication

Je dédie ce modeste travail :

- Mes très chers parents qui m'ont enfantent, m'ont encouragé à suivre mes études.

- A mes frères.

- A mes chers sœurs et leurs mariés et leurs enfantes.

- A ma tante Zohra, et son enfants.

- A mes amis Lahcene, Kadda, Messaoud, Khalfallah, Khilo, Mokhtar, Sofiane, kaddour et les autres amis.

- A mon binôme Didaoui et tous leurs familles

- A tous la promotion 3 lmd 2011/2012.

-A mon encadreur M^{elle} ***N.Ait ouali****.*

- A tout qui prend une place dans mon cœur.

Soltani Abdelkrim

Dedication

Je dédie ce modeste travail :

- Mes très chers parents qui m'ont enfantent, m'ont encouragé à suivre mes études.

- A mes frères.

- A mes chers sœurs et leurs mariés et leurs enfantes.

- A mes amis Lahcene, Messaoud, Khalfallah, Sofiane , Zouaoui, Mokhtar, kaddour, et les autres amis.

- A mon binôme Abd el krime et tous leurs familles

- A tous la promotion 3 lmd 2011/2012.

-A mon encadreur M^{elle} ***N.Ait ouali****.*

- A tout qui prend une place dans mon cœur.

Didaoui Maamar

Table des matières

Introduction

Le théorème central limite est un ensemble de résultats du début du 20 ème siècle sur la convergence faible d'une suite de variables aléatoires en probabilité. Intuitivement, d'après ces résultats, toute somme (implicitement : la moyenne de ses variables) de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une certaine variable aléatoire. Le résultat le plus connu et le plus important est simplement appelé "théorème central limite" qui concerne une somme de variables aléatoires dont le nombre tend vers l'infini et c'est celui-ci que nous allons démontrer de manière heuristique ici.

Le théorème central limite admet plusieurs généralisations qui donnent la convergence de sommes de variables aléatoires sous des hypothèses beaucoup plus faibles. Ces généralisations ne nécessitent pas des lois identiques mais font appel à des conditions qui assurent qu'aucune des variables n'exerce une influence significativement plus importante que les autres. Telle est la condition de Lindeberg.

Donc le but de ce modeste travail de montrer l'importance capitale, et la place prises par les lois normales gaussiennes en probabilité. car ces lois peuvent approcher les lois de moyennes empiriques de v.a.i.i, nous avons jugé utile de diviser ce mémoire en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous donnons quelques rappels les notions fondamentales de l'échantillon,la définition de l'échantillon et ces caratcéristiques,la moyenne, variance, moments empiriques , le dernier paragraphe énoncé une forme de la loi mère gaussiène, qui joue un r$\hat{o}$le trés important pour le calcul statistique.

Dans le deuxième chapitre, on a défini le théorème et nous l'avons demontré en détail.

Dans le troisième et dernier chapitre, nous avons mis en évidence l'importance de ce théorème avec des applictions fondamentales ceci explique pourquoi cette loi surgit si souvent en statistique.

Chapitre 1

Rappels des lois fondamentales de l'échantillonnage

Ce chapitre ne constitue pas un cours élémentaire de Lois fondamentales de l'échantillonnage mais cherche à regrouper modestement certaines notions essentielles qui nous seront indispensables pour la suite.

1.1 Lois fondamentales de l'échantillonnage

1.1.1 Phénomène et échantillons aléatoires

Le terme d'échantillon est souvent associé à un sous ensemble de cardinal n tiré d'une population selon certaines règles. On s'intéresse aux échantillons de variables que l'on relie aux échantillons d'individus par la considération élémentaire suivante :
Sur chaque individu tiré, on mesure une certaine grandeur et on note $x_1, x_2, ..., x_n$ les valeurs observées. $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est un échantillon de valeurs.

Définition 1.1.1 *On appelle échantillon aléatoire de taille n (en bref n-échantillon) une suite de n variables aléatoires indépendantes et de même loi (ou v.a.i.i.d). Cette loi est appelée la loi mère de l'échantillon.*

Définition 1.1.2 *Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un n-échantillon, on appelle* ***statistique*** *toute v.a $T_n = h(X_1, X_2, ..., X_n)$,fonction de $X_1, X_2, ..., X_n$.*

On peut concrétiser la loi d'une statistique (donc d'une caractéristique, telle la moyenne de l'échantillon) en imaginant une simulation en très grand nombre d'échantillons de taille de taille n, en calculant pour chacun d'eux la valeur prise par la statistique et en étudiant la distribution de ces valeurs. De façon imagée on peut dire qu'il s'agit de la distribution d'échantillonnage de la statistique sur "l'univers" de tous les échantillons possibles. Notons qu'une statistique peut être une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^p$. En particulier les moments empiriques ci-après sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les définitions qui suivent se rapportent toutes à un échantillon aléatoire noté $X_1, X_2, ..., X_n$.

1.1.2 Moyenne, variance, moments empiriques

Définition 1.1.3 *On appelle* ***moyenne de l'échantillon*** *ou* ***moyenne empirique*** *la statistique, notée $\bar{X}$, définie par :*

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Définition 1.1.4 *On appelle* ***variance empirique*** *la statistique, notée $\tilde{S^2}$, définie par :*

$$\tilde{S^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Proposition 1.1.1 *Soit μ et σ^2, respectivement la moyenne et la variance de la loi mère. On a :*

$$E(\bar{X}) = \mu \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Démonstration :

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

Puis, en raison de l'indépendance des X_i :

$$V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

■

Proposition 1.1.2 *La moyenne de la loi de la variance empirique est :*

$$E(\tilde{S^2}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 &= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)]^2 \\
&= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2(\bar{X}-\mu)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) + (\bar{X}-\mu)^2 \\
&= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - 2(\bar{X}-\mu)^2 + (\bar{X}-\mu)^2 \\
&= \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - (\bar{X}-\mu)^2
\end{aligned}$$

D'où

$$E(\tilde{S^2}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V(X_i - V(\bar{X})) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

■

Définition 1.1.5 *On appelle* ***variance de l'échantillon*** *la statistique*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

Dorénavant on étudiera S^2 plutôt que $\tilde{S^2}$ à laquelle on pourra éventuellement se référer en conservant le terme de variance empirique

Proposition 1.1.3 *Toute combinaison linéaire de v.a.gaussiennes indépendantes est une variable aléatoire gaussienne*

Démonstration :

Il suffit de démontrer cela avec deux v.a. l'extension à plusieurs v.a se faisant de proche en proche. De plus, on a vu que si X est gaussienne alors $Y = aX$ est gaussienne. Il suffit donc de démontrer la proposition pour $Y_1 + Y_2$ où Y_1 et Y_2 sont indépendantes. Soient $Y_1 \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2)$

$$\begin{aligned}
\Psi_{Y_1+Y_2}(t) &= \Psi_{Y_1}(t)\Psi_{Y_2}(t) \\
&= e^{t\mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}t^2} e^{t\mu_2+\frac{\sigma_2^2}{2}t^2} \\
&= e^{t(\mu_1+\mu_2)+\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}
\end{aligned}$$

qui est la fonction génératrice des moments de la loi $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

■

Loi mère gaussienne :

Si la loi mère est $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\bar{X}$ est gaussienne, en tant que combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes. Par conséquent :

$$\bar{X} \to \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Proposition 1.1.4 [1] *Si la loi mère est gaussienne, $\bar{X}$ et S^2 sont des v.a indépendantes.*

Définition 1.1.6 *On appelle* ***moment empirique*** *d'ordre r, noté M_r, la statistique*

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{=1}^{n} X_i^r$$

Définition 1.1.7 *On appelle* ***moment centré empirique*** *d'ordre r, noté M_r', la statistique*

$$M_r' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^r$$

1.2 Lois des grand nombres

Théoreme 1.2.1 [1] *Soit* $\{X_n\}$ *une suite de v.a indépendantes de même loi admettant une moyenne* μ *et une variance* σ^2*. Alors la suite des moyennes empiriques* $\{\bar{X}_n\}$ *converge presque sûrement vers* μ*,ie :*

$$\bar{X}_n \overset{p.s}{\to} \mu \text{ quand } n \to \infty$$

1.2.1 Fonctions caractéristiques

Soit$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$un espace de probabilité.

Définition 1.2.1 *soit* X *une variable aléatoire définie sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *á valeur réelles, On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire* X *la fonction* $\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par :*

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}_X(x) \end{aligned}$$

Si X *une variable aléatoire absolument continue de densite* f_X*.*
On a :

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) d(x). \end{aligned}$$

Si X *une variable aléatoire discrète prenant les valeurs* x_k *avec les probabilités* $\mathbb{P}_X(x_i)$*.*
On a :

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e^{itx_i} \mathbb{P}_X(x_i) \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 [5] *Si* φ_X *est la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle* X *:*

1. *soit* $Y = aX + b$ *une variable aléatoire réele de fonction caractéristique* φ_Y *donnée par :*

$$\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$$

2. $\varphi_X(0) = 1$

3. $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\varphi_X(t)| \leq 1.$

4. φ_X *est continue sur* $\mathbb{R}$.

5. *Si* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathbb{E}(X^k) < +\infty$ *on a :*

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{j!}(it)^j + o(t^k).$$

6. *Si* $(X_i)_{i=1,\cdots,n}$ *sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et si* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *alors :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t)$$

Chapitre 2

Le théorème central limite TCL

Nous avons vu la loi des grands nombre montre que la moyenne $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ d'une suite de v.a. X_i i.i.d (ayant espérance et variance) tend vers un nombre : l'epèrance commune $\mu = E(X_i)$ de ces v.a, bien entendu, M_n n'est que de variance petite et rest donc aléatoire : si l'on veut observer la variabilité de M_n il est nécéssaire d'agrandir l'écart $M_n - \mu$ en le multipliant par une grandeur $\lambda(n)$ suffisament grande avec n. Le choix de $\lambda(n)$ peut se faire simplement de manière à retrouver dans la v.a "amplifiée" $Z_n = \lambda(n)(M_n - \mu)$ soit de variance 1. Calculons : nous voulons

$$\begin{aligned}
1 &= Var(Z_n) = Var(\lambda(n)(M_n - \mu)) = \lambda^2(n)Var((M_n - \mu)) = \lambda^2(n)Var(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= \tfrac{\lambda^2(n)}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) \text{ par indépendance des} X_i \\
&= \tfrac{\lambda^2(n)}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{\lambda^2(n)}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\lambda^2(n)}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $\lambda(n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$ pour que Z_n soit de variance 1. Nous avons alors

$$Z_n = \lambda(n)(M_n - \mu) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu)$$

qui est visiblement d'espérance nulle. Et là se produit une petite merveille : pour n grand, cette remise de l'échelle de $M_n - \mu$ produit une variable aléatoire Z_n dont la loi est proche de la loi normale (centrée réduite puisque tel est le cas por laloi de tous les Z_n). et ceci sans autre hypothèse : ceci explique pourquoi cette loi surgit si souvent en statistique. Cette merveille porte le nom de théorème limite central (central limit theorem, en anglais).

2.1 Le théorème central limite

2.1.1 Définition

Soit $X_1, X_2......X_n$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, suivant la même loi D et indépendantes. Supposons que l'espérance μ et l'écart-type σ de D existent et soient finis ($\sigma \neq 0$).
Considérons la somme $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Alors l'espérance de S_n est $n\mu$ et son écart-type vaut $\sigma\sqrt{n}$.
De plus, quand n est assez grand, **la loi normale** $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ est une bonne appriximation de la loi de S_n Afin de formuler mathématiquement cette approximation, nous allons poser

$$\bar{X}_n = S_n/n = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$$

et

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

de sorte que l'espérance et l'écart-type de Z_n valent respectivement 0,1 : la variable est ainsi dite centrée et réduite.
Le théorème central limite stipule alors que la loi de Z_n converge vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque n tend vers l'infini. Cela signifie que si ϕ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$, alors pour tout réel z :

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq Z) = \Phi(z)$$

ou de façon équivalente :

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z) = \Phi(z)$$

Pour un théorème d'une telle importance en statistiques et en probabilitée, il existe une démonstration particulièrement simple utilisant les fonctions caractéristiques.

2.1.2 Démonstration du théorème central limite

Pour une variable aléatoire Y d'espérance 0 et de variance 1, la fonction caractéristique de la loi Normale centrée réduite est $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.
$\Phi_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n})$

$$\phi_Y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \to 0$$

Si Y_i vaut $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$, il est facile de voir que la moyenne centrée réduite des observations $X_1, X_2, ..., X_n$ est simplement :

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sqrt{n}}$$

$$\Phi_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = E(e^{t\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{\sqrt{n}}}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{\frac{Y_i}{\sqrt{n}}}) = (E(e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{\sqrt{n}}}))^n$$

donc

$$\Phi_{Z_n}(t) = [E(e^{t\frac{Y_i}{\sqrt{n}}})]^n = (1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2))^n$$

En passant à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2))^n = e^{\frac{-t^2}{2}}$$

D'où $Z_n \to \mathcal{N}(0, 1)$.

■

Mais cette limite est la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite $\mathrm{N}(0, 1)$, d'où l'on déduit le théorème de la limite centrale grâce au théorème de continuité de Lévy, qui affirme que la convergence des fonctions caractéristiques implique la convergence en loi.
S'il est clair, pour tout n, la v.a $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ est centrée-réduite le théorème central limite indique en plus que sa loi tend à $\hat{e}tre$ gaussienne quand n s'accroit et ceci, **quelle que soit la loi mère des X_i.**

2.2 Théorème central limite (deuxième énoncé)

Théoreme 2.2.1 [4] *Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes pas forcément de même loi et d'espérance m_i et de variance σ_i^2 soit $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ et $F_i(X)$ la fonction de répartition de $(X_i - m_i)$.*
Si la condition suivante est réalisée.

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{S_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|X|>\epsilon S_n} X^2 dF_i(X) \right] = 0$$

alors :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_i)}{S_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

La condition de Lindeberg exprime que les variables $\frac{X_i - m_i}{S_n}$ sont "uniformément petites" avec une grande probabilité. Le résultat veut dire qu'à force d'ajouter de telles variables on finit par obtenir une loi de Gauss.

2.2.1 Pratique du théorème limite central

Exemple typique : Une compagnie aérienne donne des réservations sur le vol d'un appareil de 400 places. La probabilité qu'un passager ayant réservé pour ce vol ne se présente pas est de $0.08 = 8\%$. Si la compagnie accorde 420 réservations sur ce vol, quel est le risque de "surbooking" (c'est-à-dire qu'il se présente plus de passagers que les 400 qui pourront embarquer) ?
Résolution par approximation normale : Soit X_i la v.a. de Bernoulli modélisant la présence ($X_i = 1$) ou non ($X_i = 0$) du i-ème passager réservé, $i = 1..n$, avec $n = 420$; par hypothèse $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$, avec $p = 1 - 8\% = 0.92\%$, et on suppose que les X_i sont indépendants. On a donc $= \mathbb{E}(X_i) = p$, et $\sigma = \sqrt{Var(X_i)} = \sqrt{np(1-p)}$.
Soit $X = X_1 + .. + X_{420}$ le nombre (aléatoire) de passagers réservés se présentant effecti-

vement à l'enregistrement. Sous nos hypothèses

$$\mathbb{E}(X) = np = 420 \cdot 0.92 = 384.4 \text{ et } Var(X) = np(1-p) = 420 \cdot 0.92 \cdot 0.08 = 30.912.$$

Soit

$$Z_n = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \left(\frac{X_1 + .. + X_{420} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

la v.a. considérée dans le théorème limite central, qui n'est autre que X centrée et réduite. L'application du théorème consiste à assimiler Z_{420} á $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.
L'événement dont nous recherchons la probabilité est

$$E = \{X < 400\} = \left\{Z_{420} \leq \frac{400 - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right\} \cong \left\{Z \leq \frac{400 - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right\} = \{Z < 4,25\}$$

puisque $\frac{400-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}} = 2.446$.

Comme $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, on recherche la valeur $2.45 = 2.40 + 0.05 = u_1 + u_2$ dans la table de la loi normale, et on trouve $\mathbb{P}(E) = 0.992857$. Il y a donc moins de 1% de risque qu'il se présente plus de 400 passagers á l'enregistrement.

Chapitre 3

Application fondamentale

Dans ce chapitre on a fait et étudier deux applications fondamentales la première c'est l'approximation de la loi binomiale par la loi Gauss et la deuxième consiste à approcher la loi de Poisson par la loi de Gauss avec des exemples.

3.1 Cas particulier : processus de Bernoulli

Soit S_n le nombre total de succés au cours de n répétition. Comme $E(S_n) = np$ et une variance $V(S_n) = np(1-p)$ on a pour la fréquence relative $\frac{S_n}{n}$ une moyenne p et une variance $\frac{p(1-p)}{n}$. D'où, pour n suffisamment grand,

$$\frac{S_n}{n} \overrightarrow{approx} \mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$$

ou encore

$$S_n \overrightarrow{\text{approx}} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

Cette deuxième forme constitue **l'approximation de la loi binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ **par la loi de Gauss** $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

En pratique on admet généralement que l'approximation est stisfaisante dès lors $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. Du fait que l'on passe d'une loi discrète à une loi continue on introduit une correction de continuité de la façon suivante.

Soit $X \to \mathcal{B}(n,p)$ alors :

$$P(X = k) \approx P(k - \frac{1}{2} < U < k + \frac{1}{2}) \text{ où } U \longrightarrow \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

3.1.1 Exemple

Soit $X \longrightarrow \mathcal{B}(20, 0.3)$. Nous pouvons recourir à une approximation gaussienne car $np = 6 > 5$ et $n(1-p) = 14 > 5$. Considérons $P(X = 8)$ et $P(X \leq 8)$.

$$\begin{array}{rcl} P(X=8) & \approx & P(7,5 < U < 8,5) \text{ où } U \to \mathcal{N}(6, 4.2) \\ & \approx & P(\frac{7,5-6}{\sqrt{4,2}} < Z < \frac{8,5-6}{\sqrt{4,2}}) \text{ où } Z \to \mathcal{N}(0,1) \\ & \approx & P(0,73 < Z < 1,22) = 0,8888 - 0,7673 = 0,1215 \end{array}$$

La valeur exacte exacte (lue dans une table binomiale) est 0,1144.

$$\begin{array}{rcl} P(X \leq 8) & \approx & P(U < 8,5) \\ & \approx & P(Z < 1,22) = 0,8888 \end{array}$$

La valeur exacte est 0,8866.

3.2 Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

Si l'on choisit une unité de temps suffisamment petite pour que la probabilité d'avoir plus d'une occurence devienne négligeable on voit que le processus de Poisson peut être rapproché d'un processus de Bernoulli par discrétisation de l'écoulement continu du temps en unités successives.
Montrons que la fonction de probabilité de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est équivalente à celle de la loi $\mathcal{B}(n,p)$ quand $n \to \infty$ et $p \to 0$ de façon que $np \to \lambda$.
On a la fonction génératrice des moments de la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est $\Psi(t) = [pe^t + (1-p)]^n$.
D'où

$$\begin{array}{rcl} ln\Psi(t) & = & nln[pe^t + (1-p)] \\ & = & nln[1 + p(e^t - 1)] \\ & = & n[p(e^t - 1) + o(p)] \end{array}$$

Comme np tend vers λ, $ln(\Psi(t))$ tend vers $\lambda(e^t - 1)$. Par suite $\Psi(t)$ tend vers $\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$ qui est la fonction génératrice de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
Ceci a un intérêt pratique pour approcher la loi binomiale lorsque l'événement "succès", est rare avec un grand nombre de répétitions.

On considère que, si $n \geq 50$ et $p \leq 0,1$, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est approchée de façon tout à fait satisfaisante par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. On peut aussi utiliser une telle approximation si l'événement "succès" est très fréquent ($p \geq 0,9$) en intervertissant succès de échec.

Exemple

La probabilité pour qu'un réacteur d'avion d'un certain type connaisse une panne avant sa première révision est 1/1000. Sachant qu'une compagnie d'aviation possède sur ses avions 100 réacteurs de ce type calculons la probabilité qu'elle ne rencontre pas plus de deux problèmes avec ces réacteurs avant la première révision. Le nombre de réacteurs à problème est une v.a. X de loi $\mathcal{B}(100, 0, 001)$ qui peut *être* approché par la loi $\mathcal{P}(0, 10)$.

$$P(X \leq 2) \approx e^{-0,1} + \frac{e^{-0,1}.0,1}{1!} + \frac{e^{-0,1}.(0,1)^2}{2!} = 0,99985$$

D'où en pratique on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ dès que $\lambda \geq 20$.les calculs de probabilités étant correct à 10^{-2} près en utilisant la correction de continuité.

3.2.1 Exemple

Soit $X \to \mathcal{P}(20)$. Calculons $P(X \leq 14)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 14) &\approx P(U < 14,5) \text{ où } U \to \mathcal{N}(20,20) \\ &\approx P(Z < \tfrac{14,5-20}{\sqrt{20}}) \text{ où } Z \to \mathcal{N}(0,1) \\ &\approx P(Z < -1,23) = 0,1093 \end{aligned}$$

La valeur exacte (lue dans une table de Poisson)est 0,1049.

Conclusion

En conclusion, nous avons pu voir clairement l'intérêt de théorème central limite la convergence vers la loi normale de nombreuses sommes de variables aléatoires lorsque leur nombre tend vers l'infini n'intéresse que le mathématicien. Pour le praticien, il est intéressant de s'arrêter un peu avant la limite : la somme d'un grand nombre de ces variables est presque gaussienne, ce qui fournit une approximation souvent plus facilement utilisable que la loi exacte.

En s'éloignant encore plus de la théorie, on peut dire que bon nombre de phénomènes naturels sont dus à la superposition de causes nombreuses, plus ou moins indépendantes. Il en résulte que la loi normale les représente de manière raisonnablement efficace.

Ce théorème est à la base de nombreuses propriétés essentielles des échantillons en statistique.

Bibliographie

[1] Michel Lejeune : *Statistique la théorie et ses application*,Springer-Verlag France, Paris, [2010].

[2] Jean Jacod et Philip Protter : *Probability Essentials*, Springer, Berlin [2000].

[3] Charles Suquet : *Théorème limite central*, Université des Sciences et Technologies de Lille, [2005-2006].

[4] G.Saporta : *Théories et méthodes de la statistique*, Editions Technip, Paris, [1978]

[5] Jean-François Le Gall. *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires. FIFMA*, [2006].