Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes parents pour leur compréhension et leur grande tendresse

Je souhaite que dieu leur préserve une longue vie.

A mes frères et surs "Mohamed, Abdelkader, Habiba, wafaâ, soundeus et Hanane" pour leur encouragement et leur affection.

Sons oublier ma grande mère,mes ancles et tantes grâce à leur bénédiction.

A mes adorables "Fatheddine Zihouf,Khaled Moussi".

A la famille Oulakak et Mansour "au sens large".

Et le darnièr dédicace passe à mes amis"Sadek, mustapha, Amine, Ibrahim".Pour leur gentillesse et leur soutien.

Finalement je dédie ce travail à la promotion 2011/2012.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercie mon "dieu" qui nous à donner le courage et la volonté pour réaliser ce travail.
Je tiens à exprimer notre reconnaissance à notre directeur de mémoire monsieur "Djebbouri Djelloul", pour la confiance qu'il j'ai témoignée en je accueille au sein de son laboratoire et de j'ai propose ce sujet de mémoire dont les cours et les travaux ont été pour moi une source d'inspiration.
Nos remerciements s'adressent également à monsieur "Guendouzi Toufik", mâitre de conférences à l'université "Dr.Tahar Moulay" de Saida, pour m'avoir honorée de sa présence et pour l'intérêt qu'il a accordé à ce travail en acceptant d'être examinateur de ce travail et de le juger, et je remercie Madame Benziadi Fatima.
Je remercie à titre individuel mes enseignants : S.Oukkas, S.Abbas, K.Djerfi, M.Belmeki, A.Azzouz, A.Kandouci, F.Hathout, H.Dida. A toutes et tous nous leur disons merci.

Saida, ...2012.

Table des matières

Introduction

L'idée du calcul différentiel est d'approcher au voisinage d'un point une fonction f par une fonction plus simple (ou d'approcher localement le graphe de f par un espace plus simple). Une fois les notations assimilées, les méthodes et les résultats de calcul différentiel sont naturels : ce sont les mêmes que pour l'étude des fonctions d'une variable réelle.

Même les physiciens, ils ont besoin du calcul différentiel. Il permet d'étudier l'évolution d'un phénomène au voisinage d'un instant donné (sa vitesse, son accélération) lorsque ci décrit une portion d'un espace dans lequel on a une structure d'espace vectoriel normé.

L'objectif de ce travail est l'étude de calcul différentiel dans $\mathbb{R}^p$, en citant tous les théorèmes fondamentaux et en donnant des exemples.

Dans le premier chapitre nous allons étudier plus en détail la topologie des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est le corps réel ou complexe. L'objet de ce chapitre est de généraliser la notion des suites et les compacts de $\mathbb{R}^p$. il nous faut pour cela définir avant tous quelques notions de topologie de $\mathbb{R}^p$.

Le deuxième chapitre consacré aux études de la notion de limite et de continuité dans l'espace $\mathbb{R}^p$.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse aux fonctions différentielles. Nous allons voir les dérivées partielles avant d'aborder la notion de différentiabilité, puis la notion d'extremums.

La fin de ce mémoire, une courte bibliographie des ouvrages de base pour ce travail.

Chapitre 1

Applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$

1.1 Espaces vectoriels normés

L'objet de ce chapitre et de généraliser les notios essentielles : les suites réelles, la notion de limite et de continuité, celle de dérivabilité d'une foction numérique, etc. il nous faut pour cela définir avant tout quelques notions de topologie de $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Cependant la plupart de ces notions étant encore valables dans un espace vectoriel quelconque.

1.1.1 Normes

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Définition 1.1.1. *On appelle* norme *sur E toute application :*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{N}: & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{N}(x) = \|x\| \end{array}$$

vérifiant pour tous vecteurs x, y, ... et scalaires λ,... :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ *(séparation)*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *(homogénaité)*
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire ou de Minkowiski)*

Définition 1.1.2. *on appelle un espace vectoriel normé (en abrégé E,V,N) le couple (E, N), où N est une norme sur E.*

Exemple 1.1.1. *Si $E = \mathbb{K}$, on déduit des propriétés de la valeur absolue (cas réel) ou du module (cas complexe) que :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

est une norme sur $\mathbb{K}$.

Remarque 1.1.1. *Avant de donner d'autres exemples, remarquons que :*

1. $N(-x) = N(-1x) = \mid -1 \mid N(x) = N(x)$:

$$\forall x \in E \ N(-x) = N(x)$$

2. $0 = N(x - x) \leq N(x) + N(-x) = 2N(x)$:

$$\forall x \in N(x) \geq O$$

Exemples 1.1.1. *Dans les trois exemples qui suivant, soit $E = \mathbb{K}^p$; on note $x = (x_1, ..., x_p)$ un vecteur de E*

1) *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{N}_\infty : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \sup |x_i| \end{array}$$

est une norme.

2) *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{N}_1 : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & N_1(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i| \end{array}$$

est une norme.

3) *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_2 : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \quad N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2} \end{aligned}$$

est une norme, appelé norme euclidienne .

Remarque 1.1.2. *la démonstration de l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne pose problème . Elle dépend de l'inégalité de Schwartz.*

Proposition 1.1.1. *(Inégalité de Schwartz) Si le produit scalaire euclidien de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^P$ est noté $< x, y >$, alors :*

$$|< x, y >| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

cette inégalité appelé l'inégalité de Schwartz. Rappelons que $< x, y >= \sum_i^p x_i y_i$, cette formule généralisant celle obtenue pour l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs du plan ou de l'espace dans une base orthonormée . on a alors de manière évidente :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p < x, x >= (\|x\|_2)^2$$

Preuve 1.1.1. $\forall t \in \mathbb{R}, < x + ty, x + ty > \geq 0$. *Des propriétés de bilinéarité et de symétrie du produit scalaire , on a déduit,en dévloppant :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, < x, x > +2t < x, y > +t^2 < y, y > \geq 0$$

Si $y = 0_p$, l'inégalité de schwarz est trivialement vérifiée. sinon, l'expression ci-dessus apparaît comme un polynôme du second degré de la variable réelle t, gardant un signe constant, celui du coeficient de t^2. pour cela , il faut et il suffit que son disciminant soit négatif. On a donc :

$$(< x, y >)^2 \leq < x, x >< y, y >$$

ce que est bien l'inégalité de schwartz.
Revenons maintenant à la démonstration de l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne :

$$\begin{array}{lllcl}\forall x \in E & \forall y \in E & (\|x+y\|_2)^2 & = & <x,x> + 2 <x,y> + <y,y> \\ & & & \leq & (\|x\|_2)^2 + 2|<x,y>| + (\|y\|_2)^2 \\ & & & \leq & (\|x\|_2)^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + (\|y\|_2)^2 \\ & & & = & (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2\end{array}$$

Par la suite, les trois normes précédentes seront appelées normes usuelles sur $\mathbb{R}^p$.

1.1.2 Normes équivalentes

Définition 1.1.3. *on dit que deux normes N et N' définies sur un même espace vectoriel normé sont équivalentes, s'il existe deux scalaires $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :*

$$\forall x \in E \ N(x) \leq \alpha N'(x) \ et \ N(x) \leq \beta N(x)$$

Théorème 1.1.1. *toutes les normes définies sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes .*

La démonstration générale de ce théoreme fait l'objet de l'exemple suivent . On peut cependant l'établir plus facilement pour les trois normes usuelles :

1) N_∞ et N_1.

soit i_0 tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$. Alors $|x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^p |x_i|$ donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Comme :

$\forall i \in \{1, ..., p\}, |x_i| \leq |x_{i_0}|$ on a $\sum_{i=1}^p |x_i| \leq p|x_{i_0}|$, soit $\|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \ \|x\|_\infty \leq p\|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$$

2) N_1 et N_2.

Rappelons que si $a_1, ..., a_n$ sont des réels positifs on a :

$$\sqrt{a_1 + ... + a_n} \leq \sqrt{a_1} + ... + \sqrt{a_n}$$

On en tire que :
$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_p^2} \leq \sqrt{x_1^2} + ... + \sqrt{x_p^2} = |x_1| + ... + |x_p| = \|x\|_1$
comme :

$$\sum_{i=1}^{p} |x_i| = \sum_{i=1}^{p} |x_i| 1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{p} 1^2}$$

(Inégalité de Schwartz)

on voit que $\|x\|_1 \leq \sqrt{p}\|x\|_2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p}\|x\|_2$$

3) N_∞ et N_2.

Comme ci-dessus, i_0 est tel que $\|x\|_\infty = |x_{i0}|$:

$$x_{i_0}^2 \leq \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \text{ donc } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

De l'inégalité $x_i^2 \leq x_{i_0}^2$ valable pour tout $1 \leq i \leq p$, on déduit que :
$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \leq p|x_i^2|$ soit $\|x\|_2 \leq \sqrt{p}\|x\|_\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{p}\|x\|_\infty$$

1.1.3 Boules ouvertes (boules fermées)

Définition 1.1.4. *On appelle boule ouverte (boule fermée) d'un E.V.N. de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble $B(a,r)$ (ou $\bar{B}(a,r)$) défini par :*

$$B(a,r) = \{x \in E / \|x - a\| < r\}$$

$$(\ \bar{\mathrm{B}}(a,r) = \{x \in \mathrm{E} / \|x - a\| \leq r\})$$

Remarque 1.1.3. *Une boule dépond donc de la norme choisie sur E, Représentons la boule unité, c'est-à-dire la boule de centre 0 et de rayon 1, de$\mathbb{R}^2$ pour les normes :*
(1) $x \longmapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{2} |x_i|$
(2) $x \longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |x_i|^2}$
3)$x \longmapsto \|x\|_\infty = sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i|$

Les notions suiventes réduisent ce qui a été vu au espace topologique.

1.1.4 Voisinages

On dit qu'une partie V de E, espace vectoriel normé.

Définition 1.1.5. *On appelle un voisinage d'un point $a \in E$ si V cointient une boule ouverte contenant a.*

Remarque 1.1.4. *Si on note $\vartheta(a)$ l'ensemble des voisinages de a, on a donc :*
$V \in \vartheta(a) \Leftrightarrow \exists(x_0, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, $B(x_0, r) \subset V$ et $a \in B(x_0, r)$
Alors on a. Nécessairement, un voisinage de a contient a.

Exemple 1.1.2. *Une boule, ouverte ou fermée de centre a est voisinage de a.*

1.1.5 Intérieurs

Soit $\mathrm{A} \subset E$ *et soit* $a \in E$.

Définition 1.1.6. *On dit que a est intérieur de A si A est voisinage de a.*
L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A et est noté :

$$a \in \ \Leftrightarrow \exists(x_0, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*, \mathrm{B}(x_0, r) \subset A \text{ et } a \in B(x_0, r)$$

Remarque 1.1.5. *Tout point intérieur à A est dans A :*

$$\mathring{A} \subset A$$

Mais l'inclusion est stricte en général.

1.1.6 Adhérents

Soit $A \subset E$ et $a \in E$.

Définition 1.1.7. *On dit que a est adhérent à A si tout voisinage de a recontre A.*
L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A et est noté $\bar{A}$:

$$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall V \in \vartheta(a),\ V \cap A \neq \emptyset$$

Remarque 1.1.6. *tout point de A est adhérent à A :*

$$A \subset \bar{A}$$

Mais l'inclusion est stricte en général.

1.1.7 Points d'accumulations

Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$.

Définition 1.1.8. *On dit que a est point d'accumulation de A si tout voisinage de a recontre A en d'autres points que a :*

$$\forall V \in \vartheta(a), V \cap A \backslash \{a\} \neq \emptyset$$

Remarque 1.1.7. *Un point d'accumulation est forcément adhérent à A. La réciproque est fausse en général.*

Un point a qui n'est pas point d'accumulation est dit point isolé :

$$\forall V \in \vartheta(a),\ V \cap A = \{a\}$$

1.2 suites de $\mathbb{R}^p$

Comme pour les suites numériques il ya des suites vectorielle on a la définition suivente :

Définition 1.2.1. *on appelle suite vectorielle, ou suite à valeures dans $\mathbb{R}^p$, toute application de $[n_0, \infty]([n_0, \infty] = [n_0, \infty] \cap \mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}^p$.*

Une telle suite est dite définie à partir du rang n_0. On la note u, ou $(u_n)_{n \geq n_0}$ ou (u_n) etc. Le vecteur $u_n \in \mathbb{R}^p$ est appelé terme général de la suite.

Proposition 1.2.1. *Étant donné une suite vectorielle (u_n) est un vecteur $\ell \in \mathbb{R}^p$, on peut leur associer la suite numérique (x_n) définie par : $\forall n,\ x_n = N(u_n - \ell)$, N désignant une norme de $\mathbb{R}^p$. Si N' est une autre norme et si la suite (x_n) tend vers 0, alors la suite (x_n') définie par : $\forall n,\ x_n' = N'(u_n - \ell)$ converge aussi vers 0.*

Preuve 1.2.1. *on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\forall n,\ \ N'(u_n - \ell) \leq \alpha N'(u_n - \ell)$$

De même, si la suite $(x_n^{'})$ *converge vers* 0*, il en est de même de la suite* (x_n)*.D'où la définition :*
On dit qu' une suite (u_n) *à valeures dans* $\mathbb{R}^p$ *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}^p$ *si la suite numérique* (x_n) *définie par :*

$$x_n = \mathrm{N}'(u_n - \ell)$$

où N *désigne une norme quelconque sur* $\mathbb{R}^p$*, converge vers* 0*.*
Formellement,cela se traduit par :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ n > \mathrm{N} \Rightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Notation :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \qquad ou\ (u_n) \to \ell...$$

Proprietés 1.2.1. *(Propriétés des suites convergentes)*
Les principales propriétés des suites numériques convergentes, ne faisant intrvenir ni l'ordre, ni le produit ou le quotient,se généralisent aux suites vectorielles. Nous laissons au lecteur le soin de faire les démonstrations qui sont calquées sur celles des suites réelles en remplaçant la valeur absolue $|.|$ *par une norme* $\|.\|$*.*

1) *Si une suite converge, sa limite est unique.*

2) *Toute suite extraite d'une suite convergeant vers* ℓ*, converge également vers* ℓ*.*

3) *Si deux suites* (u_n) *et* (v_n) *convergent respectivement vers* ℓ *et* ℓ'*,alors la suite* $(u_n + v_n)$ *converge vers* $\ell + \ell^{'}$*. Autrement dite :*

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n$$

4) *Si une suites* (u_n) *converge vers* ℓ *et si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors la suite* (λu_n) *converge vers* $\lambda\ell$*. Autrement dite :*

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda u_n) = \lambda \lim_{n\to\infty}(u_n)$$

5) *Si une suites* (u_n) *converge vers* ℓ *alors a suite* $(\|u_n\|)$ *converge vers* $|\ell|$*.*

6) *En revanche, le théorème suivant est particulier aux suites vectorielles.*

Si (u_n) est une suite de $\mathbb{R}^p$ alors son terme général est un p uplet que l'on peut écrire :

$$\forall n,\ u_n = (u_{1n}, u_{2n}, ..., u_{in}, ..., u_{pn})$$

On définit ainsi p suites numériques $(u_{in})_n$ où $1 \leq i \leq p$ appelées suites coordonnées.

On a l'important résultat suivent : une suite vectorielle u_n converge vers $\ell_n = (\ell_1, ..., \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si les p suites numériques $(x_{in})_n$ convergent vers ℓ_i pour tout entier $i(1 \leq i \leq p)$:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{1n}, ..., x_{pn}) = (\ell_1, ..., \ell_p) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_{1n} = \ell_1 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \lim_{n\to\infty} x_{pn} = \ell_p \end{cases}$$

Si $(u_n) \longrightarrow \ell$, en choisissant la norme N_1, on a :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0 \Rightarrow |x_{1n} - \ell_1| + ... + |x_{pn} - \ell_p| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x_{1n} - \ell_1| < \varepsilon et...et |x_{pn} - \ell_p| < \varepsilon$$

les p suites $(x_{in})_n$ $1 \leq i \leq p$ convergent toutes vers ℓ_i.

Réciproquement, si chaque suite $(x_{in})_n$ converge vers ℓ_i :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_i \in \mathbb{N}$, $n > n_i \Rightarrow |x_{in} - \ell_i| < \frac{\varepsilon}{p} \qquad 1 \leq i \leq p$

si $n_o = sup(n_1, ..., n_p)$ alors :

$$\begin{aligned} n > n_0 \Rightarrow |x_{1n} - \ell_1| &< \frac{\varepsilon}{p} et...et |x_{pn} - \ell_p| < \frac{\varepsilon}{p} \\ &\Rightarrow |x_{1n} - \ell_1| + ... + |x_{pn} - \ell_p| < \varepsilon \end{aligned}$$

la suite (u_n) tend donc vers ℓ (en choisissant la norme N_1).

Par exemple la suite (u_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{(1+n)^2}{n^2}, \frac{n+1}{n}, e^{-n}\right)$$

converge vers $\ell = (0,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$.
En revanche la suite de $\mathbb{R}^2$ *dont le terme général est* $\left(\frac{1}{n}, n\right)$ *n'a pas de limite.*

1.3 Parties ouvertes, Parties fermées

Définition 1.3.1. *On dit qu'une partie* A *de* E *est une partie ouverte ou est un ouvert, si tout point* $a \in A$ *est centre d'une boule ouverte contenue dans* A.

Il revient au même de dire que A est voisinage de chacun de ses points.
Si on note σ l'ensemble de tous les ouverts de E, on a :

$$A \in \sigma \Leftrightarrow \forall a \in A,\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset A$$

ou encore :

$$A \in \sigma \Leftrightarrow \forall a \in A, \exists (x_0, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*,\ B(a,r) \subset A \text{ et } a \in B(x_0, r)$$

En utilisant la notion d'interieur, on a :

$$A \in \sigma \Leftrightarrow \ = A$$

Les boules de $\mathbb{R}^p$ dépendant de la norme choisie sur $\mathbb{R}^p$, on pourrait croire qu'il en est de même des ouverts correspondants. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Remarque 1.3.1. *Dans* $\mathbb{R}^p$, *si* A *est un ouvert pour une norme* N, A *est un ouvert pour toute autre norme* N' *définie sur* $\mathbb{R}^p$.

En effet, $\forall a \in A$, $\exists r > 0,\ B(a,r) \subset A$. Cela équivaut à :
$\forall a \in A$, $\exists r > 0,\ \forall x \in E,\ N(x-a) < r \Rightarrow x \in A$
Mais on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N(x-a) \leq \alpha N'(x-a)$.
On a alors l'implication :

$$\alpha N'(x-a) < r \Rightarrow x \in A$$

Le vecteur a est, pour la norme N', centre de la boule ouverte de rayon $\frac{r}{\alpha}$ incluse dans A.
Voyons un important exemple d'ouvert. Toute boule ouverte est un ouvert de E.

Soit $A = B(x, \rho)$ et soit $a \in A$. Il faut trouver $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset B(x, \rho)$.
On a $\|x - a\| < \rho$. Si on pose $r = \frac{1}{2}[\rho - \|x - a\|](r > 0)$ alors on a :
$\forall y \in B(a, r),\ \|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a + y\| \leq \|x - a\| + r = \frac{1}{2}[\rho + \|x - a\|] < \rho$
On a bien :

$$B(a, r) \subset B(x, \rho)$$

Le théorème suivant, établi dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$, se généralise sans problème. Nous invitons le lectur à faire la démonstration à tire d'exercice.

Proprietés 1.3.1. *(principales propriétés des ouverts)*

1) $\phi \in \sigma$ *et* $E \in \sigma$. *(E et l'ensemble vide sont ouverts).*

2) $\forall i \in I$, $\forall i \in \sigma \Rightarrow \cup_{i \in N} A_i \in \sigma$ *(toute réunion d'ouverts est un ouvert).*

2) $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $A_i \in \sigma \Rightarrow \cap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \sigma$ *(toute intersection finie d'ouverts est un ouvert).*

   On dit qu'une partie A de E est une partie fermée ou est un fermée si son complémentaire est ouvert.

En notant $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés, on a :

$$A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \in \sigma$$

Dans $\mathbb{R}^p$ la notion d'ouvert ne dépendant pas de la somme choisie, il en est de même de celle de fermé.
Utilisant la notion d'adhérence, on a aussi :

$$A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \ = A$$

Toute boule fermée est un fermé de E.
Soit $A = \bar{B}(x, \rho)$ et soit $a \in A^c$. On cherche $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A^c$.
Si $r = \frac{1}{2}(\|a - x\| - \rho)$ montrons que $B(a, r) \subset A^c$ ce qui équivaut à :

$$\|y - a\| < r \Rightarrow \|x - p\| > \rho$$

Supposons donc $\|y - a\| < r$. Alors :

$$\|x - y\| \geq \|x - a\| - \|a - y\| > \|x - a\| - r = 2r + \rho - r = r + \rho > \rho$$

Proprietés 1.3.2. *(principales Proprietés) Proprieté des fermés est donnée par :*

1) $\phi \in \mathcal{F}$ *et* $E \in \mathcal{F}$ *(E et ϕ sont fermés).*

2) $\forall i \in \mathrm{I}$, $\forall A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$ *(toute réunion finie de fermés est un fermé).*

3) $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i\in N} A_i \in \mathcal{F}$ *(toute réunion finie de fermés est un fermé).*

De plus la caractérisation des fermés à l'aide des suites établies dans $\mathbb{R}$ se généralise elle aussi.

1.4 Parties compactes de $\mathbb{R}^p$

1.4.1 Parties bornées

Définition 1.4.1. *Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$ (est bornée dans $\mathbb{R}^p$) si :*

$$\exists r > 0 \qquad \forall x \in A \qquad \|x\| \leq r$$

De l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^p$, on déduit que cette notion est indépendante de la norme choisie.
Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée dans $\mathbb{R}^p$.
Soit une boule de centre a et de rayon ρ. Montrons que :

$$B(a, \rho) \subset \bar{B}\ (a, \rho) \subset \bar{B}(0, \rho + \|a\|)$$

(la première inclusion est triviale).
On a :

$$\begin{aligned} x \in \bar{B}(a, \rho) \quad &\Leftrightarrow \quad \|x - a\| \leq \rho \\ &\Rightarrow \quad \|x\| - \|a\| \leq \rho \\ &\Rightarrow \quad \|x\| \leq \rho + \|a\| \end{aligned}$$

on dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^p$ est une Partie compacte (est un compact)de $\mathbb{R}^p$ si A est à la fois fermée et bornée.
D'après ce qui précède, on voit que : toute boule fermée de $\mathbb{R}^p$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

1.5 Utilisation des suites en topologie

1.5.1 Caractérisation des fermés

Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est fermée si et seulement si toute suite convergente (u_n) à valeurs dans A a sa limite dans A.
La démonstration est entièrement calquées, à condition de remplacer les intervalles ouverts de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ par des boules ouvertes $B(a,\varepsilon)$.

1.5.2 Caractérisation des compacts

On caractérise les compacts de $\mathbb{R}^p$ par la propriété de Bolzano-Weierstrass :
une partie Ade $\mathbb{R}^p$ est compacte si et seulement si de toute suite (u_n) à valeurs dans A, on peut extraire une sous-suite convergente.
Supposons donc A compact et soit (u_n) une suite de A. On a,avec les notations du 2).

$$\forall n \; u_n = (x_{1n}, ..., x_{pn})$$

La suite (x_{1n}) étant bornée (dans $\mathbb{R}$) on peut en extraire une sous-suite $(x^{'}_{1n})$ convergent vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$.
Notons alors (u_n) la suite extraite de (u_n) telle que :

$$\forall n \; u^{'}_n = (x^{'}_{1n}, ..., x^{'}_{pn})$$

La suite $(x^{'}_{2n})$ étant bornée (dans $\mathbb{R}$) on peut en extraire une sous-suite $(x^{''}_{2n})$ convergent vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$.
La suite $(u^{''}_n)$ définie par :

$$\forall n \qquad u^{''}_n = (x^{''}_{1n}, ..., x^{''}_{pn})$$

est une suite extraite de (u_n) telle que $lim_{n\to\infty} x^{''}_{1n} = \ell_1$ et $lim_{n\to\infty} x^{''}_{2n} = \ell_2$.
En réitérant p fois le prossus, on obtient une suite extraite de (u_n) dont les p suites coordonnées convergent.
Réciproquement, si de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergent,

alors A est compact. En effet A est borné.
Sinon :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists u_n \in A \qquad \|u_n\| > n$$

On définirait ainsi une suite (x_n) dont on ne peut extraire aucune sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})$ car alors $(\|u_{\varphi(n)}\|)_n$ convergerait dans $\mathbb{R}$.
A est fermé, car si (u_n) est une suite convergente de A, toute sous-suite a même limite et donc $lim_{n\to\infty} u_n \in A$.

Chapitre 2

Limites et Continuité

Dans cette section E, F, etc, sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

2.1 limite en un point

soit $f : E \supset D \to F$ et a adhérent à D. On dit que f tend vers ℓ, ($\ell \in F$) quand x tend vers a, ou que f a pour limite ℓ au point a, ou en a,si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ (x \in D\ et\ \|x - a\|_E < \alpha) \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$$

on note alors :$lim_\alpha f = \ell$ ou $lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$...

Remarque 2.1.1. $\|x - a\|_E$ *désigne la norme d'un vecteur de* E.
$\|f(x) - \ell\|_F$ *désigne la norme d'un vecteur de* F.
Désormais, on notera de la même manière, afin de ne pas alourdir les notations, la norme sur E *et celle sur* F.
Si $E = \mathbb{R}^p$, *la définition précédente ne dépend pas des normes choisies sur* E *et* F.
Si $E = F = \mathbb{R}$, *on retrouve la définition donnée pour les fonctions réelles d'une variable réelle. Les propriétés suivantes se démontrent donc de manière identique, à condition de remplacer la valeur absolue* $|.|$ *par la norme* $\|.\|$ *(dans* E *pour les vecteurs de l'ensemble de départ, dans* F *pour ceux de l'ensemble d'arivée).*

1) *Unicité de la limite : si* f *admet une limite en* a, *cette limite est unique.*

2) *Limite d'une somme : si f et g sont deux applications de D vers F,et si $a \in \bar{D}$ alors :*

$$lim_{\alpha} f = \ell \qquad et \qquad lim_{\alpha} g = m \Rightarrow lim_{\alpha}(f+g) = \ell + m$$

3) *Limite du produit par un scalaire : si f est une application de D vers* F *Si $a \in \bar{D}$ alors :*

$$lim_{\alpha} f = \ell \qquad ou \qquad lim_{a} f(\lambda x) = \lambda \ell \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

4) *Composition :soit $f : D \to F$ et $g : \triangle \to G$; on suppose que $f(D) \subset \triangle$.*
Si $a \in \bar{D}$ et $b \in \bar{\triangle}$, alors :

$$lim_{a} f = b \qquad et \qquad lim_{b} g = \ell \Rightarrow lim_{a}(f \circ g) = \ell$$

5) *Caractérisation séquentielle de la limite : Soit $f : D \to F$ et $a \in \bar{D}$. Il ya équivalence entre :*
a) $lim_{\alpha} f = \ell$.
b) Pour toute suite (u_n) de D de limite a, La suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.
Le produit (ou le quotient) de deux vecteurs n'étant pas défini, Les propriétés de la limite du produit (ou le quotient) de deux fonctions vectorielles ne se généralisent pas. De même, ne sachant pas comparer deux vecteurs, on n'a pas de résultat anologue au théorème des gendarmes, par exemple. Cependant dans le cas particulier où $F = \mathbb{K}$, Les résultats se transposent sans problème.

Exemple 2.1.1. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

$(0,0)$ est adhérent à $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
La suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{1}{n},\ 0\right)$ est une suite de D et :

$$f(u_n) = 0 \qquad donc \qquad f(u_n) \to 0$$

De même La suite (v_n) définie par $v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ est une suite de D *et :*

$$f(v_n) = \frac{1}{2} \qquad donc \qquad f(v_n) \to \frac{1}{2}$$

La fonction proposée n'admet pas de limite en $(0,0)$.

2.2 Applications coordonnées. Applications partielles

Dans ce paragraphe, E, F, etc. sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés de dimensions finies, que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, etc.

2.2.1 Applications coordonnées

Soit $f : \mathbb{R}^p \supset D \to \mathbb{R}^q$.

Définition 2.2.1. *On appelle applications coordonnées de f, Les q applications $p_i \circ f (1 \leq i \leq q)$, p_i désignant la projection canonique :*

$$\begin{array}{rcl} p_i : \mathbb{R}^q & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_i, ..., x_q) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Remarque 2.2.1. *Les applications coordonnées sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 2.2.1.

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (e^{x+y}, ln(xy), x\sqrt{y}) \end{array}$$

avec $\mathbb{D} = \{(x, y)/x > 0\ ,\ y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

a pour fonctions coordonnées :

$$(x, y) \mapsto e^{x+y}$$

$$(x, y) \mapsto ln(xy)$$

$$(x, y) \mapsto x\sqrt{y}$$

ce sont 3 fonctions numériques.
On a l'important résultat suivant :
soit $f : D \to \mathbb{R}^q \qquad (D \subset \mathbb{R}^p)$ *et* $a \in \bar{D}$.
f *admet pour limite* $\ell = (\ell_1, ..., \ell_q) \in \mathbb{R}^q$ *quand* x *tend vers* a *si et seulement si les* q

fonctions coordonnées de f ont pour limites respectives $\ell_1, ..., \ell_q$ quand x tend vers a. En effet, on a :

$$\|f(x) - \ell\| = \|p_1 \circ f(x) - \ell_1, p_2 \circ f(x) - \ell_2, ..., p_q \circ f(x) - \ell_q\|$$

en sur $\mathbb{R}^2$ la norme N_∞ on a :

$$\|f(x) - \ell\| = sup_i|p_i \circ f(x) - \ell_i|$$

Si $f(x) \to \ell$ (quand $x \to a$) alors chaque fonction coordonnée $p_i \circ f(x)$ a bien pour limite ℓ_i (quand $x \to a$).
Réciproquement, si chaque fonction coordonnée $p_i \circ f(x)$ tend vers ℓ_i (quand $x \to a$), alors $sup_i|p_i \circ f(x) - \ell_i| \to 0 (x \to a)$.

2.2.2 Applications partielles

Soit $f : D \to \mathbb{R}^q (D \subset \mathbb{R}^p)$ et $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_p) \in D$.

Définition 2.2.2. *On appelle i-ème application partielle associée à f au point a l'application :*

$$f_{ia} : x \mapsto f_{ia}(x) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1} ..., a_p)$$

Si aucune confusion n'est possible,l ai-ème application partielle est notée f_i au lieu de f_{ia}.

Remarque 2.2.2. *Il ne faut bien sûr pas confondre la i-ème application coordonnée et la application partielle. On va voir en autre que leurs propriétés sont différentes. Par exemple, Les deux applications partielles en (a, b) , $(a > 0$ et $b > 0)$ de l'application $f : (x, y) \longmapsto (e^{x+y}, ln(xy), x\sqrt{y})$ sont :*

$$\begin{array}{rccl} f_1 : & \mathrm{D}_1 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & (e^{x+b}, ln(xb), x\sqrt{b}) \end{array}$$

avec $D_1 =]0, \infty[$

et

$$\begin{array}{rccl} f_2 : & \mathrm{D}_2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & (e^{x+y}, ln(xy), x\sqrt{y}) \end{array}$$

avec $D_2 =]0, \infty[$

Soit $f : D \to \mathbb{R}^q (D \subset \mathbb{R}^p)$ *et* $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_p) \in D$. *Si* F *admet pour limite* ℓ *quand* x *tend vers* a*, alors ses applications partielles* f_i *au point* a *admettent pour limite* ℓ *quand* x_i *tend vers* a_i.
Si on choisit sur $\mathbb{R}^p$ *la norme* $\mathbb{N}_\infty$*, on voit que :*

$$\|x - a\| < \alpha \Leftrightarrow \forall i = 1, ..., p \qquad |x_i - a_i| < \alpha$$

Il suffit de reprendre la définition de la limite.

Remarque 2.2.3. *La réciproque de cette proposition est fausse ; par exemple, soit* $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
On a vu que cette n'admet pas de limite en $(0, 0)$.
Cependant en $(0, 0)$ *:*
La première application partielle est $f_1 : x \mapsto f(x, 0) = 0$
La seconde application partielle est $f_2 : y \mapsto f(0, y) = 0$.
On a : $lim_{x\to 0} f_1(x) = lim_{y\to 0} f_2(y) = 0$

Remarque 2.2.4. *S'il existe deux applications partielles* f_i *et* $f_i (i \neq j)$ *au point* a *telles que* $lim_{x\to a_i} f_i(x) = lim_{x\to a_j} f_j(x)$*, alors* f *n'admet pas de limite quand* x *tend vers* a.

Exemple 2.2.2. *La fonction* $f : D \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto \frac{\sin x + \sin y}{x - y}$ *définie si* (x, y) *est tel que* $x \neq y$ *n'a pas de limite en* $(0, 0)$*. En ce point, La première application partielle est :*

$$f_1 : x \mapsto \frac{\sin x}{x} \qquad et \qquad f_1 \to 1 \ (x \to 0)$$

La seconde application partielle est :

$$f_2 : y \mapsto \frac{\sin y}{y} \qquad et \qquad f_2 \to -1 \ (y \to 0)$$

2.3 Continuité

Si $a \in D$ et si f a pour limite ℓ au point a, alors nécessairement $\ell = f(a)$

Définition 2.3.1. *Soit $f : D \to F(D \subset E)$ et $a \in D$. On dit que f est continue au point a si :*

$$lim_a f = f(a)$$

en reprenant la définition d'une limite, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \alpha > 0, \qquad (x \in D \ et \ \|x_a\| < \alpha) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

ou en utilisant les voisinages :

$$\forall V \in \vartheta(f(a)), \qquad \exists U \in \vartheta(a), (a \in D \qquad et \qquad a \in U) \Rightarrow f(x) \in V$$

Remarque 2.3.1. *Si f est continue en a, on nécessairement $a \in D$, et non pas seulement $a \in \bar{D}$.*
Soit $f : D \to F(D \subset E)$. On dit que f est continue sur D si f est continue en chaque point de D.

Proprietés 2.3.1. *(propriétés des limites)*
On déduit :

1) *Si f et g sont continues en a,(sur D) alors $f + g$ est continue en a, (sur D).*
2) *Si f est continue en a, (sur D) alors λf est continue en a, (sur D).*
3) *Si f est continue en a, (sur D) et g est continue en $b = f(a)$, (sur f(D)) alors $g \circ f$ est continue en a, (sur D).*
4) *Caractérisation séquentielle :f est continue en a si et seulement si pour suite (u_n) de limite a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*
 Dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}$, on a en outre les deux propriétés suiventes :
5) *Si $F = \mathbb{R}$ et f et g sont continues en a, (sur D) alors fg est continue en a, (sur D).*
6) *Si f et g sont continues en a, (sur D) et si $g(a) \neq 0$ (si g n'annuler pas sur D) alors $\frac{f}{g}$ est continue en a(sur D).*
 Si maintenant $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$, on a :

7) *Si f est continue en a (sur D) si et seulemant si ses q application coordonnées sont continues en a (sur D).*

8) *Si f est continue en a, (sur D) alors ses p application partielles $f_i(1 \leq i \leq p)$ sont continues en $a_i(1 \leq i \leq p)$, (sur $D_i(1 \leq i \leq p)$).*

Exemples fondamentaux

1) La i-ème projection p_i

$$p_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & x_i \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^p$.

En choisissant sur $\mathbb{R}^p$ la norme N_∞,on a si $a = (a_1, ..., a_p)$:

$$|p_i(x) - p_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, pour que $|p_i(x) - p_i(a)| < \varepsilon$, il suffit que $\|x - a\| < \varepsilon$.On choisie $\alpha < \varepsilon$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \qquad \|x - a\| < \alpha \Rightarrow |p_i(x) - p_i(a)| < \varepsilon$$

2) Toute fonction monôme, toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}^p$.

Rappelons qu'une fonction monôme est de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & a x_1^{i_1} ... x_p^{i_p} \end{array}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $i_1, ..., i_p$ entiers natureles.

Chaque aplication projection étant cantinue, la fonction monôme est continue sur $\mathbb{R}^p$ (produit de fonction numériques continues). Une fonction polynôme, somme de fonctions monômes, est continue sur $\mathbb{R}^p$.

3) Toute fonction rationnelle est continue en tout point n'annulant pas son dénominateur (donc sur ensemble de définition D).

4) Toute application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$ est continue.

Si $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ alors :

$$f(x) = (p_1 \circ f(x), ..., p_q \circ f(x)) \in \mathbb{R}^q$$

avec :

$$p_i \circ f(x) = \sum_{j=1}^{p} q_{ij} x_j$$

C'est donc un polynôme, donc une fonction continue. Chaque fonction coordonnée étant continue sur $\mathbb{R}^p$, f l'est également.

2.4 Propriétés topologiques des applications continues

2.4.1 Caractérisation

Soit $f : D(D \subset E)$

1) f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.

2) f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

1) Supposons f continue sur D et $A^{'}$ un ouvert quelconque de F. On doit établir que tout point $a \in f^{-1}(A^{'})$ est centre d'une boule ouverte incluse dans $f^{-1}(A')$

$$a \in f^{-1}(A^{'}) \Leftrightarrow f(a) \in A^{'}$$

donc il existe $r > 0$ tel que :

$$\|y - f(a)\|_F < r \Rightarrow y \in A^{'}$$

f étant continue en a, il existe $\alpha > 0$ (dépendant de r) tel que :

$$\left.\begin{array}{l} \|x - a\|_E < \alpha \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < r$$

ce qui entraîne :

$$f(x) \in A^{'} \qquad soit \qquad x \in A^{'}$$

par conséquent la boule ouverte de centre a et de rayon α est incluse dans F soit un ouvert de E.Si $a \in D$, il faut montrer que f est continue en a.

Si $\varepsilon > 0$ est donné,l'image réciproque de la boule ouverte de centre $f(a)$ et de rayon ε est un ouvert A de E contenant a.

Donc : $\exists\alpha > 0, \quad \|x-a\|_E < \alpha \Rightarrow x \in A$

soit : $\exists\alpha > 0, \quad \|x-a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$

ce qui est bien la définition de la continuité au point a.

2) Il suffit de passer au complémentaire, en se souvenant de la propriété suivante (ou en la redémontrant) :

$$si \qquad f : E \to F, \qquad alors \qquad \forall B \subset F, \qquad f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$$

Exemple 2.4.1. *L'application dét :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & detA \end{array}$$

est continue

En effet, si on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, dt A *est un polynôme des n^2 variables*

$$a_{ij}(1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n).$$

Limage réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application dét est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des matrices singulières est fermé.

Naturellement, l'ensemble des matrices régulieres est ouvert.

2.4.2 Image d'un compact

Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une application continue sur $D(D \subset \mathbb{R}^p)$.

Définition 2.4.1. *L'image de tout compact A de $\mathbb{R}^p(A \subset D)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.*

Proprietés 2.4.1. ***1)*** *Soit (y_n) une suite de $f(A)$. Il existe une suite (x_n) de A telle que $\forall n, y_n = f(x_n)$.* A *étant compact, on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite (x'_n) convergeant vers $a \in$* K.

Alors on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite (y'_n) définie par $y'_n = f(x'_n)$ qui converge vers $f(a)$ (puisque f est continue sur D*)et $f(a) \in f(\mathrm{A})$.*

2) *L'ensemble $f(\mathrm{A})$ est bien compact (dans $\mathbb{R}^p$).*

Remarque 2.4.1. *Cette propriété généralise celle énoncée pour les fonctions réelles d'une variable réelle : l'image d'un segment par une application continue est un segment.*
On en déduit que toute fonction numérique continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Chapitre 3

Fonctions différentiables

Dans toute cette section, E, F,etc. , sont des espaces vectoriels réels de dimension finie, qu'on identifiera donc à $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$, etc.

3.1 Dérivées partielles

Soit $f : U \to \mathbb{R}, U$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Définition 3.1.1. *On dit que f admet en $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_p)$ une i-ème dérivée partielle, si la i-ème application partielle associée à f au point a, est dérivable en a_i.*

Notation :
Cette i-ème dérivée partielle est notée :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \qquad ou \qquad D_i(f)(a) \qquad f'_{x_i}(a)$$

Pratiquement, nous n'utiliserons que la première notation.
Si f admet en tout point de U une i-ème dérivée partielle, on définit l'application notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $D_i(f)$ ou f'_{x_i} par :

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x_i} : & U & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

Soit $f : D \to \mathbb{R}, U$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, si f admet en tout point $x \in U$, p dérivée partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_p}$ continues sur U.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U est noté :

$$\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$$

Exemple 3.1.1. *L'application* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ *(fonction rationnelle) mais n'est pas continue en* $(0,0)$ *(voir section précédente).*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\qquad et\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
En $(0,0)$ *:*

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=O\qquad et\qquad \lim_{k\to0}\frac{f(k,0)-f(0,0)}{k}=O$$

Bien que non continue en $(0,0)$*, elle admet des dérivées partielles en ce point, qui ne sont cependant pas continues.(par exemple* $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{2}{n},\frac{1}{n})=-\frac{3n}{25}\to-\infty$*).*
La fonction f *admet des dérivées partielles sur* $\mathbb{R}^2$ *et est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'ouvert* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Soit $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$.On dit que f admet des dérivées partielles secondes en un point $a\in U$, si les p dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_p}$ admettent à leur tour des dériveés partielles en a.
Si $i\neq j$, on note $\frac{\partial}{\partial x_i}[\frac{\partial f}{\partial x_j}](a)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\qquad ou\qquad D^2_{i,j}(f)(a)\qquad ou\qquad f''_{x_jx_i}(a)$$

Si $i=j$, cette dérivée partielle on notée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)\qquad ou\qquad D^2_{ii}(f)(a)\qquad ou\qquad f''_{x_i^2}(a)$$

Si f admet des dérivées partielles secondes en tout point $a\in U$, on qu'elle admet des dérivées partielles secondes sur U.

Si de plus, celles-ci sont continues sur U, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U est bien sûr noté :

$$\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$$

Remarque 3.1.1. *Sous réserve d'existence,f possède donc p^2 dérivées partielles.*

Exemple 3.1.2.

$$\begin{array}{llll} soit & f: & & \mathrm{U} \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x^y & avec & \mathrm{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}. \end{array}$$

Ces deux fonctions admettent à leur tour des dérivées partielles, et, si $(x,y) \in \mathrm{U}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[yx^{y-1}] = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[yx^{y-1}] = x^{y-1} + yx^{y-1}lnx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[x^y lnx] = x^y(lnx)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[x^y lnx] = x^y.\frac{1}{x} + yx^{y-1}lnx = x^{y-1} + yx^{y-1}lnx$$

On constate sur cet exemple que :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Ce résultat peut se généraliser.

Théorème 3.1.1. *(Théorème de Schwartz)*
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$, U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$. admettent des dérivées partielles secondes sur U et i et j deux entieres différents compris entre 1 et p :
1) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en a, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

2) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors,on a sur U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Pour ne pas alourdir les notations, on va supposer $p = 2$. Soit $(a,b) \in \mathrm{U}$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a+h, b+k) \in \mathrm{U}$ (U est ouvert).

On évalue de deux façons différentes le réel :

$$u(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$

1) Soit F(x)= $f(x,b+k) - f(x,b)$. Alors :

$$u(h,k) = F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta_1 h) \qquad 0 < \theta_1 < 1$$

or $F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,b)$ donc :

$$u(h,k) = h[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b)]$$

$$= hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) \qquad 0 < \theta_2 < 1$$

2) Soit G(y)= $f(a+h,y) - f(a,y)$. Alors :

$$u(h,k) = G(b+k) - G(b) = kG'(b+\theta_3 k) \qquad 0 < \theta_3 < 1$$

or $G'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)$ donc :

$$u(h,k) = k[\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b+\theta_3 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_3 k)]$$

$$= hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k) \qquad 0 < \theta_4 < 1$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k)$$

Si $(h,k) \to (0,0)$, Les fonctions dérivées partielles secondes étant supposées cntinues en (a,b), on aura :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

Remarque 3.1.2. *L'existence des dérivées partielles secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ *ne suffit pas à assurer leur égalité. Il faut de plus qu'elles soient continues en a.*

Exemple 3.1.3. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Un calcul classique amène, pour $(x,y) \neq (0,0)$ *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$etde : \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = O \qquad et \qquad \lim_{k\to 0} \frac{f(k,0)-f(0,0)}{k} = O$$

on déduit :$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
Poursuivant le calcul des dérivées partielles secondes, on a :

$$\lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^5}{k^5} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$et \qquad : \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ *existent mais ne sont pas égales.*

Remarque 3.1.3. *On pourrait définir les dérivées partielles d'ordre* $k(k \geq 2)$ *ainsi que la fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *; le théorème de Schwartz se généralise.*
Ainsi,pour une fonction de trois variables dont toutes les dérivées partielles successives d'ordre $\leq k$ *sont continues, une dérivée partielle d'ordre* k *s'écrira* $\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}, \alpha, \beta, \gamma$ *éléments de* $\mathbb{N}$ *tels que* $\alpha + \beta + \gamma = k$.

3.2 Fonctions différentiables

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.1. *On applle une application dérivable* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *en un point* $a \in \mathrm{U}$.

À savoir l'existence de la limite :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ne peut s'étendre à une fonction $f : U \to \mathbb{R}^q$ (U ouvert de $\mathbb{R}^p$),le quetient du vecteur $f(a+h) - f(a) \in \mathbb{R}^q$ par le vecteur $h \in \mathbb{R}^p$ n'ayant pas de sens.
Cependant on remarque que, dans le cas numérique, f dérivable en a équivaut à :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \qquad f(a+h) = f(a) + \varepsilon(h) \qquad et \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Sous cette forme, la notion de fonction dérivable peut se généraliser aisément.
Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ où U ouvert de $\mathbb{R}^p$.On dit que f est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire $\ell \in \mathfrak{l}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que :

$$\lim_{h\to 0_p} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \ell(h)\|}{\|h\|} = 0$$

(en notant 0_p le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$).
Bien sûr, dans le quetient ci-dessus, la norme $\|f(a+h) - (f(a) - \ell(h))\|$ est la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^q$,celle $\|h\|$ est la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^p$.
Dans ces conditions, il revient au même de dire qu'il existe une fonction définie au voisinage de $0_p \in \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h) \qquad et \qquad \lim_{h\to 0_p} \varepsilon(h) = 0_q$$

Avant de donner quelques exemples, démontrons l'important, résultat suivant :si f est différentiable en a, l'application linéaire ℓ est unique.
rentiabilité. Alors par soustraction,on a (notations évidentes) :

$$\ell_2(h) - \ell_1(h) = \|h\|(\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))$$

ce qui implique :

$$\lim_{h\to 0_p} \frac{\ell_1(h) - \ell_2(h)}{\|h\|} = 0$$

Si $h \neq 0_p$, on en déduit que l'application :

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}^q$$

$$t \to f(t) = \frac{\ell_1(th) - \ell_2(th)}{\|th\|}$$

a pour limite 0 quand $t \to 0$.
Mais : $\forall t > 0, \qquad f(t) = \frac{t[\ell_1(h)-\ell_2(h)]}{t\|h\|} = 0$

$$\begin{aligned} etdonc: \qquad \forall t > 0, \qquad f(t) = 0 \qquad &\Rightarrow f(1) = 0 \\ &\Rightarrow \ell_1(h) = \ell_2(h) \end{aligned}$$

On supposé $h \neq 0_p$.Si ce n'est pas le cas, l'égalité est alors évidente. On pose alors :
Si f est différentiable en a, l'application linéaire ℓ est différentialle de f au point a. On la note df_a :

$$df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$$

La différentiabilité de f en a se traduit par :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h) = 0_q$$

Exemple 3.2.1. *Une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est différentialle en tout point $a \in \mathbb{R}^p$ et :*

$$\forall a \in \mathbb{R}^p \qquad df_a = \varphi$$

(ici la fonction ε est la fonction nulle : $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$).

$$h \mapsto 0_q$$

La proposition suivante ne pose aucune problème à démontrer et constitue un excellent exemple que nous laissons au lecteur.

Proposition 3.2.1. *Soit f, g différentialle en $a \in \mathrm{U}$:*
1)f *est continue en a.*
2) $f+g$ *est différentialle en a et :*

$$d(f+g)_a = df_a + dg_a$$

3)αf *est différentialle en a et :*

$$d(\alpha f)_a = \alpha df_a$$

Remarque 3.2.1. *Il va de soi qu'il n'existe pas de théorème donnant la différentielle d'un produit, d'un quotient.*

Proprietés 3.2.1. *Si f est différentiable en tout point de* U*, on dit qu'elle est différentiable sur* U.

3.3 Cas particuliers et Matrice jacobinne

1) $p = 1$ et $q = 1$, donc$f : U \to \mathbb{R}$ (U ouvert de $\mathbb{R}$). Alors on a f différentiable en $a \in U$ si et seulement si f est dérivable en a ; de plus :

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad df_a(h) = f'(a)h$$

(il suffit de se reporter à la définition de la dérivabilité d'une fonction numérique en un point $a \in \mathbb{R}$.)

2) $p = 1$ et q quelconque ; donc $f : U \to \mathbb{R}^q$

$$t \mapsto f(t) = (f_1(t), ..., f_q(t))$$

U étant un ouvert de $\mathbb{R}$. On a f différentiable au point $a \in U$ si et seulement si les q fonctions coordonnées de f sont dérivables en a ; de plus :

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad df_a(h) = (f_1'(a)h, ..., f_q'(a)h)$$

Si chaque fonctions coordonnées $f_i (1 \leq i \leq q)$ est dérivable en $a \in U$ alors :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (f_1(a+h), ..., f_q(a+h)) \\ &= (f_1(a) + f_1'(a)h + |h|\varepsilon_1(h), ..., f_q(a) + f_q'(a)h + |h|\varepsilon_q(h)) \\ &= f(a) + (f_1'(a)h + |h|, ..., f_q(a) + f_q'(a)h + |h|(\varepsilon_1(h), ..., \varepsilon_q(h))) \end{aligned}$$

et

$$\lim_{h \to 0} (\varepsilon_1(h), ..., \varepsilon_q(h)) = 0_q$$

Supposons réciproquement de f différentiable en a.
df_a étant linéaire ($df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$), il existe q réels $\ell_1, ..., \ell_q$ tels que :

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad df_a(h) = (\ell_1 h, ..., \ell_q h)$$

Notant $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q$ les applications coordonnées de ε,on aura :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + \ell_i h + |h|\varepsilon_1(h) \qquad 1 \leq i \leq q$$

$$et : \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon_i(h) = 0$$

Chaque fonctions coordonnées est donc dérivable en a et $f_i'(a) = \ell_i$ c'est -à-dire :

$$df_a(h) = (f_1'(a)h, ..., f_q'(a)h)$$

Remarque 3.3.1. *Nous voyons donc que la notion de différentiabilité généralise bien celle de dérivabilité des fonctions numériques et des fonctions vectorielles (d'une variable réelle).*

2) p quelconque et $q = 1$; donc $f : U \to \mathbb{R}$

$$(x_1, ..., x_p) \mapsto f(x_1, ..., x_p)$$

Remarque 3.3.2. *f est différentiable en a ; f admet p dérivées partielles en a ; de plus :*

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \qquad df_a(h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i$$

Proprietés 3.3.1. *df_a étant une forrme linéaire sur $\mathbb{R}^p$, il existe réels $\alpha_1, ..., \alpha_p$ tels que, pour tout $h = (h_1, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$, on ait :*

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i = \alpha_1 h_1 + ... + \alpha_p h_p$$

Preuve 3.3.1. *Si $1 \le i \le p$,on a :*

$$\begin{aligned} f(a_1, ..., a_i + h_i, ..., a_p) &= f(a_1, ..., a_i, ..., a_p) + df_a(0, ..., h_i, ..., 0) + |h_i|\varepsilon(0, ..., h_i, ..., 0) \\ &= f(a_1, ..., a_i, ..., a_p) + \alpha_i h_i + |h_i|\varepsilon_i(h_i) \end{aligned}$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_i(h_i) = 0$. Cela prouve que la i-ème application partielle est dérivable en

$$a = (a_1, ..., a_i, ..., a_p)$$

et que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha_i$.
Notons cependant que la réciproque de la proposition précédent est fausse.
Si ; f admet ^{p} dérivées partielles en a, elle n'est pas forcément différentiable en a.

Exemple 3.3.1. *on vu que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admettait des dérivées partielles en $(0, 0)$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0\right)$$

mais n'étant pas continue en $(0, 0)$ ne peut être différentiable en ce point.

Cependant si f admet p dérivées partielles continues en a, alors f est différentiable en a et sa differetielle est donnée par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \qquad df_a(h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

On a, avec des notations évidentes :

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) - f(a) & = & f(a_1+h_1, a_2+h_2, ..., a_{p-1}+h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & - & f(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p) \\ & = & f(a_1+h_1, a_2+h_2, ..., a_{p-1}+h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & - & f(a_1, a_2+h_2, ..., a_{p-1}+h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & + & f(a_1, a_2+h_2, ..., a_{p-1}+h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & - & f(a_1, a_2, ..., a_{p-1}+h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + & f(a_1, a_2, ..., a_{p-1}+h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & - & f(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p+h_p) \\ & + & f(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p+h_p) - f(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p) \end{array}$$

On applique le théorème des accroissements finies à chaque différence ci-dessus,il vient :

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) - f(a) & = & h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2, ..., a_{p-1}+h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & + & h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+\theta_2 h_2, ..., a_{p-1}+h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + & h_{p-1} \frac{\partial f}{\partial x_{p-1}}(a_1, a_2, ..., +a_{p-1}\theta_{p-1}h_{p-1}, a_p+h_p) \\ & + & h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a_1, a_2, ..., +a_{p-1}, a_p\theta_p h_p) \end{array}$$

avec $0 < \theta_i < 1$ pour tout i, $1 \leq i \leq p$. Chaque dérivée partielle ci-dessus étant continue en $a = (a_1, ..., a_p)$ on a :

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) - f(a) & = & h_1[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p) + \varepsilon_1(h)] \\ & + & h_2[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p) + \varepsilon_2(h)] \\ & + & h_{p-1}[\frac{\partial f}{\partial x_{p-1}}(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p) + \varepsilon_{p-1}(h)] \\ & + & h_p[\frac{\partial f}{\partial x_p}(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p) + \varepsilon_p(h) \\ & = & \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \varepsilon_i(h) \end{array}$$

avec $lim_{h\to 0}\varepsilon_i(h)=0(1)(1\leq i\leq p)$.
Si $h\neq 0_p$,soit $\|h\|=sup_{(1\leq i\leq p)}|h|=|h_{i_0}|$,alors :

$$|\sum_{i=1}^{p} h_i\varepsilon_i(h)|=|h_{i_0}|=\|h\|\varepsilon(h)$$

$$avec:|\varepsilon(h)|=|\sum_{i=1}^{p}\frac{h_i}{|h_{i_0}|}\varepsilon_i(h)|\leq\sum_{i=1}^{p}h_i|\varepsilon_i(h)|\to 0\qquad (quand\ h\to 0_p)$$

on a donc,pour $h\neq 0_p$:

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{p}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\|h\|\varepsilon(h)\qquad et\qquad lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

3) p et q quelconques ;donc $f\,:\,U\to\mathbb{R}^q$

$$(x_1,...,x_p)\mapsto f(x_1,...,x_p)$$

U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
On note $f_1,...,f_q$ les q fonctions coordonnées,autrement dit :

$$si:(x_1,...,x_p)\in U, f(x_1,...,x_p)=(f_1(x_1,...,x_p),...,f_q(x_1,...,x_p))$$

on a alors f différentielle en a si et seulement si ses q fonctions coordonnées le sont,de plus :

$$\forall h\in\mathbb{R}^p\qquad df_a=(d(f_1)_a(h),...,d(f_q)_a(h))$$

écrivement $df_a(h)$ et h sous formes de vecteurs colonnes :

$$df_a(h)=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{p}h_i\frac{\partial f_1(a)}{\partial x_i}\\ .\\ .\\ .\\ \sum_{i=1}^{p}h_i\frac{\partial f_q(a)}{\partial x_i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1}h_1+ & . & . & . & +\frac{\partial f_1(a)}{\partial x_p}\\ & & . & & \\ & & . & & \\ & & . & & \\ \frac{\partial f_1(q)}{\partial x_1}h_1+ & . & . & . & +\frac{\partial f_q(a)}{\partial x_p}h_p\end{pmatrix}$$

Supposons f différentielle en a.Alors :

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\|h\|\varepsilon(h)$$

D'où pour chaque coordonnée :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + \varphi_i(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

φ_i étant une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$,et $lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.
Ceci prouve que chaque fonction coordonnée est différentiable en a et que :

$$(df_i)_a(h) = \varphi_i(h) = (df_a)_i(h)$$

Réciproquement,si chaque fonction coordonnée f_i est différentiable au point a,alors si $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est définie par :

$$\ell(h) = ((df_1)_a(h), ..., (df_q)_a(h))$$

On vérifie facilement que cette application convient comme différentielle de f en a.
Si f est différentiable en a,on appelle **matrice jacobienne** de f en a la matrice,notée $j_f(a)$définie par :

$$j_f(a) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)) \qquad 1 \leq i \leq q \qquad et \qquad 1 \leq i \leq p$$

ou :

$$j_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & . & . & . & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

On a donc,si $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_i \end{pmatrix}$: $\qquad df_a(h) = j_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_p \end{pmatrix}$

3.4 Composition

3.4.1 Théorèmes de composition

Avant de donner ces théorèmes, écrivons la définition suivante, qui généralise celle vue au début de ce chapitre.
Soit $f : U \to \mathbb{R}^q, U$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Définition 3.4.1. *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur* U *si ses p applications coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur* U*(c'est-à-dire admette des dérivées partielles continues sur* U*).*

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est noté :

$$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^q)$$

On a l'important théorème de composition :

Théorème 3.4.1. *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ et $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}^s$,* U *étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et* V *un ouvert de $\mathbb{R}^q$,tels que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$:*
1) *si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et :*

$$d(g \circ f)_a = d(g)_{f(a)} \circ df_a ouencore : \qquad j_{g \circ f}(a) = j_g(f(a))j_f(a)$$

2) *si f est différentiable sur* U *et g différentiable sur* V*, alors $g \circ f$ est différentiable sur* U.
3) *si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur* U *et g sur* V*,alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur* U.

Proprietés 3.4.1. 1) *La différentiabilité de f et celle de g s'expriment par :*

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \qquad et \qquad \lim_{h \to 0_p} \varepsilon_1(h) = 0_q$$

$$g(b+k) = f(b) + df_b(k) + \|k\|\varepsilon_2(k) \qquad et \qquad \lim_{k \to 0_q} \varepsilon_2(k) = 0_s$$

Posons $k(h) = f(a+h) - f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$.Alors :

$$\begin{aligned} g\circ f(a+h)-g\circ f(a) &= g[b+k(h)]-g(b) \\ &= dg_b[k(h)]+\|k(h)\|\varepsilon_2[k(h)] \\ &= dg_b[df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)]+\|k(h)\|\varepsilon_2[k(h)] \\ &= dg_b[df_a(h)]+\|h\|dg_b(\varepsilon_1(h))+\|k(h)\|\varepsilon_2[k(h)] \end{aligned}$$

(dg_b étant linéaire). On a donc :

$$g\circ f(a+h)-g\circ f(a)=dg_b[df_a(h)]+\|h\|\varepsilon(h)$$

$$avec: \qquad \|h\|\varepsilon(h)=dg_b[\varepsilon_1(h)]+\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}\varepsilon_2[k(h)] \qquad h\neq 0_p$$

Il reste à prouver que $\lim_{h\to 0_p}\varepsilon(h)=0_q$.

Comme $\lim_{h\to 0_p}\varepsilon_1(h)=0_p$*,on a,puisque* dg_b *est linéaire,donc continue :*

$$\lim_{h\to 0_p} dg_b(\varepsilon_1(h))=0_s$$

Il suffit donc d'établir que $\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}\varepsilon_2[k(h)]\to 0$*,quand* $h\to 0_q$*.Or :*

$$\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}=\frac{\|df_a(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\|}{\|h\|}\leq\frac{\|df_a(h)\|}{\|h\|}+\varepsilon_1(h)$$

Si on choisie la norme N_∞ *sur* $\mathbb{R}^q$*,alors :*

$$\|df_a(h)\|=sup_{1\leq i\leq p}|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f_i}{\partial x_p}(a)h_p|$$

$$=|\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_p}(a)h_p|\leq\sum_{j=1}^{p}|\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(a).|\|h\|$$

Par cnséquent :

$$|\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}\varepsilon_2[k(h)]|\leq[\sum_{j=1}^{p}|\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(a)|+\|\varepsilon_1(h)\|]\varepsilon_2(k(h))$$

ce qui permet de conclure.

Les paragraphes 2) *et* 3) *sont évidents.*

3.4.2 Cas particuliers

1) $p = q = s = 1$

Alors on a : $\forall h \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(a)h = g'(f(a))f'(a)h$

On retrouve ainsi le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

2) $p = s = 1$. On a (notations évidentes) :

$$\begin{array}{ccl} t & \longmapsto x & x(t) = (x_1(t), ..., x_q(t)) \\ & F \searrow & \downarrow f \\ & & f[x_1(t), ..., x_q(t)] \end{array}$$

$(t \in U \subset \mathbb{R})$ et $f(x_1(t), ..., x_q(t)) \in \mathbb{R}$

Ici, $j_x(a) = (x_1'(a), ..., x_q'(a))$

et $j_f(b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(b) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_q}(b) \end{pmatrix}$

donc :$F'(a) = j_f(b) j_x(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(a))x_1'(a) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_q}(x(a))x_q'(a)$

$$F'(a) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(a))x_i'(a)$$

3) $p = q$ (Application aux changements de variables).

On est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccl} u = (u_1, ..., u_p) & \longmapsto x & x(t) = (x_1(t), ..., x_q(t)) \\ & \searrow F & \downarrow f \\ & & (f_1(\varphi(u)), ..., x_p(\varphi(u))) = (x_1(u), ..., x_p(u)) \end{array}$$

En un point $a \in U \subset \mathbb{R}^p$ donné, on a $j_F(a) = j_f(\varphi(a)) j_\varphi(a)$

soit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(a) & . & . & . & \frac{\partial F_1}{\partial u_p}(a) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & . & . \\ \frac{\partial F_s}{\partial u_1}(a) & . & . & . & \frac{\partial F_s}{\partial u_p}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\varphi(a)) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\varphi(a)) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & . & . \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1}(\varphi(a)) & . & . & . & \frac{\partial f_s}{\partial x_p}(\varphi(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}(a) & . & . & . & \frac{\partial x_1}{\partial u_p}(a) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & . & . \\ \frac{\partial x_p}{\partial u_1}(a) & . & . & . & \frac{\partial x_p}{\partial u_p}(a) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\varphi(a))\frac{\partial x_k}{\partial u_j} \qquad (1 \leq i \leq s, \qquad 1 \leq j \leq s)$$

soit :

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_j}(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\varphi(a))\frac{\partial x_1}{\partial u_j}(a) + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_p}(\varphi(a))\frac{\partial x_p}{\partial u_j}(a)$$

Exemple 3.4.1. *Passage en coordonnées polaires.Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}(\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2)$.
On est dans la situation :

$$\begin{array}{ccl} (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & F(r\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

La formule encadrée ci-dessus s'écrite :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

3.5 Formules de Taylor

On ne considère maintenant que des fonctions numériques, définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Rappelons que si a et b sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, le segment $[a,b]$ est l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^p$ tels qu'il existe un réel $t \in [0,1]$ verifiant $x = a + t(b-a)$:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^p / \exists t \in [0,1], \qquad x = a + t(b-a)\}$$

Bien sûr,$]a,b[$ est défini par :

$$]a,b[=[a,b]/\{a,b\}=\{x\in\mathbb{R}^p/\exists t\in]0,1[,\qquad x=a+t(b-a)\}$$

3.5.1 Théorème des acroissements finis

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^p$ à valleurs réelles.

Théorème 3.5.1. *pour tous vecteurs a,b de* U *tels que $[a,b]\subset$* U*,il existe $c\in]a,b[$ vérifiant :*

$$f(b)=f(a)+df_c(b-a)$$

ou encore,posant $b=a+h$,il existe $\theta\in]0,1[$ vérifiant :

$$f(a+h)=f(a)+df_{a+\theta h}(h)$$

Remarque 3.5.1. *On voit que pour $p=1$, on retrouve le théorème étudié en 1 année.*

Compte tenu de l'exprission de la différentielle d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$,les deux formules ci-dessus peuvent s'écrire :

$$f(b)=f(a)+\sum_{i=1}^{p}(b_i-a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

ou :

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{p}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h)$$

Pour établir ce théorème, considérons la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F:[0,1] &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto f(a+t(b-a)) \end{aligned}$$

l'application $t\mapsto a+t(b-a)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ (affine) et :

$$\forall t\in[0,1]\qquad F'(t)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+t(b-a))(b_i-a_i)$$

on en déduit (par composition) que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Proprietés 3.5.1. *On peut lui appliquer le théorème des acroissements finis établir pour les fonctions numériques d'une variable réelle :*

$$\exists\theta \in]0,1[\qquad F(1) = F(0) + F'(\theta)$$

$$\textit{soit :} \qquad \exists c \in]a,b[\qquad f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i)$$

Rappelons qu'un ouvert U est dit **convexe** si $\forall a \in U, \forall b \in U, [a,b] \subset U$.
Alors,si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^p$ et si ses p dérivées partielles sont nulles en tout point de U,alors f est constante sur U.
En effet,on a alors $\forall a \in U \forall b \in U, f(a) = f(b)$.

3.5.2 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs réelles.

Définition 3.5.1. *pour tous vecteurs a et b de* U *tels que $[a,b] \subset$ U,il existe $c \in]a,b[$ vérifiant :*

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{p}(b_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{p}(b_i - a_i)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(c) + 2\sum_{1\leq i<j\leq p}(b_i - a_i)(b_j - a_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c))$$

ou encore,posant $b = a + h$,il existe $\theta \in]0,1[$ vérifiant :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{p}(h_i)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a+\theta h) + 2\sum_{1\leq i<j\leq p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h))$$

La démonstration se fait, là aussi, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction numérique F définie dans la preuve du théorème des acroissements finis. beginepour $p = 2$,on obtient :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + [h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}](a,b) + \frac{1}{2}[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}](a+\theta h, b+\theta k)$$

3.6 Extremums

Théorème 3.6.1. *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$,U *étant un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $a \in \mathrm{U}$.
On dit que f *:*
1) *présente en a un maximum relatif s'il existe une boule ouverte* B *de centre* $a(\mathrm{B} \subset \mathrm{U})$ *telle que :* $\forall x \in \mathrm{B},\ f(x) \leq f(a)$
2) *présente en a un minimum relatif s'il existe une boule ouverte* B *de centre* $a(\mathrm{B} \subset \mathrm{U})$ *telle que :* $\forall x \in \mathrm{B},\ f(x) \geq f(a)$
3) *présente en* a *un extremum relatif si* a *est maximum ou minimum relatif.*

Dans le cas où f est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on a l'important résultat suivant :
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$,différentiable en un point $a \in U$.
Si f présente un extremum relatif au point a, alors df_a est l'application linéaire nulle :

$$df_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})}$$

ou encore :

$$\forall i \in \{1, ..., p\} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Exemple 3.6.1. f *présente un maximum. Il existe* $r > 0$ *tel que* $\mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{U}$ *et :*

$$\|x - a\| < r \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

Alors l'application F*, de la varible réelle* t *définie dans un voisinage de* 0 *par :*

$$F(t) = f(a + th)$$

présente un maximum relatif en 0*. Étant différentiable (par composition) on doit avoir nécessairemant* $F'(0) = 0$.
Or :

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th)$$

donc :

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(h)$$

Proprietés 3.6.1. *Si f différentiable en a, on appelle point critique tout point $a \in$ U tel que :*

$$\forall i \in \{1, ..., p\} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Les éventuels extremums sont donc à recharcher :

1) *aux points où f n'est pas différentiable (s'il ya en a).*

2) *aux points critiques (s'il ya en a).*

Remarque 3.6.1. *La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse. Si toutes les dérivées partielles de f en a s'annulent,f n'a pas forcément d'extremum relatif en a.*

Par exemple,$(0, 0, 0)$ est un point critique (il n'est pas le seul) de $\begin{array}{ll} f : (\mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto xyz \end{array}$
mais f ne présente pas d'extremum en ce point puisque par exemple $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \geq 0$ et $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \leq 0$.
Le théorème général établissant des cnditions suffisantes d'existence d'un extremum fait intervenir les formes quadratiques que nous étudierons ultérieurement. Nous nous contenterons donc de l'énoncer dans le cas où $p = 2$.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $(a, b) \in U$, on pose, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

Il s'agit là de la notation dite notation de Monge.
On a alors :
1) Pour que f admette un extremum relatif en (a, b), il faut que :

$$p = q = 0$$

2) Dans ces conditions :
si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$,f présente en (a, b) un maximum relatif.
si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$,f présente en (a, b) un minimum relatif.
si $s^2 - rt > 0$, f ne présente pas d'extremum relatif en (a, b).
1) n'est que l'adaptation au cas particulier que nous tirons du théorème général

précédent.

2) La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{1}{2}[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}](a+\theta h, b+\theta k)$$

$$= f(a,b) + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \varepsilon(h,k)$$

avec :

$$\varepsilon(h,k) = \frac{1}{2}(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(a+\theta h, b+\theta k) - \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2)$$

Soit $\varepsilon > 0$,f étant de classe $\mathcal{C}^2$,il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\|(h,k)\| < a \Rightarrow \begin{cases} |\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+h,b+k) - r| & < \varepsilon \\ |\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+h,b+k) - s| & < \varepsilon \\ |\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+h,b+k) - t| & < \varepsilon \end{cases}$$

puisque $0 < \theta < 1, \|(h,k)\| < \alpha \Rightarrow \|(\theta h, \theta k)\| < \alpha$ et donc :

$$\varepsilon(h,k) \leq \frac{1}{2}[h^2 + 2|h||k| + k^2]\varepsilon \qquad \|(h,k)\| < \alpha$$

soit :

$$\|(h,k)\| < \alpha \Rightarrow |\varepsilon(h,k)| < \frac{\varepsilon}{2}(|h| + |k|)^2$$

Si on choisit sur $\mathbb{R}^2$ la norme 1,on a alors $|\varepsilon(h,k)| < \frac{\varepsilon}{2}(\|(h,k)\|)^2$ ce qui prouve ,ε étant quelconque ,que :

$$\varepsilon(h,k) = o(\|h,k\|^2)$$

Si (h,k) est assez proche de $(0,0)$ le signe de $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ est donc celui de $rh^2 + 2shk + tk^2$.Une étude élémentaire du signe de ce trinôme en h amène la conclusion.

Exemple 3.6.2. *Soit f définie par* $f(x,y) = x(\ln^2 x + y^2)$.
Ici $\mathrm{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = \ln^2 x + y^2 + 2\ln x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 2xy \end{cases}$$

Tout point critique est solution de

$$\begin{cases} y & = 0 \\ \ln^2 x + 2\ln x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) & = (1,0) \\ ou & \\ (x,y) & = (\frac{1}{e^2},0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x$$

en $(1,0)$: $r = 2, s = 0, t = 2, s^2 - rt = -4$ *et* $r = 2 > 0$ *; c'est un minimum.*
en $(\frac{1}{e^2},0)$: $r = -2e^2, s = 0$; $t = \frac{2}{e^2}, s^2 - rt = 4$ *; pas d'extremum.*

Bibliographie

1. F.Rouvière, Licence de mathématique cours de calcul différentiel LSMA
2. Francis Nier-Dragos iftimie, Introduction à la Topologie, Univ. de Rennes 1
3. Dominique Azé-Jean Baptiste, Calcul différentiel et équation différentielles, Ellipses
4. Elie Azoulay-Jean Avignant-Guy Auliac, Les mathématiques en licence 2 ème année.Tome 1, Mias.Mass.Sm, 3 ème édition de Mathématiques Deug Sciences, EdiSience
5. Filippe Charpontier, Licence en Mathématique de calcul différentiel , univ.Bordeaux