*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

*Université de Saida Dr. Moulay Tahar*

*Faculté de Science*

**Polycopié de Cours**

# Mécanique des fluides

**2ème Licence - Physique -**

**Préparé par :**

1- Dr. Ould kada Mokhtaria

Maître de Conférences "B"

2- Dr. Meskine mohamed

Maître de conférences "A"

3- Dr. Dahmane fathallah

Maître de conférences "A"

2020/2021

## *Avant-propos*

*Ce polycopié de cours de Mécanique des Fluides répond au programme officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants de la deuxième année LMD (S3) du domaine Sciences et Technique des universités. Il constitue une initiation à la mécanique des fluides pour les étudiants de Physique.*

*Ce document couvre la majorité des aspects de la mécanique des fluides. Il est constitué de cinq chapitres qui s'enchainent comme suit :*

*Dans le premier chapitre, on étudie les propriétés des fluides, la statique des fluides en deuxième chapitre et la cinématique des fluides en troisième chapitre, le quatrième chapitre est réservé à la dynamique des fluides parfaits incompressibles , le dernier chapitre est consacré à la dynamique des fluides réels .*

*Ces cinq chapitres sont illustrés par des exercices résolus qui peuvent aider le lecteur à mieux comprendre le cours.*

*À la fin du polycopié on présente une bibliographie, incluant les références des documents utilisées pour la rédaction de ce polycopié de cours.*

## *TABLE DES MATIÈRES*

## I-1 Introduction :

la mécanique des fluides étudie les lois physiques régissant l'écoulement des liquides et des gaz et aide à reconnaître les causes et les effets de ces écoulements afin de déterminer leurs paramètres caractéristiques comme le champ de pression ou le champ de vitesse en tenant compte des différentes propriétés du fluide telles que la densité et la viscosité et principalement les relations existant entre elles dans différentes situations.

La mécanique des fluides, comme science, a de nombreuses applications dans différents domaines entre autre : l'aéronavale, l'aéronautique, la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie, etc.…

## I-2 Définition d'un fluide :

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

## I -3 Système d'unité :

Les unités de mesure utilisées dans ce manuscrit sont celles du Système International (SI). Les unités principales de ce système sont montrées dans le tableau suivant :

***Tableau I.1*** **:** Les unités principales du système international (SI).

| **Longueur** | **Masse** | **Temps** | **Pression** | **Force** | **Energie** | **Puissance** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Mètre*** | *Kilogramme* | *Seconde* | *Pascal* | *Newton* | *Joule* | *Watt* |
| ***(m)*** | ***(Kg)*** | ***(S)*** | ***(Pa)*** | ***(N)*** | ***(J)*** | ***(W)*** |
| ***L*** | $M$ | $T$ | $ML^{-1}T^{-2}$ | $MLT^{-2}$ | $ML^{2}T^{-2}$ | $ML^{2}T^{-3}$ |

## I-4 Les propriétés physiques des fluides :

### I-4-1. La masse volumique et densité :

#### a- La masse volumique :

La masse volumique, $\rho$, d'une substance est définie comme étant le rapport :

$$\rho = \frac{masse}{Volume} = \frac{m}{V} \left(\frac{Kg}{m^3}\right)$$

Où : $\rho$ : Masse volumique en ($kg/m^3$),

$m$ : masse en (kg),

$V$ : volume en ($m^3$).

#### b- La densité

La densité est définie comme étant le rapport de la masse volumique d'un fluide sur la masse volumique d'un fluide de référence. Elle est donnée par la relation suivante :

$$d = \frac{\rho_{fluide}}{\rho_{fluide\ \text{de référence}}}$$

Dans le cas des liquides en prendra l'eau comme fluide de référence.

$$d = \frac{\rho_{fluide}}{\rho_{Eau}}$$

Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

$$d = \frac{\rho_{fluide}}{\rho_{Air}}$$

| **Fluide** | **$\rho$(kg/m$^3$)** |
|---|---|
| mercure | 13600 |
| eau pure | 1000 |
| huile | 900 |
| Air | 1.293 |
| butane | 2 |

### I-4-2. Le poids volumique (Poids spécifique) :

C'est le poids de l'unité de volume. On le note $\overline{w}$ Dans le SI, on l'exprime en $N/m^3$. Sa dimension est : $ML^{-2}T^{-2}$

Le poids spécifique et la masse spécifique sont liés par la relation fondamentale :

$$\overline{w} = \rho.g$$

$$\overline{w} = \frac{poids}{Volume} = \frac{G}{V}\left(\frac{N}{m^3}\right)$$

*Sachant que :* $G = m.g = \rho V g$

Il vient :

$$\overline{w} = \frac{G}{V} = \frac{\rho V g}{V} = \rho g$$

$\overline{w}$ : Poids volumique en (N/m$^3$).

$m$ : masse en (kg),

$g$ : accélération de la pesanteur en (m/s$^2$),

$V$ : volume en (m$^3$).

### I-4-3. Le volume massique (Volume spécifique) :

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance.

$$v = \frac{V}{M} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{m^3}{Kg}\right)$$

### I-4-4. Compressibilité :

La compressibilités d'un corps représente la variation de volume du corps en réponse a une variation de pression.

Le coefficient de compressibilités ($\beta$) :

$$\beta = -\frac{dV}{Vdp} \text{ (Pa-}^{1}\text{), (m}^2\text{/N)}$$

$\beta$ : Coefficient de compressibilité (m$^2$/N)

V : volume de fluide (m$^3$)

dV : variation de volume (m$^3$).

dp : variation de pression (N/m$^2$).

### I-4-5. La viscosité :

La viscosité d'un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en couches parallèles ; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, ($\mu$) et on écrit alors :

$$\tau = \boldsymbol{\mu}\frac{dv}{dy}$$

*Remarque :*

Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl) : 1 Pa.s = 1 Pl = 1 kg/m.s

La viscosité cinématique $\vartheta$ est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le ($m^2/s$).

On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique :

$$1\ St = 10^{-4}\ m^2/s.$$

## Applications :

**Exercice1 :**

1- Soit un volume d'huile V= 6m$^3$ qui pèse G= 47KN. Calculer la masse volumique, le poids spécifique et la densité de cette huile sachant que g= 9.81 m/s$^2$.

2- Calculer le poids G et la masse m d'un volume V= 3 litres d'huile de boite de vitesse ayant une densité égale à 0.9.

***Solution***

1- Masse volumique :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m.g}{V.g} = \frac{G}{V.g}$$

$$\rho = \frac{47.10^3}{6.9,81} = 798,5 \text{ kg/m}^3$$

- Poids volumique :

$$\overline{w} = \rho.g = 5,798.9,81 = 3.7833 \text{ N/m}^3$$

- la densité :

$$d = \frac{798,5}{1000} = 0.798$$

2- le poids :

$$G = m.g = \rho.g.V = 0.9\ 10^3.\ 9.81.\ 3.10^{-3} = 26.48 \text{ N}$$

- Masse :

$$m = \rho.V = 0,9\ 10^3.\ 3.10^{-3} = 2,7 \text{ kg}$$

**Exercice2 :**

On comprime un liquide dont les paramètres à l'état initial sont: $P_1$= 50bar et $V_1$= 30.5 $dm^3$ et les paramètres à l'état final sont: $P_2$= 250bar et $V_2$= 30$dm^3$. Calculer le coefficient de compressibilité β de ce liquide.

***Solution***

$$\beta = -\frac{dV}{Vdp} = -\frac{(30{,}5 - 30)}{30{,}5(250 - 50)}$$

$$\beta = -8{,}2.\,10^{-3} bar^{-1}$$

## II-1 Introduction :

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L'étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides.

## II-2 Pression et Force:

Les particules qui forment un fluide ne sont pas immobiles les unes par rapport aux autres. Elles sont agitées de façon désordonnée ce qui provoque de nombreux chocs entre elles et avec les parois. Par ces chocs, le fluide applique une force sur les parois. Ces forces sont appelées *forces de pression*.

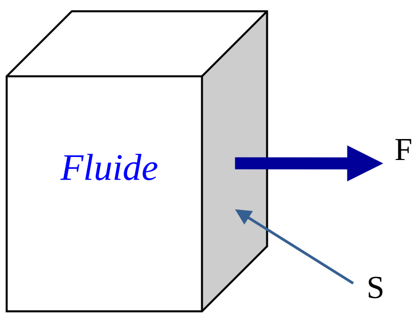



***Fig II.1***

Considérons la figure ci-dessus représentant une enceinte contenant un fluide. Ce fluide exerce donc des forces sur chacune des parois. Ces forces sont dirigées vers l'extérieur de l'enceinte et sont perpendiculaires aux parois. Donc la pression est le rapport de la force par unité de surface.

$$P = \frac{force}{surface} = \frac{F}{S}\left[\frac{N}{m^2}\right]$$

L'unité légale (SI) de pression est le Pascal (Pa). $1\ pa = \frac{N}{m^2}$

On utilise également l'hectopascal (hPa) 1hPa = 100 Pa

Il existe de nombreuses autres unités de pression couramment employées dans l'industrie.

- bar: $1bar = 10^5$ Pa
- Atmosphere (atm) : 1 atm=101325 Pa
- Millimètre de mercure (mm Hg) ou torr : 1 mm Hg=133,32 Pa.

### II-3 Propriétés de la pression en un point :

On découpe, dans un liquide au repos, un cylindre infiniment petit, de sections transversales **dS** (droite et centrée sur un point **M**) et dS' (centrée sur un point **M'** et d'orientation quelconque définie par l'angle α) (figure II.2). Soient p la pression normale à dS et p' la pression normale à dS'.

On a par définition : dF = p.dS et dF' = p'.dS'

L'équation d'équilibre du système s'écrit :

$$P'.dS'.\cos\alpha - p.\,dS = 0 \;\Rightarrow\; p.\,dS = p'.dS'.\cos\alpha$$

Or dS = dS'.cos α

D' où p'.dS'.cos α = p. dS.cos α

Et finalement on a : p = p'

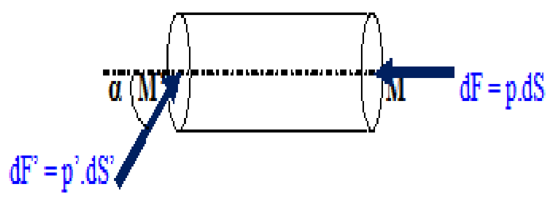



*Fig II.2*

Par conséquent, la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos est la même dans toutes les directions.

### II-4 Equation fondamental de l'hydrostatique :

On considère un élément de fluide de masse volumique **ρ** représentant une colonne verticale (parallèle a l'axe (Oz)) de section transversale constante S.

Le fluide étant en équilibre, la somme des forces dans la direction verticale est donc égale à Zéro :

- Force due a $p_A$ : $F_A = p_A S$
- Force due a $p_B$ : $F_B = p_B S$
- Force due au poids de la colonne du liquide :

  G = mg = ρgV = $\rho g S\,(Z_B - Z_A)$

Avec V = Volume de l'élément considéré

Si l'on considère le sens positif vers le haut, la condition d'équilibre s'écrit donc :

$$F_A - F_B - G = 0 \quad \Rightarrow \quad p_A S - p_B S - \rho g S(Z_B - Z_A) = 0$$

Et donc :

$$\Rightarrow \quad p_A - p_B = \rho g(Z_B - Z_A)$$

$$\Rightarrow p_A - p_B = \rho g h$$

$\rho$ est la masse volumique du fluide en (kg/m$^3$)

$h$ est la dénivellation entre les deux points A et B en (m)

g est l'accélération de la pesanteur (9,81 N/kg).

$\Delta p = p_A - p_B$: est la différence de pression en (Pa).

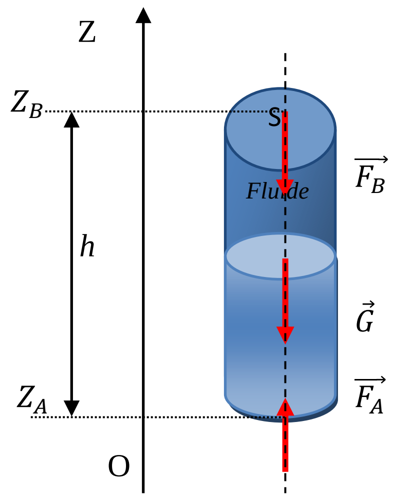



**Fig II.3**

## II-5 Pression absolue et relative (manométrique) :

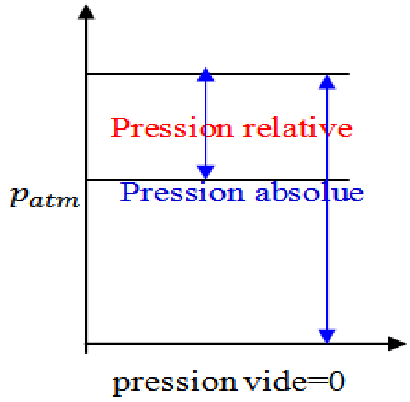
La pression absolue est définie par rapport a la pression dans le vide qui correspond a la pression nulle .la pression absolue minimale possible est donc zéro. Il est courant de mesurer la pression de liquide relativement à la pression atmosphérique (pression de l'air). On parle alors de pression relative. De cette façon, la pression à la surface libre d'un liquide est égale a zéro. On sait que

$$p_1 = p_2 + \rho g h$$

Si $p_2 = p_{atm}$ alors:

$$p_1 = p_{atm} + \rho g h \;\Rightarrow \text{Pression absolue}$$

$$p_1 = \rho g h \quad \Rightarrow \text{ Pression relative}$$




On conclure que :

***Pression absolue= pression relative+ pression atmosphérique***

## II-6 Transmission des pressions dans les liquides :

### II-6-1. Théorème de Pascal :

Toute variation de pression en un point d'un liquide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide

### II-6-2. Application : Principe de la presse hydraulique

Soit le schéma de principe d'une presse hydraulique (Fig. II.4). On y produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante, en considérant la surface d'un piston à la sortie 2 plus large que celui à l'entrée 1.

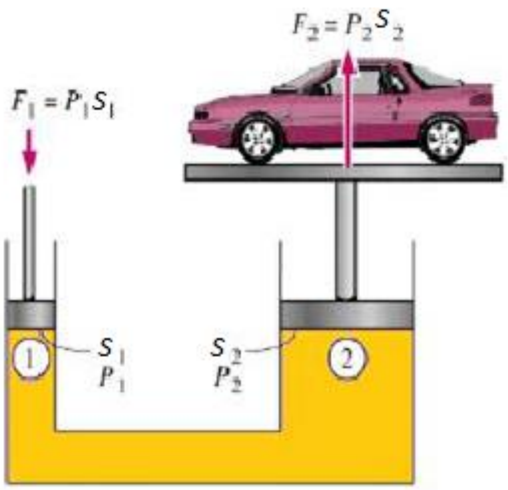



***Fig II.4 :*** *Principe d'une presse hydraulique*

Lorsque les deux pistons 1 et 2 sont sur le même niveau (***Fig. II.4***), on a : $p_1 = p_2$

Soit : $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$

Il vient,

Le rapport de section $\frac{S_2}{S_1}$ induit un grand avantage en terme de force de levage, voir : Si,

$$S_2 >> S_1 \Rightarrow F_2 >> F_1$$

### II-6-3. Equilibre de deux fluides non miscibles :

Un tube en U rempli d'un liquide de masse volumique ($\rho_B$), si dans l'une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique ($\rho_A$) est versé, il est observé une dénivellation ($h = h_A - h_B$), entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D'après le principe de Pascal, il est possible d'écrire les équations suivantes :

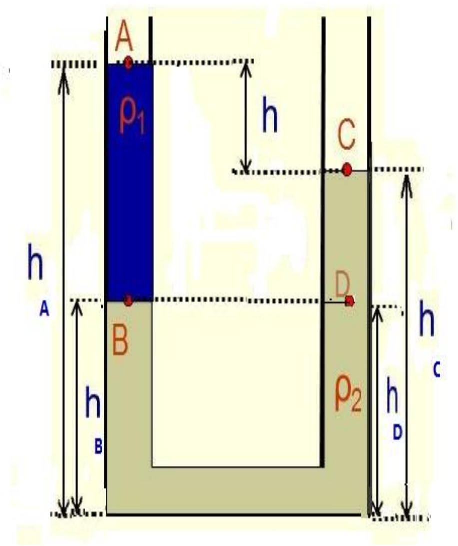



***Fig II.5***

$$\begin{cases} p_D = p_{atm} + \rho_B g(h_B - h_D) \\ p_C = p_{atm} + \rho_A g(h_A - h_C) \end{cases} \Rightarrow \cancel{p_{atm}} + \rho_B g(h_B - h_D) = \cancel{p_{atm}} + \rho_A g(h_A - h_C)$$

Et puisque $h_D = h_C$ (même plan horizontal d'un même fluide)

Alors $\rho_B g(h_B - h_D) = \rho_A g(h_A - h_C) \Rightarrow \rho_A = \frac{\rho_B(h_B - h_D)}{(h_A - h_C)}$

La simple mesure des hauteurs des deux fluides permet de déterminer la masse volumique d'un fluide. De même ce concept est utilisé pour la masure des pressions avec les manomètres à colonne de liquide ou manomètre différentiel.

## II-7 Forces hydrostatiques sur les parois :

Cette force est définie comme étant la force de pression exercée par un fluide au repos sur une surface de contacte, cette force est toujours normale a la surface. Le calcul des forces hydrostatiques sur une surface quelconque plongée dans l'eau, consiste à déterminer l'intensité de la force et son point d'application.

On traitera dans ce qui suit le cas des surfaces planes ensuite les surfaces courbées.

### II-7.1 Surfaces planes

Soit une plaque de forme quelconque immergée et inclinée d'un angle α.

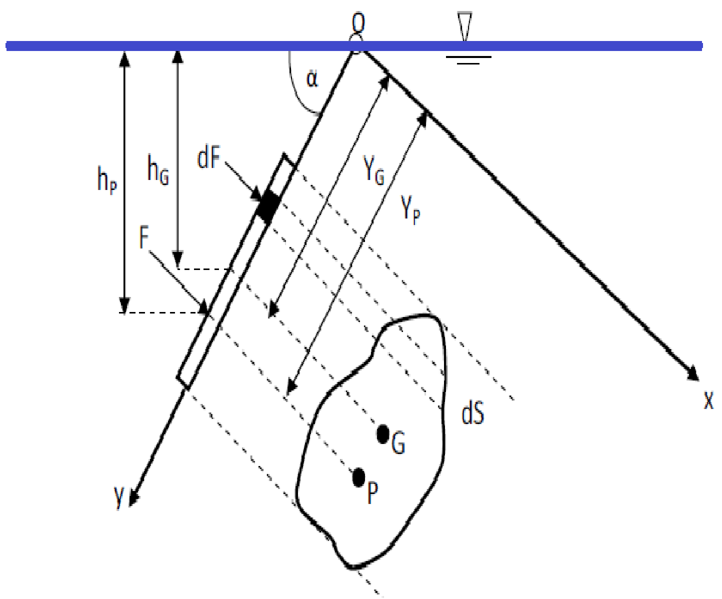



***Fig II.6* :** Force exercée par un fluide au repos sur une paroi solide fixe

Soit un élément de surface de la plaque dS, la pression qui s'exerce sur cet élément est :

$$p = \rho g h$$

La force de poussée exercée sur l'élément sera :

$$dF = p\, dS = \rho g h\, dS$$

Donc la force de poussée totale sur la plaque sera :

$$F = \int dF = \int \rho g h \, dS$$

$$h = y \sin \alpha$$

D'ou:

$$F = \int \rho g y \sin \alpha \;\; dS = \rho g \sin \alpha \int y \, dS$$

Le terme $\int y \, dS$ représente le moment statique de la surface par rapport à l'axe Ox :

$$\int y \, dS = y_G S$$

Avec $y_G$ ordonnée du centre de gravite.

L'expression de F devient :

$$F = \rho g \sin \alpha \, y_G S$$

$$= \rho g \, y_G \sin \alpha \, S$$

$$= \rho g h_G S$$

Donc l'expression finale de F devient :

$$F = \rho g h_G S$$

$h_G$ est la profondeur du centre de gravite de la surface

S est l'aire de la surface

Le point d'application de la force résultante F est appelé : le centre de poussée. La position de ce point est définie par la position du barycentre des surfaces élémentaires $dS$ pondérées par la pression sur chaque surface, ce qui revient a calculer le moment équivalent des forces de pression, c'est-a-dire :

$$y_p F = \int y dF = \rho g \sin \alpha \int y^2 \, dS$$

D'ou :

$$y_p = \frac{\rho g \sin \alpha \int y^2 \, dS}{F}$$

$$y_p = \frac{\rho g \sin \alpha \int y^2 \, dS}{\rho g \sin \alpha \, y_G S}$$

$$y_p = \frac{\int y^2 \, dS}{y_G S}$$

Le terme $M_x = \int y^2\, dS$ représente le moment d'inertie de la surface A par rapport a l'axe Ox.

Le théorème de Huygens nous permet d écrire que:

$$M_x = M_{xG} + {y_G}^2 S$$

Ou :$M_{xG}$ représente le moment d'inertie de la surface A par rapport a l'axe qui passe par le centre de gravite.

Dans ce cas, la formule de $y_p$ devient :

$$y_p = y_G + \frac{M_{xG}}{y_G S}$$

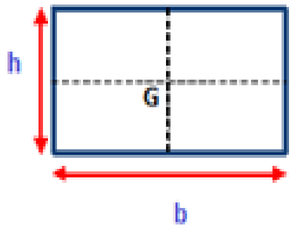
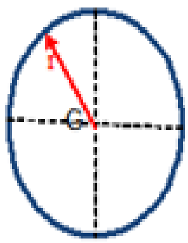
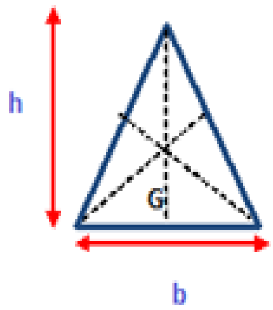
Cette formule montre que le point d'application de la résultante F se trouve toujours ***plus bas*** que le centre de gravite d'une distance égale a :

$$\frac{M_{xG}}{y_G S}$$

La profondeur du centre de poussée par rapport a la surface libre est donnee par :

$$h_p = y_p \sin \alpha$$

Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

| Forme | Surface | Centre de gravite | Moment d'inertie $M_x$ |
|---|---|---|---|
| Rectangle   | $bh$ | $\frac{bh}{2}$ | $\frac{bh^3}{2}$ |
| Cercle   | $\pi r^2$ | r | $\frac{\pi r^4}{4}$ |
| Triangle   | $\frac{bh}{2}$ | $\frac{h}{3}$ | $\frac{bh^3}{36}$ |

## II-7-2. Surfaces courbes :

Soit une paroi AB de surface S courbée totalement immergée dans un liquide $\boldsymbol{\rho}$.

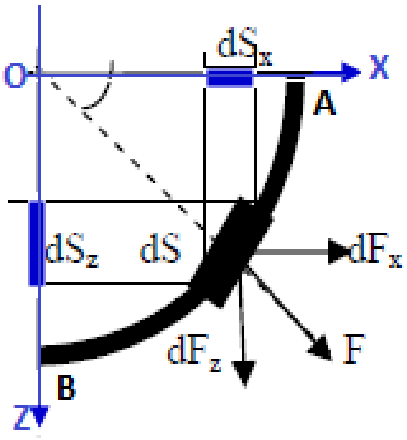



***Fig II.7 :*** Surface solide courbe

La résultante des forces de pression F peut être décomposée en composantes

$F_x$ : force agissant sur la surface $S_z$ projection de S sur l'axe z.

$F_z$ : force agissant sur la surface $S_x$ projection de S sur l'axe x.

On sait que :

$$dF = pdS = \rho gh\, dS$$

D'ou :

La composante horizontale de la force de pression $F_x$ sur toute la surface correspond à la force hydrostatique qui agirait sur la projection de S selon l'axe z, $S_z$

$$F_X = \int_S dF_X = \int pdS_z = \rho g \int h_C\, dS_z$$

$$F_H = F_X = \rho g h_C\, S_Z$$

Avec :

Sz : Projection verticale de la surface courbe AB.

Le calcul de la composante horizontale $F_H$ est ramène au calcul d'une force de pression sur une surface plane verticale.

La composante verticale ($F_V$) est égale a :

$$F_z = \int_S dF_z = \rho g \int h\, dS_x$$

$$F_z = \rho g \iiint dV$$

$$F_V = F_z = \rho g V$$

Cette formule montre que la composante verticale $F_v$ est le Poids du fluide compris entre la surface courbée et la surface libre.

Le calcul des deux composantes $F_H$ et $F_V$ permet ensuite de déterminer la résultante F par l'expression suivante : $F = \sqrt{F_V^2 + F_H^2}$

Le centre de poussée est obtenu par l'intersection entre la surface courbée et la ligne d'action de la force résultante en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante F par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante

$$\tan\theta = \frac{F_V}{F_H} \quad \Rightarrow \quad \theta = arctg\frac{F_V}{F_H}$$

## II-8. Principe d'Archimède :

Soit une surface fermée formant un corps solide de masse volumique $\rho_s$ et de volume $V$immerge dans un fluide de masse volumique $\rho$.

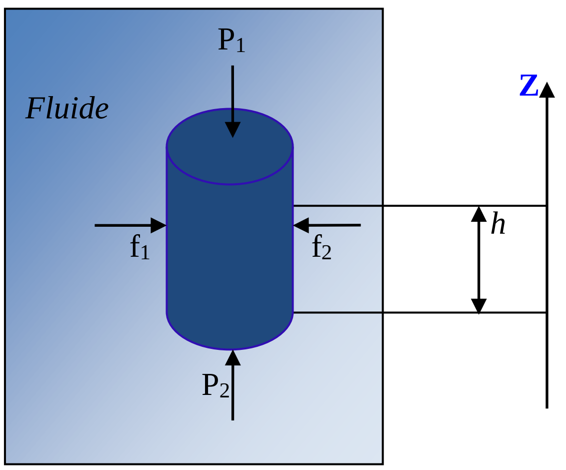



*Fig II.8: Corps solide immergé dans un fluide*

- les forces radiales de pression qui s'exercent sur la paroi verticale et qui sont diamétralement opposées et s'annulent deux à deux ($f_1$ et $f_2$)

- Les forces verticales qui agissent sur l'élément du volume sont dues aux pressions hydrostatiques. La résultante de ces forces est :

$$F_R = (p_2 - p_1)S = \rho g(Z_2 - Z_1)S$$

$$F_R = \rho g h S = \rho g V$$

Par conséquent, un corps immerge dans un fluide est soumis a l'action de la poussée verticale opposée en direction et égale au poids du fluide déplacé par le corps :

$$F_A = \rho g V$$

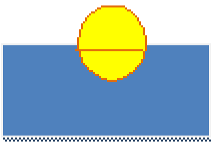
La force $F_A$ s'appelle la force d'Archimède.

***Théorème d'Archimède :***

*Tout corps plonge dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide immerge du corps.*

Exemple :

Un ballon de volume V=15 dm$^3$ et de masse m=700g flotte a la surface de l eau.



1- Déterminer le volume de la partie du ballon immergée dans l'eau.
2- On maintient le ballon immobile sous l'eau. quelle est l'intensité de la force d' Archimède exercée par l'eau sur ballon.

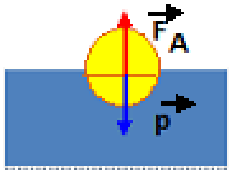
On donne $\rho_{eau} = 10^3$ kg/m$^3$

Solution:

1- Le ballon qui flotte est soumis a l action de deux forces

$\overrightarrow{F_A}$ : la poussée d'Archimede.

$\vec{P}$ : Son poids.




a l'équilibre ses deux forces sont opposées et ont même intensité.

$F_A = P \Rightarrow \rho_{eau} V_{im} g = mg \Rightarrow \rho_{eau} V_{im} = m$ d' où

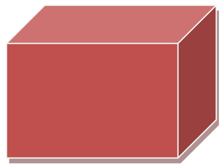
$$V_{im} = \frac{m}{\rho_{eau}} \Rightarrow V_{im} = \frac{700.10^{-3}}{10^3} = 7.10^{-4} m^3$$

2- lorsque le ballon est complètement immergé dans l'eau l'intensité de la force d'Archimède exercée par l'eau sur le ballon est :

$$F_A = \rho_{eau} V g = 10^3 . 15 . 10^{-3} . 9{,}8 = 147\ N$$

## Applications :

1- Une brique de dimension (20x10x5) cm pèse 2.5 kg. Quelle pression exerce-t-elle sur le sol suivant la face sur laquelle on la pose ?



*Solution* :

Force1: $p_1 = F/S_1 = \frac{2,5.9,8}{0,2.0,1} = 1226,25\text{Pa}.$

Force2 : $p_2 = F/S_2 = \frac{2,5.9,8}{0,2.0,05} = 2425.50 \text{ Pa}.$

Force3 : $p_3 = F/S_3 = \frac{2,5.9,8}{0,1.0,05} = 4905 \text{ Pa}$

.

2- Calculer la pression relative et la pression absolue auquel est soumis un plongeur en mer à une profondeur de 31.6m.

On donne $\rho_{\text{eau de mer}} = 1025 \text{ kg/m}^3$

*Solution :*

Pression relative :

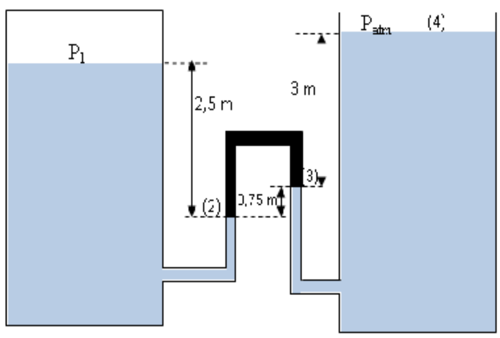
$P_r = \rho_{\text{eau de mer}}\, g\, h = 1025.\ 9.81.\ 31.6 = 317\,746 \text{ Pa} = 3.17 \text{ bar}$

Pression absolue = Pression relative + pression atmosphérique

Soit

$P_{abs} = 317\,746 + 101\,325 = 419\,071 \text{ Pa} = 4.19 \text{ bar}$

3- Deux réservoirs d'eau sont relie entre eux par un manomètre contenant du mercure ($d_{Hg}$=13,6). Calculer la pression $P_1$ du réservoir gauche.



*Solution :*

En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique entre les points 1 et 2, 2et3 puis 3et4 on trouve :

$$(\mathrm{PFS}) \Rightarrow \Delta p = \rho g h$$

$$p_2 - p_1 = \rho_{eau} g h_1 \Rightarrow p_1 = p_2 - \rho_{eau} g h_1$$

$$p_1 = p_2 - \rho_{eau} g h_1 \Rightarrow p_1 = p_2 - 10^3 .9{,}81.2.5 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$p_2 - p_3 = \rho_{hg} g h_2 \Rightarrow p_2 = p_3 + \rho_{hg} g h_2$$

$$\Rightarrow p_2 = p_3 + \rho_{Hg} g h_2$$

$$p_2 = p_3 + 13{,}6.10^3 .9{,}81.0{,}75 \ldots \ldots (2)$$

$$p_3 - p_4 = \rho_{eau} g h_3$$

$$\Rightarrow p_3 = p_4 - 10^3 .9{,}81.3 \ldots \ldots (3)$$

Si l'on calcule la pression $P_1$ a partir de la pression atmosphérique c'est à dire cette pression est manométrique, on soustrait donc $P_4$ $(p_4 = 0)$ et on trouve :

$$p_3 = 29430 \; pa$$

$$p_2 = 129492 \; pa$$

$$p_1 = 104967 \; pa$$

## III-1 Introduction :

Le fluide n’est plus maintenant en équilibre statique, mais en mouvement (écoulement).

La cinématique des fluides est l’étude l’observation, la description d’un écoulement sans en considérer les causes.

## III-2 Description des écoulements :

Dans l étude du mouvement d un fluide, on définit généralement en chaque point M : la vitesse$\vec{V}$, la masse volumique ρ et la pression $p$ .

### Définitions :

On peut observer différentes types de régimes dans l écoulement d un fluide :

a- Régime permanent (ou stationnaire) : les grandeurs ne dépendent pas du temps

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0\,, \vec{V} = \vec{V}(M)$$

(Cela ne signifie pas que le fluide a une vitesse constante partout, mais seulement que la vitesse du fluide en un point donne est la même a chaque instant).

b- Régime uniforme : la vitesse ne dépend pas du point considère $\vec{V} = \vec{V}(t)$.

c- Régime laminaire : les couches de fluide glissent les unes par rapport aux autres, les vitesses sont contenues.

d- Régime turbulent : les vitesses sont discontinues, les couches de fluide s interpénètrent de façon aléatoire.

## III-3 Description du mouvement d'une particule :

A la différence de la mécanique des solides, il est illusoire en mécanique des fluides de vouloir décrire la trajectoire de chaque particule du système considère.

Il est ici nécessaire de faire intervenir une autre description (macroscopique) du mouvement.

Deux méthodes différentes peuvent être utilisées, qui diffèrent par le choix des variables adoptées.

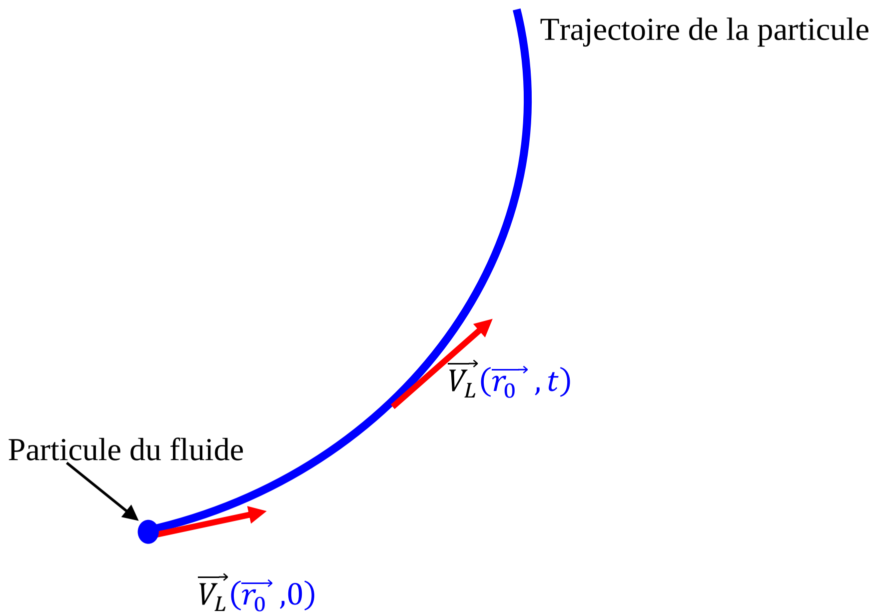
### III-3-1 Description Lagrangienne:

Dans le cadre de la description lagrangienne, on suit une particule fluide dans son mouvement, issue d'un point fixé $M_0$ $\left(\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r_0}\right)$ et on regarde sa position à chaque instant *t*.

Par exemple, la particule de fluide dont il est question précédemment, sera en $M$ (x, y, z) à l'instant t. Le mouvement est connu si on connait les coordonnées (x, y, z) en fonctions de ($x_0$, $y_0$ , $z_0$) et du temps t :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \Longrightarrow \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} V_x = \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ V_y = \dfrac{\partial y}{\partial t} \\ V_z = \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \vec{V}(r_0, t)$$

Les variables $r_0$ $(x_0, y_0, z_0)$ et t sont appelés, les ***variables de Lagrange***



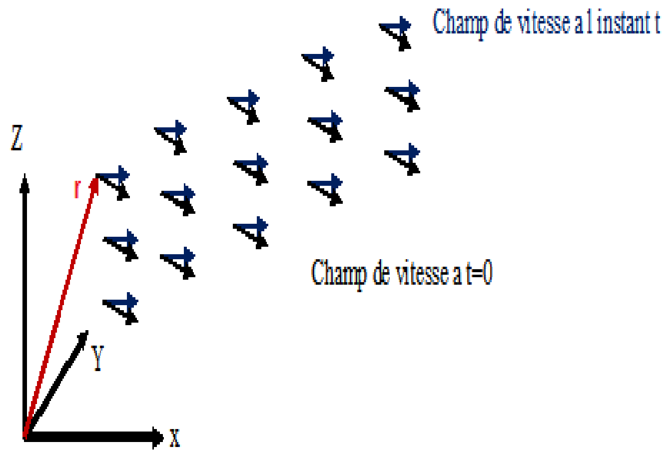
### III-3-2 Description Eulérienne:

Dans l'approche eulérienne, au lieu de suivre les particules fluides dans leur mouvement, on se place en un point fixe du référentiel d'étude et on détermine la vitesse de la particule à un instant donné t.

On connaît l'écoulement lorsque l'on connaît le champ des vitesses ; $\vec{V}(\vec{r_0}, t)$

$$\vec{V}(M,t) = \vec{V}(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} V_x & = V_x\ (x,y,z,t) \\ V_y & = V_y\ (x,y,z,t) \\ V_z & = V_z\ (x,y,z,t) \end{bmatrix}$$

Les variables d'Euler sont, la position du point d'observation r(x, y, z) et le temps t.

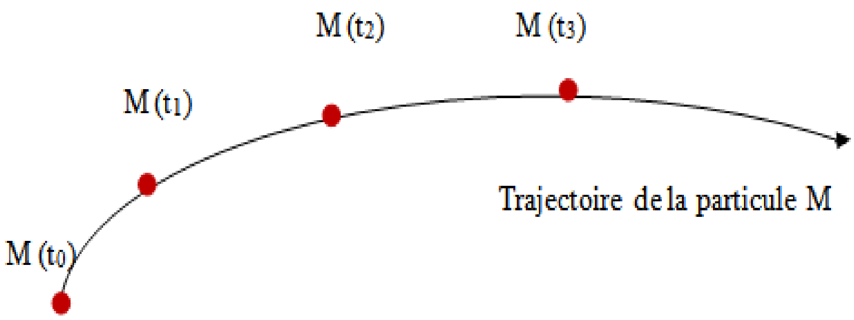



En mécanique des fluides, on ne s'intéresse généralement pas à la trajectoire individuelle des particules. Ce qui intéresse, c'est de savoir comment varie la vitesse en tout point de l'écoulement à tout instant, c'est pour cette raison que la description eulérienne est la plus utilisée.

## III-4 ligne de courant et trajectoire:

### III-4-1 Définitions :

La trajectoire d'une particule de fluide est définie par le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours du mouvement. On peut les visualiser on injectant un traceur (fumée, liquide colorée…)




On peut définir plusieurs grandeurs caractérisant le mouvement d'un fluide :

- Les lignes de courant sont les lignes du champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{r}\,,t)$.elles sont définies comme les courbes tangentes en chacun de leurs points au vecteur vitesse en ce point.
- On définit par tube de courant (ou filets de courant) l ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.
- Les lignes d'émission (ou filets de fluide) en un point M et l instant $t_0$ : sont les lieux des positions a l instant t des particules qui sont passées au point M aux instant précédents, $t \leq t_0$. Elles peuvent être mises en évidence en injectant un colorant au point considéré.

### III-4-2 Expression de la trajectoire:

Si on connait la vitesse $\vec{V}(M,t) = \vec{V}(x,y,z,t)$ en description eulérienne, on peut déterminer les trajectoires des particules en intégrant cette vitesse par rapport au temps.

En effet par définition, $$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}$$

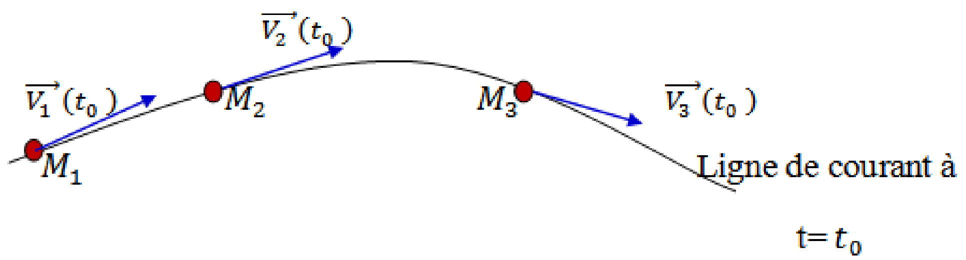
On obtient donc le système différentiel : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x\ (x, y, z, t\ ) \\ \frac{dy}{dt} = V_y\ (x, y, z, t\ ) \\ \frac{dz}{dt} = V_z\ (x, y, z, t\ ) \end{cases}$

En ingérant ce système avec les conditions initiales à $t_0$ on obtient la position à chaque instant:

$$\vec{r}\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \vec{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{V}(\vec{r_0}\ , t)dt$$

En éliminent le temps on obtient une relation entre les variable (x, y, z) qui correspond à l'équation de la trajectoire.

### III-4-3 Ligne de courant :




Une ligne de courant est définit comme la courbe qui en chacun de ses points est tangente au vecteur vitesse à l'instant t. L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps. Expression de la ligne de courants:

Soit $\overrightarrow{dM} = (dx, dy, dz)$ un élément d'une ligne de courant.

On a $\overrightarrow{dM}$ est parallèle en $M$ a la vitesse $\vec{V}(M, t\ )$ : $\overrightarrow{dM} // \vec{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{dM} \wedge \vec{V} = 0$

$$\vec{V}(M, t\ ) = \vec{V}(x, y, z, t\ ) = \begin{bmatrix} V_x = V_x\ (x, y, z, t\ ) \\ V_y = V_y\ (x, y, z, t\ ) \\ V_z = V_z\ (x, y, z, t\ ) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{dM} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} dyV_z & -dzV_y \\ dxV_y & -dyV_x \\ dxV_z & -dzV_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de la ligne de courant s'obtient en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{V_x\ (x,y,z,t\ )} = \frac{dy}{V_y\ (x,y,z,t\ )} = \frac{dz}{V_z\ (x,y,z,t\ )}$$

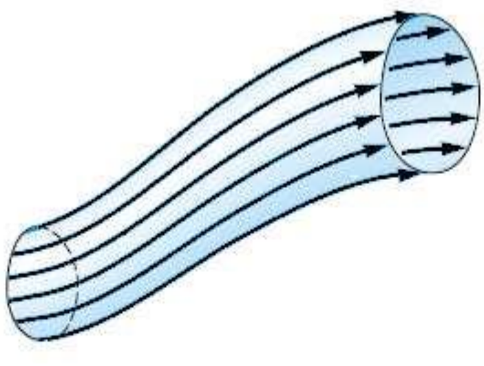
***Remarque***:

- Une trajectoire est propre à une particule, elle est donc indépendante du temps (seule la position de la particule sur sa trajectoire dépend du temps).
- Une ligne de courant est donc variable dans le temps, puisque c'est le cas des vecteurs vitesse sur lesquels elle « s'appuie »
- Il n'y a aucune raison pour que trajectoire et ligne de courant puissent s'identifier.

Ce n'est vrai que dans le cas d'un écoulement stationnaire (les champs eulériens sont tous indépendants du temps).

### III-4-4 Tube de courant :

Un tube de courant est une surface composée de lignes de courant et qui s'appuie sur un contour fermé.



Tube de courant

## III-5 Dérivée particulaire :

Considérons une grandeur physique locale G (M, t) attachée à une particule de fluide située en M à l'instant t. On peut penser à la température, la pression, la densité etc. Cherchons à calculer le taux de variation de cette grandeur lorsque l'on suit la particule. On appelle cette grandeur la dérivée particulaire et on la note $\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{Dt}}$.

$$\frac{DG}{Dt} = \lim_{\mathrm{dt} \to 0} \frac{\mathrm{G}(\mathrm{x}+\mathrm{dx}\,,\mathrm{y}+\mathrm{dy},\mathrm{z}+\mathrm{dz}\,,\mathrm{t}+\mathrm{dt}) - \mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

Avec :

$$\mathrm{v_x} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \quad , \quad \mathrm{v_y} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} \quad , \quad \mathrm{v_z} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}$$

Donc

$$\frac{DG}{Dt} = \lim_{\mathrm{dt} \to 0} \frac{\mathrm{G}\big(\mathrm{x}+\mathrm{v_x}.\mathrm{dt}\,,\mathrm{y}+\mathrm{v_y}.\mathrm{dt},\mathrm{z}+\mathrm{v_z}.\mathrm{dt},\mathrm{t}+\mathrm{dt}\big) - \mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

En développant au 1$^{er}$ ordre le 1$^{er}$ terme, l'expression devient :

$$\frac{DG}{Dt} = \lim_{\mathrm{dt} \to 0} \frac{\mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t}) + \mathrm{v_x}\frac{\partial G}{\partial x}\mathrm{dt} + \mathrm{v_y}\frac{\partial G}{\partial y}\mathrm{dt} + \mathrm{v_z}\frac{\partial G}{\partial z}\mathrm{dt} + \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{dt} - \mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{Dt}} = \left(\mathrm{v_x}\frac{\partial G}{\partial x} + \mathrm{v_y}\frac{\partial G}{\partial y} + \mathrm{v_z}\frac{\partial G}{\partial z}\right) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{Dt}} = \left(\vec{v}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\mathrm{G} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

## II-6 Accélération d'une particule :

Calculons l'accélération d'une particule de fluide à partir du champ de vitesse eulérien$\vec{v}(M,t)$.

L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse en suivant une particule de fluide. On a donc :

$$\vec{a} = \frac{D\mathrm{v_x}}{Dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{D\mathrm{v_y}}{Dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{D\mathrm{v_z}}{Dt}\overrightarrow{u_z}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \mathrm{a_x} = \dfrac{D\mathrm{v_x}}{Dt} = \dfrac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\mathrm{v_x} \\ \mathrm{a_y} = \dfrac{D\mathrm{v_y}}{Dt} = \dfrac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\mathrm{v_y} \\ \mathrm{a_z} = \dfrac{D\mathrm{v_z}}{Dt} = \dfrac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\mathrm{v_z} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\overrightarrow{a}(M,t) = \frac{\mathrm{D}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{Dt}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v}$$

Le premier terme est lié au caractère non permanent de l'écoulement alors que le second au fait que la particule, en se déplaçant, visite des endroits où la vitesse change.

## Applications :

***Exercice 1:***

Considérons le champ de vitesse d'un écoulement de fluide incompressible donnée par :

$$\vec{V} = (0.5 + 0.8x)\vec{\imath} + (1.5 - 0.8y)\vec{\jmath}$$

- Calculez l'accélération matérielle au point (x, y) = (2, 3).

*Solution :*

Utilisons l'équation de l'accélération matérielle en cordonnées cartésiennes.

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) v_x$$
$$= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Et $$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

On obtient

Au point (x, y) = (2, 3)

$$a_x = 0.8(0.5 + 0.8x) = 1.68 \ \ m/s^2$$
$$a_y = -0.8(1.5 - 0.8y) = 0.72 \ \ m/s^2$$

***Exercice 2:***

On considère un écoulement permanent défini dans un repère (0, x, y, z) par le champ des vitesses suivant, en variables d'Euler :

$$\vec{V} \begin{cases} v_x = 2x - 3z \\ v_y = 0 \\ v_z = 3x - 2z \end{cases}$$

1- Montrer que le fluide est conservatif (incompressible).

2- Calculer le champ du vecteur d'accélération $\vec{a}$.

3-Déterminer l'équation des lignes de courant.

*Solution :*

1- Nous devons montrer que div $\vec{v} = 0$

Pour cela, il nous suffit de vérifier que l'équation suivante est vraie :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

D'après le champ de vitesse donné, on a :

$$\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial z}=2+0-2=0$$

L'équation de continuité est vérifiée, le fluide est bien conservatif (incompressible).

2- L'accélération est définie par :

$$\overrightarrow{a}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}$$

L'écoulement est permanent d'où, $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$ et donc, $\overrightarrow{a}=(\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}$

$$\begin{cases} \mathrm{a_x} = \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial x}+\mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial y}+\mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial z}=-5x \\ \mathrm{a_y} = \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial x}+\mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial y}+\mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial z}=0 \\ \mathrm{a_z} = \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial x}+\mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial y}+\mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial z}=-5z \end{cases}$$

On obtient, donc :

$$\overrightarrow{a}=-0.5\mathrm{x}\,\vec{\mathrm{i}}-0.5\mathrm{z}\vec{\mathrm{k}}$$

3- Les lignes de courant sont définies par :

$$\frac{dx}{V_x}=\frac{dy}{V_y}=\frac{dz}{V_z}$$

Nous avons $V_y=0$. L'écoulement se situe dans le plan Oxz.

Nous allions transformer cette équation,

$$\frac{dx}{2\mathrm{x}-3\mathrm{z}}=\frac{dz}{3\mathrm{x}-2\mathrm{z}}$$

Ce qui nous donne: $(3\mathrm{x}-2\mathrm{z})dx=(2\mathrm{x}-3\mathrm{z})\,dz$

Par intégration, on obtient : $\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}z^2+2xz=cte$

## IV-1 Introduction :

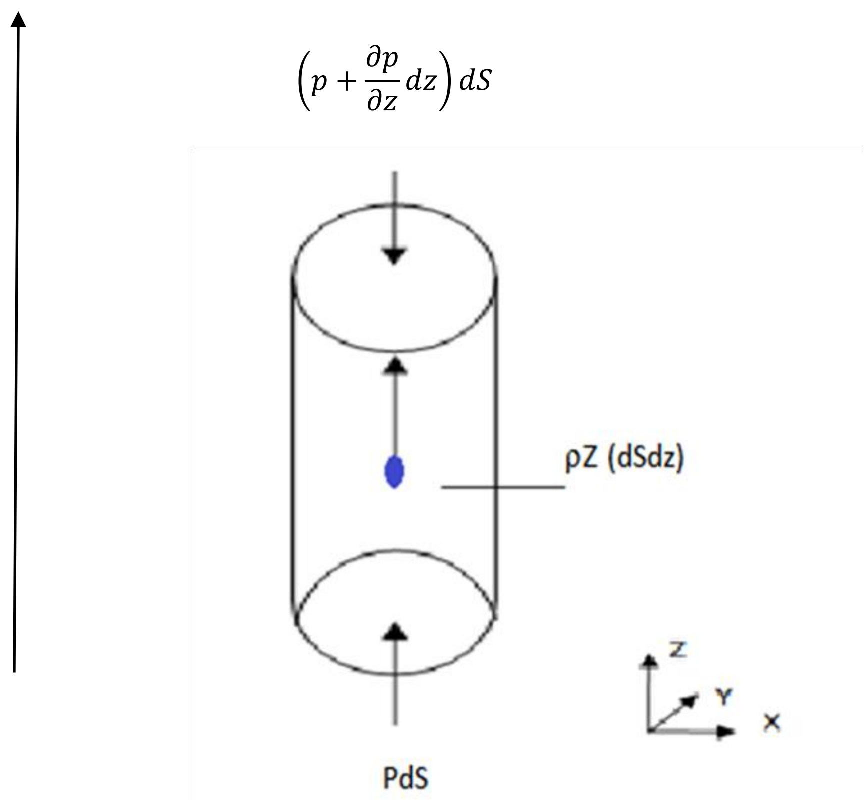
La dynamique étudie les fluides en mouvement pour simplifier le problème, on néglige les frottements. Dans un liquide non visqueux ou parfait en mouvement, la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide au repos.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles, en particulier :

- ✓ l'équation de continuité (conservation de la masse)
- ✓ le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)
- ✓ le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement).

## IV-2 Equations générales de la dynamique des fluides parfaits :

Soit un cylindre élémentaire de fluide parfait qui se déplace. La démonstration se fait dans la direction des z ; pour les autres directions x et y elle se fait de façon analogue.




**FigIV.1**: *Forces agissant sur un élément z volume (dSdz) dans la direction z*

1. La force de volume : $\rho z(dSdz)$
2. Les forces de pression : $pdS$ et $\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dS$
3. La force d'inertie (accélération) : $\rho\frac{dVx}{dt}(dSdz)$

Où $v_x$ est la composante de la vitesse V $(v_x, v_y, v_z)$ selon la direction z

Etant donné que la masse volumique reste constante, l'ensemble des forces satisfait à l'équation de Newton : $\sum F_{ext}^{\rightarrow}$= masse. accélérations

$$\sum F_{ext}^{\rightarrow}=m.a^{\rightarrow}$$

La condition d'équilibre des forces selon la direction des Z s'écrit :

$$pdS-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dS+\rho z(dSdz)=\rho\frac{dVz}{dt}(dSdz)$$

$$\cancel{p}dS-\cancel{p}dS-\frac{\partial p}{\partial z}dz\cancel{dS}+\rho z(d\cancel{S}dz)=\rho\frac{dVz}{dt}(d\cancel{S}dz)$$

Ou par unité de volume :

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho z=\rho\frac{dVz}{dt}$$

On peut écrire de manière identique la condition d'équilibre des forces dans les autres directions, puis sous sa forme vectorielle.

$$\begin{cases}-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho x=\rho\frac{dVx}{dt}\\ -\frac{\partial p}{\partial y}+\rho y=\rho\frac{dVy}{dt}\\ -\frac{\partial p}{\partial z}+\rho z=\rho\frac{dVz}{dt}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{dVx}{dt}\\ y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{dVy}{dt}\\ z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dVz}{dt}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\rho\vec{F}}_{1} - \underbrace{\overrightarrow{grad}p}_{2} = \underbrace{\rho\frac{d\vec{V}}{dt}}_{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(IV.1)$$

1. Force de volume par volume unitaire
2. Force de pression par volume unitaire
3. Force d'inertie par volume unitaire

$\vec{F}$ est le vecteur de force de volume par unité de masse dont les trois composantes sont (X, Y, Z).

Les équations *(IV.1)* sont appelées équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou **équations d'Euler**.

## IV-3. Ecoulement permanent :

Un écoulement est dit ***permanent*** ou stationnaire lorsqu'en chaque point de l'espace,

le vecteur vitesse $\vec{V}$ varie indépendamment du temps.

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} = 0$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit ***non-permanent*** ou ***instationnaire***.

## IV-4. Equation de continuité :

Considérons une veine d'un fluide incompressible (**Fig** $\boldsymbol{IV}$**.2**), de masse volumique $\rho$ animée d'un écoulement permanent.

On désigne par :

- ✓ *S1* et S2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l' instant *t*.
- ✓ *S'1* et S*'2* respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l' instant *t'=(t+dt)*.
- ✓ *S1* et *S1*les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement a travers les sections *S1* et *S2* de la veine.
- ✓ $dx_1$ et $dx_2$ respectivement les déplacements des sections $S_1$ et $S_2$ pendant l'intervalle de temps *dt*,
- ✓ *dm1* : masse élémentaire entrante comprise entre les sections *S1* et *S'1*.
- ✓ *dm2* : masse élémentaire sortante comprise entre les sections *S2* et *S'2*.
- ✓ *m* : masse comprise entre *S 1* et *S 2*,

- ✓ *dV1* : volume élémentaire entrant compris entre les sections *S 1* et *S'1*,
- ✓ *dV2* : volume élémentaire sortant compris entre les sections *S 2* et *S'2*.

**A l'instant *t* :** le fluide compris entre *S 1* et *S 2* a une masse égale à (*dm1+m*)

**A l'instant *t+dt* :** le fluide compris entre *S'1* et *S'2* à une masse égale à (*m+dm2*).

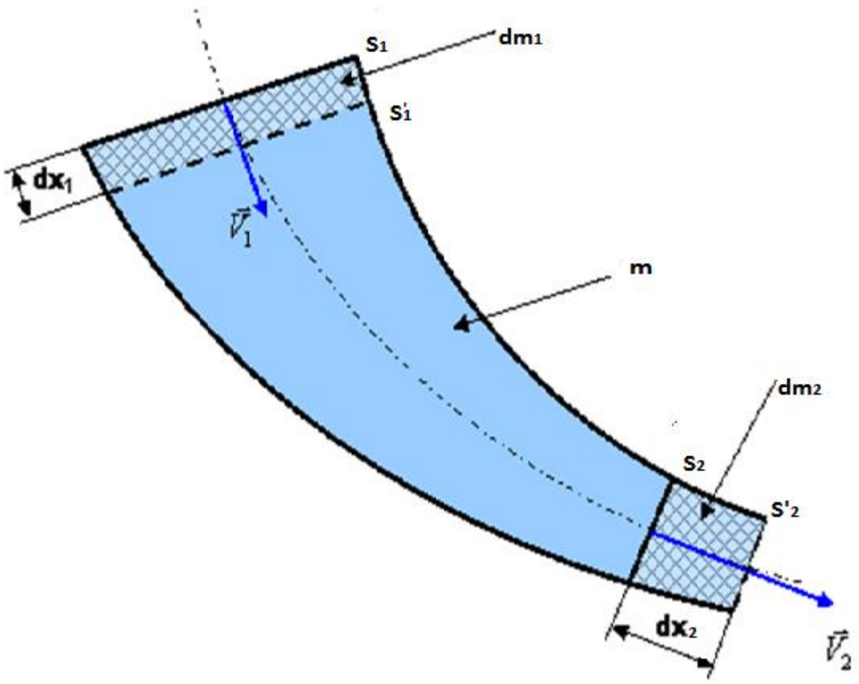



**Fig IV.2 :** *Veine de fluide parfait incompressible*

La masse déplacée étant conservée, on écrit :

$$dm_1 + \cancel{m} = \cancel{m} + dm_2$$

Soit :

$$dm_1 = dm_2$$

Donc,

$$\rho_1 .dV_1 = \rho_2 .dV_2$$

Ou encore :

$$\rho_1 .S_1 .dx_1 = \rho_2 .S_2 .dx_2$$

En divisant par *dt*, on aboutient à :

$$\rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt} \Rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

Puisque le fluide est incompressible :

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

On obtient l'équation de continuité de la sorte :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV.2)$$

Cette relation représente le débit volumique $Q$ exprimé en ($m^3/s$). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

## IV-5 Notion de débit

### *IV-5-1 Débit massique*

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $dm/dt$ quand $dt$ tend vers $0$. Soit :

$$q_m = \frac{dm}{dt} \quad \text{(kg/s)}$$

Où :

- $q_m$ est la masse du fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite, [kg/s].
- $dm$ : masse élémentaire en ($kg$) qui traverse la section pendant un intervalle de temps $dt$.
- $dt$ : intervalle de temps en ($s$)

En tenant compte des équations précédentes, on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho\, S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho\, S_2 \frac{dx_2}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV.3)$$

Avec :

$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = \|\overrightarrow{v_1}\|$ : vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide a travers$S_1$,

$\frac{dx_2}{dt} = v_2 = \|\overrightarrow{v_2}\|$ : vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide a travers$S_2$,

D'après $(IV.3)$

$$q_m = \rho\, S_1 v_1 = \rho\, S_2 v_2$$

Soit dans une section droite quelconque $S$ dans la veine fluide a travers laquelle le fluide s'écoule a la vitesse moyenne $v$:

$$q_m = \rho S\, v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(IV.4)$$

Où :

$q_m$ : Débit massique en (*kg/s*)

$\rho$ : Masse volumique en (*kg/m*$^3$)

$S$ : Section de la veine fluide en (*m*$^2$)

$v$ : Vitesse moyenne du fluide à travers (*S*) en (*m/s*).

### *IV-5-2 Débit volumique*

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport *dV/ dt* quand *dt* tend vers 0.

$$q_V = \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}}$$

Où :

- $q_V$ : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite [m$^3$/s].
- *dV* : Volume élémentaire, en (m$^3$), traversant une surface *S* pendant un intervalle de temps *dt*,
- *dt* : Intervalle de temps en secondes (*s*),

On a aussi la relation entre $q_m$ et $q_V$ :

$$q_V = \frac{qm}{\rho} = \frac{\cancel{\rho}.S.v}{\cancel{\rho}}$$

Soit :

$$q_V = S.v$$

### IV-6 Théorème de Bernoulli (Ecoulement sans échange de travail)

Reprenons le schéma de la veine fluide (**Fig.2**) du paragraphe précédent avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes :

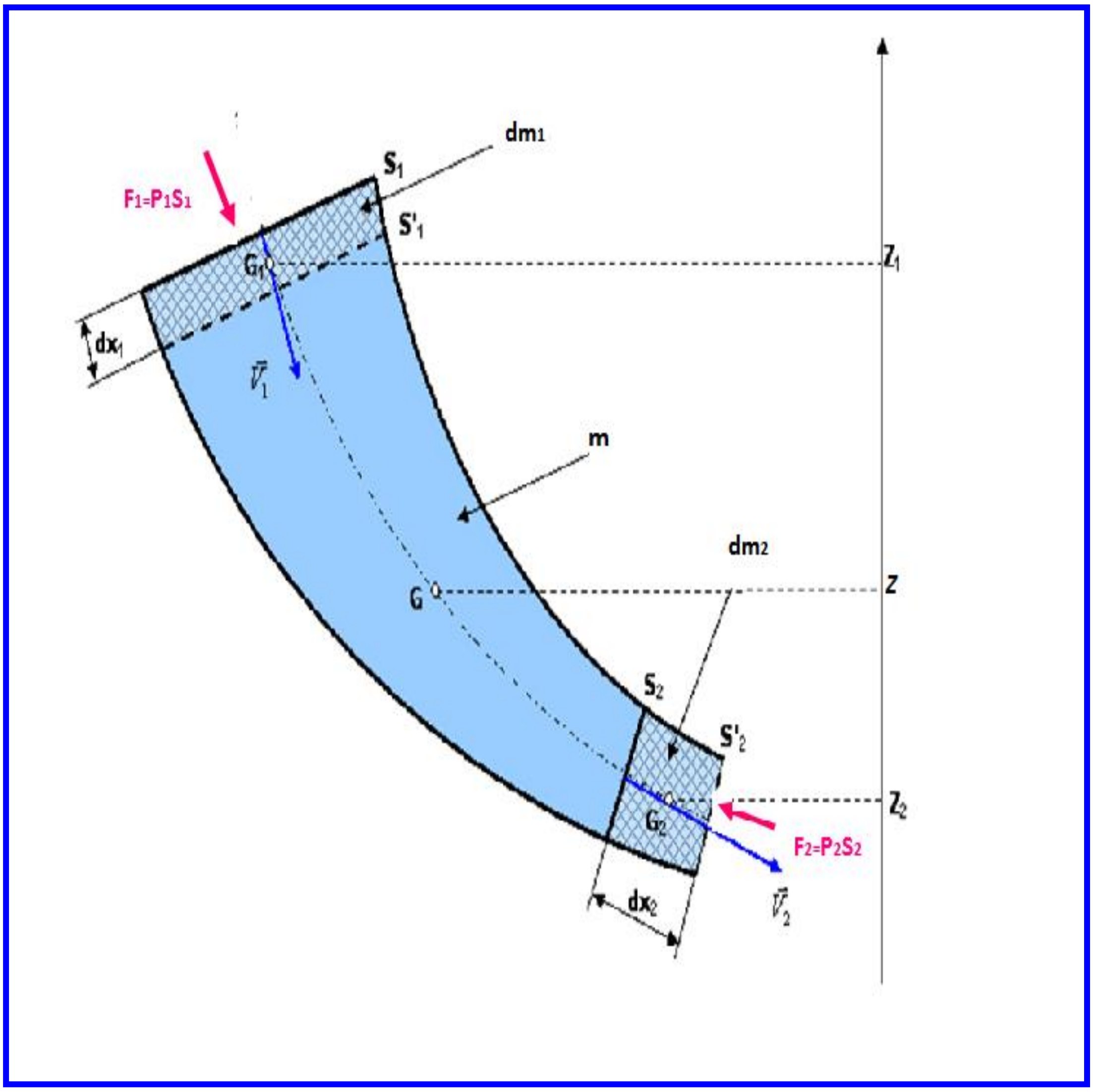
- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

***Application du théorème de l'énergie cinétique***

La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

A l'instant *t*, le fluide de masse ($dm_1 + m$) est compris entre les sections $S_1$ et $S_2$.

A l'instant t' = $(t + dt)$ le fluide de masse ($m+dm_2$) est compris entre $S'_1$ et $S'_2$.




On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les instants t et t+dt. La variation de l'énergie cinétique $\Delta E_c$ est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l'élément fluide, forces de pression).

$$\Delta \boldsymbol{E_c} = \sum \boldsymbol{W}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}} \Rightarrow \quad \frac{1}{2} dm\,(v_2^2 - v_1^2) = dm.g.(z_1 - z_2) + (p_1 s_1 dx_1 - p_2 s_2 dx_2)$$

$$\frac{1}{2} dm\,(v_2^2 - v_1^2) = dm.g.(z_1 - z_2) + (p_1 dV_1 - p_2 dV_2)$$

$$dm = \rho . dV \Rightarrow \ dV = \frac{dm}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} dm\,(v_2^2 - v_1^2) = dm. g. (z_1 - z_2) + \left(p_1 \frac{dm_1}{\rho_1} - p_2 \frac{dm_2}{\rho_2}\right)$$

$$dm_1 = dm_2 = dm$$

Fluide incompressible: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$\frac{1}{2} \cancel{dm}\,(v_2^2 - v_1^2) = \cancel{dm}. g. (z_1 - z_2) + \cancel{dm} \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho}\right)$$

$$\frac{1}{2}\,(v_2^2 - v_1^2) = g. (z_1 - z_2) + \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho}\right)$$

Formes de l'équation de Bernoulli :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 \qquad \text{(J/kg)}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \qquad \text{(m)}$$

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 \qquad \text{(Pa)}$$

## IV-7 Applications de l'équation de Bernoulli

### IV-7-1 Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir de grandes dimensions ouvert à l'atmosphère contenant un liquide de masse volumique$\rho$ et percé d'un petit orifice à sa base à une hauteur h de la surface libre. (S >>s)

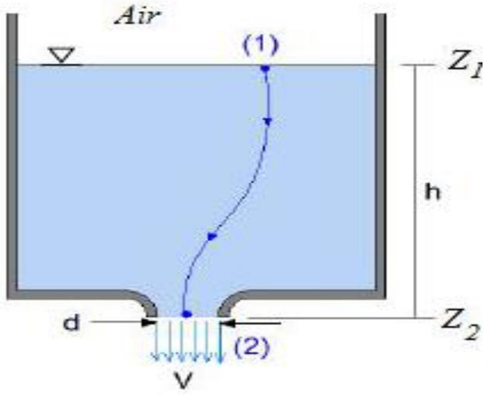



**Fig *IV*.3 :** *Vidange d'un réservoir*

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les 02 points (1) et (2) du réservoir, on écrit :

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2$$

On a : $p_1 = p_2 = p_a$

$z_2 = 0$ Alors $z_1 = h$ (plan de référence en 2)

$v_1 = 0$

$$\cancel{\frac{p_1}{\rho}}+\overset{0}{\cancel{\frac{v_1^2}{2}}}+gz_1=\cancel{\frac{p_2}{\rho}}+\frac{v_2^2}{2}+\overset{0}{\cancel{gz_2}}$$

Il vient donc, $gh = \frac{v_2^2}{2}$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$ (Formule de Torricelli)

$v_2$ est la vitesse théorique $v_{th}$ , par conséquent le débit théorique du fluide recueilli à l'orifice de section $S_2$, est donné par :

$$Q_{th} = v_{th}\,.S_2$$

$$Q_{th} = S_2\sqrt{2gh}$$

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit :

$$v_r = \varphi_1 \ v_{th}$$

$$\varphi_1 = \frac{v_r}{v_{th}}$$

$\varphi_1$ : Coefficient plus petit que 1 ($\varphi_1 < 1$), appelé coefficient de vitesse

La section du fluide à la sortie de l'orifice est : $S_r = \varphi_2 \ S_{th}$

$$\varphi_2 = \frac{S_r}{S_{th}}$$

$\varphi_2$ : Coefficient plus petit que 1 ($\varphi_2$ <1), appelé coefficient de contraction de section.

Donc le débit réel à la sortie de l'orifice est donc :

$$\mathrm{Q_r} = S_r v_r = S_r \varphi_1 \ \sqrt{2gh} \ = \varphi_2 \ S_{th} \ \varphi_1 \ \sqrt{2gh}$$

$$\mathrm{Q_r} = \varphi_2 \ .\varphi_1 \ . Q_{th} = \alpha \ Q_{th}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{Q_r}}{Q_{th}}$$

$\alpha$ : Coefficient plus petit que 1 ;

$\alpha = \varphi_1 \ .\varphi_2$ . : Appelé coefficient de débit.

### IV-7-2 Tube de Venturi

Un venturi est un étranglement de conduit, limité par les sections $S_1$ et $S_2$ où les pressions sont respectivement $p_1$ et $p_2$. Un tel appareil permet de mesurer le débit volumique d'un fluide. La vitesse du fluide circulant dans la conduite augmente dans l'étranglement et sa pression diminue. $V_2 > V_1$, $p_2 < p_1$

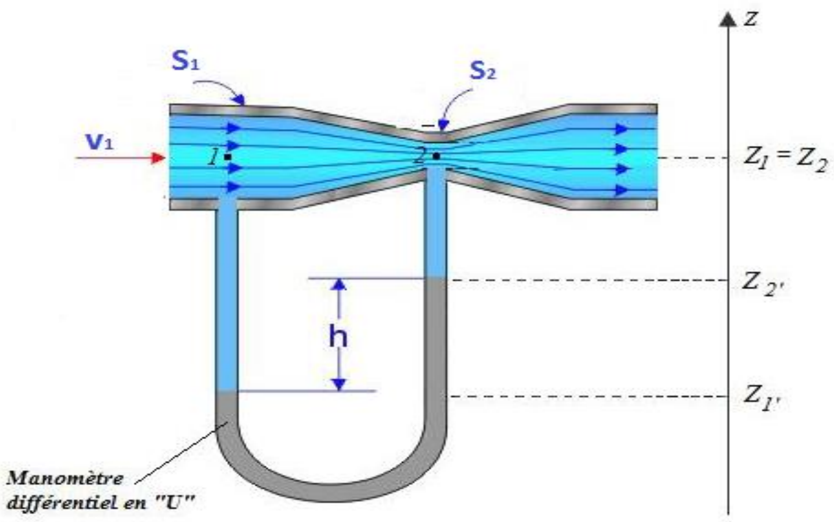



**Fig *IV*.4:** *Tube de Venturi*

On appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux points (1) et (2), on obtient :

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2$$

Ici $z_1 = z_2$ (écoulement horizontal) et l'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_v=S_1v_1=S_2v_2\Rightarrow v_2=S_1\frac{v_1}{S_2}$$

$$\frac{1}{2g}\,(v_2^2-v_1^2)=\left(\frac{p_1}{\rho g}-\frac{p_2}{\rho g}\right)$$

$$p_1-p_2=\frac{\rho}{2}(v_2^2-v_1^2)=\frac{\rho}{2}\left(\left(S_1\frac{v_1}{S_2}\right)^2-v_1^2\right)$$

$$S=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2}\left(\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right)$$

$S_1$ et $S_2$ sont connues (caractéristiques du venturi), p1 et p2 sont données par les hauteurs du liquide manométrique dans le manomètre, on détermine donc la vitesse $v_1$.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right)}}$$

### IV-7-3 Tube de Pitot

Un tube de Pitot, souvent simplement appelé 'Pitot' est l'appareil le plus couramment utilise pour faire des mesures de vitesse dans divers écoulements.

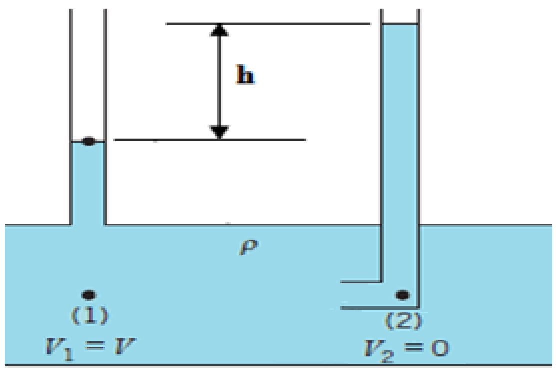



**Fig *IV*. 6 :** *Tube de Pitot*

Le principe est base sur la mesure de la pression statique et de la pression dynamique en un point d'un écoulement.

L’équation de Bernoulli entre 1 et 2 s’écrit:

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2$$

On a :

$Z_1=Z_2$ (même niveau)

$V_2=0$ (point 2 est un point d'arrêt c.-à-d est un obstacle)

L'équation hydrostatique donne : $p_2 - p_1 = \rho g h$

D'ou l'expression de la vitesse du fluide dans la canalisation : $v_1 = \sqrt{2gh}$

### IV-8 Théorème d'Euler :

La connaissance des forces exercées par les fluides en mouvement est d'une importance considérable dans l'analyse et la conception d'objets tel que les pompes, les turbines, les avions …etc. L'équation d'énergie n'est pas suffisante pour résoudre la plupart des ces problèmes. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement a l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = dm\frac{d\,\vec{v}}{dt}$$

Ou *dm* est la masse du fluide contenu dans l'enveloppe limitée par $S_1$ et $S_2$, on sait que le débit massique égal a:

$$q_m=\frac{dm}{dt}$$

Donc, le théorème d'Euler s'écrit,

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{dm}{dt}d\,\vec{v} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Ou

$\vec{v}_1$ est la vitesse du fluide qui entre en $S_1$

$\vec{v}_2$ est la vitesse du fluide qui sort en $S_2$

**Enoncé :**

La résultante ($\Sigma$ $F_{ext}$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolée (contenu dans l'enveloppe limitée par $S_1$ et $S_2$) est égale a la variation de la quantité du mouvement qui entre en $S_1$ a une vitesse $V_1$ et sort par $S_2$ a une vitesse $V_2$:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

## Application:

### *Exercice 1 :*

De l'huile est accélérée à travers une buse en forme de cône convergent (figure -1-), La buse est équipée d'un manomètre en U qui contient du mercure.

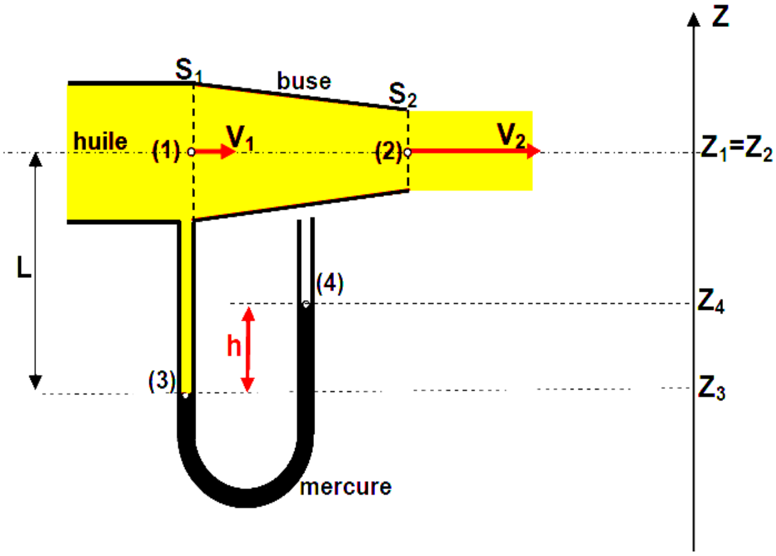



**Figure -1-**

Partie 1 : Un débit volumique $q_v$= 0,4 L/s, l'huile traverse la section S1 de diamètre $d_1$= 10 mm à une vitesse d'écoulement $V_1$, à une pression $P_1$ et sort vers l'atmosphère par la section $S_2$ de diamètre $d_2$ à une vitesse d'écoulement $V_2=4.V_1$ et une pression $P_2=P_{atm}$=1 bar.

On donne la masse volumique de l'huile : $\rho_{huile}$ = 800 kg/m$^3$.

1- Calculer la vitesse d'écoulement $V_1$.

2- Déduire le diamètre $d_2$.

3- Déterminer la pression $P_1$en bar.

Partie 2 :

Le manomètre, tube en U, contient du mercure de masse volumique $\rho_{\ mercure}$= 13600 kg/m$^3$. Il permet de mesurer la pression $P_1$ à partir d'une lecture de la dénivellation.

On donne :- $(Z_1-Z_3)$= L= 1274 mm.

- l'accélération de la pesanteur : g = 9,81 m/s$^2$.

- la pression $P_4 = P_{atm}$= 1 bar,

1- Déterminer la pression $P_3$.

## Partie 1 : Etude de la buse

**1-** ***Vitesse d'écoulement*** **:**

$$v_1 = \frac{4.q_v}{\pi.d_1^{\,2}} = \frac{4.0,4.10^{-3}}{\pi.0,01^2} = 5m/s$$

**2-** ***Equation de continuité*** **:**

$$v_1.s_1 = v_2.s_2 \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}.\mathrm{d}_1 = \sqrt{\frac{5}{20}}.10 = 5mm$$

**3-** ***Equation de Bernoulli*** **:**

$$\frac{v_2^{\,2} - v_1^{\,1}}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho_{huile}} + g(Z_2 - Z_1) = 0 \ or \ Z_2 = Z_1 \text{ et } p_2 = p_{atm}$$

Donc :

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}.\rho_{huile}.(v_2^{\,2} - v_1^{\,2}) \Rightarrow P_1 = 10^5 + \frac{1}{2}.800.(20^2 - 5^2) = 2,5.10^5 \ pa = 2,5 \ bar$$

$$p_1 - p_A = \rho_{eau} g h_1 \Rightarrow p_A = p_1 - \rho_{eau} g h_1$$

$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg} g h_2 \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho_{Hg} g h_2$$

$$p_2 = p_{atm}$$

## Partie 2 : Etude du manomètre (tube en U)

**1-** RFH entre (1) et (3) : $P_3 - P_1 = \rho_{huile}.g.(Z_1 - Z_3)$

**2-**

$$P_3 = P_1 + \rho_{huile}.g.L \Rightarrow P_3 = 2,5.10^5 + 800.9,81.1,274 = 2,6.10^5 \ pa = 2,6bar$$

## V-1 Introduction :

L'écoulement d'un **fluide réel** est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique **Osborne Reynolds**.

## V-2 Fluide réel

Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

## V-3 Régimes d'écoulements - nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en a dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

$$R_e = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{vD}{\nu} \quad \text{.............................. (V-1)}$$

Avec :

D : Diamètre intérieur de la conduite en (m)

V : Vitesse moyenne d'écoulement en (m/s)

ρ : Masse volumique du fluide en ($kg/m^3$)

μ : Viscosité dynamique en (Pa.s)

ν : Viscosité cinématique en ($m^2/s$).

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique.

Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

À partir d'un certain Reynolds se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré.

Ensuite, les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation : c'est la turbulence

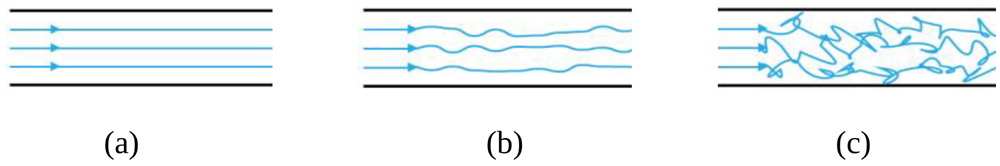
Soit un courant d'eau qui circule dans une conduite à section circulaire. On introduit un filet de colorant dans l'axe de cette conduite. Suivant la vitesse d'écoulement de l'eau, on peut observer les phénomènes suivants :

- **a- Régime laminaire :** le fluide s'écoule en couches cylindriques coaxiales ayant pour axe le centre de la conduite.
- **b- Régime transitoire :** c'est une transition entre le régime laminaire et le régime turbulent.
- **c- Régime turbulent :** Formation de mouvement tourbillonnant dans le fluide. Cette expérience est faite par Reynolds en faisant varier le diamètre de la conduite, la température, le débit, etc.… pour divers fluides.

Si $R_e < 2000$ : l'écoulement est laminaire.

Si $2000 < R_e < 3000$: l'écoulement est transitoire.

Si $R_e > 3000$ : l'écoulement est turbulent.



***FigV.1 :*** Les différents régimes d'écoulements des fluides

## V-4 Théorème de BERNOULLI pour un fluide réel :

Lors d'un écoulement de fluide réel, il se produit du frottement entre deux couches voisines ou entre le fluide et paroi du conduit. Ces frottements engendrent des pertes d'énergie .La relation de Bernoulli s'écrit sous la forme :

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 + J_{\,1,2} \quad \text{………………. (V-2)}$$

$J_{\,1,2}$ : quantité positive, unité (Pa), c'est l'énergie par unité de volume perdue entre les sections 1 et 2.

$$J_{\,1,2} = \left(p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1\right) - \left(p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2\right) \quad \text{………… (V-3)}$$

Charge du fluide en 1 charge du fluide en 2

$J_{\,1,2}$ est alors appelée « perte de charge »

## V-5 Détermination de la perte de charge $J_{\,1,2}$ :

On distingue deux types de perte de charge :

### 1. *Pertes de charge linéaires*

Les pertes de charges linéaires sont dues au frottement de fluide avec la paroi, ces pertes de charges sont proportionnelles à la vitesse, rugosité des surfaces internes de la conduite et la longueur de la conduite et sont inversement proportionnelles au diamètre de la conduite.

Les pertes de charges linéaires $J_L$ sont calculées par la formule suivante :

$$J_L = \boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{D}}\right)\frac{\boldsymbol{\rho v^2}}{\boldsymbol{2}} \quad \text{………………………………. (V-4)}$$

Cette relation peut être réécrite sous la forme suivante (Différence de hauteur) :

$$\Delta h = \boldsymbol{\lambda}\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{2g}}\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{D}} \quad \text{………………..………………… (V-5)}$$

Avec :

$\boldsymbol{v}$ : vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite (m/s)

$\boldsymbol{L}$ : Longueur de la conduite (m)

$\boldsymbol{D}$ **:** Diamètre de la conduite (m)

$\boldsymbol{\lambda}$ : Coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend du régime d'écoulement et notamment du nombre de Reynolds $R_e$

- Dans un régime d'écoulement laminaire : Re < 2000

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \qquad \text{(Formule de Poiseuille)}$$

- Dans un régime d'écoulement turbulent lisse : $2000 < Re < 10^5$

$$\lambda = 0.316.\mathrm{Re}^{-0.25} \qquad \text{(Formule de Blasius)}$$

- Dans un régime d'écoulement turbulent rugueux : $Re>10^5$

$$\lambda = 0.79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} \qquad \text{(Formule de Blench)}$$

Avec :

**ε** : rugosité de la surface interne de la conduite (mm)

D : diamètre intérieur de la conduite (mm)

- ***Diagramme de Moody***

En pratique, on utilise le diagramme de Moody qui représente le coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds *Re* et de la rugosité relative (**ε** /*D*), ***(Fig V.2)***.

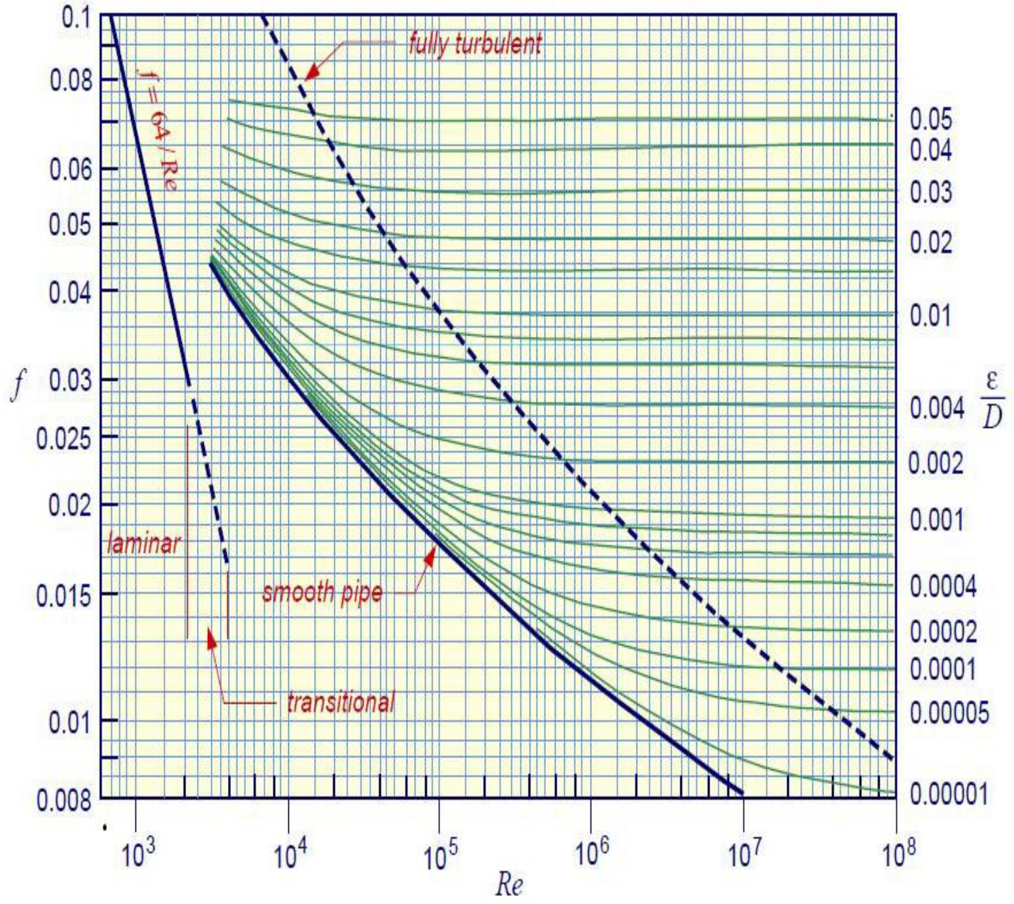



***Fig V.2*** : Diagramme de Moody

## *2. Pertes de charge singulières*

Quand la conduite subit de brusque variation de section ou de direction, il se produit des pertes de charges dites singulières, elles sont généralement mesurable et font partie des caractéristiques de l'installation.

On les exprime par :

$$J_s = K_s \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{…………………..……….. (V-6)}$$

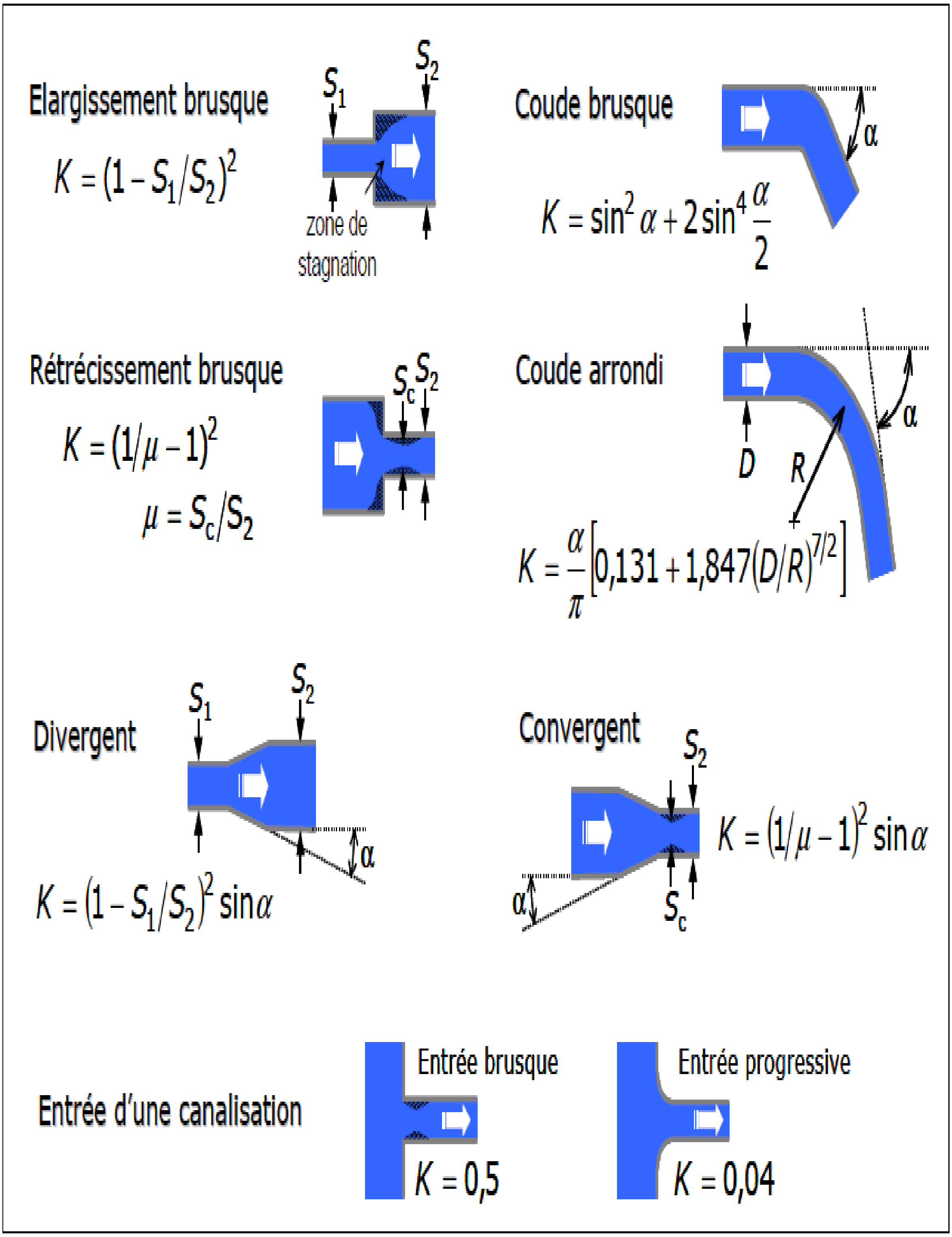
Où en termes de hauteur :

$$\Delta h = K_s \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{2g}} \quad \text{………………………………….. (V-7)}$$

$K_s$ : Coefficient (sans unité) de pertes de charge. Il dépend de la nature et de la géométrie de l'accident de forme.

Les valeurs de *Ks* sont données par les constructeurs.

Quelques Ks sont données dans ce qui suit


Elargissement brusque
$K = (1 - S_1/S_2)^2$
$S_1$
$S_2$
zone de stagnation
Coude brusque
$K = \sin^2\alpha + 2\sin^4\frac{\alpha}{2}$
α
Rétrécissement brusque
$K = (1/\mu - 1)^2$
$\mu = S_c/S_2$
$S_c$
$S_2$
Coude arrondi
$K = \frac{\alpha}{\pi}\left[0{,}131 + 1{,}847(D/R)^{7/2}\right]$
D
R
α
Divergent
$S_1$
$S_2$
α
$K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin\alpha$
Convergent
$S_2$
$S_c$
α
$K = (1/\mu - 1)^2 \sin\alpha$
Entrée d'une canalisation
Entrée brusque
$K = 0{,}5$
Entrée progressive
$K = 0{,}04$

## Applications :

***Exercice1*** :

Du fuel lourd de viscosité dynamique μ = 0,11 Pa.s et de densité d=0,932 circule dans un tuyau de longueur L=1650 m et de diamètre D=25 cm à un débit volumique $q_V$=19,7 L/s.

1. Déterminer la viscosité cinématique ν du fuel.
2. Calculer la vitesse d'écoulement V.
3. Calculer le nombre de Reynolds Re.
4. En déduire la nature de l'écoulement.
5. Déterminer le coefficient λ de pertes de charge linéaire.

*Solution :*

1. la viscosité cinématique est donnée par :

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.11}{900} = 1{,}22.\frac{10^{-4}m^2}{s} = 1{,}22\ St$$

2. la vitesse de l'écoulement et le débit massique

$$v = \frac{4.q_V}{\pi D^2} = \frac{4.19{,}7.10^{-3}}{\pi(0.25)^2} = 0{,}4\frac{m}{s}$$

$$q_m = \rho.q_V = 17{,}73 kg/s$$

3. Le nombre de Reynolds égale a :

$$R_e = \frac{vD}{\nu} = \frac{0{,}4.0.25}{1{,}22.10^{-4}} = 820$$

4. Puisque Re <Rec (2000) donc le régime est laminaire
5. $\lambda = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{820}$ = 0.078

***Exercice2 :***

Déterminez la chute de pression dans une conduite horizontale de 300 m long et de 0.20m de diamètre. La vitesse moyenne de l'eau est de 1,7 m/s, la masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m$^3$, sa viscosité cinématique est de $10^{-6}$ m$^2$/s et la rugosité absolue est de 0.2mm.

*Solution :*

Ecrivons l'équation de Bernoulli entre l'entrée (section 1) et la sortie (section 2) de la conduite :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 + J$$

On a : $Z_1 = Z_2 = 0$ et $V_1 = V_2 = V = 1,7$ m/s,

Alors :

$$p_1 - p_2 = J = \boldsymbol{\lambda\left(\frac{L}{D}\right)\frac{\rho v^2}{2}}$$

Pour déterminer λ, il faut calculer Re et ε/D :

$$R_e = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{vD}{\nu}$$

$R_e = \frac{1,7\ .0,2}{10^{-6}} = 3,4.10^5 > 10^5$ l écoulement est turbulent

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,2.10^{-3}}{0,2} = 10^{-3}$$

L'équation de Blench donne:

$$\lambda = 0.79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} = 0.79\sqrt{0.001} = 0.025$$

## *Références:*


1- R. Benhamouda, « Notions de mécanique des fluides», Centre de Publication Universitaire, Tunisie(2008).

2- Manuel Marcoux, « Mécanique des fluides» université Paul Sabatier-FSI

3- Henri BROCH« Mécanique des fluides» Université Nice Sophia Antipolis(2016).

4- Jean-François Sini. Cours de Mécanique des Fluides. Engineering school. France. 2006.

5- Renald V. Giles, Jack B.Evett and Cheng Liu, "Mécanique des Fluides et hydraulique", Série Schaum, Mc Graw hill.1994

6- R. Ouziaux, J. Perrier, Mécanique des fluides appliquée, Ed Dunod.

7- Elhadi I. Dekam"Fundamentals of Fluid Mechanics "University of Tripoli (1995).

8- S. Candel," Problèmes résolus de mécaniques des fluides" Edition Dunod, 2005,