REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

POLYCOPIE

Physique I

Mécanique du point matériel

Elaboré par :

Dr. HACHEMAOUI Malika
Maître de Conférences "B"

Année Universitaire 2020 – 2021

AVANT PROPOS

Ce polycopié regroupe une série de cours et exercices sur la mécanique du point matériel, il est destiné aux étudiants de la première année LMD des sciences et matériaux (SM), et sciences et techniques (ST), il peut servir comme un support de cours aux étudiants.

Le contenu de ce polycopié est structuré en quatre chapitres conformes aux programmes du premier semestre :

- Le premier chapitre donne les principales notions de base sur des rappels mathématiques : analyse dimensionnelle, calcul d'incertitudes, analyse vectorielle et nous terminons ce chapitre par opérateurs différentiels.
- Le deuxième chapitre est consacré à la cinématique du point matériel permet d'étudier les relations entre les paramètres du mouvement (position, vitesse, accélération, etc.). Son but est de décrire les mouvements d'objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent. Ensuite, nous étudions les différents types de mouvement et les différents systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires , cylindriques et sphériques). Finalement nous terminons ce chapitre par l'étude du mouvement relatif (changements de référentiels).
- Le troisième chapitre traite de la dynamique du point matériel, dans le cadre de la mécanique de Newton avec ses trois lois , de la quantité de mouvement , les forces fondamentales et enfin le théorème du moment cinétique.
- Le quatrième chapitre concerne le travail et l'énergie. Nous considérons dans ce chapitre le travail d'une force et nous introduisons les concepts d'énergie et de puissance

A la fin de chaque chapitre, on propose des exercices avec leurs solutions.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I : Rappels mathématiques

Chapitre II : Cinématique

Chapitre III : Dynamique

Chapitre IV: Travail et énergie

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

Chapitre I : Rappels mathématiques

I-1. Analyse dimensionnelle

I-1-1. Unités

Une unité de mesure est un étalon nécessaire pour la mesure d'une grandeur physique.

I-1-2. Systèmes d'unités en physique

Un système d'unités de mesure est défini par un choix conventionnel de grandeurs de base auxquelles sont associées des unités.

A/ Système CGS

- Les grandeurs de base : longueur (centimètre), masse (gramme), temps (seconde).

B/ Système MKSA ou de GIORGI

- Les grandeurs de base : longueur (mètre), masse (kilogramme), temps (seconde), intensité électrique (ampère).

C/ Système international SI

- Les grandeurs de base : sont sept grandeurs physiques indépendantes comme le résume le tableau (I-1).

Grandeur	Nom de l'unité SI	Symbole de l'unité
Masse	kilogramme	*kg*
Longueur	mètre	*m*
Temps	seconde	*s*
Intensité électrique	Ampère	*A*
Température thermodynamique	Kelvin	^0K
Intensité lumineuse	Candela	*cd*
Quantité de matière	mole	*mol*

Tableau 1: Unités du système international (SI).

D/ Unités dérivées

Les unités dérivées sont des unités de mesure qui combinent plusieurs unités fondamentales.

Exemple : Newton ($1N = 1kg.m.s^{-2}$), Joule (J), Ohm (Ω)…

E/ Unités secondaires

En plus des unités fondamentales il existe des unités secondaires pour quelques grandeurs.

Exemple : La température : degré celcius (°C), volume : litre (l), pression : atmosphère (at), énergie : calorie (cal)…

F/ Unités supplémentaires

les unités supplémentairescontient deux unités sans dimension :

Radian (rad), unité de l'angle plan (ayant son sommet au centre d'un cercle, interceptant, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon),

Stéradian (sr), unité d'angle solide (ayant son sommet au centre d'une sphère, découpant sur la surface de cette sphère, une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.).

G/ Multiples et sous multiples

- Sous multiples

Coefficient	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
Préfixe	Déci	centi	milli	micro	nano	pico	femto	atto
Symbole	d	c	m	µ	n	P	f	a

Tableau 2: Sous multiples

- Multiples

Coefficient	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}
Préfixe	Déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	péta	exa
Symbole	da	h	k	M	G	T	P	E

Tableau 3: Multiples

I-1-3. Equations aux dimensions

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales.

Les équations aux dimensions permet :

- De déterminer l'unité composée d'une grandeur en fonction des grandeurs fondamentales.
- De tester si une formule est homogène.
- De faire des conversions d'unités.

Plus généralement, dans la symbolique dimensionnelle des grandeurs de base, on appelle dimension d'une grandeur dérivée (G), la relaion :

$$\dim G = [G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} N^{\mu} J^{\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}-1)$$

Où α, β, γ, δ, ε, µ et ν sont des nombres réels. L' équation [G] est appelée équations aux dimensions ou bien homogénéité dimensionnelle.

I-1-4. Exercices

Exercice 01 : Déterminer l'équations aux dimensions et les unités de : la vitesse, l'accélération, la force, le travail, l'energie, la pression et la puissance .

- La vitesse : $V = \frac{x}{t} \rightarrow [V] = \frac{[x]}{[t]} \rightarrow [V] = \frac{L}{T} \rightarrow [V] = LT^{-1}$. L'unité : ms^{-1}
- L'accélération : $a = \frac{V}{t} \rightarrow [a] = \frac{[V]}{[t]} \rightarrow [a] = \frac{LT^{-1}}{T} \rightarrow [a] = LT^{-2}$. L'unité : ms^{-2}
- La force : $F = m.a \rightarrow [F] = [m][a] \rightarrow [a] = MLT^{-2}$. L'unité : $kgms^{-2}$
- Le travail : $w = F.l \rightarrow [w] = [F][l] \rightarrow [w] = ML^2T^{-2}$. L'unité : kgm^2s^{-2}
- L'energie : $E = \frac{1}{2}.m.v^2 \rightarrow [E] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v^2] \rightarrow [E] = 1.ML^2T^{-2}$.

  L'unité : kgm^2s^{-2}
- La pression : $P = F/S \rightarrow [P] = [F]/[S] \rightarrow [P] = ML^{-1}T^{-2}$. L'unité : $kgm^{-1}s^{-2}$
- La puissance : $p = w/t \rightarrow [p] = [w]/[t] \rightarrow [p] = ML^2T^{-3}$. L'unité : kgm^2s^{-3}

Remarque : les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques ainsi que les constantes, et tout ce qui se trouve à l'intérieur de ces fonctions ont pour dimension la valeur 1.

$[sin\theta] = 1, [\theta] = 1, [e^x] = 1, [x] = 1, [logx] = 1, [5] = 1, [\pi] = 1.$

Exercice 02 : On exprime la vitesse d'un corps par l'équation $v = At^3 - Bt$

où t représente le temps. Quelles sont les unités (SI) et les dimensions de A et B?

$[v] = [At^3] = [Bt]$

$[v] = [At^3] \Rightarrow [v] = [A].[t^3]$

$$\Rightarrow [A] = \frac{[v]}{[t^3]} = \frac{LT^{-1}}{T^3}$$

$\Rightarrow [A] = LT^{-4}$ ($unité : ms^{-4}$).

$$[v] = [Bt] \Rightarrow [B] = \frac{[v]}{[t]}$$

$$\Rightarrow [B] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2} \; (unité : ms^{-2})$$

Exercice 03 : A partir de l'équation aux dimensions d'une grandeur G, retrouver le rapport entre les unités MKS et CGS lorsque G est (a) une force, (b) une énergie, (c) une pression ou (d) une puissance.

a) Force : $[F] = MLT^{-2} \Rightarrow 1\ Newton = 1\ kgms^{-2}$ (MKS)

$\Rightarrow 1\ Newton = 10^3 g 10^2 cms^{-2}$ (CGS)

$\Rightarrow 1\ Newton = 10^5 gcms^{-2}$ (CGS)

$\Rightarrow 1\,Newton = 10^5 dyne$

b) <u>Energie</u> : $[E] = ML^2T^{-2} \Rightarrow 1\,Joule = 1\,kgm^2s^{-2}$ (MKS)

$\Rightarrow 1\,Joule = 10^3 g 10^4 cm^2 s^{-2}$

$\Rightarrow 1\,Joule = 10^7 gcm^2s^{-2}$ (CGS)

$\Rightarrow 1\,joule = 10^7\ ergs$

c) <u>Pression</u> : $[P] = ML^{-1}T^{-2} \Rightarrow 1\,Pascal = 1kg/ms^2$ (MKS)

$\Rightarrow 1\,Pascal = 10^3 g/10^2 cms^2$ (CGS)

$\Rightarrow 1\,Pascal = 10g/cms^2$ (CGS)

$\Rightarrow$ 1 pascal = 10 Baryes

d) <u>Puissance</u> : $[p] = ML^{-1}T^{-2} \Rightarrow 1\,watt = 1\,kgm^2s^{-3}$. (MKS)

$\Rightarrow 1\,watt = 10^3 g 10^4 cms^{-3}$ (CGS)

$\Rightarrow 1\,watt = 10^7 gcms^{-3} = 10^5 dyne.10^2 cms^{-1}$

$\Rightarrow 1\,watt = 10^7 dyne.cms^{-1}$

<u>Exercice 04</u> : Supposons que l'on prenne pour grandeurs fondamenrtales la pression p, la masse volumique ρ et la fréquence *f*. Quelles sont les dimentions de l'énergie E et de la force F.

$[F] = MLT^{-2}$ et $[E] = ML^2T^{-2}$.

Les dimensions de la longueur L, la masse M et le temps T en fonction des nouvelles grandeurs fondamentales la pression p, la masse volumique ρ et la fréquence *f*.

$[p] = ML^{-1}T^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$ et $[f] = T^{-1}$

$donc\ [T] = f^{-1},\quad \frac{[p]}{[\rho]} = L^2T^{-2} \Rightarrow [L] = p^{1/2}\rho^{-1/2}f^{-1}$

$[M] = \rho[L^3] \Rightarrow [M] = p^{3/2}\rho^{-1/2}f^{-3}$

Donc les dimensions de $[E] = p^{5/2}\rho^{-3/2}f^{-3}$ et $[F] = p^{5/2}\rho^{-1}f^{-2}$.

I-2. Calcul des incertitudes

Il est imposible de connaitre une valeur exacte d'une grandeur physique. Elle doit être accompagnée d'une marge d'erreur appelée incertitude ; mais il est importante de connaitre cette incertitude de la mesure.

Toute mesure est affectée à la pression limitée des appariels et l'erreurs humaines (l'expérimentateurs).

I-2-1. Erreur

Selon le sens général du mot, une erreur est toujours en relation avec quelque chose de juste ou de vrai, ou qui est considéré comme tel. Il en est de même en physique. On a deux types d'erreurs, absolue et relative.

I-2-1-a. Erreur absolue

L'erreur absolue de mesure d'une certaine grandeur x est la différence entre valeur mesurée x_0 et valeur exacte x_e , on note : $\delta x = x_0 - x_e$. Cette erreur est un nombre algébrique puisqu'elle peut être positive ou négative.

I-2-1-b. Erreur relative

Par définition l'erreur relative est le rapport de l'erreur absolue à la valeur exacte :

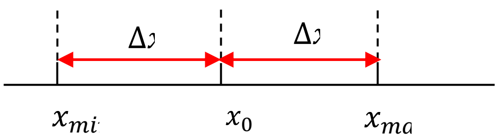
$\frac{\delta x}{x_e}$. L'erreur relative n'a pas d'unité ; elle nous indique la qualité du résultat obtenu. Elle s'exprime généralement en % (pour cent).

I-2-2. Incertitudes

I-2-2-a. Incertitude absolue

Soit x une quantité obtenue expérimentalement. On va supposer que la meilleur estimation de x est une valeur est située entre deux bornes : $x_{min} \leq x_0 \leq x_{max}$

On peut écrire : $x = x_0 \pm \Delta x$



<u>Figue I-1</u> : Incertitude absolue

Où la meilleur estimation x_0 et l'incertitude absolue Δx sont calculées comme suit :

$$x_0 = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}.$$

L'incertitude absolue : est l'erreur maximale que l'on peut commettre en mesurant x. Elle a la même unité que x.

I-2-2-b. Incertitude relative

Soit $x = x_0 \pm \Delta x$, alors l'incertitude relative sur x est définie par : $\frac{\Delta x}{x_0}$. Elle n'a pas d'unités et s'exprime en général enpourcentage.On détermine la précision d'une mesure à partir de son incertitude relative.

I-2-3. Méthodes de calculs des incertitudes

Considérons G une grandeur physique dépendant des variables indépendantes *x, y* et *z*, qu'on notera par *G(x,y,z)*. Δx , Δy et Δz sont des incertitudes absolues respectivement de *x, y* et *z*.

Comment calculer l'incertitude ΔG ? on a deux méthodes mathématiques :

I-2-3-a. Première méthode : méthode des différentielles partielles

La déffirentielle totale de *G* est notée *dG (x, y, z)*, est donnée par la relation suivante :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{I}-2)$$

Où, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ et $\frac{\partial G}{\partial z}$ sont les dérivées partielles de la fonction G par rapport aux variables *x, y* et *z*.

D'après le calcul des dérivées partielles on va prendre la valeur absolue de ces dernies; puis la déffirentielle totale (*d*) devient un incertitude absolue (Δ).

$$\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|\Delta z. \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{I}-3)$$

<u>Exemple :</u> si $G\,(x, y, z) = x^2y + y + zx$
Nous avons alors, $dG\,(x, y, z) = (2xy + z)dx\; + (x^2 + 1)\;dy\; +\; xdz$

I-2-3-b. Deuxième méthode : méthode logarithmique

Si $G = f(x, y, z)$ se présente sous la forme de produit et ou quotients, on simplifie les calculs avec la différentielle logarithmique dG/G pour exprimer directement l'incertitude relative $\Delta G/G$ qui conduira ensuite au calcul de l'incertitude absolue ΔG.

Il consiste à prendre le logarithme népérien aux deux membres de l'équation puis on prend la différentielle. Cela revient à remplacer tous les différentielles (d) en des incertitudes (Δ) puis à affecter à chaque multiplicatif un signe positif.

A/ Cas d'une addition et différence

On calcule l'erreur absolue dx d'une grandeur x : c'est le principe d'une dérivée simple :

$$\begin{cases} si\;\; x = a + b \Rightarrow dx = da + db \\ si\;\; x = a - b \Rightarrow dx = da - db \end{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{I}-4)$$

D'après le calcul des dérivées on va prendre la valeur absolue de ces dernies; puis la déffirentielle totale devient un incertitude absolue. Donc l'incertitude absolue s'écrit : $\Delta x = \Delta a + \Delta b$.

B/ Cas d'un produit et quotient

On calcule l'erreur relative $\frac{dx}{x}$: c'est le principe d'une dérivée logarithmique : (dérivée de $lnx = \frac{dx}{x}$).

- 1er cas : Si $x = a.b \Rightarrow lnx = lna + lnb \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$ … … … . … … … (I − 5)

- 2ème cas : Si $x = \frac{a.b}{c} \Rightarrow lnx = ln\frac{a.b}{c}$

$$\Rightarrow lnx = lna + lnb - lnc$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} - \frac{dc}{c} \quad \ldots\ldots\ldots (I-6)$$

D'après le calcul des dérivées partielles, on va prendre la valeur absolue de ces dernies; puis la déffirentielle totale devient un incertitude absolue. Donc l'incertitude relative est :

Pour le 1er cas: $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$; et pour le 2ème cas : $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$.

I-3. Exercices

Exercice 01 : Un étudiant évalue l'accélération *g* de la gravité, en mesurant le temps de chute *t* d'une pierre d'une hauteur hjusqu'au sol. Après plusieurs mesures, il obtient : $t = (1.6 \pm 0.1)\ s$. Sa mesure de la hauteur *h* étant : $h = (13.5 \pm 0.1)\ m$
Puisque *h* découle de la formule $h = \frac{1}{2} g\, t^2$, elle peut maintenant calculer *g*, soit :

$$g = \frac{2h}{t^2} = 10.5\ (m/s^2)$$

Que vaut l'incertitude Δ g ?

Solution : on utilisant la méthode logarithmique :

$$lng = ln\frac{2h}{t^2} \Rightarrow lng = \ln(2h) - lnt^2$$

$$\Rightarrow lng = ln2 + lnh - 2lnt$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{d2}{2} + \frac{dh}{h} - 2\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{dh}{h} - 2\frac{dt}{t}$$

Enfin, on remplace les éléments différentiels par les incertitudes sur les grandeurs associées et on transforme tous les signes négatifs en signes positifs. On obtient :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta t}{t}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{0.1}{13.5} = 0.7\ \% \quad et \quad \frac{\Delta t}{t} = \frac{0.1}{1.6} = 6.25\ \%$$

$\frac{\Delta g}{g} = 0.7 + 2 \times 6.25 = 13.2 \ \ (incertitude\ relative)$.

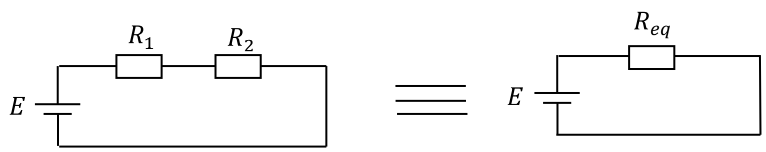
Donc incertitude absolue $\Delta g = g \times \frac{13.2}{100} = 10.5 \times \frac{13.2}{100} = 1.4\ m/s^2$

<u>Exercice 02</u> : Calculer l'incertitude relative sur la mesure de la résistance équivalente à deux résistances montées :

a) En série ; b) en parallèle. La précision sur R_1 et R_2 est 10^{-3}.

<u>Solution</u>

a) Incertitude relative sur la mesure de la résistance équivalente à deux résistances montées en série :



$R_{eq} = R_1 + R_2$

$lnR_{eq} = \ln(R_1 + R_2)$

$$\frac{dR_{eq}}{R_{eq}} = \frac{d(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{dR_1 + dR_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{dR_{eq}}{R_{eq}} = \frac{dR_1}{R_1 + R_2} + \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{dR_{eq}}{R_{eq}} = \frac{dR_1}{R_1 + R_2} . \frac{R_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_1 + R_2} . \frac{R_2}{R_2}$$

$$\frac{dR_{eq}}{R_{eq}} = \frac{dR_1}{R_1 + R_2} . \frac{R_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_1 + R_2} . \frac{R_2}{R_2}$$

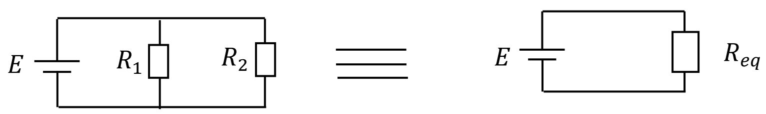
$$\frac{dR_{eq}}{R_{eq}} = \frac{dR_1}{R_1} . \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{dR_2}{R_2} . \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{\Delta R_1}{R_1} . \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{\Delta R_2}{R_2} . \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = 10^{-3} = 0.1\%$$

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{\Delta R_1}{R_1} . \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{\Delta R_1}{R_1} = 0.1\%$$

b) Incertitude relative sur la mesure de la résistance équivalente à deux résistances montées en parallèle :



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

$$lnR_{eq} = ln\frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow lnR_{eq} = ln(R_1.R_2) - ln(R_1 + R_2)$$

$$lnR_{eq} = lnR_1 + lnR_2 - ln(R_1 + R_2)$$

$$\frac{dR_{eq}}{R_{eq}} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{d(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1 + R_2} - \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{dR_{eq}}{R_{eq}} = \frac{dR_1}{R_1}\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) + \frac{dR_2}{R_2}\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

$$\frac{dR_{eq}}{R_{eq}} = \frac{dR_1}{R_1}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) + \frac{dR_2}{R_2}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{\Delta R_1}{R_1}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) + \frac{\Delta R_2}{R_2}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = 10^{-3} = 0.1\%$$

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{\Delta R_1}{R_1}.\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{\Delta R_1}{R_1} = 0.1\%$$

I-4. Rappel sur les calcul vectoriel

I-4-1. Grandeurs physiques

En physique, on utilise deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.

I-4-1-a Grandeur scalaire : est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante. Par exemple : la masse s'exprime en Kilogramme.

I-4-2-b Grandeur vectorielle : Gandeur vectorielle est une entité mathématique définie par une origine, une direction, un sens et un module :

- L'origine : le point d'application (le point A).
- La direction : la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ mesuré entre un axe de référence et le support.
- Le sens : représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et symbolisé par une flèche $\overrightarrow{AB}$.
- Le module, norme ou l'intensité : représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

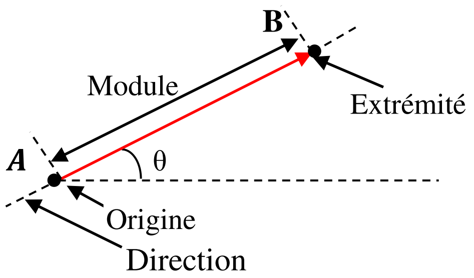


Figure I-2 : Représentation d'une grandeur vectorielle.

I-4-2. Propriétés

I-4-2-a.Vecteur libre : Si l'on se donne simplement la direction, le sens et le module.

I-4-2-b.Vecteur lié : un vecteur lié est un vecteur dont le support et le point d'application sont fixes.

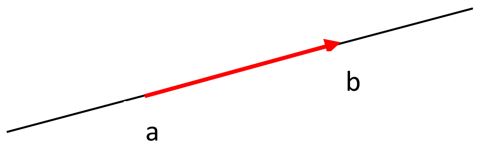


Figure I-3 : Vecteur lié.

I-4-2-c.Vecteur glissant

Un vecteur glissant est un vecteur caractérisé par son module, son sens et son support. On peut glisser ce vecteur sur son support sans changer son effet physique.

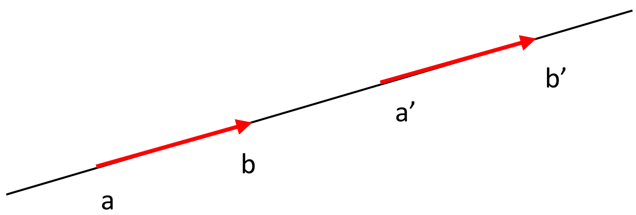


Figure I-4 : Vecteur glissant.

I-4-2-d.Vecteur unitaire

A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire qui a la même direction et de norme égale à un. On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par son module : $\vec{A} = |\vec{A}|\vec{u} = \|\vec{A}\|\vec{u} \ = A\,\vec{u}$;
avec :$\|\vec{A}\| = |\vec{A}| = A$ (le module de vecteur $\vec{A}$) et $\vec{u}$ (le vecteur unitaire)

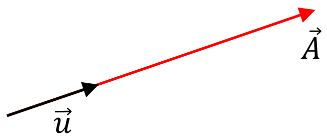


Figure I-5 : Vecteur unitaire.

I-4-3. Opérations sur les vecteurs

I-4-3-a. Addition de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs libres $\vec{A}$ et $\vec{B}$ forme un autre vecteur $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ appelé résultant obtenu par la règle du parallélogramme.

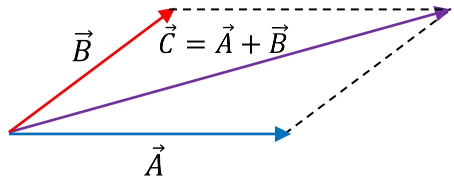


Figure I-6 : Addition de deux vecteurs.

I-4-3-b. Soustraction de deux vecteurs

La soustraction de deux vecteurs c'est la somme d'un vecteur avec l'inverse de l'autre vecteur, le résultant est obtenu par la règle du parallélogramme.

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

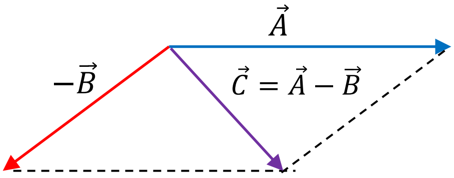


Figure I-7 : Soustraction de deux vecteurs.

I-4-3-c. Produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit d'un vecteur $\vec{A}$ par un scalaire α est un vecteur, noté (α $\vec{A}$) tel que :

- sa direction : est celle de $\vec{A}$;
- son sens : même de $\vec{A}$ si $\alpha > 0$, et de sens opposi si $\alpha < 0$;
- son module : est égal $\|\alpha\vec{A}\|$.

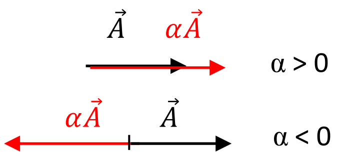


Figure I-8 : Produit d'un vecteur par un scalaire.

I-4-4. Règles de calcul

Si $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ sont des vecteurs et si α et β sont des scalaires, on a alors :

- Commutativité : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.
- Associativité : $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$, par rapport à l'addition.

  $\alpha(\beta\vec{A}) = (\alpha\beta)\vec{A} = \beta(\alpha\vec{A})$, par rapport à la multiplication.

- Distributivité : $(\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}$
  $\alpha(\vec{A} + \vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$

I-4-5. Composantes d'un vecteur

Soit $\vec{A}$ un vecteur, la projection de ce dernier sur les axes Ox, Oy et Oz donne :
$\vec{A} = OA\vec{\imath} + OB\vec{\imath} + OC\vec{k}$
Les composantes du vecteur sont les valeurs algébriques des projections orthogonales de $\vec{A}$ sur les directions définies par les vecteurs de base.
Les valeurs algébriques $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$ sont respectévement A_x , A_y et A_z ; sont appelées les composantes de vecteur $\vec{A}$.
Donc : $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\imath} + A_y\vec{k}$ ……………………………………………………… $(\mathrm{I}-7)$

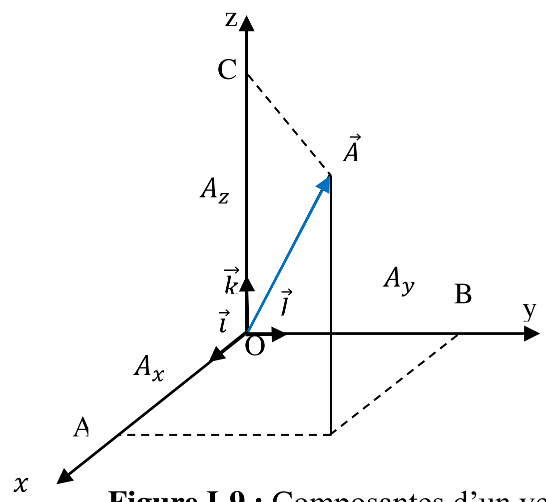


Figure I-9 : Composantes d'un vecteur.

I-4-6. Module d'un vecteur

Le module d'un vecteur $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ est donné par :

$$A = \|\vec{A}\| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}-8)$$

I-4-7. Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs donnés $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non nuls est un produit qui donne comme résultat un scalaire (nombre réel).

I-4-7-a. Forme géométrique du produit scalaire

Par définition du produit scalaire : $\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\cos\,\theta$

Où, θ $=\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$ est l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

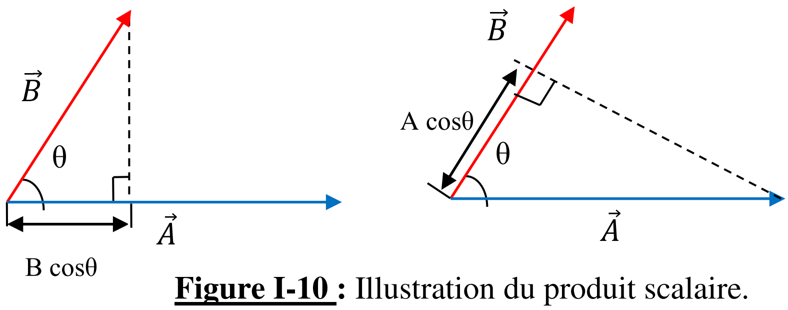


Figure I-10 : Illustration du produit scalaire.

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module d'un vecteur avec la projection du l'autre vecteur sur celui-là, ou vice versa.

I-4-7-b. Forme analytique du produit scalaire

En posant (A_x, A_y, A_z) et (B_x, B_y, B_z) les composantes respectives de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}).(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k})$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad \text{.............................(I-9)}$$

Car la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe :

- Orthonormée : $\begin{cases} \vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0 \\ \vec{\imath}.\vec{k} = 0 \\ \vec{\jmath}.\vec{k} = 0 \end{cases}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$
- Directe : $\begin{cases} \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \\ \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \end{cases}$; doivent respecter la règle de tire-bouchon.

On place un tire-bouchon le long de l'axe (oz), et on le fait tourner dans le sens trigonométrique, qui ramène (ox) vers (oy) ⇒(oz) est dérigé vers le haut.

$$\begin{cases} \vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0\,; \\ \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}\,; \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}\,; \\ \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}\,. \end{cases}$$

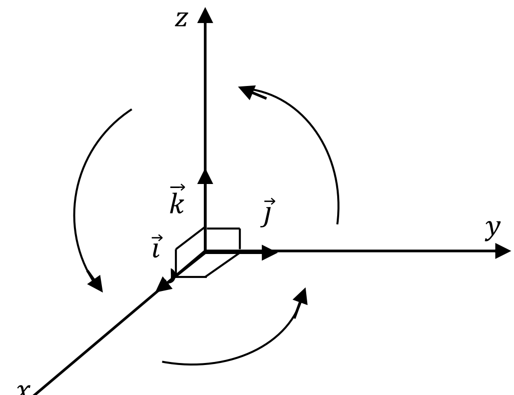


Figure I-11 : Permutation circulaire

I-4-7-c. Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ sont des vecteurs non nuls et si α et β sont des scalaires, on a alors :

- Commutativité : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- Orthogonalité : Si $\vec{A} \neq \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$, alors : $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) = \Pi/2 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0.$
  $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow A_x B_x + A_y B_y + A_z\, B_z = 0$
- Distributivité : $(\vec{A}+\vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C}$, par rapport à l'addition
  $\alpha(\beta\vec{A}) = (\alpha\beta)\vec{A} = \beta(\alpha\vec{A})$, par rapport à la multiplication.
- Linéarité : $(\alpha\vec{A}).(\beta\vec{B}) = (\alpha\beta)(\vec{A}.\vec{B})$.
- $\vec{A}.\vec{A} = A^2$
- Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls colinélaires est égale le produit de leurs modules.
  Si $\vec{A} \neq \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$, alors : $\vec{A} \,//\, \vec{B} \Rightarrow \left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) = 0 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$.
- L'angle formé entre les vecteurs $\vec{A}\ et\ \vec{B}$ est donné par :

$$\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) = Ar\cos\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}\right) = Ar\cos\left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z\, B_z}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}\sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_y}^2}}\right)$$

I-4-8. Produit vectoriel

Le produit vectoriel entre deux vecteurs donnés $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non nuls est un produit qui donne comme résultat un autre vecteur $\vec{C}$.

I-4-8-a. Forme géométrique du produit vectoriel

Par définition du produit vectoriel :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| sin\theta\, \vec{u} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I} - 10)$$

θ = $\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$ est l'angle entre les deux vecteurs $(\vec{A}\text{et } \vec{B})$; $\vec{u}$: le vecteur unitaire.

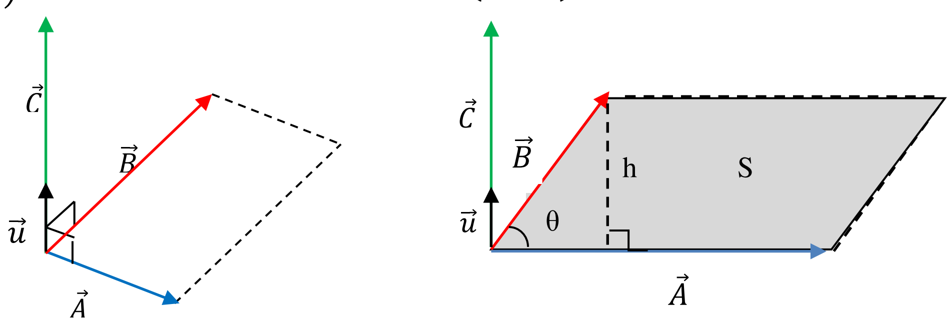


Figure I-12 : Produit vectoriel.

- Le vecteur $\vec{C}$ est perpendiculaire au plan construit par $\vec{A}$ et $\vec{B}$. La direction de $\vec{C}$ est donné par la règle des trois doigts de la main droite.

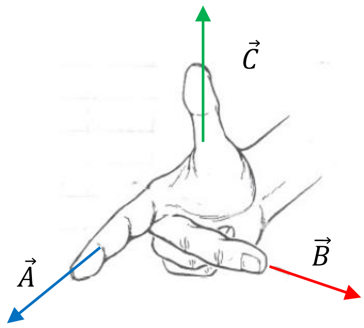


Figure I-13 : Règle des trois doigts de la main droite.

- La norme de produit vectoriel représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$: $\|\vec{C}\| = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \left|sin(\widehat{\vec{A},\vec{B}})\right|$.

  $h = \|\vec{B}\| sin\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$, donc la surface :

  $S = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = h.\ \|\vec{A}\|$

- Le sens de $\vec{C}$ est tel que le trièdre ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{A} \wedge \vec{B}$) est direct.

I-4-8-b. Forme analytique du produit vectoriel

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct : $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right) \wedge \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}-11)$$

I-4-8-c. Propriétés du produit vectoriel

Si $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ sont des vecteurs et si α et β sont des scalaires, on a alors :

- Nul si et selement si l'un des vecteurs est nul ou si les deux vecteurs sont colinéaires : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{0}$ ou $\vec{B} = \vec{0}$ ou $\vec{A} // \vec{B}$;
- <u>Non commutatif</u> : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$;
- <u>Non associatif</u> : $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$;
- <u>Distributif par rapport à la somme vectorielle</u> : $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$.
- <u>Linéarité</u> : pour tout réel n : $n\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \left(n\vec{A}\right) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge (n\vec{B})$;
- $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$.

I-4-9. Double prouduit vectoriel

Le double prouduit vectoriel des vecteurs $\vec{A},\vec{B}$ et $\vec{C}$ est un vecteur défini par :

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C}).\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{I}-12)$$

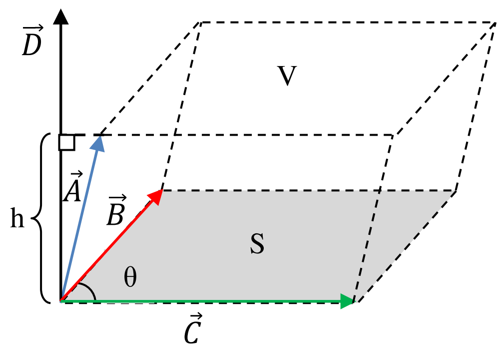
I-4-10. Produit mixte

I-4-10-a. Forme géométrique du produit mixte

Par définition le produit mixte des vecteurs $\vec{A},\vec{B}$ et $\vec{C}$ est la quantité scalaire :

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\wedge\vec{C}\|\cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{D}}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{I}-13)$$

ou $\vec{D}$: le vecteur perpendiculaire aux plan formé par les deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$.



<u>Figure I-14</u> : Produit mixte.

La valeur absolue du produit mixte mesuré représente le volume du parallélépipède construit par les trois vecteurs.

I-4-10-b. Forme analytique du produit mixte

Soient trois vecteurs dans un repère orthonormé directe : $\vec{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$, $\vec{B}=\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}$ et $\vec{C}=\begin{pmatrix}C_x\\C_y\\C_z\end{pmatrix}$. Le produit mixte peut être calculé par la méthode suivante:

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=\begin{vmatrix}+A_x & -A_y & +A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}.$$

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=A_x\begin{vmatrix}B_y & B_z\\ C_y & C_z\end{vmatrix}-A_y\begin{vmatrix}B_x & B_z\\ C_x & C_z\end{vmatrix}+A_z\begin{vmatrix}B_x & B_y\\ C_x & C_y\end{vmatrix}.$$

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=A_x(B_yC_z-B_zC_y)-A_y(B_xC_z-B_zC_x)+A_z(B_xC_y-B_yC_x)\ \ldots(\mathrm{I}-14)$$

<u>Exemple</u> :Pour la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a :

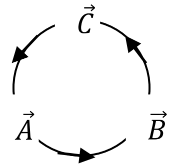
$\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k};\quad \vec{k}\wedge\vec{\imath}=\vec{\jmath};\quad \vec{\jmath}\wedge\vec{k}=\vec{\imath}$ et $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|$.

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \begin{vmatrix} 1 & \wedge & 0 \\ 0 & & 1 \\ 0 & & 0 \end{vmatrix}_{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}}$$

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = (0 \times 0 - 1 \times 0)\vec{\imath} - (1 \times 0 - 0 \times 0)\vec{\jmath} + (1 \times 1 - 0 \times 0)\vec{k} \quad = \vec{k}.$$

I-4-10-c. Proprétés du produit mixte

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :



$$\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \vec{B}.\left(\vec{C} \wedge \vec{A}\right) = \vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B}).$$

I-4-11. Exercices

<u>Exercice 1</u> : On considère , dans un repère orthonormé OXYZ, les trois vecteurs :

$\vec{A} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{\imath} + \vec{k}$ et $\vec{C} = \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

1/ Calculer leurs modules.

2/ Calculer les composantes ainsi que les modules des vecteurs :

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ et $\vec{E} = \vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C}$.

3/ Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{D}$.

4/ Calculer le produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

5/ Calculer l'angle compris entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{C}$.

6/ Calculer les produits $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$ et $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$

<u>Solution</u>

1/ Le calcul des modules :

$$A = \|\vec{A}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$B = \|\vec{B}\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$C = \|\vec{C}\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

2/ Le calcul des composantes et les modules des vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{E}$.

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = \left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}\right) - \left(-\vec{\imath} + \vec{k}\right) + \left(\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$$

$$\vec{D} = (2\vec{\imath} + \vec{\imath}) + (-\vec{\jmath} + \vec{\jmath}) + \left(+\vec{k} - \vec{k} - 2\vec{k}\right)$$

$$\vec{D} = (2 + 1)\vec{\imath} + (-1 + 1)\vec{\jmath} + (+1 - 1 - 2)\,\vec{k}$$

$\vec{D} = 3\vec{\imath} - 2\vec{k}.$

Le module de $\vec{D}$:
$D = \|\vec{D}\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$\vec{E} = \vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C} = \left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}\right) + 2\left(-\vec{\imath} + \vec{k}\right) - \left(\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$

$\vec{E} = \left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}\right) + \left(-2\vec{\imath} + 2\vec{k}\right) - \left(\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$

$\vec{E} = (2-2)\vec{\imath} + (-1-1)\vec{\jmath} + (1+2+2)\vec{k}$

$\vec{E} = -2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$

Le module de $\vec{E}$:
$E = \|\vec{E}\| = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{29}$

3/ le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{D}$.

Si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur unitaire du vecteur $\vec{D}$ alors, $\vec{u} = \frac{\vec{D}}{D}$

$$\vec{u} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{\imath} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{k}$$

4/ Le produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est :

$$\vec{A}.\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2)(-1) + (-1)(0) + (1)(1) = -1.$$

5/ L'angle compris entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\cos\theta$, tel que $\theta = \left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$

$$\theta = Ar\cos\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}\right) = Ar\ cos\left(\frac{-1}{\sqrt{6}.\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \theta = 106.78^0$$

6/ Le calcul des produits $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$ et $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$.

Pour calculer le produit $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$, calculons dabord le produit vectoriel $\vec{B} \wedge \vec{C}$. Il vient :

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = [(0)(-2) - (1)(1)]\vec{\imath} - [(-1)(-2) - (1)(0)]\vec{\jmath} + [(-1)(1) - (0)(0)]\vec{k}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}\quad .$$

Une 2ème méthode pour calculer le produit mixte $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\begin{vmatrix} + & - & + \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(2)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-(-)1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(2)[(0)(-2)-(1)(1)]—(-1)[(-1)(-2)-(1)(0)]+(1)[(-1)(1)-(0)(0)]$$

$$=(2)(-1)—(-1)(2)+(1)(-1)=-1$$

Nous calculons ensuite le produit $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$. Nous trouvons :

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}=(2)(-1)+(-1)(-2)+(1)(-1)=-1$$

Le produit $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$:

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=[(-1)(-1)-(1)(-2)]\vec{\imath}-[(2)(-1)-(1)(-1)]\vec{\jmath}+[(2)(-2)-(-1)(-1)]\vec{k}$$

$$=3\vec{\imath}+\vec{\jmath}-5\vec{k}$$

<u>Exercice 2</u>

1/ Le vecteur (1, a, b) est perpendiculaire aux deux vecteurs (1,2,0) et (-1,1,2). Trouver a et b.

2/ Montrer que : $\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)^2=A^2B^2-\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2$.

<u>Solution</u>

1/ On a : $(1,a,b).(1,2,0)=0$ et $(1,a,b).(-1,1,2)=0$ et cela donne les deux équations : $\begin{cases}1+2a=0\\-1+a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{3}{4}\end{cases}$

2/ $\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)^2=(ABsin\theta\vec{u})^2=A^2B^2sin^2\theta\,(\vec{u})^2$

$$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)^2=A^2B^2(1-cos^2\theta\,)(\vec{u})^2$$

$$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)^2=A^2B^2-A^2B^2cos^2\theta$$

$$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)^2=A^2B^2-\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2$$

$\theta=\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$, $\vec{u}$: est le vecteur unitaire.

Exercice 3 : Soient les deux vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \vec{B}\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$. Trouver α et β pour que $\vec{B}$ soit parallèle à $\vec{A}$.

Pour que les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient parallèles il faut que la relation . Soit $\vec{B} = \lambda.\vec{A}$ vérifiée, avec λ constante.

$$\frac{\vec{B}}{\lambda} = \vec{A} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\lambda} = \begin{pmatrix}\frac{2}{\lambda}\\ \frac{-3}{\lambda}\\ \frac{4}{\lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{2}{\lambda} = 1\\ \frac{-3}{\lambda} = \alpha\\ \frac{4}{\lambda} = \beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 2\\ \alpha = -\frac{3}{2}\\ \beta = 2\end{cases}$$

Donc ; $\vec{A}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{3}{2}\\ 2\end{pmatrix}, \vec{B}\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$.

Exercice 4 : Monter les relations suivantes :

1/ $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}.(\vec{a}.\vec{b})$

2/ $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ (identité de Jaccobi).

Solution

On pose que : $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ et $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$.

1/ $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) =?$

$$(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}b_y c_z - b_z c_y\\ -b_x c_z + b_z c_x\\ b_x c_y - b_y c_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_y c_z - b_z c_y & -b_x c_z + b_z c_x & b_x c_y - b_y c_x\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = &\ [a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(-b_x c_z + b_z c_x)]\vec{\imath}\\ &- [a_x(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_y c_z - b_z c_y)]\vec{\jmath}\\ &+ [a_x(-b_x c_z + b_z c_x) - a_y(b_y c_z - b_z c_y)]\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = \left[a_y b_x c_y - a_y b_y c_x + a_z b_x c_z - a_z b_z c_x + b_x a_x c_x - b_x a_x c_x\right]\vec{\imath}$$
$$+\left[-a_x b_x c_y + a_x\, b_y c_x + a_z\, b_y c_z - a_z b_z c_y + b_y a_y c_y - b_y a_y c_y\right]\vec{\jmath}$$
$$+\left[a_x b_z c_x - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y + b_z a_z c_z - b_z a_z c_z\right]\vec{k}$$

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = \left[\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z \\ a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z \\ a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = \vec{b}.\left(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z\right) - \vec{c}.\left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)$$

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = \vec{b}.(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}.\left(\vec{a}.\vec{b}\right).$$

2/ $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) + \vec{b}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a}) + \vec{c}\wedge\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$ =?

D'après la solution de la question (1) en résulte que :

$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = \vec{b}.(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}.(\vec{a}.\vec{b})$……(1)

$\vec{b}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \vec{c}.\left(\vec{b}.\vec{a}\right) - \vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})$ ……(2)

$\vec{c}\wedge\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(\vec{c}.\vec{b}\right) - \vec{b}.(\vec{c}.\vec{a})$……(3)

(1)+ (2) + (3) = 0 (Identité de Jacobi).

I-4-12. Dérivée d'un vecteur donné

On considère un point M qui ce déplace dans une trajectoire (Δ) donnée .A l'instant $(t+\Delta t)$ le point M occupe la position M'.

D'après la définition mathématique de la dérivée, la dérivée d'un vecteur $\vec{u}$ défini par :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}(t+dt) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$$

On a : $\vec{u}(t) = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}(t+dt) = \overrightarrow{OM'}$.

Donc, $\vec{u}(t+dt) - \vec{u}(t) = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MM'}$ … … … … … … … … … … … … … (I − 15)

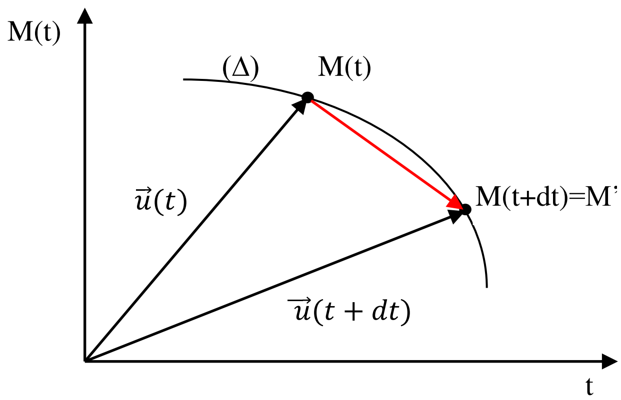


Figure I-15 : Dérivée d'un vecteur.

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{I}-16)$$

Plus $dt \to 0$, plus M et M' sont proches, donc $\overrightarrow{MM'}$ est tangent à la trajectoire (Δ).

I-4-12-a. Propriétés de la dérivée d'un vecteur

Soit $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ deux fonctions vectorielles donnés:

* $\frac{d(\vec{u}+\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$

* soit $\alpha \in R$; $\frac{d(\alpha\vec{u})}{dt} = \alpha\frac{d\vec{u}}{dt}$ (avec α constant)

* soit $f(t)$ une fonction dépend du temps t :

$$\frac{d[f(t)\vec{u}]}{dt} = f(t)\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\frac{df(t)}{dt}$$

On prend un exemple pour mieux assimuler :

$$\frac{d(\vec{u}.\vec{v})}{dt} = \vec{u}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\vec{v}$$

$$\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt}\wedge\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}\wedge\vec{u}$$

<u>Remarque :</u> soit $\vec{u}(t)$ un vecteur de module constant $|\vec{u}(t)| = c^{ste}$

$$\vec{u}(t).\vec{u}(t) = |\vec{u}(t)||\vec{u}(t)|\cos(0)$$

$$\vec{u}(t).\vec{u}(t) = |\vec{u}(t)|^2 = c^{ste}$$

$$\frac{d[\vec{u}(t).\vec{u}(t)]}{dt} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt}.\vec{u}(t) + \vec{u}(t).\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$$

$$\frac{d[\vec{u}(t).\vec{u}(t)]}{dt} = 2\vec{u}(t).\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = 0$$

$\frac{d\vec{u}(t)}{dt}.\vec{u}(t) = \vec{u}(t).\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$ (car le produit scalaire est commutatif).

$Donc\ 2 \neq 0, \qquad \vec{u}(t).\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{u}(t) \perp \frac{d\vec{u}(t)}{dt}$

Un vecteur de module constant est perpendiculaire à sa dérivée.

I-4-13. Exercice

Soient les vecteurs suivants : $\vec{A} = 2t\vec{\imath} - t^2\vec{\jmath} + \vec{k}\ et\ \vec{B} = -2t^3\vec{\imath}$

Calcul de la dérivée du produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ et produit vectoriel $\vec{A}\wedge\vec{B}$.

Il y'a deux méthodes pour calculer ces dérivées.

1ère méthode : Nous calculons directement le produit puis nous derivons ;

$$1/\ \vec{A}.\vec{B} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2t)(-2t^3) + (-t^2)(0) + (1)(0) = -4t^4.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \frac{d}{dt}\left(-4t^4\right) = -16t^3$$

$$2/\ \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2t & -t^2 & 1 \\ -2t^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ -2t^3 & 0 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2t & -t^2 \\ -2t^3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2t & -t^2 & 1 \\ -2t^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2t^3\vec{\jmath} - 2t^5\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = -6t^2\vec{\jmath} - 10t^4\vec{k}$$

<u>méthode</u> : Nous utilisons la loi de la derivée :

$$1/\ \frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -6t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = -4t^3 - 12t^3 = -16t^3$$

$$2/\ \frac{d}{dt}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -2t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -6t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \begin{vmatrix} -2t & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -2t^3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -2t^3 \\ -2t & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$+\begin{vmatrix} -t^2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2t & -6t^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2t & -6t^2 \\ -t^2 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = -6t^2\vec{\jmath} - 10t^4\vec{k}$$

I-4-14. Operateurs différentiels

Les operateurs différentiels sont des combinaisons de dérivées partielles par rapport aux coordonnées d'espace. Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux operateurs différentiels linéaires du premier ordre.

I-4-14-a. Operateur nabla

C'est un vecteur symbolique, noté $\vec{\nabla}$, qui permet de noter commodément les différents operateurs différentiels, défini par : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{k}$

I-4-14-b. Gradient

Si $f(x,y,z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant:

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}.f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{I}-17)$$

<u>Exemple</u> : Calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z) = x^2yz^3$

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}.f = 2xyz^3\vec{\imath} + x^2z^3\vec{\jmath} + 3x^2yz^2\vec{k}$$

I-4-14-c. Divergence

Si $\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right)$$

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{I}-18)$$

<u>Exemple</u> : Calculer la divergence de la fonction vectorielle

$\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z) = xy^2\vec{\imath} - 2yz\vec{\jmath} + zx\vec{k}$

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{k}\right).\left(xy^2\vec{\imath} - 2yz\vec{\jmath} + zx\vec{k}\right)$$

$$div\vec{A} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-2yz)}{\partial y} + \frac{\partial(zx)}{\partial z} = y^2 - 2xz + x$$

I-4-14-d. Rotationnel

Si $\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z)$ est une fonction vectorielle, sa rotationnel de cette fonction est un vecteur défini comme suis:

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{I}-18)$$

<u>Exemple</u> : Calculer le rotationnel de la fonction vectorielle

$\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z) = xy^2\vec{\imath} - 2yz\vec{\jmath} + zx\vec{k}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & -2yz & zx \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial(zx)}{\partial y} - \frac{\partial(-2yz)}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial(zx)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial(-2yz)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = (0+2y)\vec{\imath} - (z-0)\vec{\jmath} + (0-2xy)\vec{k} = 2y\vec{\imath} - z\vec{\jmath} - 2xy\vec{k}$$

I-4-14-e. Laplacien

Le Laplacien d'une fonction scalaire $f(x,y,z)$ ou vectorielle $\vec{A}\left(A_x, A_y, A_z\right)$ est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.f\right) = \vec{\nabla}^2.f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (\mathrm{I}-19)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) = \vec{\nabla}^2.\vec{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\vec{\imath} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\vec{\jmath} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}-20)$$

Chapitre II : Cinématique

II-1. Définition

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps par rapport à un repère de référence, en fonction du temps indépendamment des causes qui les produisent. Elle a pour but de préciser les trajectoires et les lois horaires.

II-2. Point matériel

Le point matériel est tout corps matériel dont les dimensions son théoriquement nulles et pratiquement négligeables par rapport à la distance parcourue.

II-3. Repère d'espace

C'est-à-dire un ensemble rigide de points fixes par rapport à lui (c-à-d un solide rigidement lié à l'observateur). A ce solide l'ovservateur peut lier une origine O et une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Le trièdre $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ définit complètement le repère d'espace.

II-4. Repère de temps

Un repère de temps (ou échelle temps) par une origine et une unité (par éxemple le seconde) à l'aide d'une horloge.

II-5. Référentiel

Le repère d'espace et le repére de temps définissent un « repère espace – temps » (R). Ce dernier s'appelle référentiel ou plus simplement repère.

II-6. Vecteur position

Dans un référentiel (R) d'origine le point O, la position du point matériel M, à un instant t quelconque, est définie par ces coordonnées $x(t), y(t), z(t)$.

Le vecteur position noté : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$ ……………………………. (II − 1)

II-7. Trajectoire

Le vecteur position varie au cours du mouvement et l'ensemble des positions successives occupées par le mobile (point matériel M) au cours du temps par rapport à un repère

II-7-1. Equation de la trajectoire

C'est la relation qui lie les coordonnées du mobile $x(t), y(t), z(t)$ entre eux indépendamment du temps. Pour trouver l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les équations horaires.

II-8. Vecteur déplacement

Un point matériel M en mouvement occupe des positions différentes. A l'instant t_1, il est au point M_1 et à un instant t_2, il est au point M_2 (figure II-1). Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ s'appel le vecteur de déplacement.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}-2)$$

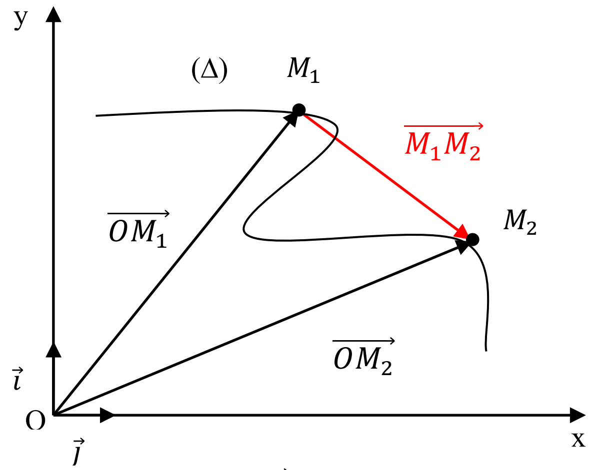


Figure II-1 : Vecteur déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ dans le système coordonnées cartésiennes.

II-9. Vecteur vitesse

II-9-1. Vecteur vitesse moyenne

Soit M_1 position du point à l'instant t_1 et M_2 à l'instant infiniment voisin $t_2 = t_1 + \Delta t$, $\Delta t = t_2 - t_1$, Le vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_{moy}$ d'une particule M est donné par :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}-3)$$

Le vecteur $\vec{v}_{moy}$ parallèle au vecteur de déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$.

II-9-2. Vecteur vitesse instantanée

On appelle la vitesse instantanée de M à l'instant t, le vecteur $\vec{v}$ égal à la limite qaund elle existe de vitesse moyenne $\vec{v}_{moy}$ quand Δt tend vers zéro c-à-d, c'est la limite du rapport $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ lorsque $t_2 \to t_1$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}-4)$$

Le vecteur de la vitesse instantanée est tangent à la trajectoire et sa direction suivant la direction du mouvement.

II-10. Vecteur accélération

II-10-1. Vecteur accélération moyenne

Le vecteur accélération moyenne correspond à une mesure de la variation de la vitesse par un intervalle de temps Δt :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{II} - 5)$$

II-10-2. Vecteur accélération instantannée

Si nous considérons un intervalle de temps Δt très faible, nous obtenons à la limite. L'accélération à l'instant t :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{II} - 6)$$

Donc le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

II-11. Systèmes de coordonnées

II-11-1. Définétion

C'est le choix d'un référentiel (repère d'espace + repère du temps) qui ne permètra de positionner un point M dans l'éspace. Sa position sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

II-11-2. Coordonnées cartésiennes (x, y et z)

Soit un point M(x, y, z) en mouvement dans un repère R ou quel est attaché à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ pour repèrer ou positionner le point M, on prend la projection de ce point dans le plan orizontal (Oxy), donne le point m puis on fait la projection verticale de M sur l'axe (Oz). On obtient le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{II} - 7)$$

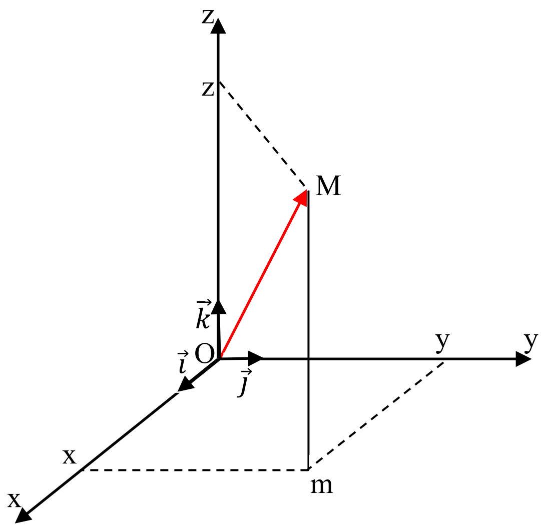


Figure II-2 : Vecteur position en coordonnées cartésiennes.

Les coordonnées cartésiennes (x,y,z) d'un point M sont les valeurs algébriques mesurées par rapport au point O des projections orthogonales de M respectivement sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz) dans le repère cartésien $R(O, \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$. Ces coordonnées doivent varier de - ∞ à + ∞.

II-11-2-a. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

Vecteur vitesse est la dérivée de vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + x\frac{d\vec{\imath}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Les vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$ sont fixes dans le repère cartésien, donc :

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}-8)$$

On note aussi : $\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

Les composantes en coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse sont donc :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\ ;\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\ ;\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,.$$

II-11-2-b. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Vecteur accélération est la dérivée de vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{\imath}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\text{II}-9)$$

Les composantes en coordonnées cartésiennes du vecteur accélération sont donc :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y};\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

II-11-2-c. Vecteur déplacement en coordonnées cartésiennes

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' très voisin de M) est :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + x.d\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + y.d\vec{\jmath} + dz\vec{k} + z.d\vec{k}$$

$d\vec{\imath} = d\vec{\jmath} = d\vec{k} = \vec{0}.(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: base cartésienne fixe.

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

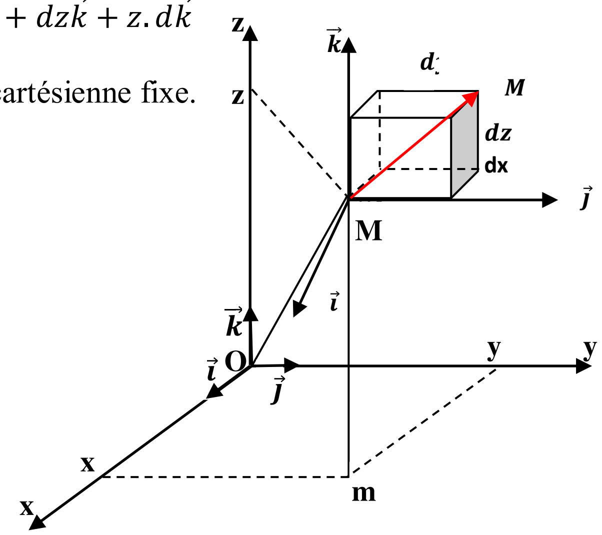


Figure II-3: Vecteur déplacement en coordonnées cartésiennes.

II-11-3. Coordonnées cylindriques (ρ, φ et z)

En coordonnées cylindriques en rencontre une symétrie par rapport à un axe de révolution de cylindre c-à-d l'axe (Oz).

Soit un point M en mouvement par rapport un repère cartésien R(O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$).

(ρ,φ,z) coordonnées cylindriques d'un point M, tel que :

ρ : rayon de cercle de la base de cylindre

$\rho = |\overrightarrow{Om}|$, ($m$ est la projection de M sur le plan (xOy)),

$\overrightarrow{Om} = \rho\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\rho$: vecteur unitaire mobile, il est on

rotation auteur de l'axe (Oz) suivant un angle φ, ($\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Om}}\right)$).

$z = \overline{mM}$ (une valeur algébrique).

z : est la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe (Oz)

$\vec{e}_\varphi$: vecteur unitaire appartenant au plan (Oxy), directement perpendiculaire à $\vec{e}_\rho$ défini à partir de la variable φ. (le sens des φ croissants).

$\vec{k}$: est le vecteur unitaire qui dirige l'axe (Oz).

Vecteur position de point M en coordonnées cylindrique :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$.

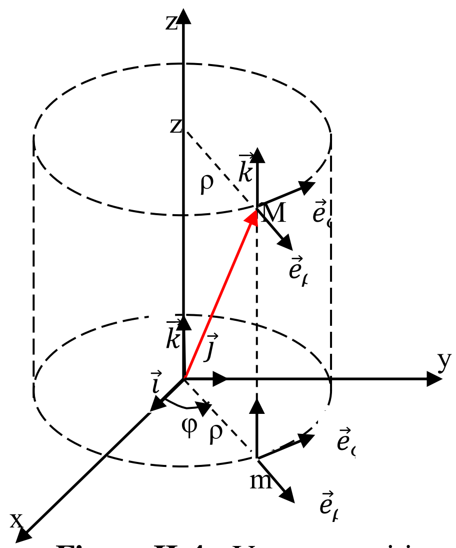


Figure II-4 : Vecteur position en coordonnées cylindriques.

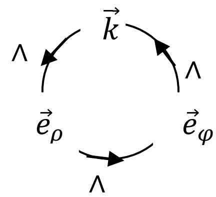
Quand le point M décrit tout l'espace, les intervalles de variation de ρ, φ et z sont :

$0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $-\infty < z < +\infty$.

En coordonnées cylindriques le point M est repéré par deux variables ρ et z. comme c'est on a réduit l'espace par ce que on a une possilbilité de symétrie.

La base cylindrique $(0, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est une base orthonormée directe :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi \wedge \vec{k} = \vec{e}_\rho \quad \text{(sens trigonométrique)} \\ \vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \end{cases}$$



II-11-3-a. Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k})$$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}, \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,, \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \; et \; \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

La dérivée du vecteur $\vec{e}_\rho$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\left(cos\varphi\vec{i} + sin\varphi\vec{j}\right).\frac{d\varphi}{dt}$$

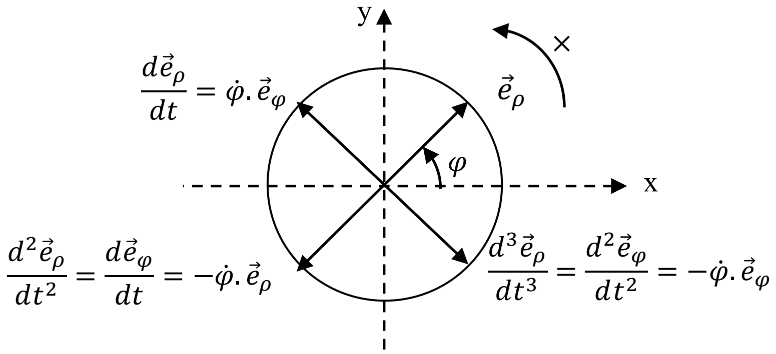
$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \left(-sin\varphi\vec{i} + cos\varphi\vec{j}\right).\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \vec{e}_\varphi.\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.\vec{e}_\varphi$$

Donc , $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$ …………………………………………. (II − 10)

C’est la règle de dérivation d’un vecteur unitaire tournant : La dérivée par rapport au temps d’un vecteur unitaire $\vec{e}$ qui tourne par un angle φ est obtenue en multipliant la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ par le vecteur qui est directement perpendiculaire à $\vec{e}$ (rotation de π/2 dans le sens positif).

Exemple :



<u>Figure II-5</u> : Dérivation successive par rapport au temps d’un vecteur unitaire.

II-11-3-b. Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\rho\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}(\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \ddot{\varphi}\rho\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\vec{e}_\rho) + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \ddot{\varphi}\rho\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\ddot{\varphi}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}-11)$$

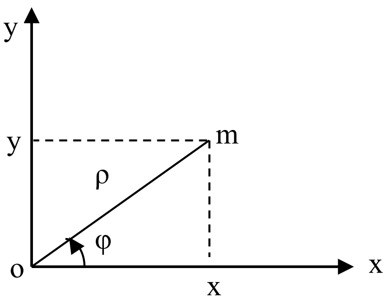
II-11-3-c. Relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques

Sur le plan orizontal (Oxy) on a :

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \rho^2 cos^2\varphi \\ y^2 = \rho^2 sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = tg\varphi \Rightarrow \varphi = tg^1\left(\frac{y}{x}\right) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

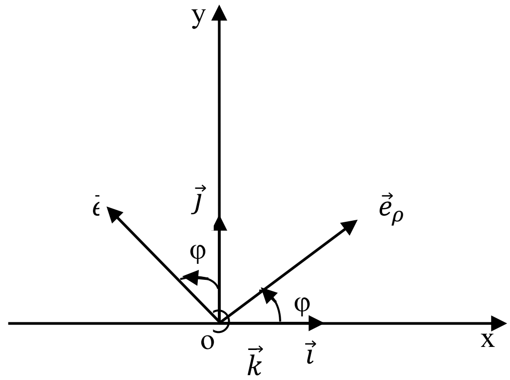


Donc relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

II-11-3-d. Relation entre la base cartésienne et la base cylindrique

La base cartésienne R(O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) fixe, mais dans la base cylindrique $R_{cy}(0, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ on a : $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ sont deux vecteurs mobiles (dépendent du temps) et le vecteur $\vec{k}$ fixe (l'axe de symétrie).



$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = cos\varphi\vec{\imath} + sin\varphi\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\varphi = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} . \begin{pmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

M : c'est la matrice de passage de base cylindrique au base cartésienne.

$$\begin{pmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} . \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

M^{-1} : c'est la matrice inverce du matrice M (la matrice de passage de base cartésienne au base cylindrique).

Donc : $\begin{cases} \vec{\imath} = cos\varphi\vec{e}_\rho - sin\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{\jmath} = sin\varphi\vec{e}_\rho + cos\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$

II-11-3-e. Vecteur déplacement en coordonnées cylindriques

Rappelons que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \Rightarrow d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$.

Schant que : $\begin{cases} x = \rho\ cos\varphi \\ y = \rho\ sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = cos\varphi . d\rho - \rho . sin\varphi . d\varphi \\ dy = sin\varphi . d\rho + \rho . cos\varphi . d\varphi \\ dz = dz \end{cases}$

Donc, $d\overrightarrow{OM} = (cos\varphi . d\rho - \rho . sin\varphi . d\varphi)\vec{\imath} + (sin\varphi . d\rho + \rho . cos\varphi . d\varphi)\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

$$d\overrightarrow{OM} = \underbrace{(cos\varphi\ \vec{\imath} + sin\varphi\ \vec{\jmath})}_{\vec{e}_\rho} d\rho + \rho\underbrace{(-sin\varphi\ \vec{\imath} + cos\varphi\ \vec{\jmath})}_{\vec{e}_\varphi} d\varphi + dz\vec{k}$$

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-12)$$

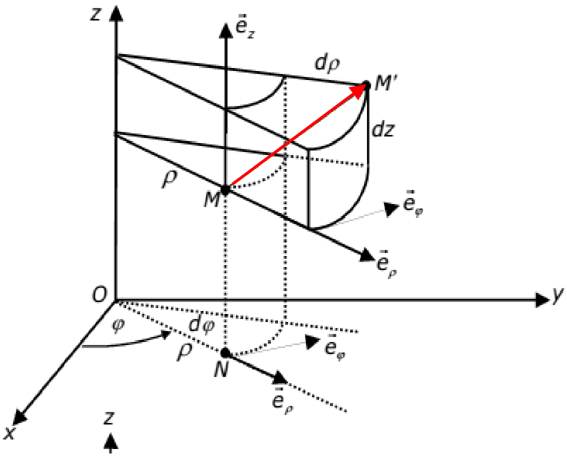


Figure II-6 : Vecteur déplacement en coordonnées cylindriques.

II-11-4. Cas particulier: les coordonnées polaires

Si la trajectoire de M est plane, ce point peut être repéré par ses coordonnées polaires ρ, φ. Il suffit de supprimé l'axe Oz avec sa coordonnée du système de coordonnées cylindriques pour avoir les coordonnées polaires, donc les vecteurs de position $\overrightarrow{OM}$, de déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, du vitesse $\vec{v}$ et d'accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires sont données par les expression suivantes :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$$

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\ddot{\varphi}\rho + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

II-11-5. Coordonnées sphériques

Considérant un repère de coordonnées sphériques (r, φ, θ) muni d'une base mobile orthonormée directe $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_\theta})$. Le point m est le projeté orthogonal de M dans la plan (Oxy). $r = OM$; $0 < r < +\infty$

θ : angle orienté entre l'axe (Oz) et $\overrightarrow{OM}$; $0 \leq \theta \leq \pi$.

φ : angle orienté entre l'axe (Ox) et $\overrightarrow{Om}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

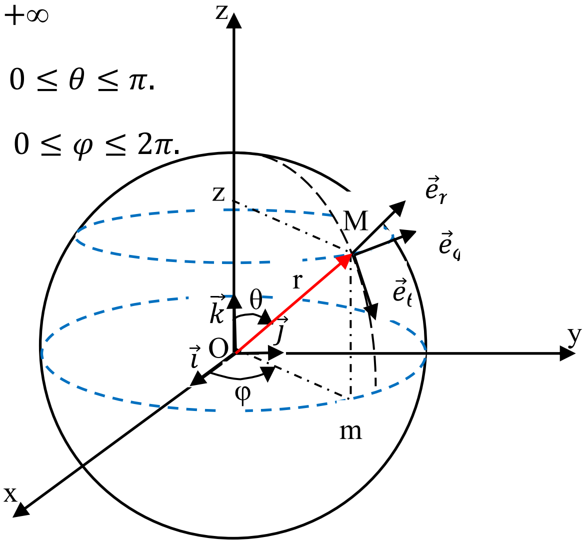


Figure II-7 : Vecteur position en coordonnées sphériques.

Les vecteurs de base sont les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$, $\overrightarrow{e_\theta}$.

$\overrightarrow{e_r}$: est le vecteur unitaire qui dirige $\overrightarrow{OM}$,

$\overrightarrow{e_\theta}$: est le vecteur unitaire appartenant au plan formé

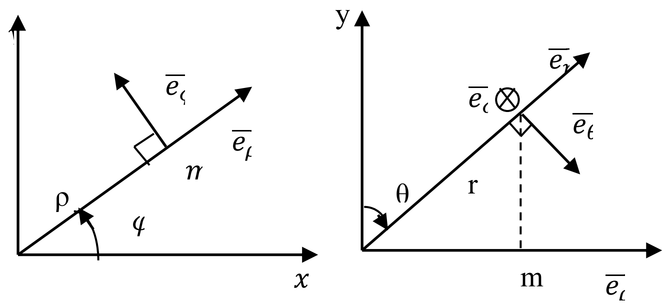
par l'axe (Oz) et $\overrightarrow{OM}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$, dans le sens des θ croissants.

$\overrightarrow{e_\varphi}$: est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, dans le sens des φ croissants.

Le vecteur position à l'instant t est : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$.

En plus du repère sphérique, nous attachons au référentiel utilisé un repère cartésien avec la même origine. Il est possible d'exprimer les vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_\theta})$ en fonction des vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ du repère cartésien :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k} \\ \overrightarrow{e_\theta} = cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k} \\ \overrightarrow{e_\varphi} = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath} \end{cases} \quad ;avec \begin{cases} \overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} \\ \overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} \end{cases}$$



II-11-5-a. Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k}\right)$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \left(\dot{\theta}cos\theta cos\varphi - \dot{\varphi}sin\theta sin\varphi\right)\vec{\imath} + \left(\dot{\theta}cos\theta sin\varphi + \dot{\varphi}sin\theta cos\varphi\right)\vec{\jmath} - \dot{\theta}sin\theta\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\left(\underbrace{cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k})}_{\overrightarrow{e_\theta}} + \dot{\varphi}sin\theta\underbrace{(-sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}}_{\overrightarrow{e_\varphi}}\right)$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$

Donc ; $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$ ………………………………..…………… (II − 13)

II-11-5-b. Vecteur accélération en coordonnées sphériques

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse :

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}+r\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}\right)$$

$$\vec{a}=\frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r+\dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt}+\frac{dr}{dt}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}+\frac{d\dot{\theta}}{dt}r\overrightarrow{e_\theta}+r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}+\frac{dr}{dt}\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}+\frac{d\dot{\varphi}}{dt}rsin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$+\frac{d(sin\theta)}{dt}r\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}+r\dot{\varphi}sin\theta\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$$

$$\vec{a}=\ddot{r}\vec{e}_r+\dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}+\ddot{\theta}r\overrightarrow{e_\theta}+r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}+\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}+\ddot{\varphi}rsin\theta\overrightarrow{e_\varphi}+\dot{\theta}cos\theta r\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$+r\dot{\varphi}sin\theta\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$$

Pour poursuivre le calcul, nous sommes contraints de calculer explicitement : $\frac{d\vec{e}_r}{dt},\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$.

$\frac{d\vec{e}_r}{dt}=\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}+\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$ (déjà calculer)

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}=\frac{d}{dt}(cos\theta cos\varphi\vec{\imath}+cos\theta sin\varphi\vec{\jmath}-sin\theta\vec{k})$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}=\left(\frac{dcos\theta}{dt}cos\varphi+\frac{dcos\varphi}{dt}cos\theta\right)\vec{\imath}+\left(\frac{dcos\theta}{dt}sin\varphi+\frac{dsin\varphi}{dt}cos\theta\right)\vec{\jmath}-\frac{dsin\theta}{dt}\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}=\left(-\dot{\theta}sin\theta cos\varphi-\dot{\varphi}sin\varphi cos\theta\right)\vec{\imath}+\left(-\dot{\theta}sin\theta sin\varphi+\dot{\varphi}cos\varphi cos\theta\right)\vec{\jmath}-\dot{\theta}cos\theta\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}=-\dot{\theta}\left(\underbrace{sin\theta cos\varphi\vec{\imath}+sin\theta sin\varphi\vec{\jmath}+cos\theta\vec{k}}_{\overrightarrow{e_r}})+\dot{\varphi}cos\theta(\underbrace{-sin\varphi\vec{\imath}+cos\varphi\vec{\jmath}}_{\overrightarrow{e_\varphi}}\right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}=-\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}+\dot{\varphi}cos\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$

Du fait que $\overrightarrow{e_\varphi}=\overrightarrow{e_r}\wedge\overrightarrow{e_\theta}$, on obtient $\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\wedge\overrightarrow{e_\theta}+\overrightarrow{e_r}\wedge\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$ ce qui donne :

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\wedge\overrightarrow{e_\theta}+\overrightarrow{e_r}\wedge\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_r} & \overrightarrow{e_\theta} & \overrightarrow{e_\varphi}\\ 0 & \dot{\theta} & \dot{\varphi}sin\theta\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_r} & \overrightarrow{e_\theta} & \overrightarrow{e_\varphi}\\ 1 & 0 & 0\\ -\dot{\theta} & 0 & \dot{\varphi}cos\theta\end{vmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}=-\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_r}-\dot{\varphi}cos\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

En remplaçant les expressions de $\frac{d\vec{e}_r}{dt}, \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$ dans celle de $\vec{a}$, puis en regroupant les termes et en les simplifiant, il vient finalement :

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}) + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} + \dot{\varphi}cos\theta\overrightarrow{e_\varphi}) + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$+ \ddot{\varphi}rsin\theta\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\theta}cos\theta r\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + r\dot{\varphi}sin\theta(-\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_r} - \dot{\varphi}cos\theta\overrightarrow{e_\theta})$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta\right)\overrightarrow{e_\theta}$$
$$+ \left(2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta\right)\overrightarrow{e_\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}-14)$$

II-11-5-c. Relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques

On passe des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ z = rcos\theta \\ \rho = rsin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

Le passage inverse des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées sphériques est effectué par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2}/z\right) \\ \varphi = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}-15)$$

II-11-5-d. Vecteur déplacement en coordonnées sphériques

Rappelons que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \Rightarrow d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} = \overrightarrow{MM'}$;

Or , $\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = sin\theta cos\varphi dr + rcos\theta cos\varphi d\theta - rsin\theta sin\varphi d\varphi \\ dy = sin\theta sin\varphi dr + rcos\theta sin\varphi d\theta + rsin\theta cos\varphi d\varphi \\ dz = cos\theta dr - rsin\theta d\theta \end{cases}$

Donc , $d\overrightarrow{OM} = (sin\theta cos\varphi dr + rcos\theta cos\varphi d\theta - rsin\theta sin\varphi d\varphi)\vec{\imath} +$

$$(sin\theta sin\varphi dr + rcos\theta sin\varphi d\theta + rsin\theta cos\varphi d\varphi)\vec{\jmath} + (cos\theta dr - rsin\theta d\theta)\vec{k}$$

$$d\overrightarrow{OM} = (\underbrace{sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k}}_{\vec{e}_r})\, dr +$$

$$\underbrace{\left(cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k}\right)}_{\vec{e}_\theta} rd\theta + \underbrace{(-sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath})}_{\vec{e}_\varphi} rsin\theta d\varphi.$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (\mathrm{II}-16)$$

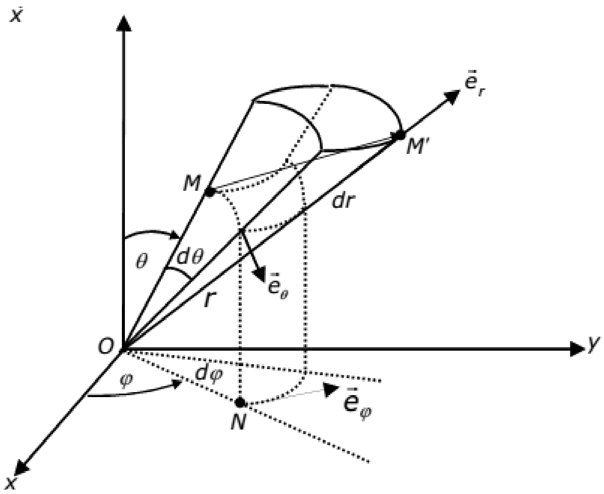


Figure II-8 : Vecteur déplacement en coordonnées sphériques.

II-11-6. Coordonnées curvilignes (coordonnées intrinsinques)

A chaque point M d'une courbe C, il est possible d'associer le trièdre d'origine M qui est un référentiel tangent à la courbe dont les axes sont définis par les vecteurs unitaires $\vec{T}, \vec{N}$ et $\vec{B}$ avec :

$\vec{T}$: est le vecteur tangent à la trajectoire du point M

$\vec{N}$: est le vecteur normal à la trajectoire dirigé vers le centre du cercle imaginaire.

$\vec{B}$: est le vecteur perpendiculaire à $\vec{T}$ et à $\vec{N}$, $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$

Tel que $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ forme un trièdre direct est appelé trièdre de Serret-Frenet.

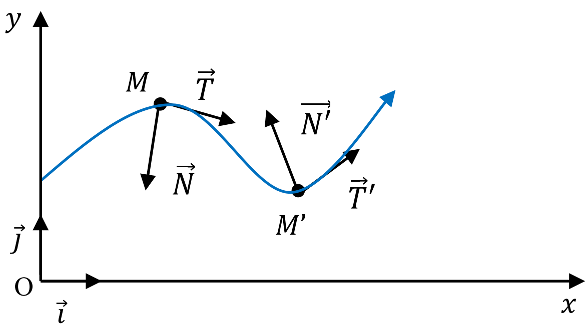


Figure II-9 : Abscisse curviligne et base de Frenet.

La valeur algébrique de l'arc $(\widehat{M\,M'})$ est l'abscisse curviligne s du point M.

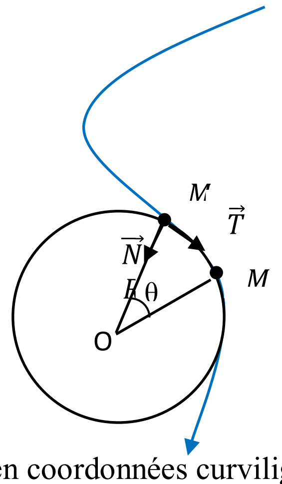
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}$

$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$

$\Delta t = t' - t$

Si M et M' sont très proche : $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$

II-11-6-a. Vecteur vitesse en coordonnées curvilignes



$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \widehat{MM'}.\vec{T}$$

$$d\overrightarrow{OM} = ds.\vec{T}$$

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}.\vec{T} \Rightarrow V = \frac{ds}{dt}\ (module\ de\ \vec{V})$$

Figure II-10 : Vecteur vitesse en coordonnées curvilignes.

II-11-6- b. Vecteur accélération en coordonnées curvilignes

L'expression de la vitesse dans la base de Frenet : $\vec{V} = \frac{ds}{dt}.\vec{T}$, l'accélération sera :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}.\vec{T}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}.\vec{T} + \frac{ds}{dt}.\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$s = R\theta \Rightarrow\ ds = Rd\theta$, (R : le rayon de la courbure).

Rappelons la règle de la dérivation d'un vecteur unitaire tournant d'un angle θ par rapport à cet angle : $\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \vec{N}$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{N}.\frac{d\theta}{ds}.\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{N}.\frac{d\theta}{Rd\theta}.\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{N}.\frac{1}{R}.\frac{ds}{dt} = \vec{N}.\frac{1}{R}.V$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right).\vec{T} + \frac{ds}{dt}.\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(V).\vec{T} + V.\vec{N}.\frac{1}{R}.V \Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\frac{dV}{dt}.\vec{T}}_{\overrightarrow{a_T}} + \underbrace{\frac{V^2}{R}.\vec{N}}_{\overrightarrow{a_N}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}-17)$$

$\overrightarrow{a_T}$: accélération tangentiel, son module $a_T = \frac{dV}{dt}$; $\overrightarrow{a_N}$: accélération nornale, son module $a_N = \frac{V^2}{R}$.

II-11-7. Exercices

Exercice 01 : Soit la surface S d'équation : $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ dans un repère cartésien de l'éspace. Déterminer l'équation S dans un repère cylindrique et sphérique.

Solution

Soit la surface S d'équation : $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ ……………(1)

a/ l'équation S dans un repère cylindrique.

Les coordonées cylindriques d'un point M sont : $\begin{cases} x=\rho cos\theta \\ y=\rho sin\theta \\ z=z \end{cases}$

Donc l'équation (1) devient sous cette forme : $\left(\frac{\rho cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{\rho sin\theta}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

b/ l'équation S en coordonées sphériques

Les coordonées sphériques d'un point M sont : $\begin{cases} x=\rho cos\theta sin\varphi \\ y=\rho sin\theta cos\varphi \\ z=\rho cos\varphi \end{cases}$

Donc l'équation (1) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\rho cos\theta sin\varphi}{a}\right)^2+\left(\frac{\rho sin\theta cos\varphi}{b}\right)^2+\left(\frac{\rho cos\varphi}{c}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{cos\theta sin\varphi}{a}\right)^2+\left(\frac{sin\theta cos\varphi}{b}\right)^2+\left(\frac{cos\varphi}{c}\right)^2=\frac{1}{\rho^2}$$

Exercice 02

On considère le point M de coordonées (r,θ,z) dans un repère cylindrique. Trouver ses coordonnées dans un repère cartésien et sphérique.

Solution

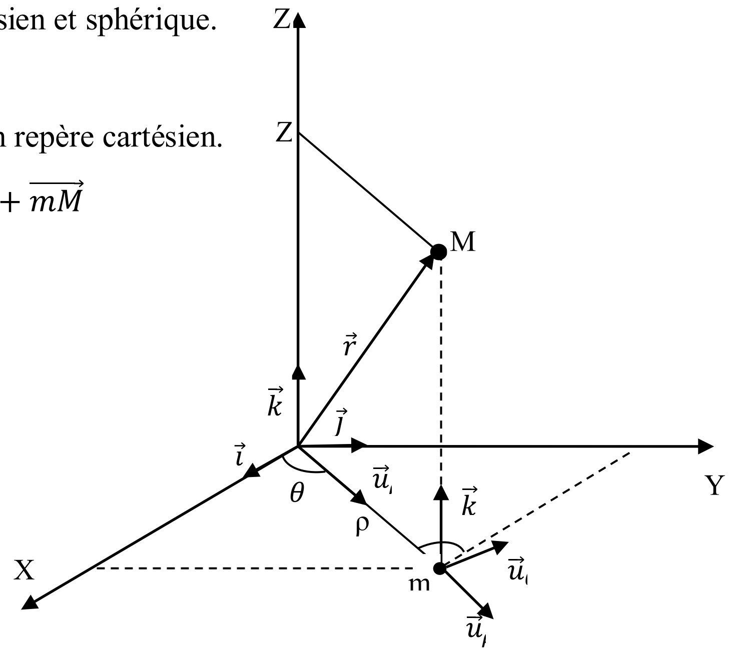
a/ Les coordonées de point M dans un repère cartésien.

Le vecteur position : $\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{mM}$

D'où : $\vec{r}=\rho\vec{u}_\rho+z\vec{k}$

A partire de la figure on a :

$\begin{cases} \vec{u}_\rho=cos\theta\vec{\imath}+sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta=-sin\theta\vec{\imath}+cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$



Nous pouvons écrire maintenant l'expression du vecteur position sous la forme :

$\vec{r} = \rho(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}) + z\vec{k}$

$$\begin{cases} \vec{r} = \rho cos\theta\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{\jmath} + z\vec{k} \\ \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = (\rho cos\theta)^2 + (\rho sin)\theta^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

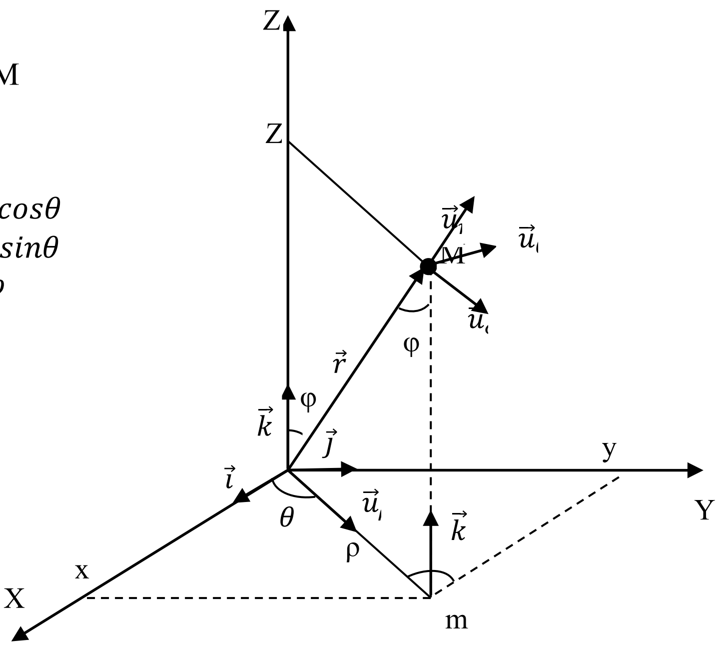
$\frac{y}{x} = \frac{\rho sin\theta}{\rho cos\theta} \Rightarrow \frac{y}{x} = tg\theta$

$$\Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Donc les coordonées cartésiennnes de point M sont données par : M($\sqrt{x^2 + y^2}, arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, z)

b/ Les coordonées de point M dans un repère sphérique.

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = rcos\varphi \\ \rho = rsin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = rsin\varphi cos\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\varphi \end{cases}$$



<u>Exercice 03 :</u> Convertir le vecteur suivant en coordonées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\rho)$: $\overrightarrow{A} = \rho^2\vec{u}_\rho + cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$.

<u>Solution</u>

Pour convertir le vecteur $\vec{A}$ donnée en coordonnées cylindriques, il faut d'abord convertir en coordonnées cartésiennes puis en coordonées sphériques.

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Les vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ de repère cylindrique sont donnée par :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_\rho = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \\ \vec{u}_\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}) \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Donc le vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = (x^2+y^2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})\right) + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})\right)$$

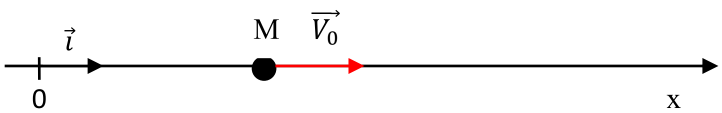
$$\vec{A} = \sqrt{(x^2+y^2)}\left[(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})\right]$$

$$\vec{A} = \sqrt{(x^2+y^2)}\left[x\left(1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{\imath} + y\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{\jmath})\right]$$

II-12. Mouvement du point matériel

II-12-1. Mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement rectiligne est caractérisé par une trajectoire sous forme d'une droite.



On parle de mouvement rectiligne uniforme lorsque la vitesse est constante au cours du temps. $V(t) = V_0$

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath}$, où $\vec{\imath}$ est le vecteur unitaire porté par (x'Ox).

Le vecteur vitesse s'exprime par : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x.\vec{\imath})$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}.\vec{\imath} = \dot{x}.\vec{\imath} = V_0.\vec{\imath} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{II}-18)$$

Le vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_0.\vec{\imath}) = \vec{0}$, car V_0 est constante.

L'équation horaire s'écrit : $V = \frac{dx}{dt} = V_0 \Rightarrow dx = \int_{t_0}^{t} V_0\, dt$

$$\Rightarrow x - x_0 = V_0(t - t_0)$$

$$\Rightarrow x = V_0(t) + x_0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (\mathrm{II}-19)$$

x_0 et V_0 sont la position et la vitesse initiale (à l'instant t_0=0)

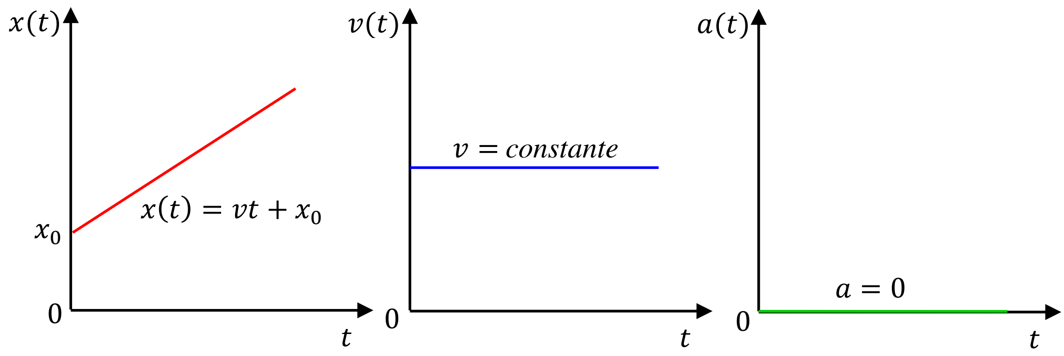


Figure II-11 : Diagrammes du mouvement rectiligne uniforme.

II-12-2. Mouvement rectiligne uniformément varié

On dit qu'un mouvement rectiligne est uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son accélération est constante au cours du temps.

$$a = \frac{dV}{dt} = constante \Rightarrow dV = a\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{V_0}^{V(t)} V = a \int_{t_0}^{t} dt$$

En considérant les conditions initiales $V = V_0$ à t = 0 (vitesse initiale).

$$V(t) = a(t - t_0) + V_0$$

D'autre part : $V(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} V(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} [a(t - t_0) + V_0]\,dt$$

$$x(t) - x_0 = \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + (V_0 - at_0)(t - t_0)$$

Si $t_0 = 0$, l'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément varié devient :

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + V_0 t + x_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II} - 20)$$

Si $a.v > 0$, le mouvement est uniformément accéléré.

Si $a.v < 0$, le mouvement est uniformément retardé.

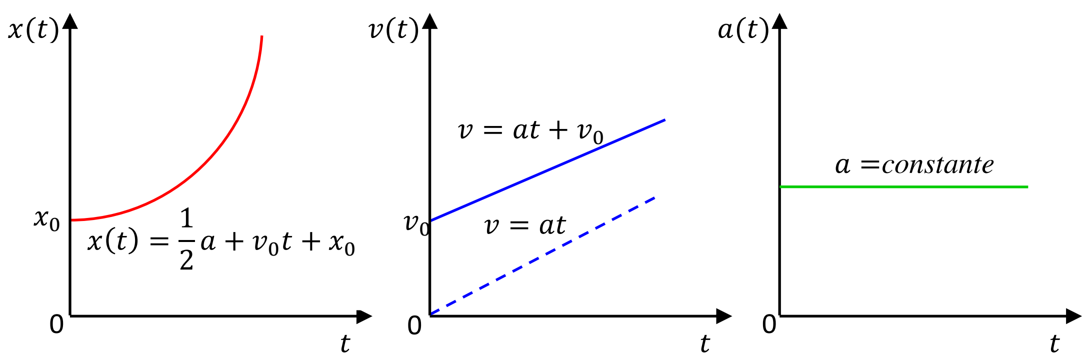


Figure II-12: Diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié.

<u>Remarque</u> : Le mouvement rectiligne uniformément varié est caractérisé par une accélération constante qui peut être calculé comme suit :

$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$a\,dx = \frac{dV}{dt}dx \Rightarrow \int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{V_0}^{V} V\,dV$$

$$a(x - x_0) = \frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) \Rightarrow a = \frac{V^2 - V_0^2}{2(x - x_0)}$$

Autre méthode :

$$V(t) = at + V_0 \Rightarrow t = \frac{V - V_0}{a}$$

$$x(t) - x_0 = \frac{a}{2}t^2 + V_0 t \Rightarrow x - x_0 = \frac{a}{2}.\left(\frac{V - V_0}{a}\right)^2 + V_0\left(\frac{V - V_0}{a}\right)$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{V^2 - 2VV_0 + {V_0}^2}{2a} + \frac{2}{2}\left(\frac{V_0 V - {V_0}^2}{a}\right)$$

$$x - x_0 = \frac{V^2 - {V_0}^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{V^2 - {V_0}^2}{2(x - x_0)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (\text{II} - 21)$$

II-12-3. Mouvement circulaire

Un mobile décrit un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle. Le mouvement est circulaire uniforme (MCU) si sa vitesse angulaire de rotation est constante ω.

Les coordonnées polaires sont bien adaptées à l'étude du mouvement d'un point matériel décrivant une trajectoire plane.

Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$

Le vecteur vitesse est $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Le vecteur accélération est $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

L'accélération est la somme de l'accélération radiale $\vec{a}_r = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$ et l'accélération transversale $\vec{a}_\theta = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ qui s'écrient suivant la base de Frenet comme suit :

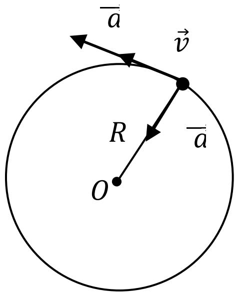
module de $\vec{v}$: $v = R\dot{\theta} \;\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{R} \;\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{dv}{dt}\right)$

$$\vec{a} = -R\left(\frac{v}{R}\right)^2\vec{N} + R\frac{1}{R}\left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{T}$$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{N} + \left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots\ldots. (\text{II} - 22)$$

$\dot{\theta} = \omega$ est appelée la vitesse angulaire.

Si ω est constante, $\vec{a} = \vec{a}_n = -R\omega^2\vec{N}$ .On dit que le mouvement est circulaire uniforme.



<u>Figure II-13</u> : Mouvement circulaire.

II-12-4. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Le mouvement d'un point M est dit rectiligne sinusoïdal, si se produisant sur un axe Ox, l'abscisse x du point M s'écrit :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

ces caractéristiques sont :

$(\omega t + \varphi)$ est appelé phase à l'instant t avec φ la phase initiale à l'origine (t = 0) ;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation du mouvement (T : la période);

X_m correspond à l'amplitude du mouvement ;

l'abscisse x variant sinusoïdalement de $-X_m$ à X_m comme le montre la figure (II-14).

Expression de la vitesse et l'accéleration :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -X_m \omega sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -X_m \omega^2 cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Cette équation correspond à l'équation différentielle du second ordre d'un oscillateur harmonique, leur solution est écrir du façon suivante :

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II} - 23)$$

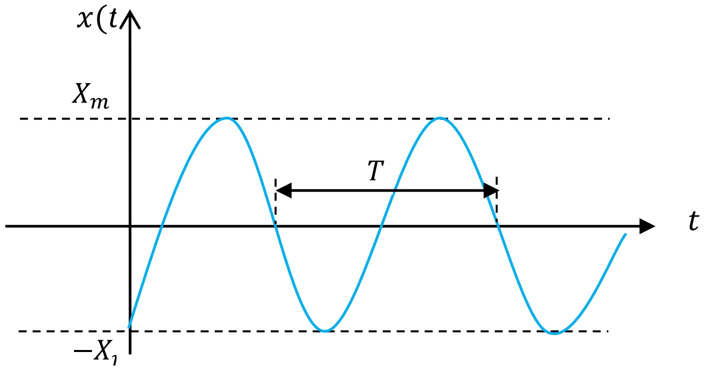


Figure II-14 : Représentation du mouvement sinusoïdal dans le temps.

II-12-5. Mouvement hélicoïdale

Le mouvement hélicoïdale est la combinaison d'un mouvement de transtaion rectiligne uniforme selon l'axe des z et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan xOy.

Les équations horaires du mouvement selon les trois axes x, y, z du référentiel

cartésien sont : $x(t) = Rcos\, wt$; $y(t) = Rsin\, wt$ et $z(t) = v_0 t$.

Il est facile de déterminer par dérivations successives les composantes du vecteur vitesse et du vecteur d'accélération du point dans cette base :

$$\vec{V}_{M/R} = \left| \begin{array}{l} -Rwsin\, wt \\ Rwcos\, wt \\ v_0 \end{array} \right. \quad ; \quad \vec{a}_{M/R} = \left| \begin{array}{l} -Rw^2 cos\, wt \\ -Rw^2 sin\, wt \\ 0 \end{array} \right.$$

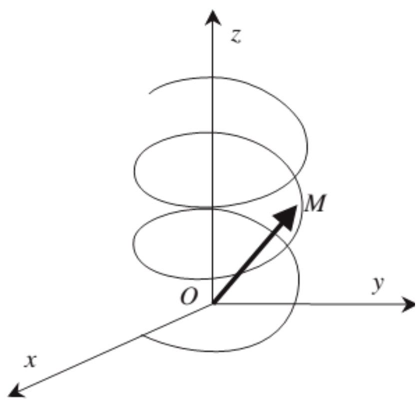


Figure II-15 : Mouvement hélicoïdale.

II-12-6. Mouvement d'un projectile

Exercice : On lance un projectile d'un point o au sol avec vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec horizontale. Trouver :

1/ Le vecteur position à l'instant t quelconque.

2/ Le temps nécessaire pour attendre l'altitude maximale.

3/ L'altitude maximale.

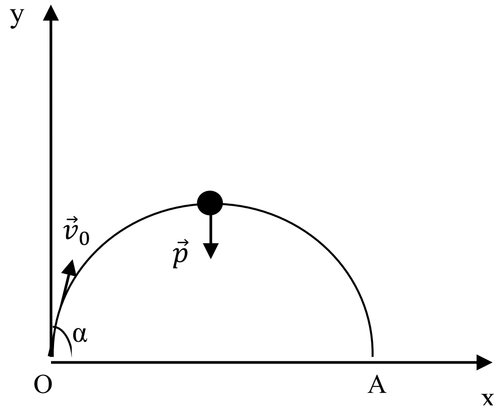
4/ La durée du vol jusqu'à la terre .

5/ La portée OA.

6/ Montrer que la trajectoire est un parabole.

7/ Pour quelle valeur de α la projectile atteint sa portée maximale.

<u>Solution</u>



<u>Figure II-16 :</u> Mouvement d'un projectile.

1/ Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

En appliquant la 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} = m\,\vec{a}$$

$$\Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = c_1 \\ v_y = -gt + c_2 \end{cases}$$

c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration. A t=0, $\vec{v}(t=0) = \overrightarrow{v_0} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0 cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 sin\alpha \end{cases}$

$$\text{Donc } \vec{v} = \begin{cases} v_x = v_0 cosa \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}-24) \\ v_y = -gt + v_0 sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}-25) \end{cases}$$

En intégrant les équations (II-24) et (II-25) pour trouver la position de la projectile à l'instant t quelconque.

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_x dt \\ v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t v_y dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \int_0^t v_0 cos\alpha.\,dt \\ y = \int_0^t (-gt + v_0 sin\alpha).\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 cos\alpha.\,t + c_3 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha.\,t + c_4 \end{cases}$$

$c_3$et c_4 sont des constantes d'intégration.

A t=0, le projectile occupe la position (0, 0) donc $c_3 = c_4 = 0$. Donc,

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 cos\alpha.\,t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}-26) \rightarrow \text{mouvement rectiligne uniforme.} \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha.\,t \ldots (\text{II}-27) \rightarrow \text{mouvement rectiligne uniformément varié.} \end{cases}$$

1/ Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}(v_0 cos\alpha.\,t)\vec{\imath} + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha.\,t)\vec{\jmath} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}-28)$$

2/ le temps pour atteindre l'altitude maximale

$$v_y = 0 \Rightarrow -gt + v_0 sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 sin\alpha}{g} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . (\mathrm{II}-29)$$

3/ L'altitude maximale : en remplaçant t dans l'équation (II-27)

$$y_{max} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 sin\alpha . \left(\frac{v_0 sin\alpha}{g}\right)$$

$$y_{max} = \frac{1}{2} . \frac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{g}$$

4/ La durée du vol jusqu'à la terre

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 sin\alpha . t = 0$$

$$\Rightarrow t . \left(-\frac{1}{2} g t + v_0 sin\alpha\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ -\frac{1}{2} g t + v_0 sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2 v_0 sin\alpha}{g} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{II}-30)$$

5/ La portée OA : en remplaçant l'expression de t (l'équation II-30) danas l'équation II-26) :

$$OA = v_0 cos\alpha \left(\frac{2 v_0 sin\alpha}{g}\right) = \frac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{g}$$

Avec, 2 $cos\alpha . sin\alpha = sin^2\alpha$

6/ l'équation de trajectoire

$$on\ a : x = v_0 cos\alpha . t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 cos\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . (\mathrm{II}-31)$$

En remplaçant l'expression de t (l'équation (II-31)) danas l'équation (II-27) :

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2 + v_0 sin\alpha . \left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{g}{{v_0}^2 cos^2\alpha}\right) x^2 + tg\alpha . x \rightarrow \text{c'est l'équation d'un parabole.}$$

7/ la valeur de α pour que la projectile atteint sa portée maximale :

$$OA = \frac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{g} \Rightarrow sin2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow sin2\alpha = sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

II-12-7. Exercices

Exercice 01 : Un point M décrit un mouvement rectiligne uniformément varié selon la loi horaire : $\overline{OM} = x = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 + \bar{v}_0 t + x_0$

1/ Quelle est la signification de chacune des constantes algébriques $\bar{\gamma}, \bar{v}_0$ et x_0 ?

2/ Pour quelles conditions vérifiées par les constantes algébriques précédentes et pour quel intervalle de temps, le mouvement est soit uniforme, soit uniformément accéléré et enfin soit uniformément décéléré ?

3/ Soit $\bar{v}(t)$ la vitesse instantanée, montrer que quelle soit l'intervalle de temps considéré $[t_1, t_2]$, la vitesse moyenne dans cet intervalle $\bar{v}_m$ vérifie les relations suivantes :

$\bar{v}_m = \frac{\bar{v}(t_1) + \bar{v}(t_2)}{2}$: la vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 est égale à la moyenne arithmétique des vitesses instantanées à ces instants

$\bar{v}_m = \bar{v}\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$ (la vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 est égale à la vitesse instantanée d'instant correspondant au centre de l'intervalle $[t_1, t_2]$.)

Solution

$$\overline{OM} = x = \frac{1}{2}\bar{\gamma}t^2 + \bar{v}_0 t + x_0$$

1/ On a : $\dot{x} = \bar{\gamma}t + \bar{v}_0 \Rightarrow \ddot{x} = \bar{\gamma}$

$\Rightarrow$ x_0 : position initiale, $\bar{v}_0$: vitesse initiale et $\bar{\gamma}$ accélération algébrique.

2/ Nature du mouvement est donné par le signe de $\vec{v}.\vec{\gamma}$ c'est-à-dire pour un mouvement rectiligne par $\dot{x}\ddot{\gamma} \equiv \bar{v}\bar{\gamma} \Rightarrow \bar{v}\bar{\gamma} = \gamma^2 t + \bar{v}_0.\bar{\gamma}$

a/ Mouvement uniforme ($\bar{\gamma} = 0$) $\Leftrightarrow \bar{v}\bar{\gamma} = 0$.

b/ Mouvement uniformément accéléré $\forall\, t$ lorsque $\bar{v}_0.\bar{\gamma} > 0$. (Mouvement uniformément accéléré pour ($t > -{\bar{v}_0.\bar{\gamma}}/{\gamma^2}$) lorsque $\bar{v}_0.\bar{\gamma} < 0$.)

c/ Mouvement uniformément décéléré pour ($0 < t < -{\bar{v}_0.\bar{\gamma}}/{\gamma^2}$) lorsque $\bar{v}_0.\bar{\gamma} < 0$.)

3/ $\bar{v}(t) = \dot{x} = \bar{\gamma}t + \bar{v}_0$

$$\bar{v}_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{v}_m = \frac{\frac{1}{2}\bar{\gamma}(t_2^2 - t_1^2) + \bar{v}_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{v}_m = \frac{1}{2}\bar{\gamma}(t_1 + t_2) + \bar{v}_0$$

On a vérifié que $\bar{v}_m$ peut se mettre sous les deux formes : Par ce que $\bar{v}_m$ est une fonction linéaire du temps.

$$a/\ \ \bar{v}_m = \frac{\bar{v}(t_1) + \bar{v}(t_2)}{2}\ \ ;\ \ b/\ \ \bar{v}_m = \bar{v}\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right).$$

<u>Exercice 02</u> : Un point matériel M se déplace sur une trajectoire donnée en coordonnées polaires par : r (θ) = a.θ avec θ= wt où a et w sont des constantes positives.

1. Donner l'expression du vecteur position en coordonnées polaires.
2. Donner l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération de M en coordonnées polaires et calculer leurs modules.
3. Exprimer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. En déduire le rayon de la courbure.

<u>Solution</u>

1. l'expression du vecteur position en coordonnées polaires.

$$\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|.\overrightarrow{e_r} = r(\theta).\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{OM} = a\theta.\overrightarrow{e_r} = awt.\overrightarrow{e_r}$$

2. l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires.

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d(awt)}{dt}.\overrightarrow{e_r} + awt.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \overrightarrow{e_\theta}.\dot{\theta}$$

On a $\theta = wt \Rightarrow \dot{\theta} = w$

Donc , $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = w.\overrightarrow{e_\theta}$ et le vecteur $\vec{V} = aw.\overrightarrow{e_r} + aw^2t.\overrightarrow{e_\theta}$

Le module de vecteur vitesse: $V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{(aw)^2 + (aw^2t)^2}$

$$V = \sqrt{a^2w^2 + a^2w^4t^2}$$

$$V = aw.(1 + w^2t^2)^{\frac{1}{2}}$$

3. l'expression du vecteur accélération en coordonnées polaires.

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$$

$$\vec{a} = aw.\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + aw^2.\overrightarrow{e_\theta} + aw^2t.\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\,w.\overrightarrow{e_r}$$

$$\vec{a} = aw.(w.\overrightarrow{e_\theta}) + aw^2.\overrightarrow{e_\theta} + aw^2t.(-w.\overrightarrow{e_r})$$

$$\vec{a} = aw^2.\overrightarrow{e_\theta} + aw^2.\overrightarrow{e_\theta} - aw^3t.\overrightarrow{e_r}$$

Donc; $\vec{a} = -aw^3t.\overrightarrow{e_r} + 2aw^2.\overrightarrow{e_\theta} = aw^2(-wt\overrightarrow{e_r} + 2\overrightarrow{e_\theta})$

- le module d'accélération : $a = |\vec{a}| = aw^2.(w^2t^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$

4. les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

- L'accélération tangentiellle a_t :

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d[\sqrt{a^2w^2 + a^2w^4t^2}]}{dt}$$

$$a_t = \frac{2a^2w^4t}{2\sqrt{a^2w^2 + a^2w^4t^2}}$$

$$a_t = \frac{2a^2w^4t}{2aw\sqrt{1 + w^2t^2}}$$

$$a_t = \frac{aw^3t}{\sqrt{1 + w^2t^2}}$$

- L'accélération normale a_n :

On a : $a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow {a_n}^2 = a^2 - a_t^2$

$${a_n}^2 = \left[aw^2.(w^2t^2 + 4)^{\frac{1}{2}}\right]^2 - \left[\frac{aw^3t}{\sqrt{1 + w^2t^2}}\right]^2$$

$${a_n}^2 = a^2w^4.(w^2t^2 + 4) - \frac{a^2w^6t^2}{1 + w^2t^2}$$

$${a_n}^2 = a^2w^6t^2 + 4a^2w^4 - \frac{a^2w^6t^2}{1 + w^2t^2}$$

$${a_n}^2 = \frac{a^2w^6t^2 + 4a^2w^4 + a^2w^8t^4 + 4a^2w^6t^2 - a^2w^6t^2}{1 + w^2t^2}$$

$${a_n}^2 = \frac{(2aw^2 + aw^4t^2)^2}{1 + w^2t^2} \Rightarrow a_n = \frac{aw^2(2 + w^2t^2)}{\sqrt{1 + w^2t^2}}$$

5. Le rayon de la courbure R, on a :

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\left(aw.(1 + w^2t^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\frac{aw^2(2 + w^2t^2)}{\sqrt{1 + w^2t^2}}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2w^2.(1 + w^2t^2)}{aw^2(2 + w^2t^2)}.\sqrt{1 + w^2t^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a(1+w^2t^2)^{3/2}}{(2+w^2t^2)}$$

Exercice 03 : Les coordonnées cartésiennes d'une particule se déplaçant dans lev plan oxy sont : $x(t) = t^2 - 2t + 3$, $y(t) = 2t^2 + t - 1$ où t est donné en secondes, x et y en mètres.

1. Déterminer la vitesse du mobile et son accélération en fonction du temps.
2. Quelles sont les composantes intrinsèques de l'accélération ?
3. Donner le rayon de courbure de la trajectoire pour t=2s.

Solution

1. la vitesse et l'accélération du mobile.
   a- la vitesse du mobile

on a : $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + 3 \\ y(t) = 2t^2 + t - 1 \end{cases}$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j};\ \begin{cases} \dot{x} = v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2t - 2 \\ \dot{y} = v_y = \dfrac{dy}{dt} = 4t + 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(t) = (2t-1)\,\vec{i} + (4t+1)\,\vec{j}$$

Le module de vitesse : $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$$v = \sqrt{(2t-2)^2 + (4t+1)^2}$$

$$v = \sqrt{20t^2 + 5} \quad \text{(m/s)}$$

b- l'accélération du mobile

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}\ ;\ \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2 \\ \ddot{y} = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}(t) = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

Le module d'accélération : $a = \vec{a} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

$$a = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \ \ (m/s^2)$$

2. les composantes intrinsèques de l'accélération

$$\vec{a} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n}$$

Avec : a_t : l'accélération tangentielle et a_n : l'accélération normale.
$\vec{u}_t$: vecteur unitaire tangentielle et $\vec{u}_n$: vecteur unitaire normale.

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

$$a_t = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{20t^2+5}\right) = \frac{20t}{\sqrt{20t^2+5}}$$

On a : $a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$

$$a_n = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{20t}{\sqrt{20t^2+5}}\right)^2}$$

$$a_n = \sqrt{20 - \frac{400t^2}{20t^2+5}} = \frac{10}{\sqrt{20t^2+5}}$$

3. le rayon de la courbure R à $t = 2\ s$

on a : $a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n}$

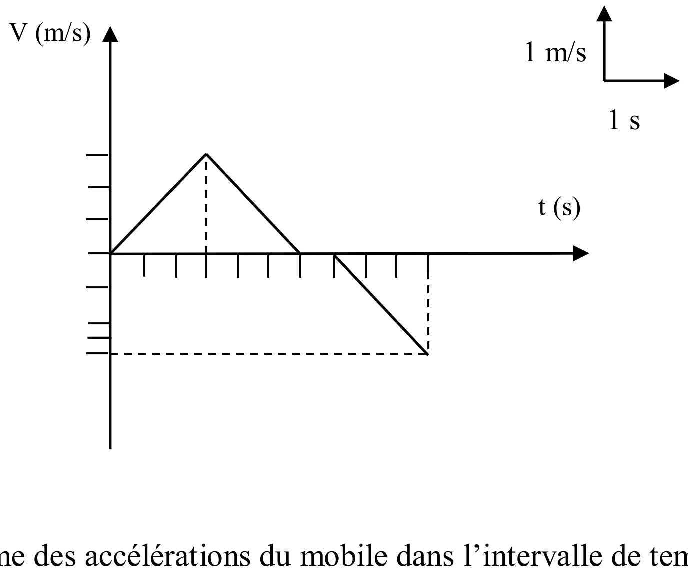
$$\Rightarrow R = \frac{(\sqrt{20t^2+5})^2}{\frac{10}{\sqrt{20t^2+2}}} = \frac{(\sqrt{20t^2+5})^{\frac{3}{2}}}{10}$$

Application numérique à t = 2 s ; R ≈ 78.4 m.

<u>Exercice 04</u> : Le diagramme des vitesses d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne, est donné par la figure ci-dessous :

Sachant que à t=0 s, V(0) =0 m/s et x (0) =0 m.

1. Tracer le diagramme des accélérations du mobile a(t) dans l'intervalle de temps [0 s, 10 s].
2. Tracer le diagramme des espaces du mobile x(t) pour $t \in [0\ s, 7\ s]$.
3. Quelle est la position du mobile à t= 10 s ?
4. Evaluer la distance parcourue du mobile entre les instants t=0 s et t=10 s.
5. Décrire le mouvement du mobile dans l'intervalle de temps [0 s, 10 s].



<u>Solution</u>

1- le diagramme des accélérations du mobile dans l'intervalle de temps [0 s, 10 s].

les conditions initiales : à $t = 0\ s, V(0) = 0\ m/s\ et\ x\ (0) = 0\ m.$

- pour $t \in]0s, 3s[$, V(t) varie linéairement alors ;

$$a = tg\alpha_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad , a = \frac{3-0}{3-0} = 1\ m/s^2$$

- pour $t \in]3s, 6s[$

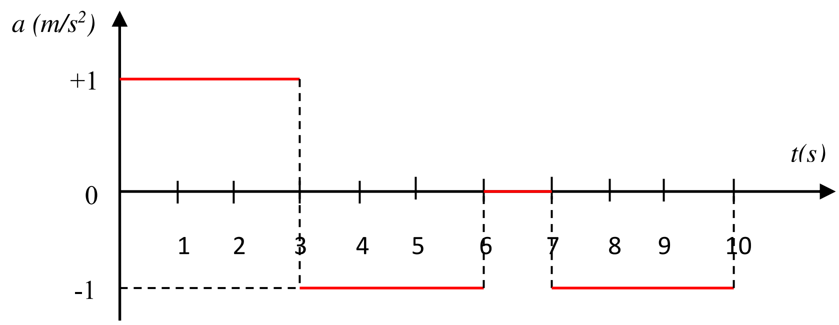
$$a = tg\alpha_2 = \frac{0-3}{6-3}, \qquad a = -1\ m/s^2$$

- pour $t \in]6s, 7s[$

$$a = 0\ {}^{m}/_{s^2}, \qquad v(t) = 0\ {}^{m}/_{s}$$

- pour $t \in]7s,\ 10s[$

$$a = tg\alpha_3 = \frac{-3-0}{10-7}, \qquad a = -1\ m/s^2$$



2- le diagramme des espaces x (t) dans l'intervalle de temps [0 s, 7 s].

- 1^er intervalle $]0s, 3s[$: $V(t) = \frac{dx_1}{dt} \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(3)} dx_1 = \int_0^3 V(t)\,dt$

$\boldsymbol{\Delta x_1 = x(3) - x(0)}$: Aire dans la courbe de V(t).

$$\Delta x_1 = x(3) = \frac{1}{2}3.3 = \frac{9}{2}\ (m)$$

- 2^ème intervalle $]3s, 6s[$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta x_2 = x(6) - x(3)} \\ \boldsymbol{\Delta x_2 = \frac{1}{2}3.3 = \frac{9}{2}\ (m)} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x(6) = \Delta x_2 + x(3)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x(6) = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9\ (m)}$$

- 3^ème intervalle $]6s, 7s[$

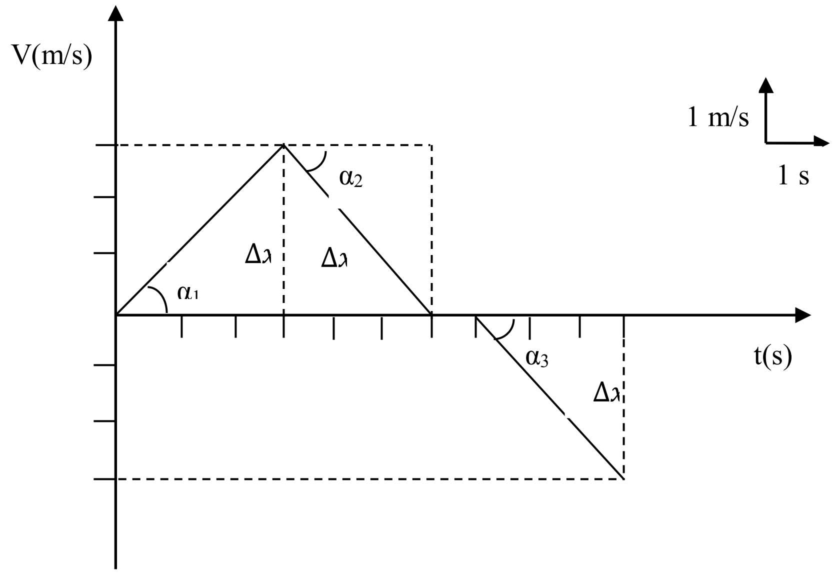
$$\Delta x_3 = x(7) - x(6) = 0 \Rightarrow x(7) = x(6)$$

$$\Rightarrow x(7) = 9\ (m)$$

3- La position du mobile à t = 10 s c-à-d : calcul de x(10)

$$\begin{cases} \Delta x_4 = x(10) - x(7) \\ \Delta x_2 = \frac{1}{2}(-3).3 = -\frac{9}{2}\ (m) \end{cases} \Rightarrow x(10) = \Delta x_4 + x(7)$$

$$\Rightarrow x(10) = -\frac{9}{2} + 9 = \frac{9}{2}\ (m)$$



4- La distance « d » parcourue par le mobile entre les instants t=0 s et t=10 s.

$$d = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4|$$

$$d = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 0 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}(m)$$

5- La nature du mouvement dans l'intervalle de temps [0 s, 10 s].

- Pour $t \in]0s, 3s[$, $a.v > 0$ $\Leftrightarrow$ mouvement réctiligne uniformèment accélére.
- Pour $t \in]3s, 6s[$, $a.v < 0$ $\Leftrightarrow$ mouvement réctiligne uniformèment retardé.
- Pour $t \in]6s, 7s[$, $a = 0\ m/s^2\ et\ v = 0\ m/s$ $\Leftrightarrow$ pas de mouvement.
- Pour $t \in]7s, 10s[$, $a.v > 0$ $\Leftrightarrow$ mouvement réctiligne uniformèment accélére.

Exercice 05 : Les coordonnées cartésiennes d'un point mobile en mouvement dans le plan xoy sont : $x(t) = \frac{1}{2p}t^2$ et $y(t) = \frac{\tau}{p}t$; $(\tau > 0\ et\ p > 0)$

1. Donner la trajectoire du mobile.
2. Déterminer en fonction du temps, les composantes cartésiennes de la vitesse et de l'accélération.
3. Trouver les composantes intrinsèques de l'accélération.
4. Donner l'expression du rayon de courbure en fonction du temps.

Solution

1. la trajectoire du mobile

$y = \frac{\tau}{p} t \quad \Rightarrow t = \frac{p}{\tau} y$

On remplaçant l'expression de t dans x(t) :

$x = \frac{1}{2p} . \left(\frac{p}{\tau} . y\right)^2 \Rightarrow x = \frac{p}{2\tau} . y^2$, c'est un parabole ($x \geq 0, y \geq 0$).

2. les composantes cartésiennes de la vitesse et de l'accélération.

$$\vec{v} = v_x \vec{\imath} + v_y \vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{p} t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\tau}{p} \end{cases}$$

Le module de $\vec{v}$: $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$v = \sqrt{\left(\frac{t}{p}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{p}\right)^2} = \frac{1}{p}\sqrt{t^2 + \tau^2}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{\imath} + a_y \vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{p} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases}$$

Le module de $\vec{a}$: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{1}{p}$

2. les composantes intrinsèques de l'accélération

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{p} . \frac{t}{\sqrt{t^2 + \tau^2}}$$

On a : $a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n^2 = a^2 - a_t^2$

$$\Rightarrow a_n^2 = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{t}{p\sqrt{t^2 + \tau^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow a_n^2 = \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{t^2}{t^2 + \tau^2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n^2 = \frac{1}{p^2}\left(\frac{\tau^2}{t^2 + \tau^2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\tau}{p} . \frac{1}{\sqrt{t^2 + \tau^2}}$$

3. l'expression du rayon de courbure en fonction du temps R(t)

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n}$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{\left(\frac{1}{p}\sqrt{t^2 + \tau^2}\right)^2}{\frac{\tau}{p} . \frac{1}{\sqrt{t^2 + \tau^2}}}$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{1}{p\tau}(t^2 + \tau^2)^{3/2}$$

Exercice 06 : Une particule se déplace dans un plan. Son accélération est donnée au cours du temps par l'expression : $\vec{a} = \alpha\, \overrightarrow{u_t} + \beta t^4\, \overrightarrow{u_n}$.
$\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n}$ Sont les vecteurs unitaires tangentiele et normal du repère intrinsèque, α et β des constantes positives.
A l'instant t=0, la particule est au repos en o l'origine des coordonnées.

1- Donner les dimensions de α et β.
2- Calculer l'abscisse curviligne s(t) en fonction du temps.
3- Déterminer le rayon de courbure « ρ » en fonction de s .(vérifier l'homogénéité de la relation).
4- Calculer le module de l'accélération $\vec{a}$ en fonction de s. .(vérifier l'homogénéité du résultat).

Solution

On a : $\vec{a} = \alpha\, \overrightarrow{u_t} + \beta t^4\, \overrightarrow{u_n} \; \dots .(1)$

1- Sachant que $[a] = LT^{-2} \Rightarrow [\alpha] = [a] = LT^{-2}$

et $[a] = [\beta t^4] \Rightarrow [\beta] = \dfrac{[a]}{[t^4]}$

$$\Rightarrow [\beta] = \frac{LT^{-2}}{T^4} = LT^{-6}$$

Les vecteurs unitaires sont des grandeurs sans dimension.

2- L'abscisse curviligne est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t = v\,\vec{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_n \dots \quad (2)$$

L'identification de l'équation (1) et (2) donne :

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \Rightarrow v = \alpha t + v_0 = \frac{ds}{dt}$$

soit $s(t) = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 + s_0$. (les conditions initiales: à $t = 0, s_0 = 0$ et $v_0 = 0$)

d'où $s(t) = \dfrac{1}{2}\alpha t^2$

3- le rayon de courbure « ρ » en fonction de s :

d'autre part l'identification de l'équation (1) et (2) donne :

$$\frac{v^2}{\rho} = \beta t^4 \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\beta t^4} = \frac{\alpha^2 t^2}{\beta t^4}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\alpha^2}{\beta t^2} = \frac{\alpha^3}{2s\beta}$$

Homogénéité : $[\rho] = L$ et $\left[\frac{\alpha^3}{2s\beta}\right] = \frac{L^3T^{-6}}{L.LT^{-6}} = L$

4- Le module de l'accélération $\vec{a}$ en fonction de s :

$$|\vec{a}|^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 = \alpha^2 + (\beta t^4)^2$$

En éliminant le temps par: $t^2 = \frac{2s}{\alpha}$, on aura $|\vec{a}| = \left(\alpha^2 + \frac{16\,\beta^2 s^4}{\alpha^4}\right)^{1/2}$

Homogénéité : $[a] = LT^{-2}$ et $\left[\left(\alpha^2 + \frac{16\,\beta^2 s^4}{\alpha^4}\right)^{1/2}\right] = [\alpha^2] = \left[\frac{16\,\beta^2 s^4}{\alpha^4}\right]$

$$= (L^2T^{-4})^{\frac{1}{2}} = LT^{-2}$$

II-13. Mouvement relatif

II-13-1. Introduction

Le mouvement d'un point matériel peut être réparti en deux mouvements distincts :

- Un mouvement par rapport à un repère fixe $R(O, x, y, z)$ qu'on nommera repère Absolu.
- Un mouvement par rapport à un repère mobile $R'(O, x', y', z')$ qu'on nommera repère relatif.

Toutes les grandeurs (position, vitesses et accélération) seront identifiées par rapport au repère approprié.

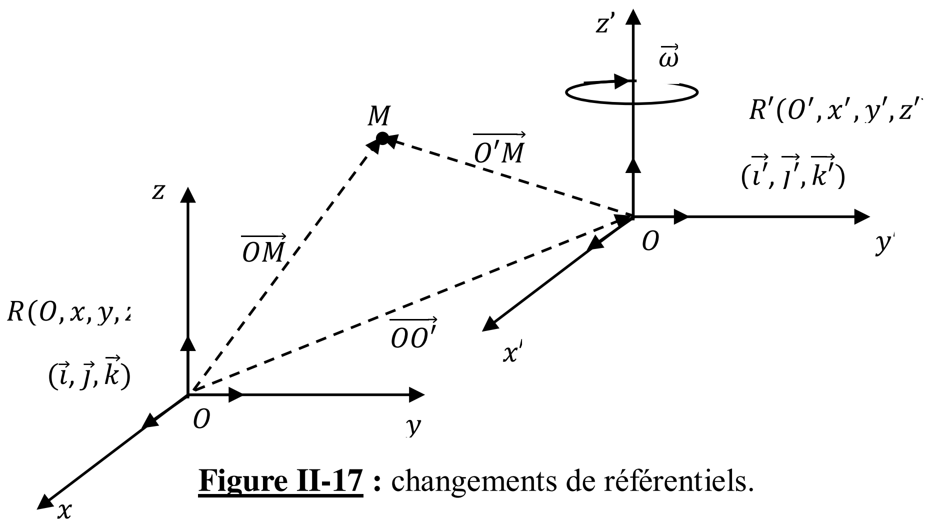


Figure II-17 : changements de référentiels.

II-13-2. Vecteur position

La position de M par rapport au repère fixe R est dite position absolue.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (\mathrm{II}-32)$$

La position relative est la position de M par rapport au repère mobile R'

$$\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (\mathrm{II}-33)$$

II-13-3. Vecteur Vitesse

La vitesse absolue est la vitesse de M par rapport au repère fixe R :

$$\vec{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (\mathrm{II}-34)$$

D'autre part, nous avons : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

Cette vitesse peut etre calculée d'une autre façon :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}$$

La vitesse absolue est composée de la vitesse d'entrainement $\vec{V_e}$ et la vitesse relative $\vec{V_r}$ tel que :

$$\vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\vec{V_r} = \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}$$

D'où : $\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (\mathrm{II}-35)$

La vitesse d'entrainement $\vec{V_e}$ est la vitesse du repère R' par rapport au repère fixe R.

La vitesse relative $\vec{V_r}$ est la vitesse de M par rapport au repère mobile R'.

Deux cas de mouvement de R' peuvent être, en translation et en rotation, la vitesse absolue et relative garde la même expression par contre la vitesse d'entrainement se met différemment.

II-13-4. Vecteur accélération

L'accélération absolue est l'accélération de M par rapport au repère fixe R.

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}_a = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}\right] + 2\left[\frac{dx'}{dt}.\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}.\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}.\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right]$$

$$+\left[\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}\right]\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(\mathrm{II}-36)$$

L'accélération est composée de l'accélération relative $\vec{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$, et l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}$, tel que :

$$\vec{a_r}=\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}$$

$$\vec{a_e}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x'\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$

$$\vec{a_c}=2\left[\frac{dx'}{dt}.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\vec{a_a}=\vec{a_r}+\vec{a_e}+\vec{a_c}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(\mathrm{II}-37)$$

Le mouvement du repère R' peut être en translation ou en rotation par rapport au repère fixe R. La vitesse relative ne change pas mais la vitesse d'entrainement change et par conséquent l'accélération d'entrainement change et l'accélération de Coriolis change.

II-13-4-a. Cas de Translation

Les vecteurs unitaires du repère R' (R' en translation par rapport à R) ne changent pas ils gardent le même sens et même direction de ce fait leurs dérivés par rapport aux temps sont nulles. Il y a que l'origine O' qui varie dans le temps.

$\vec{\imath}=\vec{\imath'}$,$\vec{\jmath}=\vec{\jmath'}$, $\vec{k}=\vec{k'}$ donc, $\frac{d\vec{\imath'}}{dt}=\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}=\frac{d\vec{k'}}{dt}=\vec{0}$

La vitesse d'entrainement devient : $\vec{V_e}=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

L'accélération d'entrainement devient : $\vec{a_e}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$

L'accélération coriolis devient : $\vec{a_c}=\vec{0}$.

II-13-4-b. Cas de rotation

$$\frac{d\vec{\imath'}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{\imath'}\Rightarrow\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{\imath'}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{\imath'}}{dt}$$

$$\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{\imath'}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right]+y'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{\jmath'}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right]+z'\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{k'}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge x'\vec{\imath'}+\vec{\omega}\wedge x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right]+\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge y'\vec{\jmath'}+\vec{\omega}\wedge y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right]+\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge z'\vec{k'}+\vec{\omega}\wedge z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\left(x'\vec{\imath'}+y'\vec{\jmath'}+z'\vec{k'}\right)+\vec{\omega}\wedge\left(x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt}+y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}+z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left[x'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i'}\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j'}\right) + z'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k'}\right)\right]$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left[\left(\vec{\omega} \wedge x'\vec{i'}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge y'\vec{j'}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge z'\vec{k'}\right)\right]$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)\right]$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i'}\right) + \frac{dy'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j'}\right) + \frac{dz'}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k'}\right)\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \left[\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left(\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}\right)$$

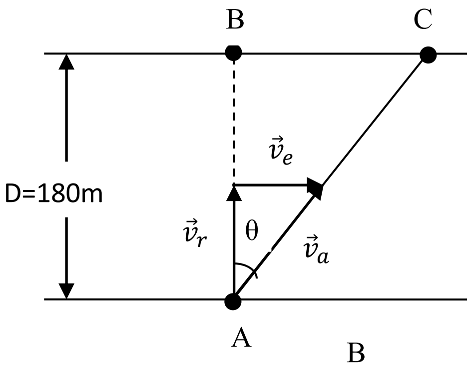
II-13-5. Exercices

Exercice 01 : Un nageur dont la vitesse en eau calme est de 1.4m/s veut traverser, en ligne droite, une riviére de 180m de large. Il veut pour cela aller d'un point A vers un point B situé en face de A. L'eau se déplace à la vitesse de 0.8 m/s.

1/ Partant du point A, à quelle distance de B arrivera t-il sur l'autre rive ?

2/ Combien de temps mettra t-il pour atteindre l'autre rive ?

3/ Quelle direction caractérisée par l'angle avec la direction AB devra t-il prendre pour arriver au point B ?



Solution

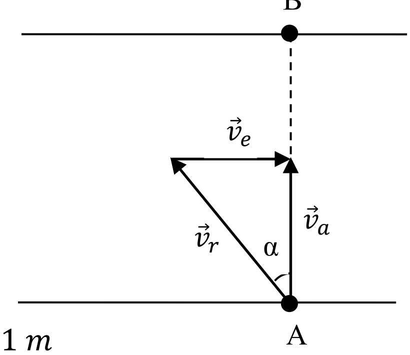
1/ Déterminons la distance BC

$$tg\theta = \frac{v_e}{v_r} = \frac{BC}{D}$$

$$\Rightarrow d = D.\frac{v_e}{v_r}$$

$$AN: d = 180.\frac{0.8}{1.4} = 102.85\ m$$

$$\Rightarrow \theta = 29.7\ ^0$$



2/ Le temps qu'il mettra pour atteindre l'autre rive.

$$AC = v_a.t \Rightarrow t = \frac{AC}{v_a}$$

$$Ac^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = (AB^2 + BC^2)^{1/2} = 207.31\ m$$

$v_a{}^2 = v_r{}^2 + v_e{}^2 \Rightarrow v_a = (v_r{}^2 + v_e{}^2)^{1/2} = 1.61\ m/s$

Donc t=128.76 s

3/ L'angle α= ?

$sin\alpha = \frac{v_e}{v_r} = 0.57 \Rightarrow \alpha = 34.75\,^0$

Exercice 02 : Un train roule à 72 km/h lorsque une lanterne suspendue à son plafond se décoroche avec les secousses.

1. Quelle est la vitesse en fonction du temps de la lanterne par rapport à un passager dans le train (module, direction et sens).
2. Quelle est sa vitesse $\vec{v}$ en fonction du temps par rapport à un observateur sur le quai (au sol). Préciser le module, le sens et la direction de $\vec{v}$.
3. Quelle est la trajectoire de la lanterne vue par :

a- Le passager dans le train,

b- L'observateur sur le quai

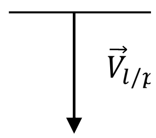
Solution

1. Vitesse de la lanterne par rapport à un passager dans le train : $V_{l/p}$

son module : $V_{l/p} = gt$

sa direcction : vertical

sa sens : de $\vec{g}$



2. Vitesse de la lanterne par rapport à un observateur au sol : $V_{l/s}$

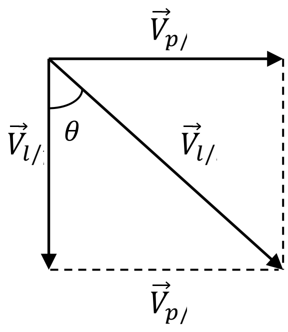
On a : $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$; $\vec{V}_a = \vec{V}_{l/s}$; $\vec{V}_r = \vec{V}_{l/p}$ et $\vec{V}_e = \vec{V}_{p/s}$

Donc: $\vec{V}_{l/s} = \vec{V}_{l/p} + \vec{V}_{p/s}$

$V_{l/s}{}^2 = V_{l/p}{}^2 + V_{p/s}{}^2 = (gt)^2 + (20)^2$

Module de $\vec{V}_{l/s}$: $V_{l/s} = \sqrt{(gt)^2 + (20)^2}$ (m/s)

Direction de $\vec{V}_{l/s}$: $tg\theta = \frac{\|\vec{V}_{p/s}\|}{\|\vec{V}_{l/p}\|} = \frac{V_{p/s}}{V_{l/p}} = \frac{20}{gt}$



Sens de $\vec{V}_{l/s}$: est indiqué sur la figure

3. Trajectoire pour le passager dans le train, si le chute libre suivant la verticale.

La trajectoire pour un observateur sur la quai (au sol), elle est tangente au vecteur vitesse à chaque instant. L'équation de la trajectoire :

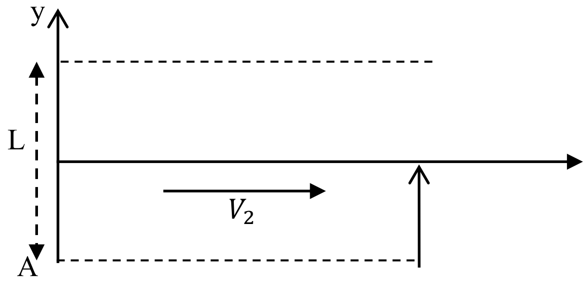
Suivant Ox :

$x = V_{p/s}.t \Rightarrow t = \frac{x}{V_{p/s}}$

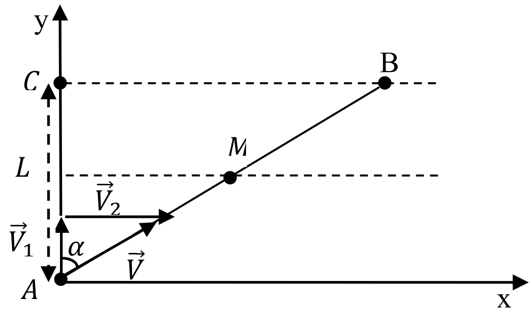
$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_{p/s}}\right)^2$

$$y = \frac{1}{2\left(V_{p/s}\right)^2} g.x^2 \text{ (équation d'une parabole)}$$

Exercice 03 : Les berges d'une rivière sont parallèles, leur distance est L=250 m. Un bateau se déplace dans la direction Ay avec une vitesse V_1 constate de 2 m/s. Le courant de rivière a une vitesse V_2 constante et de valeur 1 m/s (voir la figure ci-dessous).



1. Calculer le temps mis par le bateau pour aller d'une rive à l'autre.
2. Calculer sa vitesse résultante V.
3. Trouver l'equation de sa trajectoire et donner sa nature.
4. Identifier les différentes vitesses V_1, V_2 et V.
5. Calculer la distance qui sépare l'axe (Ay) du point d'arrivée (la déviation).



Solution

1. Le temps mis par le bateau pour aller d'une rive à l'autre : $t_{AB} = \frac{AB}{V}$

A partir de la figure : $cos\alpha = \frac{V_1}{V} = \frac{L}{AB} \Rightarrow AB = \frac{L.V}{V_1}$

$t_{AB} = \frac{L.V}{V.V_1} = \frac{L}{V_1}$ A.N $t_{AB} = \frac{250}{2} = 125$ s

2. Le vitesse résultante V :d'après la figure

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \Rightarrow V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$$

$$V = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = 2.24\ m/s$$

3. Equation de trajectoire et sa nature :

On choisit un point M quelconque, le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

le vecteur vitesse $\vec{V} = \begin{cases} V_x = V_1 = \frac{dx}{dt} = 1 \\ V_y = V_2 = \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2dt \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$; (à $t = 0, x = y = 0$) $\Rightarrow y = 2x$

Donc, l'équation de la trajectoire estb une droite de la pente égale à 2.

4. Identification des vitesses : $\begin{cases} V_1 : vitesse\ relative \\ V_2 : vitesse\ d'entrainement \\ V\ : vitesse\ absolue \end{cases}$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

5. Calcul de la déviation CB

D'apr ès la figure : $tg\alpha = \frac{CB}{L} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow CB = \frac{L.V_2}{V_1}$

$AN: CB = \frac{250}{2} = 125\ m$

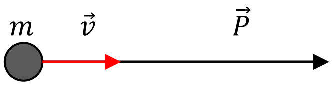
Chapitre III : Dynamique

III-1. Définition

La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent.

III-2. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\vec{P}$ d'une particule est est la grandeur vectorielle définie comme étant le produit de sa masse m par son vecteur vitesse $\vec{v}$.



$$\vec{P} = m\vec{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-1)$$

Figure III-1 : La quantité de mouvement.

La quantité de mouvement est un vecteur ayant la même direction et le même sens que la vitesse et a pour unité SI le $kg.m.s^{-1}$.

III-3. Lois de Newton

La mécanique newtonienne repose sur trois grandes lois :

III-3-a. Première loi de Newton (le principe d'inertie)

Un point matériel M isolé ou pseudo-isolé (n'est soumis à aucune force c-à-d : $\sum\vec{F} = \vec{0}$), soit il reste au repos ou sa vitesse est constante s'il est déjà en mouvement (ce point en mouvement de translation) donc son mouvement rectiligne uniforme ($\vec{a} = \vec{0}$)

Remarque : Un référentiel d'inertie (ou galiléen) est un repère dans lequel le principe d'inertie est réalisé. C'est-à-dire : un point matériel M n'est soumis à aucune force (la résultante des forces est nulle), sera au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

III-3-b. Deuxième loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique)

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel M est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement de ce point.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

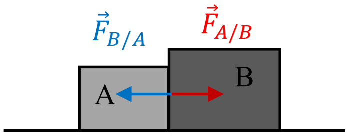
$$\sum \vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dans la mécanique newtonienne, la masse est une grandeur scalaire constante sa dérivée par rapport au temps est nulle ($\frac{dm}{dt} = 0$). Donc ;

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (III-2)$$

III-3-c. Troisième loi de Newton (Principe de l'action et de la réaction)

Lorsque deux corps sont en interaction, ils exercent l'un sur l'autre des forces de signe opposé en sens mais égales en intensité et en direction.



$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

$$F_{A/B} = F_{B/A}$$

Figure III-2 : Action et réaction.

III-4. Forces

Nous avons deux types des forces : forces à distance et forces de contact, nous citons ici quelques exemples :

III-4-1. Forces à distance

III-4-1-a. Force gravitationnelle

La force gravitationnelle s'exerce entre deux masses, c'est une force à distance. Elle a été énoncée par Newton en 1650. Elle est de la forme :

$$\vec{F}_{m_2/m_1} = -\vec{F}_{m_1/m_2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (III-3)$$

Ou $G = 6{,}67.10^{-11} m^3/Kgs^2$ est la constante de gravitation universelle, $\vec{u}$ est le vecteur unitaire et m_1 et m_2 sont deux masses en intéraction séparées par une distante r.

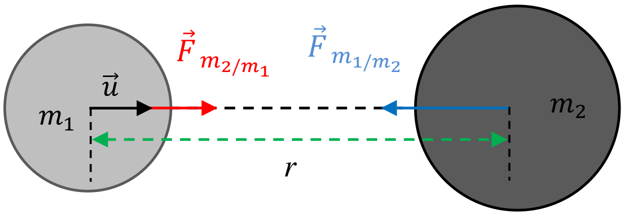
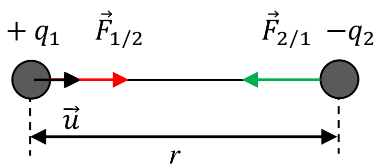


Figure III-3: Forces d'interaction gravitationnelle exercées entre deux corps.

III-4-1-b. Force électrostatique (force coulombienne)

La force coulombienne (électrostatique) s'exerce entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées par une distance r. Ces deux charges exercent mutuellement l'une sur l'autre une force attractive ou répulsive selon le signe de leurs charges. Elle est de la forme : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$

Ou K : la constante de Coulomb ($K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 N.m^2C^{-2}$), et $\vec{u}$ le vecteur unitaire.



$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$$

$$F_{2/1} = F_{1/2}$$

Figure III-4 : Forces d'interaction coulombienne exercées entre deux charges.

III-4-1-c. Force électromagnétique (force de Lorentz)

La force que subit une charge électrique q, de vitesse $\vec{v}$ placée dans un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ est appelée force électromagnétique ou force de Lorentz:

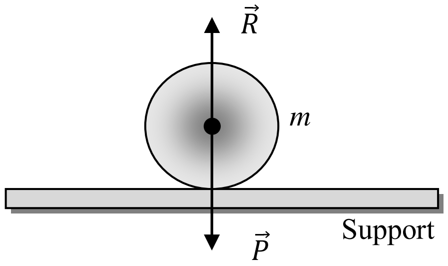
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-4)$$

III-4-2. Force de contact

III-4-2-a. Réaction de support

On considère un corps solide de masse m posé sur une surface horizontale. La force de réaction $\vec{R}$ est l'action du support sur lequel repose le système. Cette force de même intensité que le poids mais de sens opposé. L'objet étant en équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-5)$$



<u>Figure III-5</u> : Force de réaction d'un support.

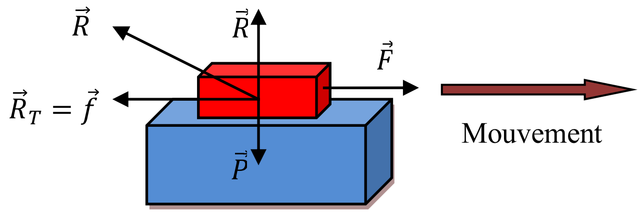
III-4-2-b. Force de frottement

Lorsque un objet en contact et en mouvement par rapport à autre objet , il apparait une force qui s'appelée force de frottement qui est opposé es au sens de mouvement.

Si les deux objets sont des solides, on parle de fortement solide, si l'un est solide et l'autre un liquide, on parle de frottement visqueux.

A/ Frottement solide

Considérons posé sur un support horizontal. On pousse horizontalement l'objet à l'aide d'une force $\vec{F}$ motrice.



<u>Figure III-6</u> : Force de frottement exercée par un support sur un objet muni d'une force motrice.

La force de frottement $\vec{f} = \vec{R}_T$, son module $|\vec{R}_T| = \mu R_N$; où μ est le coefficient de frottement cinétique.

B/ Frottement visqueux

Lorsqu'un corps se déplace dans un fluide (liquide ou gaz) à une vitesse relativement faible, la force de frottement est : $\vec{F}_f = -\kappa\eta\vec{V}$

ou κ est un coefficient lié à la forme du corps et η est le coefficient de viscosité du fluide.

III-4-2-c. Forces de tension (force de rappel)

Considérons le système masse-ressort. Quand le ressort de raideur k s'allonge, une force de tension s'exerce sur la masse $\vec{F} = -k\,(l - l_0)\vec{u}$, proportionnelle à allongement du ressort Δl pour atteindre un équilibre.

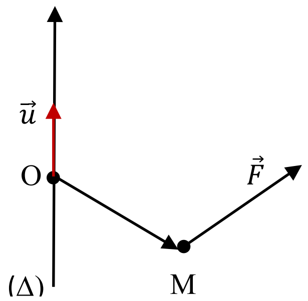
$\Delta l = l - l_0$; Ou avec $l_0$la longueur du ressort a vide et l sa longueur chargée.

III-5. Moment d'une force

III-5-1. Moment d'une force par rapport à un point

Considérons un point matériel M dans un référentiel R soumis à une force $\vec{F}$. Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O, noté $\overrightarrow{\tau_O}$, est un produit vectoriel entre la force $\vec{F}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{\tau_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$. ……………………………………….……$(III-6)$

$\overrightarrow{\tau_O}$ c'est un vecteur perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ de façon à ce que le trièdre ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$, $\vec{F}$) soit direct.



<u>Figure III-7</u> : moment d'une force par rapport à un point.

III-5-2. Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ), noté $\tau_{(\Delta)}$, est un produit scalaire entre moment d'une force par rapport à un point $\overrightarrow{\tau_O}$ et le vecteur unitaire $\vec{u}$.

$$\tau_{(\Delta)} = \overrightarrow{\tau_O}.\vec{u} \;……………………………………….\; (III-7)$$

$\tau_{(\Delta)}$ c'est la projection de $\overrightarrow{\tau_O}$ sur l'axe (Δ).

III-6. Moment cinétique

III-6-1. Moment cinétique par rapport à un point

Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$, par rapport à un point fixe O d'un référentiel R, est un produit vectoriel entre le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ le vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$:

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(III-8)$$

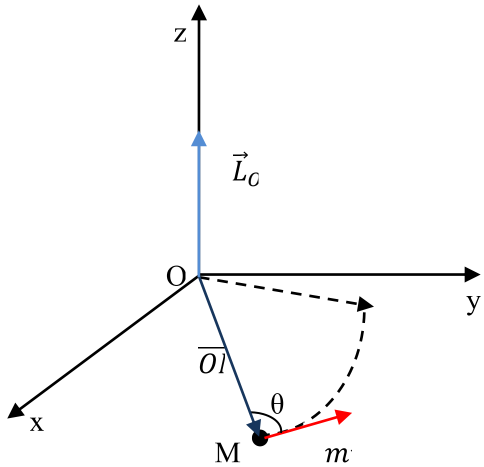


Figure III-8 : Moment cinétique par rapport à un point.

III-6-2. Moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique par rapport à l'axe (Δ), noté $L_{(\Delta)}$, est un produit scalaire entre moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ par rapport à un point et le vecteur unitaire $\vec{u}$.

$L_{(\Delta)} = \overrightarrow{L_O}.\vec{u}$; $L_{(\Delta)}$ c'est la projection de $\overrightarrow{L_O}$ sur l'axe (Δ).

III-6-3. Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique montre que la dérivée du moment cinétique d'un point matériel par rapport au temps est égale a la somme des moments des forces appliquées.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

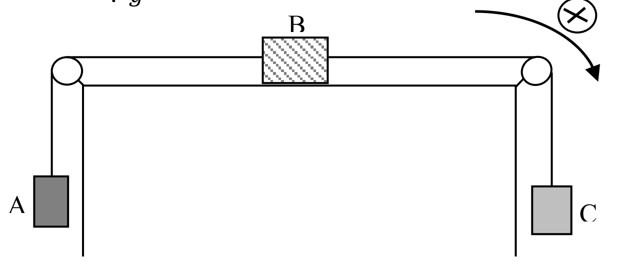
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d(\vec{v})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots\dots\dots(III-9)$$

$\vec{F}$ est la résultante des forces extérieures appliquées. Donc ; $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$

III-7. Exercices

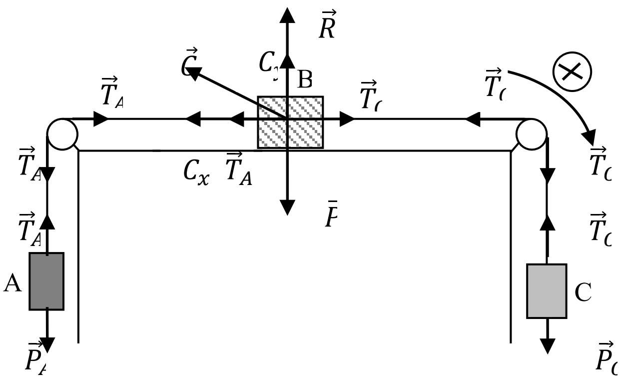
Exercice 01 : Les masses des deux corps A et B sont respectivement $m_A = 2\ kg$ et $m_B = 20kg$ (voire la figure). Le coefficient de frottement de glissement de corps B avec la surface horizontale est $\mu_g = 0.1$



1/ Déterminer la masse m_c du corps C, si l'accélération de B est de $2m/s^2$ vers la droite.

2/ Déterminer la tension dans chaque fil quand B a la même accélération que dans la question (1).

Solution



1/ La masse m_C =? si $a_B = 2m/s^2$:

En appliquant la 2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) pour les trois masses suivant la direction de mouvement : $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

Pour la masse m_A : $\vec{P}_A + \vec{T}_A = m_A.\vec{a}$; Projection : $T_A - P_A = m_A.a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-10)$

Pour la masse m_B : $\vec{C} + \vec{T}_A + \vec{T}_c = m_B.\vec{a}$; Projection : $T_C - T_A - C_x = m_B.a \ldots (III-11)$

avec $C_x = \mu_g g.m_B$

Pour la masse m_C : $\vec{P}_C + \vec{T}_c = m_C.\vec{a}$; Projection : $P_C - T_c = m_c.a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-12)$

$$(III-12) \Rightarrow m_c.g - m_c.a = T_c \Rightarrow m_c = \frac{T_c}{g-a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-13)$$

$$\begin{cases}(III-10) \Rightarrow T_A = m_A.a + P_A \\ (III-11) \Rightarrow T_C = m_B.a + T_A + C_x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T_A = m_A.a + m_A.g \\ T_C = (m_B + m_A).a + (m_A + \mu_g m_B).g\end{cases} (III-14)$$

En remplaçant la relation (III-14) dans (III-13), on obtient :

$$m_c = \frac{(m_B + m_A).a + (m_A + \mu_g m_B).g}{g-a} \quad A.N: \ m_c = 10.5\ kg$$

2/ Les tensions : T_A =? et T_C =? si $a_B = 2m/s^2$:

$(III-10) \Rightarrow T_A = m_A.(a+g) = 24N$

$(III-13) \Rightarrow T_C = m_c.(g-a) = 84N$

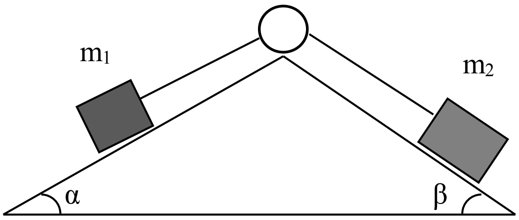
Exercice 02 : Deux masses m_1 et m_2 ($m_2 > m_1$) se déplacent sur deux plans inclinés sans frottement d´angle respectifs α et β avec l´horizontale. Elles sont reliées par un fil inéxtensible de longueur constante et de masse négligeable.

a - Décrire les équations de mouvement pour m_1 et m_2.

b- Exprimer l'accélération du système en fonction de m_1, m_2, α, β et g.

c- Trouver les réaction R_1 et R_2

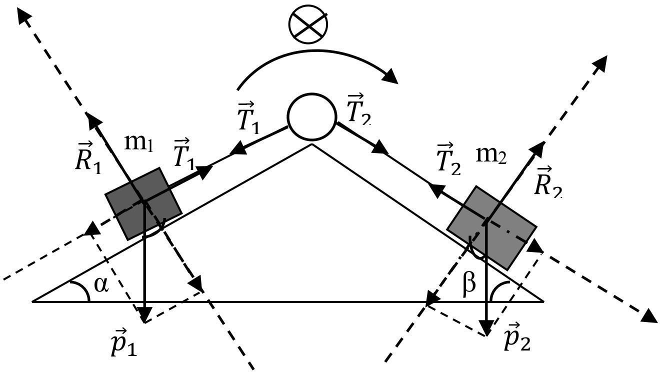
a- Trouver la tension du fil.



Solution

a/ Les équations de mouvement pour m_1 et m_2

En appliquant la 2ème loi de Newton, pour les deux masses suivant la direction de mouvement : $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$



Pour la masse m_1 : $\vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 = m_1.\vec{a}$

Projection : $T_1 - P_1 = m_1.a$ ……………………………………… $(III-15)$

Pour la masse m_2 : $\vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}$

Projection : $P_2 - T_2 = m_2.a$ ……………………………………… $(III-16)$

Le fil inéxtensible et de masse négligeable, donc, $T_1 = T_2 = T$

$(III-15) \Rightarrow T - m_1 g sin\alpha = m_1.a$

$(III-16) \Rightarrow m_2 g sin\beta - T = m_2.a$

b/ **A**ccélération du système en fonction de m_1, m_2, α, β et g.

$(III-15)+(III-16) \Rightarrow m_2 g sin\beta - m_1 g sin\alpha = (m_1+m_2).a$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 sin\beta - m_1 sin\alpha}{m_1 + m_2}.g$$

c- Les réaction R_1 et R_1

Pour la masse m_1 : $\vec{P}_1 + \vec{R}_1 = \vec{0}$; Projection : $R_1 - m_1 gcos\alpha = 0 \Rightarrow R_1 = m_1 gcos\alpha$

Pour la masse m_1 : $\vec{P}_2 + \vec{R}_2 = \vec{0}$; Projection : $R_2 - m_2 gcos\beta = 0 \Rightarrow R_2 = m_2 gcos\beta$

d- La tension du fil : a partir de la relation (III-15) ou bien (III-16) en tire l'expession de T :

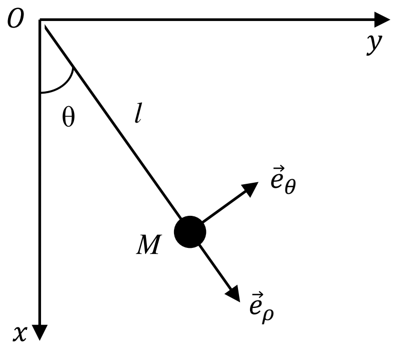
$(III - 15) \Rightarrow T = m_1.a + m_1 gsin\alpha$

$$\Rightarrow T = m_1.\frac{m_2 sin\beta - m_1 sin\alpha}{m_1 + m_2}.g + m_1 gsin\alpha$$

$$\Rightarrow T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.(sin\beta + sin\alpha)g$$

Exercice 03 : Un pendule simple constitué d'un objet ponctuel M de masse m accroché à un fil inextensible de longueur l□ et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (Oxy) du référentiel fixe $R(O, x, y, z)$.

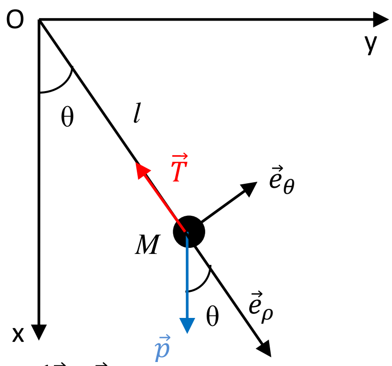
On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre (θ = 0) lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes. (le champ de pesanteur terrestre□ est considéré comme uniforme.)



1) Exprimer les forces appliquées au point M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

2) En appliquant le théorème des moments cinétiques puis la 2ème loi de la dynamique (PFD) dans le référentiel galiléen, établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.

Solution



1/ Les forces appliquées au point M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \kappa)$

- Le poids : $\vec{p} = m\vec{g}$ avec $\vec{p} = mgcos\theta\,\vec{e}_\rho - mgsin\theta\,\vec{e}_\theta$.
- La tension du fil : $\vec{T} = -T\,\vec{e}_\rho$

2/ L'équation différentielle du mouvement.

- L'application de théorème des moments cinétiques :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-17)$$

$\vec{L}_O$: moment cinétique d'un point matériel par rapport un point O.

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

$$\overrightarrow{L_O} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{k} \\ l & 0 & 0 \\ 0 & ml\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = ml^2\dot{\theta}\,\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-18)$$

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O(\vec{p}) + \vec{\tau}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{k} \\ l & 0 & 0 \\ mgcos\theta & -mgsin\theta & 0 \end{vmatrix} = -mglsin\theta\,\vec{k}$$

Ce qui implique que l'équation (III-17) devient :

$$ml^2\dot{\theta}\,\vec{k} = -mglsin\theta\,\vec{k} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (III-19)$$

On obtient finalement pour les faible oscillations : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

- L'application de la $2^{ème}$ loi de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

$$\Rightarrow m\vec{g} + \vec{T} = m\,\vec{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-20)$$

La projection de l'équation (III-20) sur les axe des vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$:

- <u>Sur $\vec{e}_\rho$</u> : $mg.cos\theta - T = m\,a_\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-21)$
- <u>Sur $\vec{e}_\theta$</u>: $-mg.sin\theta = m\,a_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-22)$

On a : le vecteur position en coordonnées polaires :

$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho = l\,\vec{e}_\rho$

Le vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(l\,\vec{e}_\rho)}{dt} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Le vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(l\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$

Accélération radiale : $\vec{a}_\rho = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho \Rightarrow a_\rho = l\dot{\theta}^2$

Accélération trasversalle : $\vec{a}_\theta = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow a_\theta = l\ddot{\theta}$

L'équation (III-22) devient : $-mg.sin\theta \ = ml\ddot{\theta} \ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

Pour de faibles oscillations $sin\theta \simeq \theta$, donc l'équation du mouvement est $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Chapitre IV: Travail et énergie

IV-1. Travail d'une force

Dans un référentiel $R(O, xyz)$, on considérant à l'instant t un point matériel de masse m se trouve au point M et se déplaçant sous l'action d'une force $\vec{F}$ sur une trajectoire de forme quelconque.

A, l'instant $(t + dt)$, le mobile vient en M', infiniment voisin de M, donc le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$. Le vecteur force $\vec{F}$ peut être considéré comme constant alors, on définit le travail élémentaire par : $dw = \vec{F}.d\vec{l}$

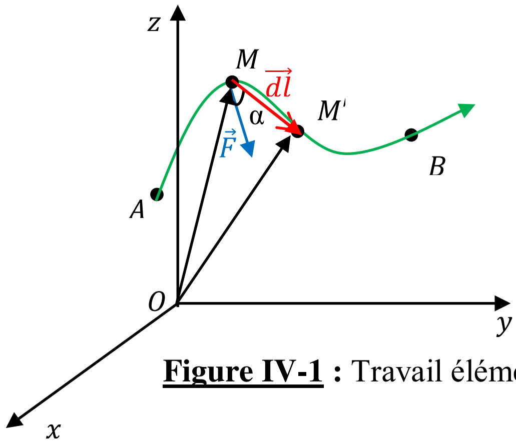


Figure IV-1 : Travail élémentaire.

Si le mobile est déplacé d'un point A à un autre B, le travail total est :

$$w = \int_A^B dw = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$$

$$w = \int_A^B \|\vec{F}\|.\|d\vec{l}\|.cos\left(\widehat{\vec{F}, d\vec{l}}\right) = \int_A^B F.dl.cos\,\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-1)$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow w > 0$, le travail est appelé travail moteur.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow w < 0$, le travail est dit travail résistant.

Si $\vec{F} \perp \vec{v}$, c-à-d que la force $\vec{F}$ est perpendiculaire à la trajectoire du mobile, alors le travail w est nul. Le travail w s'exprime en Joules $(1\text{J} = 1N.m)$.

Dans référentiel $R(O, xyz)$, le mobile est défini par ces coordonnées cartésiennes x, y, z, les composantes de la force $\vec{F}$ etant F_x, F_y et F_z donc le travail élémentaire :

$$dw = \vec{F}.d\vec{l} = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}).(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$dw = F_x dx + F_y dy + F_z dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-2)$$

Pour un déplacement de A à B, le travail total est :

$$w = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

Si $\vec{F}$ est constante (en grandeur et en direction), l'expression de w prend la forme suivante :

$$w = F_x \int_{x_A}^{x_B} dx + F_y \int_{y_A}^{y_B} dy + F_z \int_{z_A}^{z_B} dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-3)$$

IV-2. Puissance

La puissance est définie par la dérivée du travail par rapport au temps :

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (IV-4)$$

Donc, la puissance instantanée d'un point matériel M est le produit scalaire de la résultante des forces qui agissent sur M par la vitesse de ce point. Autrement-dit, le travail élémentaire fourni par un point matériel se déplaçant d'une quantité finie dl, est donné par : $dw = p.dt$

IV-3. Energie cinétique

La combinaison de la définition du travail et le princpe fondamentale de le dynamique appliqué pour une masse constante donne la notion de l'énergie cinétique. D'après ses définitions :

$$\begin{cases} dw = \vec{F}.d\vec{l} \\ \vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \end{cases} \Rightarrow dw = m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{l}$$

$$\Rightarrow dw = m.d\vec{v}\frac{d\vec{l}}{dt} = m.d\vec{v}.\vec{v}$$

$$\Rightarrow dw = m.d\left(\frac{1}{2}.(\vec{v})^2\right) = m.d\left(\frac{1}{2}.v^2\right)$$

$$\Rightarrow dw = d\left(\frac{1}{2}m.v^2\right)$$

$$\Rightarrow dw = dE_c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (IV-5)$$

La quantité scalaire ($\frac{1}{2}m.v^2$) s'appelle énergie cinétique E_C du point matériel et s'exprime en Joule.

IV-4. Théorème de l'énergie cinétique

Après l'intégration de la relation : $dw = dE_C$, on trouve :

$$w = \int_A^B dw = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}m.v^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow w = \Delta E_C \ldots\ldots\ldots (IV-6)$$

Le théorème de l'énergie cinétique peut s'annoncer de la façon suivante : le travail élémentaire effectué par la force, est égal à la variation de énergie cinétique.

IV-5. Energie potentielle

IV-5-1. Energie potentielle et les forces conservatives

Une force est dite conservative lorsque le travail produit par cette force est indépendant du chemin suivi par son point d'application.

$w_{AB} = w_1 = w_2$ $\qquad\qquad$ $w_{AB} = w_1 = -w_3$

Figure IV-2 : Travail dans deux chemins différets.

IV-5-2. Energie potentielle de pesanteur

considérons une particule de masse m, placée en point M de l'espace en mouvement dans un plan (Oxy). Elle est soumise au champ de pesanteur $\vec{g}$, donc au poids $\vec{P} = m\vec{g}$

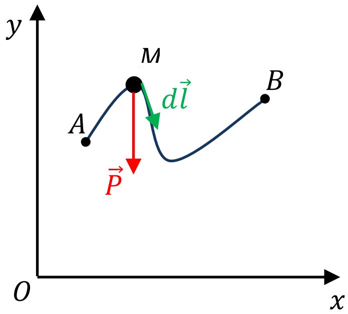


Figure IV-3 : Travail de la force de pesanteur.

Le travail élémentaire du particule, lors de déplacement du point matériel M

$$dw = \vec{F}.d\vec{l} = \begin{cases} \vec{F} = \vec{P} = -mg\vec{j} \\ d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \end{cases}$$

$$dw = -mg\vec{j}.\left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = -mgdy$$

$$w = \int dw = \int_{y_A}^{y_B} -mgdy$$

$$w = -mg\int_{y_A}^{y_B} dy = -mg.\, y\Big|_{y_A}^{y_B}$$

$$w = -mg.(y_B - y_A) = -[mg.y_B - mg.y_A]$$

$$w = -[E_p(B) - E_p(A)] = -\Delta E_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-7)$$

IV-5-3. Forces conservatives

- Si une force $\vec{F}$ est conservative, alors elle dérive d'une énergie potentielle E_p. Donc cette force peut s'écrire: $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$

Dans un repère cartésien : $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$ ……………………………………….$(IV-8)$

$$-\overrightarrow{grad}E_p = -\vec{\nabla}.E_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).E_p$$

$$-\overrightarrow{grad}E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} \text{ ………………………..} (IV-9)$$

$$(IV-8) \equiv (IV-9) \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

- Pour qu'u ne force $\vec{F}$ soit conservative, il faut que : $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

IV-6. Travail d'une force conservative

Soit $\vec{F}$ une force conservative. Son travail étant:

$$w = \int dw = \int \vec{F}.d\vec{l} = \begin{cases} \vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \dfrac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} \\ d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + +dz\vec{k} \end{cases}$$

$$w = \int\left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz\right) = -\Delta E_p \text{ ………………………… } (IV-10)$$

Le travail w d'une force conservative pour déplacer un point matériel est égal à la diminution de son énergie potentielle E_p .

IV-7. Exercices

Une particule en soumise à une force $\vec{F} = y(y-6x)\vec{\imath} + x(2y-3x)\vec{\jmath}$ qui la fait déplacer dans le plan xoy.

1/ Calculer le travail effectué par la force $\vec{F}$ lors du déplacement de la particule du O(0,0) au point A(2,4) a travers les chemins suivants :

a/ Le long de la droite joignant les deux points O et A ;

b/ Le long de arc de parabole d’équation $y = x^2$.

2/ La force $\vec{F}$ dérive t-elle d'un potentiel ? si oui, calculer alors l'énergie potentielle qui lui est associée.

1/ Le travail du particule lorsque se déplace du point O(0,0) au point A(2,4)

$$dw = \vec{F}.\vec{dl} = \begin{cases} \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} \\ \vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \end{cases}$$

$$dw = \vec{F}.\vec{dl} = F_x dx + F_y dy$$

$$w = \int_O^A (F_x dx + F_y dy) = \int_O^A [y(y-6x).dx + x(2y-3x)dy] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-11)$$

a/ Le 1[er] chemin : le long de la droite joignant les deux points O et A d'équation : $y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$. En remplaçant l'expression de y et dy dans la relation (IV-11) donc,

$$w_I = \int_O^2 [2x(2x-6x).dx + x(2.2x-3x)2dx] = \int_O^2 -6x^2.dx$$

$$w_I = -2x^3\Big|_0^2 = -16$$

b/ Le 2[ème] chemin : Le long de arc de parabole d'équation $y = x^2$

$y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$, en remplaçant l'expression de y et dy dans la relation (IV-11) donc,

$$w_{II} = \int_O^2 [x^2(x^2-6x).dx + x(2x^2-3x)2xdx] = \int_O^2 \left(5x^4 - 12x^3\right).dx$$

$$w_{II} = x^5 - 3x^4\Big|_0^2 = -16$$

2/ La force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel car $w_I = w_{II}$ .calculer alors l'énergie potentielle associée à cette force :

On a : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$; soit $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$ et $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \Rightarrow E_p = -\int F_x dx = -\int y(y-6x).dx$$

$$E_p = -\int y(y-6x).dx = -\int y^2 dx + \int 6xydx$$

$E_p = -y^2x + 3yx^2 + C$; C : constante d'intégration

En peut calculer E_p à partir de F_x où bien à partir de F_y

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \Rightarrow E_p = -\int F_y dy = -\int x(2y-3x)dy$$

$$E_p = -\int 2xy.dy + \int 3x^2 dy = -y^2x + 3yx^2 + C$$

IV-8. Energie mécanique (totale)

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme des énergies cinétique et potentielle.

$$E_m = E_C + E_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (IV - 12)$$

IV-9. Théorème de l'énergie potentielle

Si une force dérive d'une énergie potentielle (force conservative), son travail entre deux positions A et B est égal et opposé à la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions.

$$w_{AB} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (IV - 13)$$

IV-10. Principe de conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique (totale) d'un point matériel soumis à une force dérivant d'une énergie potentielle, est conservée.

$E_m(A) = E_m(B) = Cte$, ou bien $\Delta E_m = 0$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Mécanique du Point Matériel Cours et Exercices, Dr ZIANI NOSSAIR, Pr BOUTAOUS AHMED Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algérie. 2015/2016.
- Cours de physique mécanique du point. Cours et exercices corrigés. Alain Gibaud et Michel Henry, ISBN 978-2 -10-050586-9, Dunod, Paris, 1999, 2007 pour la seconde édition.
- Polycopié d'exercices et examens résolus de Mécanique du point matériel M. Bourich, Université Cadi Ayyad, Maroc 2014.
- Mecanique du point materiel. cours et applications ; Hicham Chaabane, isitcom, hammam, Tunisie 2010.
- Physique/chimie ; adrien g., ISBN 2-7117 - 1513-2, France 1989.
- Mécanique du point matériel, BENALLEGUE Lamria, DEBIANE Mohamed, Gourari Azeddine et MAHAMDI Ammar, Edité par la Faculté de Physique USTHB Alger, 2011.
- Mécanique du point Matériel, FIZAZI Ahmed, Rappel de cours et Exercices Corrigés, Office de publication universitaires, Edition N° 5231, 2016.
- Cours Mécanique du Point Matériel, RAHMANI Ahmed, Universite Larbi Ben M'Hidi Oum el-bouaghi,2018.
- Initiation à la mécanique du point matériel-cours et séries de travaux dirigés, FERADJI Boubekri, Office de publication universitaires, Edition N° 5480, 2016.
- Cours et Exercices de Mécanique : Mécanique du Point, Ingénieur CESI Préparation aux tests de sélection. Stéphane Victori. stephanevictori@yahoo.fr Version 4.0 .
- Cours de mecanique du point materiel. pour le premier semestre des filieres sm et smi. MHIRECH Abdelaziz, Universite Mohamed v. 2004/2005.
- Cours et exercices mécanique du point matériel. Torrichi Mohamed, Belfar Abbas. Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algérie. 2017-2018.
- Cours de mécanique du point matériel. LAMSAADI Mohamed. Université Sultane Moulay Slimane Béni Méllal. 2015-2016.
- Cinématique et dynamique du point matériel (Cours et exercices corrigés), BOUKLI-HACENE Nassima. École Normale Supérieure d'Oran (ENSO).20187-2019.