Table des matières

Introdution

Le comportement asymptotique, plus précisemment convergence, des variables aléatoires, très important en statistique (théorie de l'estimation et des tests), est définit très naturellement dans des espaces tels que L^p. Les autres modes de convergence, souvent utilisés, sont : La convergence en loi (correspond à la convergence étroite des mesures de probabilités), la convergence stochastique (en probabilités), et la convergence presque sûre. En particulier, la convergence dite vague est aussi à la base des tests asymtotiques en statistique mathématique, elle concerne la distribution limite d'une suite d'applications, définies sur des espaces probabilisés à valeurs dans un même espace probabilisable, vers une application parteillement définie.

Il est intéressant de mentionner ici que la définition d'un mode de convergence (vague ou étroite) pour les mesures se fait de la manière la plus commode en mettant en dualité l'espace des mesures avec un espace de fonctions continues, ce qui est un resultat, très important, établi par Riesz en 1938.

Dans le présent polycopié, nous nous basons sur l'étude de convergence étroite des mesures bornées. En suite nous utiliserons les principaux résultats pour donner une définition légère des différents modes de convergence, nous signalerons aussi les relations qui existent entre elles.

Le polycopié est divisé en deux chapitres dépendants. Un premier important chapitre, qui est l'objet de notre travail, sera consacré à l'étude des convergences faibles et étroites de suites de mesures bornées, tandis qu'un deuxième chapitre sur les modes de convergence qui est un chapitre complémentaire ou d'application de la convergence étroite de mesures bornées dans la définition et l'étude de ces modes de convergence.

Chapitre 1

Convergence Étroite de Mesures Bornées

Soit $\mathbb{X}$ un espace topologique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Le cône des mesures positives et bornées sur ($\mathbb{X}$,$\mathcal{B}$), identifié à un sous-espace du dual topologique de l'espace $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ des fonction réelles continues et nulles à l'infini, est muni d'une topologie particuliére appelée topologie faible. Une mesure μ est alors considérée comme une forme linéaire sur $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ et une suite $(\mu_n, n \geq 0)$ de mesures positives et bornées, converge pour cette topologie, si la suite $(\mu_n(f), n \geq 0)$ converge pour tout fonction f de $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$, auquel cas, on dit que $(\mu_n, n \geq 0)$ converge faiblement. Cependant, il est constaté que pour cette topologie, la famille P des lois probabilités sur ($\mathbb{X}$,$\mathcal{B}$) n'est pas fermé. On recourt alors une topologie plus fine que la topologie faible et pour laquelle P serait fermé. Cette topologie est dite la "**topologie étroite**" et une suite convergente pour cette topologie est dit étroitement convergence. Cette partie consacré à l'étude des topologies faibles et étroite et de plusieurs critéres de convergence étroite.

1.1 Rappels et notation

Soit $\mathbb{X}$ un espace métrique localement compact et dénombrable à l'infini (i.e $\mathbb{X}$ possède un recouvrement au plus dénombrable de parties compactes).On note

$\mathbf{C}_b(\mathbb{X})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et bornées sur $\mathbb{X}$.

$\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues à support compact.

$\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et nulles à l'infini (i.e f tend vers 0 à l'infini si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathbf{K}$ tel que $|f(x)| < \varepsilon$ sur $\mathbf{K}^c$).

On a bien sure

$\mathbf{C}_k(\mathbb{X}) \subset \mathbf{C}_0(\mathbb{X}) \subset \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$ et on a égalité si $\mathbb{X}$ est compact.

Nous commençons par rappeler le résultat suivant :

Théorème 1.1.1. *L'espace $\mathbf{C}_b(\mathbb{X})$ muni de la norme de la convergence uniforme*

$\|f\| = \sup_x |f(x)|$ est un espace de Banach, l'espace $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ est un sous-espace ferme de $\mathbf{C}_b(\mathbb{X})$ et est par suite complet. L'espace $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ est un sous-espace dense dans $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$, de plus il existe une suite(f_n,$n \geq 1$) de $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$, dense dans $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$. On dit que $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ est séparable.

Démonstration

Soit (f_n,$n \geq 1$) une suite de Couchy dans $\mathbf{C}_b(\mathbb{X})$. Cette suite étant bornée, il existe alors un réel positif a tel que :$\|f_n\| \leq a$. D'autre part, la suite (f_n) est convergente et la convergence est uniforme. Par suite $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$ existe pour tout x et définit une fonction continue f, laquelle satisfait

$$|f(x)| \leq \sup_n |f(x)| \leq a,$$

d'ou $\|f\| \leq a$ et donc $f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$.

Soit maintenant $(h_n, n \geq 1)$ une suite convergente de fonctions continues dans $\mathbb{X}$ et nulles à l'infini, et notons h la fonction $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} h_n$. La fonction h est continue et bornée sur $\mathbb{X}$. Voyons si elle nulle à l'infini ?

Pour un $\varepsilon > 0$, soit n_0 l'entier positif tel que :$\|h_n - h\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_0$. D'autre part, on sait que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathbf{K} = \mathbf{K}(n, \varepsilon)$ tel que si $x \in \mathbf{K}$, on ait $|h_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, et par suite, si $x \in \mathbf{K}$

$$|h(x)| \leq |h_n(x) - h(x)| + |h_n(x)| < \varepsilon.$$

Comme ceci vrai est pour tout $\varepsilon > 0$, on dèduit que h est nulle à l'infini, et par conséquent $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$.
Soit $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$. Pour un $\varepsilon > 0$, soit $\mathbf{K}$ un compact tel que $|f(x)| < \varepsilon$ dans K^c. D'aprés le théoréme d'Urysohn, il existe une fonction $\Phi \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ telle que :

$$0 \leq \Phi(x) \leq 1 \quad et \quad \Phi(x) = 1 \quad sur \quad \mathbf{K}.$$

Par suite, la fonction $h = f.\Phi$ est continue et à support compact et de plus

$$\|f - h\| = \|f(1 - \Phi)\| \leq \|f\| \leq \varepsilon$$

Par ailleurs, d'aprés le théoréme de Stone-Weierstrass, $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ est séparable. En effet, soit $\mathbf{K}$ un compact de $\mathbb{X}$ et $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ le sous-espace de fonction continues à support dans $\mathbf{K}$. Pour toute fonction $f \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$, f est limite d'une suite (f_n) de polynômes (Stone-Weierstrass) de plus $\mathbf{K}$ étant métrique et compact, ceci assure que les polynômes f_n sont nécessairement à support dans $\mathbf{K}$, $n \geq 1$.
Ainsi, $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ est séparable puisque l'ensemble des polynômes a la puissance de $\mathbf{N}$, et comme $\mathbb{X}$ est dénombrable à l'infini, il s'ensuit que $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ est séparable.

Notons M (resp. M^b) l'ensemble des mesures positives bornées (resp. bornées par b) définies sur l'espace mesurable $(\mathbb{X},\mathcal{B})$.

Proposition 1.1.1. *Soit μ une mesure positive bornée sur $(\mathbb{X},\mathcal{B})$. L'application Φ_μ de $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$. définie par :*

$$\Phi_\mu(f) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

pour tout $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$, est une forme linéaire positive, continue de norme $\mu(\mathbb{X})$.

Démonstration
Observons que $\Phi_\mu(f)$ a un sens. puisque toute fonction f continue et nulle à l'infinie est bornée, ainsi que la mesure μ. Il est claire que $\Phi_\mu(f)$ est linéaire

et positive (i.e : $\Phi_\mu(f) \geq 0$ si $f \geq 0$), et $|\Phi_\mu(f)| \leq \|f\|.\mu(\mathbb{X})$, $\forall f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$, ce qui assure que Φ_μ est continue au point $f = 0$, et que par conséquent, elle est continue partout dans $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$. De puls, l'inégalité $\frac{|\Phi_\mu(f)|}{\|f\|} \leq \mu(\mathbb{X})$ pour toute fonction $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ telle que $\|f\| \leq 1$ fait que $\|\Phi_\mu\| \leq \mu(\mathbb{X})$, et pour montrer l'inegalité inverse, considérons la suite des fonctions $(f_n, n \geq 1)$ de $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$, définie par :

$$f_n(x) = [1 - n.d(x, \mathbf{K}_n)].\mathbb{1}_{\{y/d(y,\mathbf{K}_n) \leq \frac{1}{n}\}}(x)$$

où $(\mathbf{K}_n, n \geq 1)$ est une suite croissante de compactes qui recouvre $\mathbb{X}$ et vérifient $\{x : d(x, \mathbf{K}_n) \leq \frac{1}{n}\} \subset \mathbf{K}_{n+1}$.
Notons que f_n s'écrit encore $f_n(x) = \varphi(n.d(x, \mathbf{K}_n))$ avec

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d(x, \mathbf{K}_n) = 0 \\ 1 - x & \text{si} \quad d(x, \mathbf{K}_n) \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

qui est manifestement continue et tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow +\infty$.
Cette écriture de f_n confirme bien sûre que f_n est continue, nulle à l'infini (en effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un compact $\mathbf{K}'$, prendre $\mathbf{K}' = \mathbf{K}_{n+1}$ par exemple, et tel que $|f_n(x)| < \varepsilon$, vue que $f_n(x) = 0$ sur $\mathbf{K}_{n+1}^c$ et $\|f_n\| \leq 1$ car $\|\varphi\| \leq 1$). La suite (f_n) est en outre croissante et étant bornée, elle est donc convergente, et converge d'ailleurs simplement vers $\mathbb{1}_\mathbb{X}$. Il résulte alors par la propriété de Beppo-Lèvy que :

$$\mu(\mathbb{X}) = \int_X \liminf_n (x) d\mu(x) \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) \leq \|\Phi(x)\|.$$

Cette seconde inégalité jointe à la première, montre que la norme de Φ_μ est bien égale à $\mu(\mathbb{X})$.

Rappelons le théorème suivant :

Théorème 1.1.2. *(Théorème de* Riesz*)*
Pour toute forme linéaire positive Φ sur $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$, il existe une mesure positive

μ sur l'espace $(\mathbb{X},\mathcal{B})$, unique et vérifiant :

1. $\Phi(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu$, pour toute fonction $f \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$,

2. $\mu(\mathbf{K}) < +\infty$ pour tout compact $\mathbf{K}$ de $\mathbb{X}$,

3. $\mu(\mathrm{B}) = \inf\{\mu(\mathrm{U})/\mathrm{B} \subseteq \mathrm{U},\mathrm{U}$ ouvert de $\mathbb{X}\}$

$\mu(\mathrm{B}) = \sup\{\mu(\mathbf{K})/\mathrm{B} \supseteq \mathbf{K},\mathbf{K}$ compact de $\mathbb{X}\}$, pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$.

Proposition 1.1.2. *L'application Φ de M dans $\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X})$ ($\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X})$ étant le dual topologique de $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$), faisant correspondre à toute mesure μ de M, la forme linéaire Φ_μ, est une isométrie de M sur le cône positif $(\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X}))^+$ des formes linéaires positives bornées. M étant muni de la norme définie par : $\|\mu\| = \mu(\mathbb{X})$ et $\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X})$ de la norme de la convergence uniforme.*

Démonstration

$\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X})$ est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ et le cône positif $(\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X}))^+$ est une partie convexe de $\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X})$, stable pour les homothéties positives.

L'application Φ est bien sûre additive et homogène d'ordre 1, de plus elle est injective, car si $\Phi_\mu = 0$ pour une mesure μ de M, alors $\|\Phi_\mu\| = \mu(\mathbb{X}) = 0$, ce qui n'est possible que si $\mu = 0$.

Et donc Φ est un isomorphisme de M dans $\Phi(M)$.

Montrons que $\Phi(M) = (\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X}))^+$?

L'inclusion $\Phi(M) \subseteq (\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X}))^+$ est une conséquence de la proposition (1.1.1).

Soit maintenant une forme linéaire positive l sur $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$. La restriction de l à $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ définit (Théorème de *Riesz*) une mesure unique μ_l, telle que

$$\mu(f) = \int_X f d\mu_l, \quad pour \quad tout \quad f \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X}).$$

On a $\|l\| \geq |\int_X f d\mu_l|$ pour toute fonction $f \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ et $\|f\| \leq 1$.

Par suite , si $(f_n, n \geq 1)$ est la suite de fonctions dans $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ vue dans la proposition 1.1.1, alors

$$\mu_l(\mathbb{X}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu_l = \lim_{n \longrightarrow +\infty} l(f_n) \leq \|l\|$$

et par conséquent $\mu_l \in M$, ce qui confirme la deuxième inclusion $(\mathbf{C}_0^*(\mathbb{X}))^+ \subseteq \Phi(M)$.
Prouvons maintenant que$\Phi_{\mu_l} = l$?
Pour toute fonction $g \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$, il existe une suite $(g_n, n \geq 1)$ dans $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ telle que :
$g = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} g_n$ dans $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ et $\|g_n\| \leq \|g\|$, $\forall n \geq 1$
(prendre par exemple $g_n = g.f_n$).
D'aprés le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu_l = \int_X g d\mu_l$$

et la continuité de l assure que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} l(g_n) = l(g)$$

Comme $\Phi_{\mu_l}(g_n) = \int_X g_n d\mu_l$, il vient alors :

$$l(g) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} l(g_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu_l = \int_X g d\mu_l = \Phi_{\mu_l}(g)$$

d'où $l = \Phi_{\mu_l}$. Et enfin, $\|l\| = \|\Phi_\mu l\| = \mu_l(\mathbb{X})$.

1.2 Topologie faible et Convergence faible

1.2.1 Topologie faible

Définition 1.2.1.1. *On appelle topologie faible sur* M*, la topologie associée à la structure uniforme de la convergence simple sur* $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$*, lorsque les éléments de* M *sont considérés comme des formes linéaires sur* $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$*.*

1.2.2 Convergence faible

Définition 1.2.2.1. *On dit qu'une suite* $(\mu_n, n \geq 0)$ *de mesures positives bornées sur* $(\mathbb{X})$ *converge faiblement vers une mesure* μ *de* M*, si pour toute* *fonction continue* f *sur* $\mathbb{X}$*, et nulle à l'infini, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X fd\mu_n = \int_X fd\mu \tag{1.1}$$

Une base de voisinage de $\mu \in \mathrm{M}$ *pour cette topologie est donnée par les parties* $V_{f_1,\dots,f_{n;\varepsilon}}(\mu)$ *de* M *caractérisées par la propriété :* $\nu \in V_{f_1,\dots,f_{n;\varepsilon}}(\mu) \Leftrightarrow \sup_{1\le i\le n} |\int_X f_i d\mu - \int_X f_i d\nu| < \varepsilon$*, où* $f_i \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ *et* $\varepsilon > 0$*.*
C'est une topologie séparée car si $\mu \neq n$*, il existe* $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ *telle que* $\int_X fd\mu \neq \int_X fd\nu$ *et pour* $\varepsilon = \frac{|\int_X fd\mu - \int_X fd\nu|}{4}$*, les voisinages* $V_{f;\varepsilon}(\mu)$ *et* $V_{f;\varepsilon}(\nu)$ *séparent alors* μ *et* ν*.*
Notons que la topologie faible est la topologie la moins fine rendant continue les applications $\mu \to \int_X fd\mu$ *de* M *dans* $\mathbb{R}$ *pour toute fonction* $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$*.*

Théorème 1.2.1. *L'ensemble* M^b *des mesures positives bornées sur* $(\mathbb{X},\mathcal{B})$*, de norme* b*, muni de la topologie faible est un espace métrique compact.*

Démonstration

Prouvons que M^b est un espace métrique ?
Considérons l'application d de $M^b \times M^b$ dans R^+, définie par :

$$d(\mu,\nu) = \sum_{n\ge 0} \frac{1}{2^n\|f_n\|} |\int_X f_n d\mu - \int_X f_n d\nu| \tag{1.2}$$

où $(f_n, n \ge 0)$ est une suite de fonction dense dans $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$.
L'application d est bien définie, puisque la série (1.2) est convergente (étant majorée par la série convergente $\sum_{n\ge 0}\frac{b}{2^{n-1}}$), et il est aisée de vérifier que cette application est une distance sur M^b.
Notons τ_d la topologie induite sur M^b par la métrique d.
τ_d est plus fine que la topologie faible sur M^b :
En effet, soit V un voisinage de μ pour la topologie faible, de la forme :

$\nu \in V \Longleftrightarrow \sup\limits_{0\leq i\leq n} |\int_X g_i d\mu - \int_X g_i d\nu| < \varepsilon$, où $g_i \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$,
$i = \overline{1,n}$ et $\varepsilon > 0$.
Pour tout $i = \overline{0,n}$, choisissons $f_{k_i} \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ telle que :

$$\|g_i - f_{k_i}\| \leq \min(1, \frac{\varepsilon}{4b}).$$

On a

$$|\int_X g_i d\mu - \int_X g_i d\nu| \leq |\int_X (g_i - f_{k_i}) d\mu| + |\int_X f_{k_i} d\mu - \int_X f_{k_i} d\nu|$$

$$+|\int_X (f_{k_i} - g_i) d\nu| \leq 2b.\|g_i - f_{k_i}\| + |\int_X f_{k_i} d\mu - \int_X f_{k_i} d\nu|.$$

Or, s'il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que $d(\mu,\nu) < \eta(\varepsilon)$, alors nécessairement d'aprés (2.1) :

$$|\int_X f_{k_i} d\mu - \int_X f_{k_i} d\nu| \leq \eta.2^{k_i}.\|f_{k_i}\|$$

et par suite, on a pour tout $i = \overline{0,n}$:

$$|\int_X g_i d\mu - \int_X g_i d\nu| \leq 2b.\|g_i - f_{k_i}\| + \eta.2^{k_i}.\|f_{k_i}\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \eta.\|f_{k_i}\|.2^N \leq \varepsilon$$

avec $N = \sup\{k_i : i = \overline{0,n}\}$, et il suffit de choisir alors

$$\eta(\varepsilon) < \frac{1}{2^{N+1}(1 + \sup \|g_i\|)},$$

car $\|f_{k_i}\| \leq \|g_i - f_{k_i}\| + \|g_i\| \leq 1 + \sup\limits_{0\leq i\leq n} \|g_i\|)$.
Par conséquent,
$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta(\varepsilon) > o/$ si $\nu \in B(\mu, \eta(\varepsilon))$, alors $\nu \in V$.
Ainsi la topologie τ_d est plus fine que la topologie faible sur M^b.

Réciproquement, soient $\eta > 0$, $\mu \in M^b$ et $B(\mu, \nu)$ la boule de centre μ et de rayon η, dans M^b. Il existe k_0 tel que :

$$\sum_{n \geq k_0} \frac{| \int_X f_n d\mu - \int_X f_n d\nu |}{2^n \|f_n\|} \leq \frac{\eta}{2}, \forall \nu \in M^b.$$

Soit alors

$$V = \{\nu \in M^b : \sup_{0 \leq n \leq k_0} | \int_X f_n d\mu - \int_X f_n d\nu | < \frac{\eta}{2} . \inf_{0 \leq n \leq k_0} \|f_n\| \}.$$

Alors V est contenu dans $B(\mu, \eta)$ et donc $B(\mu, \eta)$ est un voisinage de μ pour la topologie faible sur M^b.

Ainsi, τ_d et la topologie faible sur M^b sont donc équivalentes.

Montrons maintenant que M^b est compacte ?

Une condition nécessaire et suffisante pour que M^b soit compacte et que de toute suite $(\mu_n, n \geq 0)$ de M^b on peut extraire une sous-suite convergente. Soit $(f_n, n \geq 0)$ une suite partout dense de $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ et $(\mu_n, n \geq 0)$ une suite dans M^b.

La suite $(\int_X f_1 d\mu_n, n \geq 0)$ est bornée dans $\mathbb{R}$, il existe donc une sous-suite convergente $(\mu_n^1, n \geq 0)$ de $(\mu_n, n \geq 0)$ telle que $(\int_X f_1 d\mu_n^1, n \geq 0)$ est une sous-suite convergente de la suite $(\int_X f_1 d\mu_n, n \geq 0)$. De nouveau, la suite $(\int_X f_2 d\mu_n^1, n \geq 0)$ est bornée dans $\mathbb{R}$, il existe alors une sous-suite $(\mu_n^2, n \geq 0)$ de la suite (μ_n^1) telle que les suites $(\int_X f_1 d\mu_n^2)_{n \geq 0}$ et $(\int_X f_2 d\mu_n^2)_{n \geq 0}$ sont convergentes. En réitérant de nouveau cette opération, on trouve à la κ-iéme étape, une sous-suite $(\mu_n^\kappa, n \geq 0)$ de la suite $(\mu_n^{\kappa-1}, n \geq 0)$ telle que les suites $(\int_X f_i d\mu_n^\kappa)_{n \geq 0}$, $(1 \leq i \leq \kappa)$ sont convergentes. La suite $(\mu_n^n, n \geq 0)$ est alors telle que la suite $(\int_X f_n d\mu_n^n, n \geq 0)$ est convergente pour tout $\rho \in N$.

Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} \int_X f d\mu_n^n$ existe pour tout $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$, car il existe une sous-suite $(f_{n_i}, i \geq 0)$ de $(f_n, n \geq 0)$ telle que : $\lim_{n \to +\infty} f_{n_i} = f$.

Soit alors Ψ l'application de $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$\Psi(f) = \lim_{n \to +\infty} \int_X f \mu_n^n$, quelque soit $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$.

Ψ est linéaire et positive, il existe alors d'aprés le théorème de Riesz , une mesure $\mu \in M$ telle que :
$\Psi(f) = \int_X f d\mu$, pour tout $f \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$.
Et comme $\mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ est dense dans $\mathbf{C}_0(\mathbb{X})$, on obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f d\mu_n^n = \int_X f d\mu,$$

pour tout $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$.
Et par conséquent, M^b est faiblement compacte.

Remarque

L'ensemble P des probabilités sur $(\mathbb{X},\mathcal{B})$ n'est pas fermé pour la topologie faible sur M^1. [1]
En effet, considérons la suite $(\mu_n, n \geq 0)$ ou μ_n est la mesure de Dirac en n.
Pour toute fonction $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$, on a
$\int_X f d\mu_n = f(n)$ et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f d\mu_n = 0,$$

soit, (μ_n) converge vers la mesure identiquement nulle.
On est amené alors à définir une topologie plus fine que τ_d sur M^b et par rapport à laquelle P est fermée. On pose alors,

1.3 Topologie étroite sur M^b et Convergence étroite

1.3.1 Topologie étroite sur M^b

Définition 1.3.1.1. *On appelle topologie étroite sur* M^b*, la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications* $\mathrm{u} \mapsto \int_X \mathrm{f d}\mu$ *de* M^b *dans* $\mathbb{R}$*, pour tout* $\mathrm{f} \in \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$

1. M^1 : l'ensemble des probabilités

1.3.2 Convergence étroite

Définition 1.3.2.1. *On dit que la suite* $(\mu_n, n \geq 0)$ *de* M^b *converge étroitement vers* $\mu \in \mathrm{M}^b$*, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f \mathrm{d}\mu_n = \int_X f \mathrm{d}\mu,$$

pour toute fonction $f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$.

Proposition 1.3.1. *Soit* $(\mu_n, n \geq 0)$ *une suite de* M^b *et* $\mu \in \mathrm{M}^b$*, telles que :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f \mathrm{d}\mu_n = \int_X f \mathrm{d}\mu$, *pour toute fonction* $f \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(\mathbb{X}) = \mu(\mathbb{X})$. *Alors, la suite* $(\mu_n, n \geq 0)$ *converge étroitement vers* μ.

Démonstration

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X fd\mu_n = \int_X fd\mu$, pour toute fonction $f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$?

Soit $f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$ est soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$ telle que :

$\|\varphi\| \leq 1$ et $\int_X (1-\varphi)d\mu < \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$.

Alors, $f.\varphi \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$, il existe un entier positif N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$:

$$|\int_X f.\varphi d\mu_n - \int_X f\varphi d\mu| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.3}$$

Par ailleurs,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X (1-\varphi)d\mu_n = \lim_{n\to+\infty} \{\mu_n(\mathbb{X}) - \int_X \varphi d\mu_n\} = \mu(\mathbb{X}) - \int_X \varphi d\mu$$

Soit,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X (1-\varphi)d\mu_n = \int_X (1-\varphi)d\mu. \tag{1.4}$$

Comme

$$|\int_X fd\mu_n - \int_X fd\mu| \leq |\int_X (f - f.\varphi)d\mu_n|$$

$$+|\int_X f\varphi d\mu_n - \int_X f.\varphi d\mu| + |\int_X (f\varphi - f) d\mu|$$

$$\leq \|f\|. \int_X (1-\varphi) d\mu_n + |\int_X f.\varphi d\mu_n - \int_X f.\varphi d\mu|$$

$$+\|f\|. \int_X (1-\varphi) d\mu. \tag{1.5}$$

Il résulte alors des relation (1.3), (1.4), (1.5), l'existence d'un entier positif N tel que :

$$|\int_X f d\mu_n - \int_X f d\mu| \leq \varepsilon,$$

pour tout $n \geq N$, avec

$$\int_X (1-\varphi) d\mu_n \leq \int_X (1-\varphi) d\mu + \frac{\varepsilon}{4\|f\|}.$$

Remarque

1)La condition 1 de la proposition (1.3.1) est appelée "**la convergence vague**" de la suite (μ_n) :

la convergence vague : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu.\ f \in \mathbf{C}_k(\mathbb{X})$

la convergence faible : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu.\ f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{X})$

la convergence étroite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu.\ f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$

et

$$\{\mu_n \overset{é}{\Rightarrow} \mu\} \Leftrightarrow \{\mu_n \overset{V}{\Rightarrow} \mu \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\mathbb{X}) = \mu(\mathbb{X})\}.$$

2)L'ensemble P des probabilités sur $(\mathbb{X},\mathcal{B})$ est fermé pour la topologie étroite, et donc la topologie étroite est en générale plus fine que la topologie faible sur M^b.

Les résultats suivants fournissent des critère de convergence étroite.

Théorème 1.3.1. *Soit*$(\mu_n, n \geq 0)$ *une suite de* M^b *et* $\mu \in \mathrm{M}^b$*. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(\mu_n, n \geq 0)$ converge étroitement vers μ.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu_n = \int_X f \mathrm{d}\mu$*, pour toute fonction f uniformément continue et bornée.*
3. $\limsup\limits_{n} \mu_n(F) \leq \mu(F)$*, pour tout fermé F de $\mathbb{X}$.*
4. $\liminf\limits_{n} \mu_n(U) \geq \mu(U)$*, pour tout ouvert U de $\mathbb{X}$.*
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$*, pour toute partie A de $\mathbb{X}$ telle que $\mu(\partial A) = 0$, ∂A étant la frontiére de A (on dit que A est un ensemble de μ-continuité).*

Démonstration

L'implication $1 \Rightarrow 2$ résulte de la définition méme de la convergence étroite.
$2 \Rightarrow 3$:
Soit $\mathbf{F}$ un fermé de $\mathbb{X}$. $\mathbf{F}$ est une intersection d'une suite décroissante d'ouverts, et donc pour tout réel $\delta > 0$, il existe un ouvert $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{F}$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\mathbf{G} = \{x : d(x, \mathbf{F}) < \varepsilon\} \quad et \quad \mu(\mathbf{G}) < \mu(\mathbf{F}) + \delta.$$

Soit φ la fonction uniformément continue et bornée associée à $\mathbf{F}$ (démonstration de la proposition (1.1.1)) : $\varphi(x) = 1$ sur $\mathbf{F}$, $\varphi(x) = 0$ sur $\mathbf{G}^c$ et $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{X}$. On a par hypothèse

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \varphi d\mu_n = \int_{\mathbb{X}} \varphi d\mu,$$

mais,

$$\mu_n(\mathbf{F}) = \int_{\mathbf{F}} \varphi d\mu_n \leq \int_{\mathbb{X}} \varphi d\mu_n \quad et \quad \int_{\mathbf{F}} \varphi d\mu = \int_{\mathbf{G}} \varphi d\mu = \mu(\mathbf{G}) < \mu(\mathbf{F}) + \delta.$$

D'où,

$$\limsup_{n} \mu_n(\mathbf{F}) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} \varphi d\mu_n = \int_{\mathbb{X}} \varphi d\mu < \mu(\mathbf{F}) + \delta,$$

ceci $\forall \delta > 0$. Par suite,

$\limsup_n \mu_n(\mathbf{F}) \leq \mu(\mathbf{F})$ pour tout fermé $\mathbf{F}$ de $\mathbb{X}$.

$3 \Rightarrow 1$:

Soit $f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$; par homothétie on peut considérer f de norme $\|f\| < 1$. Supposons d'abord f positive et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ considérons les parties $F_i^k = f^{-1}([\frac{i}{k}, +\infty[)$ de $\mathbb{X}$, $0 \leq i \leq k$.

Les parties F_i^k sont bien sûre fermées et recouverent $\mathbb{X}$ (puisque les intervalles $[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}[, 1 \leq i \leq k$, recouvrent l'intervalle $[0, 1[$) on a alors pour toute mesure $\nu \in M^b$:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k}(\nu(F_i^k) - \nu(F_{i-1}^k)) \leq \int_{\mathbb{X}} f d\nu \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}(\nu(F_i^k) - \nu(F_{i-1}^k))$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \nu(F_i^k) \leq \int_{\mathbb{X}} f d\nu \leq \frac{1}{k}\nu(F_0^k) + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}.\nu(F_i^k)$$

$$\leq \frac{b}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \nu(F_i^k).$$

Comme par hypothèse, on a $\limsup_n \mu_n(F_i^k) \leq \mu(F_i^k)$, pour tout $k \in N$ et $i = 0, 1, ..., k$, remplaçons alors ν par μ_n dans l'inégalité de droite et ν par μ dans l'inégalité de gauche, on trouve pour tout $k \in N^*$:

$$\limsup_n \int_{\mathbb{X}} f d\mu_n \leq \frac{b}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \limsup_n \mu_n(F_i^k)$$

$$\leq \frac{b}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mu(F_i^k) \leq \frac{b}{k} + \int_X f d\mu.$$

Et faisant tendre ensuite k vers $+\infty$, on obtient :

$$\limsup_n \int_{\mathbb{X}} f d\mu_n \leq \int_{\mathbb{X}} f d\mu_n \leq \int_{\mathbb{X}} f d\mu.$$

En remplaçons dans cette inégalité f par $-f$, on obtient

$$\liminf_n \int_{\mathbb{X}} f d\mu_n \geq \int_{\mathbb{X}} f d\mu.$$

Soit pour tout $f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{X})$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{X}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{X}} f d\mu,$$

ce qui exprime que μ_n converge étroitement vers μ.
$3 \Rightarrow 4$:
On a pour tout ouvert $\mathbf{G}$ de $\mathbb{X}$:

$$\liminf_n (\mathbf{G}) = \liminf_n \{\mu_n(\mathbb{X}) - \mu_n(\mathbf{G}^c)\}$$

$$= \liminf_n \mu_n(\mathbb{X}) - \limsup_n \mu_n(\mathbf{G}^c)$$

$$\geq \mu(\mathbb{X}) - \mu(\mathbf{G}^c)$$

ce qui assure que $\liminf_n (\mathbf{G}) \geq \mu(\mathbf{G})$.

L'implication réciproque $4 \Rightarrow 3$ se démontre de la même façon.
$3 \Rightarrow 5$:
Soit A une partie de $\mathbb{X}$ telle que $\mu(\partial \mathrm{A}) = 0$. On a par hypothèse

$$\mu(\overline{\mathrm{A}}) \geq \limsup_n \mu_n(\mathrm{A}) \geq \liminf_n \mu_n(\mathrm{A})$$

$$\geq \liminf_n \mu_n(\mathring{\mathrm{A}}) \geq \mu(\mathring{\mathrm{A}}),$$

où $\overline{\mathrm{A}}$ est la fermeture de A et $\mathring{\mathrm{A}}$ son intérieur.

Comme $\partial \mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \setminus \mathring{\mathrm{A}}$ est un ensemble de $\mu-$continuité, on a alors

$$\limsup_n \mu_n(\mathrm{A}) = \liminf_n \mu_n(\mathrm{A}) = \mu(\mathring{\mathrm{A}}) = \mu(\mathrm{A}).$$

$5 \Rightarrow 3$:
Soit $\mathbf{F}$ une ensemble fermé de $\mathbb{X}$ et soit $(\delta_n, n \geq 0)$ une suite de nombres

réels positifs décroissante vers 0, et notons
$\mathbf{F}_\delta = \{x/d(x,\mathbf{F}) \leq \delta\}$ la partie associée au réel positif δ. On a

$$\mathbf{F} = \bigcap_{n\geq 1} \mathbf{F}_n \quad et \quad \mu(\mathbf{F}) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\mathbf{F}_n).$$

Considérons maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(d) = \mu(\mathbf{F}_\delta)$. h est croissante et bornée, il existe alors un ensemble I fini ou dénombrable telle que h soit contenu dans le complémentaire de I. Soit $\delta \in \mathrm{I}^c$, on a alors :

$$\mathbf{F}_\delta = \partial \mathbf{F}_\delta + \bigcup_{n\geq 1} \mathbf{F}_{\delta - \frac{1}{n}}$$

puisque l'intérieur de $\mathbf{F}_\delta$ est égale à $\bigcup_{n\geq 1} \mathbf{F}_{\delta-\frac{1}{n}}$. Il en résulte alors que

$$\mu(\mathbf{F}_\delta) = 0.$$

Par conséquent, on peut trouver une suite $(\delta_k, k \geq 0)$ convergeant vers 0 et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mu(\mathbf{F}_\delta) = 0$. On a alors

$$\limsup_n \mu_n(\mathbf{F}) \geq \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\mathbf{F}_k) = \mu(\mathbf{F}_k), \quad pour \quad tout \quad k \geq 0.$$

La proposition (1.3.1) résulte alors de ce que $\lim_{k\to+\infty} \mu(\mathbf{F}_k) = \mu(\mathbf{F})$.

Remarque

Si la partie $\mathbf{A}$ n'est pas un ensemble de $\mu-$continuité, la condition $\lim_{n\to+\infty} \mu_n(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{A})$, ne saurait suffire pour garantir la convergence étroite de μ_n. Pour illustrer ceci examinons l'exemple suivant : Soit $\mathbf{E} = [0,1]$ et $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{1\leq i\leq n} \delta_{\frac{i}{n}}$, ou $\delta_{\frac{i}{n}}$ est la mesure de Dirac en $\frac{i}{n}$.

On a pour tout $f \in \mathbf{C}_b[0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f d\mu_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leq i\leq n} f(\frac{i}{n}) = \int_X f(x)dx.$$

Par conséquent, la suite (μ_n) converge étroitement vers la mesure de Lebesgue l sur [0.1]. Cependant, on remarque que
$\mu_n(\mathbb{Q} \cap \mathbf{E}) = 1, \forall n \geq 1$ et $l(\mathbb{Q} \cap \mathbf{E}) = 0$, et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_n(\mathbb{Q} \cap \mathbf{E}) \neq l(\mathbb{Q} \cap \mathbf{E})$$

puisque $\partial(\mathbb{Q} \cap \mathbf{E}) = \mathbf{E}$ et $\mathbb{Q} \cap \mathbf{E}$ n'est pas un ensemble de l-continuité.
Le même exemple montre qu'il peut y avoir inégalité stricte dans la proposition 4 du thérème, il suffit de prendre $\mathbf{G}$ contenant $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ de mesure Lebesgue strictement supérieur à 1.

Nous donnons maintenant des conditions suffisantes de convergence étroite.

Théorème 1.3.2. *S'il existe une famille C d'éléments de $\mathcal{B}$ stable par intersection finie et telle que tout ouvert de $\mathbb{X}$ soit réunion finie ou dénombrable d'éléments de C, alors la condition $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n(\boldsymbol{G}) = \mu(\boldsymbol{G})$, pour tout $\boldsymbol{G} \in C$, implique la convergence étroite de la suite $(\mu_n, n \geq 0)$ vers la mesure μ.*

Démonstration

Montrons par exemple que la proposition 4 du théoréme (1.3.1) est satisfaite. Soit donc un ouvert $\mathbf{G}$ de $\mathbb{X}$. Il existe alors une famille finie ou dénombrable $(G_i, i \in \mathrm{I})$ de C telle que : $\mathbf{G} = \bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}} G_i$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ telle que :

$$\mu(\mathbf{G}) \geq \mu(\bigcup_{i \in \mathrm{J}} G_i) \geq \mu(\mathbf{G}) - \varepsilon.$$

Or, pour toute mesure positive et bornée ν, on a :

$$\nu(\bigcup_{i \in \mathrm{J}} G_i) = \sum_{i \in \mathrm{J}} \nu(G_i) - \sum_{(i,j) \in \mathrm{J}^2 / i<j} \nu(G_i \cap G_j) + ...$$

$$+(-1)^{|\mathrm{J}|-1} \nu(\bigcap_{i \in \mathrm{J}} G_i)$$

où $|\mathrm{J}|$ désigne le nombre d'éléments de J. C étant stable par intersection finie, et on remplaçons ν par μ_n et μ respectivement, dans l'égalite çi-dessus, il vient alors compte tenu de l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n(G)=\mu(G), \forall G\in C$, que

$$\lim_{n\to+\infty}\mu_n(\bigcup_{i\in\mathrm{J}}G_i)=\mu(\bigcup_{i\in\mathrm{J}}G_i).$$

On obtient alors :

$$\mu(\mathbf{G})-\varepsilon\leq\mu(\bigcup_{i\in\mathrm{J}}G_i)=\lim_{n\to+\infty}\mu_n(\bigcup_{i\in\mathrm{J}}G_i)\leq\liminf_n\mu_n(\mathbf{G})$$

d'où

$$\mu(\mathbf{G})\leq\liminf_n\mu_n(\mathbf{G}),$$

ce qui veut dire que (μ_n) converge étroitement vers μ.

Corollaire 1.3.1. *Soit C une famille de $\mathcal{B}$ stable par intersection finie.On suppose que $\forall x\in\mathbb{X},\forall\varepsilon>0$, il existe $G\in C$ tel que $x\in\overset{\circ}{G}\subseteq G\subseteq\mathcal{B}(x,\varepsilon)$, ou $\overset{\circ}{G}$ désigne l'intérieur de G. Si $\mathbb{X}$ est séparable, la condition $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n(G)=\mu(G)$, pour tout $G\in C$, implique la convergence étroite de la suite $(\mu_n,n\geq0)$ vers la mesure μ.*

Démonstration

Il s'agit de montrer que C vérifie les hypothèses du théorème (1.3.2) çi-dessus. Soit $\mathbf{G}$ un ouvert de $\mathbb{X}$. Pour tout $x\in\mathbf{G}$, il existe $\varepsilon_x>0$ tel que $\mathcal{B}(x,\varepsilon_x)\subseteq\mathbf{G}$. Alors, il existe $G_x\in C$ tel que

$$x\in\overset{\circ}{G}_x\subseteq G_x\subseteq\mathcal{B}(x,\varepsilon_x)\subseteq\mathbf{G}.$$

D'où $\mathbf{G}=\bigcup\limits_{x\in\mathbf{G}}\overset{\circ}{G}_x$. Mais pour que $\mathbb{X}$ soit séparable, il faut et il suffit que de tout recouvrement ouvert d'une partie de $\mathbb{X}$, on puisse extraire un sous-recouvrement dénombrable. Donc, il existe une suite $(x_n,n\in\mathbb{N})\subset\mathbf{G}$ telle que :$\mathbf{G} = \bigcup\limits_{n\geq 1} \overset{\circ}{G}_{x_n}$. Il en résulte que $\mathbf{G} = \bigcup\limits_{n\geq 1} \overset{\circ}{G}_{x_n}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.3.2. *Si* $\mathbb{X}$ *est séparable et si pour tout* C *intersection finie de boules ouvertes vérifiant* $\mu(\partial G) = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(G) = \mu(G)$*, alors la suite* $(\mu_n, n \geq 0)$ *converge étroitement vers la mesure* μ*.*

Démonstration

Soit C l'ensemble des parties G qui s'écrivent intersection finie de boules ouvertes, telles que $\mu(\partial G) = 0$. Si G_1 et G_2 sont deux éléments de C, on a

$$\mu(\partial(G_1 \cap G_2)) \leq \mu(\partial G_1) + \mu(\partial G_2) = 0$$

car $\partial(G_1 \cap G_2) \subset \partial G_1 \cup \partial G_2$. C est donc stable par intersection finie. Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{X}$, l'application $\varepsilon \mapsto \mu(\mathcal{B}(x, \varepsilon))$, étant décroissante et bornée, un raisonnement identique à celui de l'implication 5) $\Rightarrow$ 3), du théorème 1.3.1 montre que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta : 0 < \eta < \varepsilon \quad telque \quad \mu(\partial\mathcal{B}(x, \eta)) = 0.$$

Nous sommes en mesure alors d'appliquer le corollaire (1.3.1) çi-dessus.

1.4 Convergence étroite et convergence simple des fonctions de répartition

Dans le cas ou $\mathbb{X} = \mathbb{R}^p$, la convergence étroite des mesures positives et bornées est caractrisée par la convergence de leur fonction de répartition. Si $\mu \in M^b(\mathbb{R}^p)$, on note F_μ sa fonction de répartition, définie par :

$$\mathrm{F}_\mu(X) = \mu(\{y \in \mathbb{R}^p : y < x\}), \forall x \in \mathbb{R}^p,$$

avec $<$ l'ordre partielle habituelle sur $\mathbb{R}^p$. Et posons $e =^t (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^p$.

Définition 1.4.1. *On dit que* F_μ *est continue supérieurement (resp. inférieurement) en* x*, si pour tout* $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *telle que :*

$$x \leq y < x + \delta.e(resp. x - \delta.e < y \leq x) \Rightarrow |\mathrm{F}_\mu(x) - \mathrm{F}_\mu(y)| \leq \varepsilon.$$

Notons pour que F_μ soit continue en x, il faut et il suffit que F_μ soit continue supérieurirement en x.

Théorème 1.4.1. *Pour que la suite $(\mu_n, n \geq 0)$ converge étroitement vers μ, il faut et il suffit que F_n converge vers F_μ en tout point de continuité de F_μ (F_n désigne la fonction de répartition associée à la mesure μ_n).*

Démonstration

Montrer que la suite $\mathrm{F}_n(x)$ converge simplement vers $\mathrm{F}_\mu(x)$ en tout point de continuité de F_μ, revient à montrer que l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^p / y \leq x\}$ est un ensemble de μ-continuité si et seulement si, x est point de continuité de F_μ.
Or, F_μ est continue en x si et seulement si
$\mathrm{F}_\mu(x) = \inf\{\mathrm{F}_\mu(x + \delta.e) : \delta \in \mathbb{Q} \text{ et } \delta > 0\}$ et
$\inf\{\mathrm{F}_\mu(x + \delta.e) : \delta \in \mathbb{Q} \text{ et } \delta > 0\} = \mu(\bigcap_{\delta \in \mathbb{Q} : \delta > 0} \{y \in \mathbb{R}^p : y < x + d.e\})$

$$= \mu(\{y \in \mathbb{R}^p / y \leq x\}).$$

comme

$$\partial\{y \in \mathbb{R}^p / y \leq x\} = \{y \in \mathbb{R}^p / y \leq x\} \backslash \{y \in \mathbb{R}^p / y < x\},$$

alors

$$\mu(\partial\{y \in \mathbb{R}^p / y \leq x\}) = 0,$$

et on conclut alors par la proposition 5 du th (1.3.1) ,que la suite F_n converge simplement vers F_μ en tout point de continuité x de F_μ.
Réciproquement , soient a et b deux points de $\mathbb{R}^P$ tels que $a < b$ (i.e. $a_j \leq b_j, 1 \leq j \leq p$, avec au moins une inégalité stricte).
On note $[a, b[= \{y \in \mathbb{R}^p : a \leq y < b\}$, ce pavé est entiérement déterminé par les 2p hyperplans qui contiennent ses faces. Soit alors C l'ensemble des pavés $[a, b[, a < b$, pour lesquels tous les hyperplans soient de mesure $\mu-$nulles. C est stable par intersection finie et pour tout $G \in C$ on a $\lim_{n \to +\infty} \mu_n(G) = \mu(G)$.
En effet, si S est l'ensemble des 2^p sommets de $[a, b[$, on a :

$$\mu_n([a, b[) = \sum_{x \in \mathrm{S}} \mathrm{F}_n(x) \quad et \quad \mu([a, b[) = \sum_{x \in \mathrm{S}} \mathrm{F}_\mu(x).$$

Ces sommets étant des points de continuité de F_μ(hypothèse), alors $\mu_n([a,b[)$ converge vers $\mu([a,b[)$. Il est ensuite aisé de conclure la convergence étroite de μ_n vers μ en utilisant le corollaire (1.3.2).

1.5 Convergence étroite et convergence des transformées de Fourier

Dans le cas ou $\mathbb{X}$ est un espace vectoriel normé de dimension finie mis en dualité avec un espace $\mathbb{X}^*$ par une forme bilinéaire séparante, la convergence étroite de la suite $(\mu_n, n \geq 0) \subset M^b(\mathbb{X})$ est traduite en terme de convergence de leur transformée de Fourier.

D'abord nous commençons par le résultat suivant :

Proposition 1.5.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace vectoriel de dimension finie mis en dualité avec $\mathbb{X}^*$ par une forme bilinéaire séparante. Soit $(\mu_n, n \geq 0)$ une suite de mesure de $\mathrm{M}^b(\mathbb{X})$ et si μ est une mesure sur $(\mathbb{X},\mathcal{B})$, on note (φ_μ) sa transformée de Fourier.*
Si la suite (μ_n) converge étroitement vers μ, alors la suite des transformées de Fourier (φ_{μ_n}) converge simplement vers φ_μ

Ceci résulte immédiatement de ce que les fonctions $\cos(tx)$ et $\sin(tx)$ sont continues et bornées sur $\mathbb{X}$, et de la caractérisation 2(Théorème1.3.1) de la convergence étroite de la suite $(\mu_n, n \geq 0)$ vers la mesure μ.

Afin d'étblir la réciproque de ce résultat, il est utile de rappeler la notion de mesure tendue et donner quelques propriétés des suites de mesures bornées convergent étroitement, lorsque $\mathbb{X}$ est un espace métrique localement compact, dénombrable à l'infini et complet.

Définition 1.5.1. *une famille $(\mu_i, i \in \mathrm{I})$ de mesures bornées sur $(\mathbb{X},\mathcal{B})$ est dite* ***tendue*** *si,*
$\forall\varepsilon > 0$, il existe un compacte $\mathbf{K}$ tel que : $\sup\limits_{i\in\mathrm{I}}\mu_i(\mathbf{K}^c) \leq \varepsilon$.

Nous rappeluos aussi le résultat important suivant :

Lemme 1.5.1. *Si $\mathbb{X}$ est un espace topologique séparable et complet (en particulier si $\mathbb{X}$ est un espace vectoriel normé de dimension finie), alors toute mesure μ bornée sur $\mathbb{X}$ est tendue. Il en est de même de toute famille de mesures bornées sur$\mathbb{X}$.*

Proposition 1.5.2. *Soit $\mathbb{X}$ un espace séparable complet. Toute suite $(\mu_n, n \geq 0) \subset \mathrm{M}^b(\mathbb{X})$, convergente étroitement vers une mesure μ, est tendue.*

Démonstration

Pour un $\varepsilon > 0$, soit $\mathbf{K}'$ un compact dans $\mathbb{X}$ tel que :$\mu(\mathbf{K}'^c) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Et considérons la suite des ouverts $\mathbf{G}_k$ $(k \geq 1)$ de $\mathbb{X}$, définie par :
$\mathbf{G}_k = \{x/d(x, \mathbf{K}') < \frac{1}{k}\}$. On a

$$\limsup_n \mu_n(\mathbf{G}_k^c) \leq \mu(\mathbf{G}_k^c)$$

Donc, il existe une suite croissante d'entiers n_k telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad \forall n \geq n_k : \quad \mu_n(\mathbf{G}_k^c) \leq \mu(\mathbf{G}_k^c) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour n tel que : $n_k \leq n \leq n_{k+1}$, la restriction de la mesure μ_n à $\mathbf{G}_k$ est tendue, il existe donc un compact $\mathbf{K}'_n \subseteq \overline{\mathbf{G}_k}$ tel que pour tout n tel que $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ on ait $\mu_n(\overline{\mathbf{G}_k} \backslash \mathbf{K}'_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}' \bigcup (\bigcup_{n_k \leq n \leq n_{k+1}} \mathbf{K}'_n)$, $\mathbf{K}_K$ est compact et si $n_k \leq n \leq n_{k+1}$: $\overline{\mathbf{G}_k} \backslash \mathbf{K}_k \subseteq \overline{\mathbf{G}_k} \backslash \mathbf{K}'_n$, de laquelle on tire

$$\mu_n(\mathbf{G}_k \backslash \mathbf{K}_k) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad pour \quad tout \quad n : n_k \leq n \leq n_{k+1}.$$

Comme $\mathbf{K}_k^c = (\overline{\mathbf{G}_k} \backslash \mathbf{K}_k) + (\overline{\mathbf{G}_k})^c$ et que $(\overline{\mathbf{G}_k})^c \subseteq \mathbf{K}'^c$, on obtient pour $n/n_k \leq n \leq n_{k+1}$:

$$\mu_n(\mathbf{K}_k^c) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \mu_n(\overline{\mathbf{G}_k})^c \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \mu(\mathbf{K}'^c).$$

Soit pour tout n : $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ on a $\mu_n(\mathbf{K}_k^c) \leq \varepsilon$. Considérons alors la partie $\mathbf{K} = \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{K}_k$. Pour tout $n \geq n_1$, soit k tel que $n_k \leq n \leq n_{k+1}$, on a alors :

$$\mu_n(\mathbf{K}^c) \leq \mu_n(\mathbf{K}_k^c) \leq \varepsilon.$$

Reste à démontrer que $\mathbf{K}$ est compact ?
Soit $(x_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. Si cette suite est contenue dans $\mathbf{K}_k$, alors cette suite contient une sous-suite convergente. Sinon, il existe une sous-suite $(x_{n_i}, i \geq 0)$ et une suite d'entiers r_i telles que $r_i \geq i$ et $x_{n_i} \in \mathbf{K}_{r_i}, (\mathbf{K}_{r_i} \subseteq \overline{\mathbf{G}_{r_i}})$. Par suite,

$$d(x_{n_i}, \mathbf{K}') \leq \frac{1}{r_i} \leq \frac{1}{k}.$$

Or, $\mathbf{K}'$ étant compact, la suite $(x_{n_i}, i \geq 0)$ est donc convergente et par conséquent $\mathbf{K}$ est compact. La famille $(\mu_n, n \geq n_1)$ est donc tendue, la famille finie $(\mu_n, n \leq n_1)$ étant tendue elle aussi (lemme 1.5.1), il s'ensuit alors que la suite $(\mu_n, n \geq 0)$ est tendue.

Théorème 1.5.1. ***(Théoréme de Continuité (LEVY))*** *Soit $\mathbb{X}$ un espace vectoriel de dimension finie mis en dualité avec $\mathbb{X}^*$ par une forme bilinéaire séparante. Soit $(\mu_n, n \geq 0)$ une suite de mesure de $\mathrm{M}^b(\mathbb{X})$ et si μ est une mesure sur $(\mathbb{X},\mathcal{B})$, on note φ_μ sa transformée de Fourier. Si la suite (φ_{μ_n}) des transformées de Fourier des mesures μ_n, converge simplement vers une fonction φ continue en 0 . alors la fonction φ est la transformèe de Fourier d'une mesure bornée μ sur $\mathbb{X}$ et la suite (μ_n) converge ètroitement vers μ.*
En fait, la convergence de φ_{μ_n} vers φ_μ est uniforme sur tout compact da $\mathbb{X}$.

Démonstration

Soit $(\mu_n, n \geq 0)$ une suite de mesures bornèes telles que la suite des transformées de Fourier $(\varphi_{\mu_n}, n \geq 0)$ correspondante, converge simplement vers une fonction φ continue en 0.
Comme $\sup_n \|\mu_n\| = \sup_n \|\varphi_{\mu_n}\| = b < +\infty$, et compte tenu que $M^b(\mathbb{X})$ est

faiblement compact, on peut extraire une sous-suite $(\mu_{n_k}, k \geq 0)$ de (μ_n) convergant faiblement vers une mesure positive μ bornée par b. Il s'agit alors de montrer que (μ_{n_k}) converge étroitement vers μ ? φ sera alors la transformée de Fourier de μ l'injectivité de la transformée de Fourier assurera ensuite que la limite μ sera la même pour toutes les sous-suites extraites de (μ_n).
Il suffit donc de vérifier que toute sous-suite $(\mu'_k)_{k\geq 0}$ de $(\mu_n)_{n\geq 0}$ convergent faiblement vers $\mu \in M^b(\mathbb{X})$, converge étroitement vers μ. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p})$ et $\nu \in M^b(\mathbb{R}^p)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\mathbf{K}_\varepsilon = [0, \varepsilon]^p$. Le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$\int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \varphi_\nu(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^p} (\int_{\mathbf{K}_\varepsilon} e^{i<t,x>} d\lambda(t)) d_\nu(x).$$

Or,

$$\int_{\mathbf{K}_\varepsilon} e^{i<t,x>} d\lambda(t) = \prod_{1\leq j\leq p} \int_0^\varepsilon e^{it_j x_j} dt_j = \prod_{1\leq j\leq p} \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j}.$$

l'application $x \mapsto \prod_{1\leq j\leq p} \frac{(\exp(it_j.x_j) - 1)}{ix_j}$ étant un élément de $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^p)$, il résulte alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \varphi_{\mu'_k}(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \varphi_\mu(t) d\lambda(t) \tag{1.6}$$

et ceci, $\forall \varepsilon > 0$, puisque (μ'_k) converge faiblement vers μ.
De plus,

$$|\varphi_{\mu'_k}(t)| \leq \sup_n |\varphi_{\mu_n}(0)| \leq b < +\infty,$$

fait que le théorème de la convergence dominée de Lebesgue appliqué à (1.6) donne

$$\int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \lim_{n\to+\infty} \varphi_{\mu'_k}(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \varphi(t) d\lambda(t), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

soit

$$e^{-p}. \int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \varphi(t) d\lambda(t) = e^{-p}. \int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \varphi_\mu(t) d\lambda(t), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

φ et φ_μ étant continues en 0, il vient

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi_{\mu'_k}(0) = \varphi(0) = \varphi_\mu(0)$$

car

$$\varphi_\mu(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-p}. \int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \varphi_\mu(t) d\lambda(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-p}. \int_{\mathbf{K}_\varepsilon} \varphi(t) d\lambda(t) = \varphi(0),$$

d'où

$$\mu(\mathbb{R}^p) = \lim_{k \to +\infty} \mu'_k(\mathbb{R}^p) = \lim_{k \to +\infty} \varphi_{\mu'_k}(0).$$

La suite (μ'_k) converge donc étroitement vers μ dont la transformée de Fourier est justement φ (unicité de la transformée de Fourier). Enfin, le résultat suivant permet de conclure que (μ_n) converge étroitement vers μ.

"Pour que la suite (μ_n) converge étroitement vers μ, il faut et il suffit que de toute sous-suite de (μ_n), on puisse y extraire une sous-suite convergeant étroitement vers μ".

Soit $\mu \in M^b(\mathbb{R}^p)$, on a pour tout compact $\mathbf{K}$ de $\mathbb{R}^p$:

$$|\varphi_\mu(t) - \varphi_\mu(t')| = |\int_{\mathbb{R}^p} [e^{i<t,x>} - e^{i<t',x>}] d\mu(x)|$$

$$\leq 2.\mu(\mathbf{K}^c) + \int_{\mathbf{K}} |e^{i<t,x>} - e^{i<t',x>}| d\mu(x)$$

$$\leq 2.\mu(\mathbf{K}^c) + \int_{\mathbf{K}} | < t - t', x > | d\mu(x)$$

d'où

$$|\varphi_\mu(t) - \varphi_\mu(t')| \leq \sup_{\mathbf{K}}(\|x\|).\|t - t'\|.\mu(\mathbb{R}^p) + 2.\mu(\mathbf{K}^c).$$

Par suite, si la suite $(\mu_n, n \geq 0)$ converge étroitement vers μ, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $\mathbf{K}_\varepsilon$ tel que : $\sup_n \mu_n(\mathbf{K}_\varepsilon^c) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Il résulte alors que pour tout t et t' tels que $\|t-t'\| \leq 3b.\sup_{\mathbf{K}_\varepsilon}(\|x\|)$, on ait

$$\sup_n |\varphi_{m_n}(t) - \varphi_{m_n}(t')| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la suite φ_{m_n} est équi-uniformément continue sur $\mathbb{R}^p$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0$ tel que si $\|t-t'\| \leq \eta_\varepsilon$ alors $\sup_n |\varphi_{m_n}(t) - \varphi_{m_n}(t')| \leq \varepsilon$.)
Et comme une suite équi-uniformément continue convergent simplement, converge uniformément sur tout compact, la proposition en résulte.

Enfin, nous terminons cette partie en étudiant le comportement de la suite de mesures images par une application mesurable d'une suite de mesures bornées convergent étroitement.

1.6 Convergence étroite de mesures images par une application mesurable

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces métriques localement compacts dénombrables à l'infini, munis de leurs tribus boréliennes $\mathcal{B}_\mathbb{X}$ et $\mathcal{B}_\mathbb{Y}$ respectivement. soit h une application mesurable $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ et notons $\mathbf{D}_h$ l'ensemble des points de discontinuité de h.
Si $\mu \in M^b(\mathbb{X})$, on note $h(\mu) = \mu \circ h^{-1}$ la mesure image de μ par h,
$h(\mu) \in M^b(\mathbb{Y})$.

Lemme 1.6.1. $\mathbf{D}_h$ *appartient à* $\mathcal{B}_\mathbb{X}$ *pour toute application* h *de* $\mathbb{X}$ *dans* $\mathbb{Y}$ *(*h *non nécessairement mesurable).*

Démonstration
Pour tout $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$, soit $A_{\epsilon,\delta}$ la partie composée des éléments $x \in \mathbb{X}$ tels que $\exists (x,y) \in \mathbb{X}^2 : d(x,y) < \delta$ et $d(x,z) < \delta$ et $d(h(y),h(z)) > \epsilon$. Alors la partie $\mathbf{D}_h$ s'écrit sous la forme $\mathbf{D}_h = \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcap_{\delta \in \mathbb{Q}^+} A_{\epsilon,\delta}$.
Or, $\quad A_{\epsilon,\delta} = \bigcup_{(x,y)\in\mathbb{X}^2; d(x,y)>\epsilon} B(y,\delta)B(z,\delta) \quad$ où $B(y,\delta)$

est la boule ouverte de centre y et de rayon δ. Par suite, $A_{\epsilon,\delta}$ est un ouvert et donc $\mathbf{D}_h \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Proposition 1.6.1. *Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures bornées contenues dans $\mathrm{M}^b(\mathbb{X})$, convergent étroitement vers une mesure $\mu \in \mathrm{M}^b(\mathbb{X})$, et h une application mesurable de $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ dans $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}_{\mathbb{Y}})$, et $\mathbf{D}_h$ l'ensemble de ses points de discontinuité. Si $\mu(\mathbf{D}_h) = 0$, alors la suite $(h(\mu_n), n \geq 0)$ de mesures bornées sur $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}_{\mathbb{Y}})$ converge étroitement vers $h(\mu) \in \mathrm{M}^b(\mathbb{Y})$.*

Démonstration

Soit $\mathbf{F}$ une partie fermée de $\mathbb{Y}$. On a

$$\limsup_n \mu_n(h^{-1}(\mathbf{F})) \leq \limsup_n \mu_n(\overline{h^{-1}(\mathbf{F})}) \leq \mu(\overline{h^{-1}(\mathbf{F})}).$$

Or, $\mu(h^{-1}(\mathbf{F})) = \mu(\overline{h^{-1}(\mathbf{F})})$, en effet : soit $x \in \overline{h^{-1}(\mathbf{F})}$, on a soit $x \in \mathbf{D}_h$ soit x est un point de continuité de h. Dans ce dernier cas , il existe une suite $(x_n, n \geq 0)$ d'éléments de $\mathbb{X}$ telle que la suite $(h(x_n), n \geq 0)$ est contenue dans $\mathbf{F}$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Mais alors,

$$\lim_{n\to+\infty} h(x_n) = h(x)$$

et comme $\mathbf{F}$ est fermé, alors $h(x) \in \mathbf{F}$, et par conséquent, $x \in h^{-1}(\mathbf{F})$. Il en résulte alors que :

$$\overline{h^{-1}(\mathbf{F})} \subseteq \mathbf{D}_h \cup h^{-1}(\mathbf{F})$$

et par conséquent,

$$\limsup_n \mu_n(h^{-1}(\mathbf{F})) \leq \mu(h^{-1}(\mathbf{F}))$$

et donc la suite $(h(\mu_n))$ converge étroitement vers $h(\mu)$.

Théorème 1.6.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace métrique localement compact dénombrable à l'infini, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$. Soit h une application de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(\mu_n, n \geq 0)$ une suite de mesures bornées dans $\mathrm{M}^b(\mathbb{X})$ et*

$\mu \in \mathrm{M}^b(\mathbb{X})$. Alors :

1. Si la suite (μ_n) converge étroitement vers μ, la suite $(h(\mu_n))$ converge étroitement vers $h(\mu)$ pour tout application mesurable h telle que $\mu(\mathbf{D}_h) = 0$.

2. Si la suite $(h(\mu_n), n \geq 0)$ converge étroitement vers $h(\mu)$ pour toute application h continue et bornée, alors la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge étroitement vers μ.

3. Si la suite $(\mu_n, n \geq 0)$ converge étroitement vers μ et si h est mesurable bornée telle que $\mu(\mathbf{D}_h) = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X h d\mu_n = \int_X h d\mu.$$

Démonstration

1. L'énoncé 1 résulte de proposition (1.5.2).

2. Soit $f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R})$. Il résulte de l'hpothèse et du théorème d'intégration par rapport à une mesure image que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f \circ h d\mu_n = \int_X f \circ h d\mu$$

pour toute fonction $h \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R})$. Si h est bornée par α, on prend $f \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R})$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -\alpha & \text{si} \quad t \leq -\alpha \\ t & \text{si} \quad -\alpha \leq t \leq \alpha \\ \alpha & \text{si} \quad t \geq \alpha \end{cases}$$

Il résulte alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X h d\mu_n = \int_X h d\mu.$$

ce qui traduit que $(\mu_n, n \geq 0)$ converge étroitement vers μ.

3. Elle résulte de la proposition (1.1.1) avec f définie comme çi-dessus.

Chapitre 2

Les modes de Convergence

2.1 Convergence en loi

Soit $\mathbb{X}$ un espace métrique localement compact dénombrable à l'infini muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$. Les v.a considérées içi sont supposées à valeurs dans $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$.

Définition 2.1.1. *On dit que la suite de variables aléatoires* $(\mathrm{X}_n)_{n\geq 0}$ *converge en loi si la suite de distributions* $(\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}, n \geq 0)$ *des v.a* X_n *convrege étroitement vers une loi de probabilité* P *sur* $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$.

Si la suite $(\mathrm{X}_n, n \geq 0)$ de v.a sur $\mathbb{X}$, converge en loi, et si X est une v.a de loi la loi limite (au sens de la convergence étroite) de la suite de distributions $(\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}, n \geq 0)$, on dit que la suite (X_n) converge en loi vers la v.a X. On note $(\mathrm{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{X}$.

Important !
Il va de soit que tous les critères de convergence étroite de mesures bornées se traduisent en terme de convergence en loi de suite de v.a. En particulier, on a le résultat important suivant :

Théorème 2.1.1. *Soient* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *deux espaces métriques, localement compact et dénombrables à l'infini, muni de leurs tribus boréliennes respectives* $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ *et* $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}$, *et soit* h *une application mesurable de* $\mathbb{X}$ *dans* $\mathbb{Y}$. *Soit* $(\mathrm{X}_n, n \geq 0)$ *une suite de v.a à valeurs dans* $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ *et* X *une v.a à valeurs dans* $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$.

Si la suite (X_n) *converge en loi vers* X *et si* $\mathrm{P_X}(\mathbf{D}_h) = 0$, *alors la suite* $(h(\mathrm{X}_n), n \geq 0)$ *converge en loi vers* $h(\mathrm{X})$, *(*$\mathbf{D}_h$ *désigne l'ensemble des points de discontinuité de h).*

Exemples
Soit $(\mathrm{X}_n, n \geq 0)$ et $(\mathrm{Y}_n, n \geq 0)$ deux suites de v.a à valeurs dans $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p})$. On suppose que la suite $((\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n), n \geq 0)$ converge en loi vers la v a (X, Y). Alors :

1. $(\mathrm{X}_n + \mathrm{Y}_n, n \geq 0)$ convergence en loi vers la v.a $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.
2. Si $p = 1$,$(\mathrm{X}_n.\mathrm{Y}_n, n \geq 0)$ converge en loi vers la v.a X.Y.
3. Si $p = 1$ et si $\mathrm{P}_{Y,X}(\mathbb{R} \times 0) = 0$, alors $(\frac{\mathrm{X}_n}{\mathrm{Y}_n}, n \geq 0)$ converge en loi vers la v.a $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$.

Nous terminons ce paragraphe en donnant une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi de v.a discrètes.

Proposition 2.1.1. *Soit* $(\mathrm{X}_n, n \geq 0)$ *une suite de v.a à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *Pour que la suite* $(\mathrm{X}_n, n \geq 0)$ *converge en loi vers une v.a* X *à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *il faut et il suffit que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = r) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = r), \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Démonstration
Si (X_n) converge en loi vers X, on a pour toute fonction f continue et à support compact dans $]r - \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2}[$ telle que $f(r) \neq 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f d\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n} = \int_X f d\mathrm{P_X}.$$

Mais comme

$$\int_X f d\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n} = f(r).\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = r) \quad et \quad \int_X f d\mathrm{P_X} = f(r).\mathrm{P}(\mathrm{X} = r)$$

On déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = r) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = r), \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = r) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = r)$, pour tout entier positif r.

On a alors en tout point de continuité x de F_X $([x] < x < [x]+1)$:

$$\mathrm{F}_{X_n}(x) = \sum_{r<x} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = r) \to \sum_{r<x} \mathrm{P}(\mathrm{X} = r) = \mathrm{F}_X(x)$$

soit, F_{X_n} converge vers F_X en tout point de continuité de F_X.

Remarque

Si $\mathrm{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{X} \Rightarrow G_{X_n}$ converge uniformément vers G_X sur le disque unité fermé, G_X désignant la fonction génératrice de la v.a X.

Bibliographie

[1] N.Bouleau. Prossus stochastiques et applications. *Hermann*, Paris, 1988.

[2] C.Dellacherie, P.A.Meyer. Probabilités et potentiel Vol 2. *Hermann*, Paris, 1980.

[3] D.Revuz. Mesure et intégration. *Hermann*, 1994.

[4] D.Revuz. Probabilités. *Hermann*, 1997.