République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Moulay Tahar de Saida

COURS DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL

KAAROUR Abdelkrim Université Dr. Moulay Tahar - Saida Algérie

SOMMAIRE

CHAPITRE-I : ANALYSE DIMENSIONNELLE 6

I-Grandeurs fondamentales et leurs unités 6

I -1-Introduction 6

I -2- Définitions 6

II-Équation aux dimensions 7

II -1 -Équations aux dimensions 7

Définition 7

II -2 -Exemples et homogénéité des formules 8

II -3- Densité et grandeurs sans dimension 9

III -Précision et exactitude 10

III-1 -Rappels mathématiques 10

III-1-1- Développements limité 10

III-1-2 -Dérivée partielles 11

III-1-2-1 -Dérivée partielle d'ordre 1 11

III-1-2-2-Dérivée partielle d'ordre 2 12

III-1-2-3-Théorème 13

III-1-3 -Differentielles 13

III-1-3 -1-Définition 13

III-1-3 -2-Règles de calcul 13

III-1-3 -3-Exemple 13

III-1-3 -4-Cas d'une fonction à plusieurs variables 14

III-1-3 -5-Différentielle logarithme 14

III-2- Erreur absolue et incertitude absolue 15

III-2-1 -Définition 15

III-2-2 - Théorème des incertitudes absolues 15

III-3 -Erreur relative et incertitude relative 16

III-3-1 -Definition 16

III-3-2 -Théorème sur les incertitudes relatives 16

III-4 -Exemples de calculs d'incertitudes 16

III-4-1- Mesures indépendantes 16

III-4-2 -Mesures dépendantes (mesures liées et erreurs liées) 18

a/Mesures indépendantes (mauvaise méthode) 18

b/Mesures dépendantes (bonne méthode) 19

III-5 -Calcul des petites variations 19

CHAPITRE II VECTEURS 21

I-Scalaires et vecteurs 21

I-1-Introduction 21

I-2-Définition d'un vecteur lié 21

I-3-Définition d'un vecteur libre 22

II-Addition de deux vecteurs et angles de deux vecteurs 22

II-1- Addition de deux vecteurs 22

II-1 -1 -Cas de deux vecteurs liés 23

II-1 -2- Cas des vecteurs libres ... 23
II-1 -2 -1-Module d'un vecteur $\boldsymbol{V}$ ... 23
II-1 -2 -2-Direction du $\boldsymbol{V}$ ... 24
II-1 -2 -3-Cas particulier ... 24
II-2-Angle entre deux vecteurs ... 25

III- Composantes d'un vecteur ... **25**

IV- Systèmes de coordonnés ... **29**
IV-1- Coordonnées cartésiennes ... 29
IV-2 -Coordonnés polaires coordonnées cylindrique ... 30
IV-2 -1- Coordonnées polaires ... 30
IV-2 -2-Coordonnées cylindriques ... 31
IV-2 -3 -Coordonnés spheriques ... 31

V- Produit scalaire ... **32**
V-1 -Définition ... 32
V-2 -Propriétés du produit $\boldsymbol{v1} \cdot \boldsymbol{v2}$ ... 33
V-3 -Expression analytique du produit scalaire ... 33

VI- Produit vectoriel ... **34**
VI-1-Définition ... 34
VI -2 -Signification géométrique du module du produit vectoriel ... 35
VI -3 -Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé ... 35

VII-Moment d'un vecteur ,moment d'un couple de vecteurs ... **36**
VII -1 -Moment d'un vecteur par rapport à un point ... 36
VII -1 -1-Definition ... 36
VII -1 -2-Cas d'une force $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}$ ... 36
VII -2-Moment d'un couple de vecteurs ... 36
VII -2-1-Définition ... 36
VII -2-2-Cas d'un couple de force ... 37

VIII-Produit mixte de trois vecteurs ... **38**
VIII -1-Définition ... 38
VIII -2-Représentation géométrique ... 38
VIII -3-Cas particulier de trois vecteurs $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ coplanaires ... 39
VIII --4 -Moment d'un vecteur par rapport à un axe (comoment) ... 39
Définition ... 39

CHAPITRE III : CINEMATIQUE ... ***40***

I- Mouvements Rectilignes ... **40**
I-1 - Définitions : Vitesse – Accélération ... 40
I-1 -1-Vitesse ... 40
I-1-2- Accélération γ ... 41
I-2- Cas particuliers ... 42
I-2-1-Mouvement rectiligne uniforme ... 42
a/-La vitesse ... 42
b/-L'accélération ... 42
c/-L'équation horaire ... 42

I-2-1-Mouvement rectiligne uniformément varié 42
a/-L'accélération 42
b/-La vitesse instantanée 42
c/-L'équation horaire 42
d/-Relation entre vitesse, déplacement et accélération 42
I-2-3- Mouvement rectiligne sinusoïdal 43
-a/Equation horaire 43
b/-La vitesse 43
c/- L'accélération 43
II- Mouvements circulaires ________ 44
II-1- Définitions 44
II-1-1-Vitesse 44
II-1-2-Accélération 45
II-1-3-Composantes de l'accélération 47
II-2 -Vitesse et accélération angulaire 48
II-2-1- Définition de la vitesse angulaire 48
II-2-2- Accélération angulaire 49
II-3-Cas particuliers 50
III- Mouvement curviligne ________ 50
III-1- Vecteur vitesse 50
III-2- Vecteur accélération 51
IV- Mouvement relatif ________ 51
CHAPITRE IV : DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL ________ 53
I-Premiere loi de Newton ________ 53
II- Quantité de mouvement conservation de la quantité de de mouvement ________ 53
II-1 Définition 53
II-2 -Conservation de la quantité de mouvement 53
III-Les trois lois de Newton-notion de force ________ 56
III-1 Introduction 56
III-2 Définition de la forcce 56
IV- Forces de frottement et forces de contactes ________ 58
IV- Forces de frottements dans les fluides ________ 59
V- Moment cinétique ________ 60
V-1- Définition 60
V-2- Etude de quelque cas 60
V-2 -1- Mouvement circulaire 60
V-2 -2 -Mouvement curviligne plan 61
V-2 -3 -Théorème du moment cinétique cas d'une particule 62
VI- Forces centrales ________ 63
VI-1-Définition : 64
VI-2-Vitesse aréolaire 65

CHAPITRE V: TRAVAIL ET ENERGIE ____ *66*

I- Travail et puissance ____ **66**

I-1-Travail d'une force 66

I-1-1-Définition : 66

I-1-2-Expression analytique 66

I-1-3-Étude de l'élément du travail $dW = FM.dl$ 67

I-2 -Puissance 67

I-2 -1-Définition de la puissance moyenne 67

I-2 -2-Définition de la puissance instantanée 68

II- Travail d'un ressort, travail d'un couple ____ **68**

II-1-Travail dans le cas d'un un ressort 68

II-2 -Travail d'un couple 69

II-2 -1-Travail d'un couple constant 69

II-2 -2 -puissance exercé par un couple 70

II-3 -Travail d'une force constante 70

II-3-1-Definition 70

II-3-2- Expression analytique 71

II-3-3-Application 71

III-4-Energie cinétique et énergie potentille 72

III-4-1 -conservation de l' énergie mécanique 72

III-4-1 -1-Définition de l'énergie cinétique 72

III-4-1 -2-Théorème de l'énergie cinétique 72

a/Enoncé 72

b/Démonstration 73

III-4-1 -3--Énergie potentielle 74

a/Définition 74

b/Remarque 74

III-4-1 -4-Conservation de l'énergie mécanique totale 74

a/Définition de l'énergie mécanique 75

b/Conservation de l'énergie mécanique 75

Chapitre VII : DYNAMIQUE DU SOLIDE ____ *76*

I- Théorème du centre de gravité pour un système matériel ____ **76**

I -1 Centre de gravité (Centre de masse) 76

I -1 -1-Définition 76

I -1 -2-Exemples 77

a/Première méthode en coordonnées cartésiennes 77

b/Deuxième méthode en coordonnées polaires 79

I -2- Enoncé du théorème du centre de gravité 80

II- Théorème du moment cinétique ____ **81**

II-1-Définition du moment cinétique d'un système matériel 81

II-1-Enoncé du Théorème du moment cinétique 81

BIBLIOGRAPHIE ____ *83*

CHAPITRE-I : ANALYSE DIMENSIONNELLE

I-Grandeurs fondamentales et leurs unités

I -1-Introduction

Dans le système international S.I ou Giorgi les grandeurs fondamentales sont : la masse, la longueur, le temps, et l'intensité électrique.

Le choix de ces quatre grandeurs est arbitraire.

Les unités fondamentales dans le système M.K.S.A sont le mètre, le kilogramme, la seconde et l'ampère.

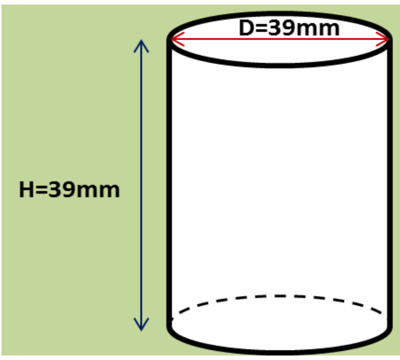
I -2- Définitions

Le mètre (m) : unité de longueur

Le mètre est égal à 1650763,73 fois la longueur d'onde de la radiation électromagnétique émise par l'isotope ^{86}Kr (krypton) dans la transition entre les états $2p_{10}$ et $5d_5$.

Le kilogramme (kg) : unité de masse

Le kilogramme c'est la masse du prototype international (bloc de platine conservé au Pavillon du Sèvres (près de Paris).



En physique atomique, on rattache le kilogramme à l'atome de carbone ^{12}c , le kilogramme est la masse de $5{,}0188.10^{25}$ atomes de carbone ^{12}c.

En pratique

Le kilogramme est la masse de 1 dm^3 d'eau pur à 4°c.

La seconde :(s) unité de temps

La seconde est la fraction 1/31556925 ,975 de la durée de l'année solaire 1900.

L'ampère :(A) unité de l'intensité électrique

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui maintenu dans deux conducteurs parallèles et rectilignes infini, de section circulaire négligeables et placé é à une distancer de 1 mètre l'un de l'autre produisant entre ces deux conducteurs une force égale à 2 .10^{-7} N par mètre de longueur.

Les définitions évoluent avec le temps et en fonction des phénomènes physiques qui peuvent se mesurer plus précisément.

II-Équation aux dimensions

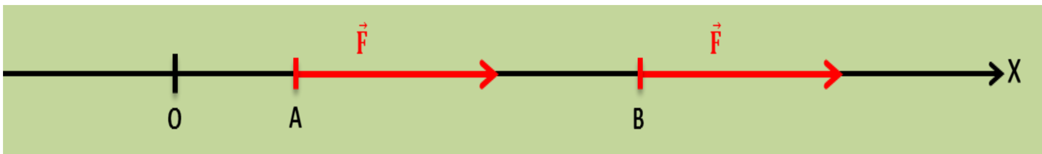
II -1 -Équations aux dimensions

Définition

Une équation aux dimensions est une écriture conventionnelle qui résume la définition des grandeurs qui dérivent des unités fondamentales.

Soit le travail d'une force constante $\vec{F}$ définit par l'expression suivante :

$$W = F.l \qquad \text{ou} \qquad AB=l$$



Trouver w , α , γ , δ tel que le travail $[W] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} A^{\delta}$

On dit alors que :

- le travail est de dimension α par rapport à la masse M
- le travail est de dimension β par rapport à la longueur L
- le travail est de dimension γ par rapport à au temps T
- le travail est de dimension δ par rapport à l'intensité I

On dit que le travail est de dimension $[W] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} A^{\delta}$

$$W = F.l$$

A partir de la deuxième loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, l'équation aux dimensions de la force est :

$$[F] = M L^1 T^{-2}$$

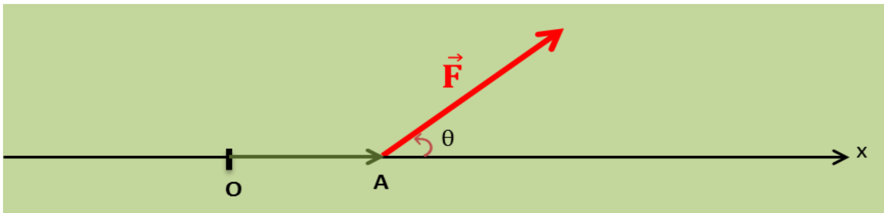
D'où l'équation aux dimensions du travail est : $[W] = M L^2 T^{-2}$

<u>Nota benné</u>

Dans les formules, on ne tient pas compte des coefficients numériques qui sont, sans dimensions.

II -2 -Exemples et homogénéité des formules

Équation aux dimensions du moment d'une force par rapport à un point.



Soit le module du moment d'une force $\vec{\mathbf{F}}$ par rapport à un point O

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

$$|\vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F})| = OA.\,F.\,|\sin(\theta)|$$

$$[\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})] = L.\,M.\,L.\,T^{-2} = M.\,L^2.\,T^{-2}$$

On remarque que l'équation aux dimensions du moment d'une force par rapport à un point est la même que celle du travail d'une force .

Homogénéité d'une formule

Une formule est homogène si le membre de gauche à la même dimension que le membre droit.

Une formule non homogène est nécessairement fausse, tandis qu'une formule homogène n'est pas obligatoirement exacte, elle peut être fausse ou diffère d'un coefficient de la formule exacte.

II -3- Densité et grandeurs sans dimension

Définition de la densité

La densité d'une substance S par rapport à une substance S' est le rapport m ,m' des masses des deux substances respectives et de volumes égaux

$$d = \frac{m}{m'}$$

Pour une substance solide ou liquide, la densité de la substance considérée se mesure par rapport à l'eau, pour une substance gazeuse se mesure par rapport à l'air.

La densité est un nombre sans dimension, elle diffère de la masse volumique, du volume massique ainsi que du poids volumique.

Masse volumique : $\rho = \frac{m}{V}$ son équation aux dimensions est $[\rho] = ML^{-3}$

Volume massique : $\mu = \frac{V}{m}$ son équation aux dimensions est $[\mu] = M^{-1}L^{3}$

poids volumique : $\mu = \frac{mg}{V}$ son équation au dimension est $[\mu] = M\,L^{1}\,T^{-2}L^{-3}$

$$[\mu] = M\ L^{-2}\,T^{-2}$$

Remarque

Les angles dans le plans sont des grandeurs sans dimension, mais ils ont une unité par exemple(le radian).

De même les angles dans l'espace sont sans dimension, ils ont l'unité (stéradian).

III -Précision et exactitude

III-1 -Rappels mathématiques

III-1-1- Développements limité

La généralisation du théorème des accroissements fini (théorème de **Rolle**) donne lieu à la formule de **Taylor** avec le reste de **Lagrange**.

Soit f une fonction définie par

$f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$

dérivable jusqu'à l'ordre n, la dérivée (n+1) ième est défini sur $]a, b[$ alors il existe c : $\exists c \in \,]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} f^{(3)}(a) + \cdots\cdots\cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

La formule la plus utilisé en physique est la formule de **Taylor-Young** .

Soit une fonction f définie par :

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ou I un intervalle fermé

dérivable jusqu'à l'ordre n, la dérivée (n+1) nième est défini au point a , si $(a + h) \epsilon I$,alors

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a) + \cdots\cdots\cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left[f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(h)\right] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) \rightarrow 0$$

Si on s'arrête à l'ordre n+1, on obtient un développement limité à l'ordre n+1

Exemples

Développement limité de la fonction cosinus : f(x)=cos(x) ,au voisinage du point 0 à l'ordre 5.

On prend a=0 et h=x

$$f\,(0+x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + 0(x^{2n})$$

Pour la fonction sinus, on obtient

$$f\,(0+x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + 0(x^5)$$

Pour les calculs usuels en physique on se contente à des développements limité à l'ordre 1ou 2.

Exemples

Cherchant le développement limité à l'ordre 1premier pour les fonctions suivantes e^x ,$\ln(1+x)$,$(1+x)^n$,$\tan(x)$

$e^x = 1 + x + 0(x)$

$\ln(1+x) = x + 0(x)$

$(1+x)^n = 1 + nx + 0(x)$

$\tan(x))x + 0(x)$

III-1-2 -Dérivée partielles

III-1-2-1 -Dérivée partielle d'ordre 1

Si on a une fonction à plusieurs variables, la dérivée partielle par rapport à une variable s'obtient en dérivant la fonction par rapport à cette variable toute en considérant les autres variables comme des constantes.

Soit, par exemple une fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ tel que } f(x,y,z) = 5x^2y^3 + xz^4$$

la valeur de la dérivée par rapport à x au point (x_0,y_0,z_0) d'ordre 1 est la dérivée partielle ,elle sera notée par :

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0,z_0)} = 10x_0y_0^3 + z_0^4$$

De même la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y est :

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)} = 15x_0^2y_0^2$$

De même la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y est

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)} = 4x_0z_0^3$$

Elle s'obtient en dérivant la fonction f par rapport à x et en considérant les autres variables (dans l'exemple y et z) comme des constantes.

III-1-2-2-Dérivée partielle d'ordre 2

La dérivée partielle par rapport à une seule variable se définie par :

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)}{\partial x} = 10y^3$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = 30x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 12xz^2$$

La dérivée partielle par rapport à deux variables se définie par :

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)}{\partial x} = 30xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)}{\partial y} = 30xy^2$$

III-1-2-3-Théorème

Quand les dérivées partielles d'ordre 1 que l'on écrit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues et dérivables, ainsi que les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues et dérivables alors.

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\,\partial x}$$

III-1-3 -Differentielles

III-1-3 -1-Définition

Soit une fonction f différentiable en un point si et seulement si elle est dérivable en ce point.

La différentielle de la fonction f au point x_0 notée dF_{x0} est l'application linéaire qui à h fait corresponde $f'(x_0).h$

$$\mathbf{h} \xrightarrow{\mathbf{dF_{x_0}}} \mathbf{dF_{x_0}(h) = f'(x_0).h}$$

III-1-3 -2-Règles de calcul

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(u.v) = udv + vdu$$

$$\mathbf{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2}$$

$$d(\lambda u) = \lambda du$$

III-1-3 -3-Exemple

$$d(3x^2) = 6x.dx$$

Notation

On note la dérivée par $\mathbf{\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'}$

III-1-3 -4-Cas d'une fonction à plusieurs variables $\mathbf{f}:\ \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$

On parle alors de différentielle totale, dans le cas n=3 f une fonction à trois variable $\mathbf{f(x, y, z)}$.

$\mathbf{f}:\ \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \to \mathbb{R}$

La différentielle totale est :

$$df_{(x_0y_0z_0)} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{(x_0y_0z_0)} \mathbf{dx} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\right)_{(x_0y_0z_0)} \mathbf{dy} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{(x_0y_0z_0)} \mathbf{dz}$$

Dans ce cas l'application différentielle est trilinéaire ou multilinéaire

Exemple soit la fonction $f(x, y, z) = 5x^3y^2 + 2x^2z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 15x^2y^2 + 4xz^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 10x^3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x^2z$$
$$df = (15x^2y^2 + 4xz^2)dx + (10x^3y)dy + (4x^2z)dz$$

III-1-3 -5-Différentielle logarithme

Elle utile pour les calculs d'erreurs

Soit la fonction f à plusieurs variables tels que : $f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$

Le logarithme de la fonction f est :

$$\ln(f) = \propto \ln(x) + \beta \ln(y) + \gamma \ln(z)$$

D'où la différentielle logarithmique est :

$$d\big(\ln(f)\big) = \frac{df}{f} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} + \gamma\frac{dz}{z}$$

III-2- Erreur absolue et incertitude absolue

III-2-1 -Définition

Supposons qu'on connait la mesure exacte d'une grandeur physique $\mathbf{X_0}$, un autre expérimentateur mesure cette grandeur et trouve la valeur $\mathbf{X}$ .l'erreur absolue sur la mesure de cette grandeur est $\mathbf{X - X_0}$.

Deux cas se présentent :

-si $\mathbf{X - X_0 > 0}$, l'erreur absolue par excès.
- si $\mathbf{X - X_0 < 0}$, l'erreur absolue par défaut.

Malheureusement en physique on ne peut pas connaitre la valeur exacte d'une grandeur physique, on sait que la valeur exacte est comprise entre deux nombres.

$\mathbf{X - \Delta X < X_0 < X + \Delta X}$ avec $\mathbf{\Delta X > 0}$

$\mathbf{\Delta X}$ est l'incertitude absolue

On peut écrire : $\mathbf{X_0 = X \pm \Delta X}$

Exemple

soit la masse $m_0 = (3{,}125 \pm 0{,}003)$ kg

III-2-2 - Théorème des incertitudes absolues

soit $X=f(x,y,z)$

Pour calculer l'incertitude absolue ΔX

$\Delta X = ?$

$$\Delta X = \left|\frac{\partial f}{\partial x}dx\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}dy\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}dz\right|$$

$$\Delta X = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

Avec

$\Delta x = |dx|$

$\Delta y = |dy|$

$\Delta z = |dz|$

Cette expression découle de la formule suivante :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

On note

$$f(x, y, z) = f(x_1, x_2, x_3)$$

$$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

III-3 -Erreur relative et incertitude relative

III-3-1 -Definition

L'erreur relative sur une grandeur physique est le rapport entre l'erreur absolue X- **X₀** sur la valeur exacte **X₀**.

$$\frac{dX}{X_0} = \frac{X - X_0}{X_0} \quad \text{avec} \quad dX = X - X_0$$

l'incertitude relative sur une grandeur physique est le rapport entre l'incertitude absolue ΔX sur la valeur mesurée **X.**

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{X - X_0}{X}$$

III-3-2 -Théorème sur les incertitudes relatives

Étant donné une grandeur F de la forme : $F = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$

Par la différentielle logarithmique, on trouve

$$\frac{\Delta F}{F} = \alpha \frac{\Delta x}{x} + \beta \frac{\Delta y}{y} + \gamma \frac{\Delta z}{z}$$

Ou encore

$$\frac{\Delta F}{F} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

III-4 -Exemples de calculs d'incertitudes

III-4-1- Mesures indépendantes

On veut calculer l'incertitude absolue sur la résistivité ρ soit $\Delta\rho$ d'un fil conducteur de forme cylindrique de longueur l et de rayon r .

Calculant l'incertitude absolue sur la résistivité : $\Delta\rho=$?

On a l'expression de la résistance R :

$R = \rho\frac{l}{s}$ ou s est la section s du fil conducteur donnée par la relation suivante

$s = \pi r^2$ ou encore $s = \frac{\pi d^2}{4}$ d est le diamètre du fil conducteur

La résistivité ρ est donné par :

$$\rho = \frac{R\frac{\pi d^2}{4}}{l}$$

Avec le théorème des incertitudes relatives on trouve

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}$$

D'où

$$\Delta\rho = \frac{Rs}{l}\left(\frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}\right)$$

Si on a, par exemple

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l} = 10^{-3} + 2.10^{-2} + 10^{-3}$$

Alors

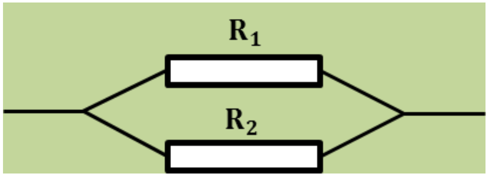
$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx 2.10^{-2}$$

La précision de la mesure est de l'ordre de grandeur de la mesure la moins précise

III-4-2 -Mesures dépendantes (mesures liées et erreurs liées)

Soient deux résistances électriques R_1et R_2 montées en parallèles, la résistance équivalente R est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



D'ou $\qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

L'incertitude relative sur la résistance R est :

$\frac{\Delta R}{R} = \ ?$

a/Mesures indépendantes (mauvaise méthode)

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1}{R_1 + R_2} + \frac{\Delta R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \Delta R_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) + \Delta R_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right)$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R_1}{R_1} \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \right) + \frac{\Delta R_2}{R_2} \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

Par cette méthode on sous-estime la précision de la mesure ; en effet l'erreur commise sur la résistance R_1 au numérateur s'effectue dans le même sens qu'au dénominateur .il en est de même pour la résistance R_2.ces erreurs sont donc liées

b/Mesures dépendantes (bonne méthode)

Dans cette méthode, on calcule l'erreur relative $\frac{dR}{R}$ puis on regroupe les termes semblables $\frac{dR_1}{R_1}$ et $\frac{dR_2}{R_2}$

$$\frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{d(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1 + R_2} - \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$
$$= dR_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right) + dR_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right)$$
$$= \frac{dR_1}{R_1}\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{dR_2}{R_2}\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

On passe ensuite aux incertitudes relatives :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R_1}{R_1}\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{\Delta R_2}{R_2}\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

On constate que l'incertitude relative obtenue par cette méthode est inférieure à celle obtenue par la méthode des mesures indépendantes.

III-5 -Calcul des petites variations

Soit T la période d'un pendule simple donnée par cette relation

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Sous l'effet de la chaleur la longueur du pendule augmente de $l + dl$, dans ce cas on connait le sens dans lequel varie la longueur l

On a $l + dl$ ou $dl > 0$ la période T varie dans le même sens $dT > 0$.

On peut calculer cette variation soit par la différentielle totale dT en prenant la pesanteur g constante ou par la différentielle logarithmique LnT ou encore par un développement limité à l'ordre 1.

$$T + dT = 2\pi\sqrt{\frac{l + dl}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{dl}{l}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ \sqrt{\left(1 + \frac{dl}{l}\right)}$$

L'expression $\sqrt{\left(1 + \frac{dl}{l}\right)}$ est de la forme $\sqrt{1 + x}$ aves $x \to 0$

$$T + dT \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ \left(1 + \frac{1}{2}\frac{dl}{l}\right)$$

$dT = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ \left(\frac{1}{2}\frac{dl}{l}\right)$

d'où

$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l}$

CHAPITRE II VECTEURS

I-Scalaires et vecteurs

I-1-Introduction

Certaines grandeurs physiques se définissent complètement par un scalaire, tandis que d'autres grandeurs physique ne peuvent se définissent uniquement par un scalaire, mais elles se définissent complètement par un vecteur

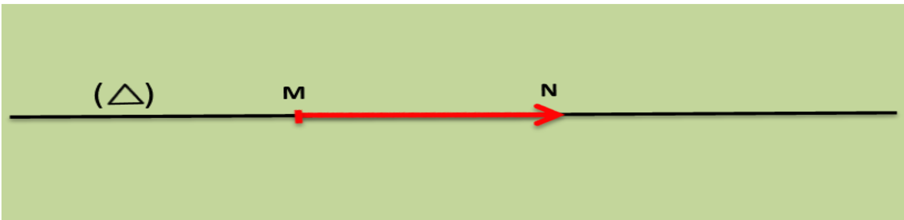
-exemples de grandeurs physiques scalaires : masse, longueur, travail, température, pression d'un gaz ….

-exemples de grandeurs physiques vectorielles : force, vitesse, accélération moment d'une force….

On distingue en physique deux types de vecteurs :

- les vecteurs vrais ou vecteurs polaires qui se définissent d'une manière intrinsèque c'est à dire leurs définitions ne dépendent pas du système de référence.
- les pseudos vecteurs ou les vecteurs axiaux se définissent par rapport à un repère.

I-2-Définition d'un vecteur lié



Vecteur lié

Un vecteur lié $\overrightarrow{MN}$ est définit par :

-son origine M

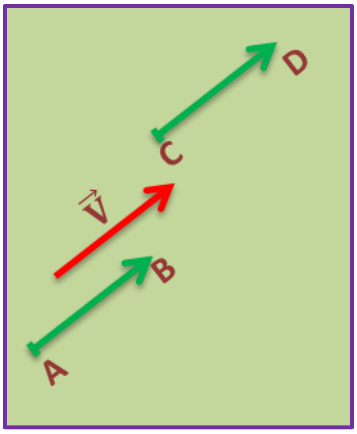
-son support ou direction (Δ)

-son sens de M vers N

-son module sa norme : la longueur $MN = \|\overrightarrow{MN}\| = |\overrightarrow{MN}|$

I-3-Définition d'un vecteur libre

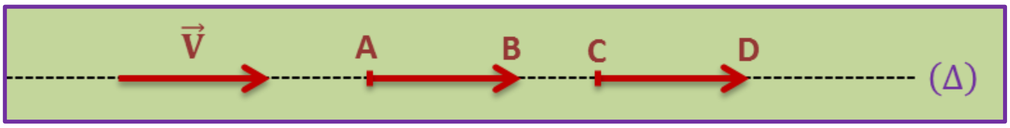
Si on ne peut pas définir une origine d'un vecteur, on parle alors de vecteur libre.



Vecteur libre

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur libre$\vec{V}$.

Un vecteur glissant est définit par son support (Δ) , son sens et son module sans fixer son origine.



Vecteur glissant

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent le vecteur glissant $\vec{V}$

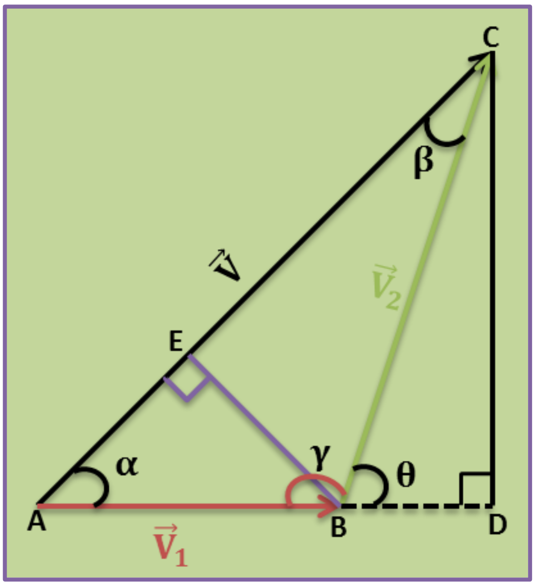
II-Addition de deux vecteurs et angles de deux vecteurs

II-1- Addition de deux vecteurs

II-1 -1 -Cas de deux vecteurs liés

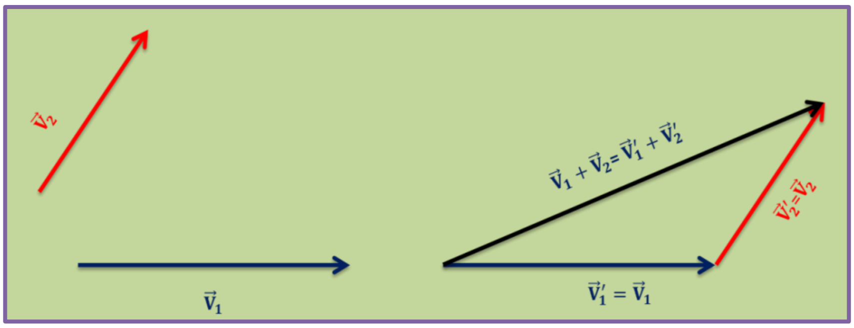
La somme vectorielle de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ notée $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

On écrit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ou $\vec{V}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{V}_2 = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$



Somme vectorielle de deux vecteurs liés

II-1 -2- Cas des vecteurs libres



Somme vectorielle de deux vecteurs libres

II-1 -2 -1-Module d'un vecteur $\vec{V}$

On a : $AC^2=AD^2+DC^2$

$AC^2 = (AB + BD)^2 + (BC\sin(\theta))^2$
$AC^2 = (V_1 + V_2\cos(\theta))^2 + V_2^2\sin^2(\theta)$

On trouve

$$\vec{V}^2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2\,\|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|.\cos(\theta)$$

ou bien

L'angle $\theta = \left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$

Cos $(\pi - \theta) = \cos(\gamma) = -\cos(\theta)$

$$\vec{V}^2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 - 2\,\|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|.\cos(\gamma)$$

II-1 -2 -2-Direction du $\vec{V}$

La direction de $\vec{V}$ est déterminée par l'angle α .

On peut trouver une relation entre les trois modules des vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ qui forment le triangle ABC et ces trois angles α, β et γ (voir figure).

On a dans le triangle rectangle BCD et ACD

$CD = V_2\sin(\theta) = V\sin(\alpha)$

On trouve $\frac{V}{\sin\gamma} = \frac{V_1}{\sin\beta} = \frac{V_2}{\sin\alpha}$

Cette dernière relation est très utile en statique pour l'équilibre d'un solide soumis à trois forces.

II-1 -2 -3-Cas particulier

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \text{ et si } \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$$

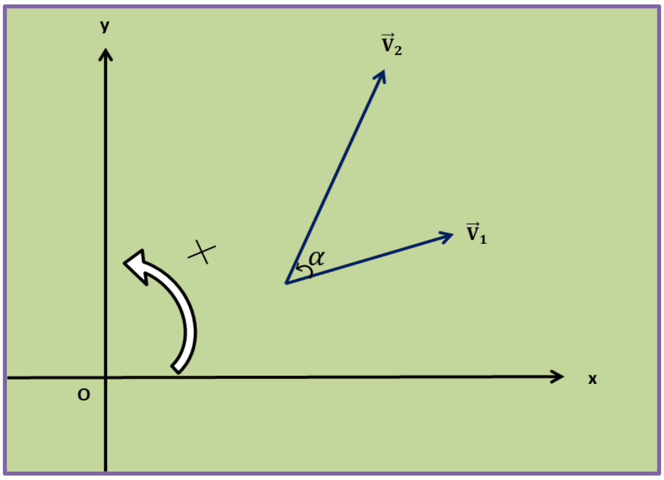
Alors le module de $\vec{V}$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\|\vec{V}_1\|^2 + \|\vec{V}_2\|^2}$$ et l'angle α est tels que

$$\tan(\alpha) = \frac{v_2}{v_1}$$

II-2-Angle entre deux vecteurs

Les axes $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OY}$ appartiennent au plan $[\vec{V}_1, \vec{V}_2]$. L'angle α que fait le vecteur $\vec{V}_2$ avec le vecteur $\vec{V}_1$ noté $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est l'angle dont il faut faire tourner le vecteur $\vec{V}_1$ pour l'amener sur la direction du vecteur $\vec{V}_2$; il s'agit donc d'un angle algébrique.



Angle entre deux vecteurs

Ainsi on aura l'angle $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est égale à l'angle $-(\vec{V}_2, \vec{V}_1)$

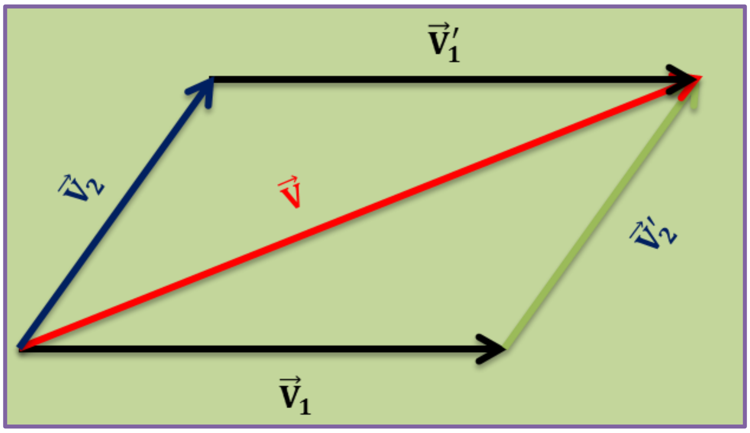
$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = -(\vec{V}_2, \vec{V}_1)$$

Et $\forall \vec{V}_3$ On a $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}_1, \vec{V}_3) + (\vec{V}_3, \vec{V}_2)$

Cette dernière relation entre les angles et analogue à la relation vectorielle suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

III- Composantes d'un vecteur

Il existe une infinité de façon d'obtenir à l'aide de deux vecteur ou plusieurs vecteurs par somme vectoriel, un vecteur donné $\vec{V}$ .les vecteurs obtenus sont appelés les composante du vecteur $\vec{V}$.

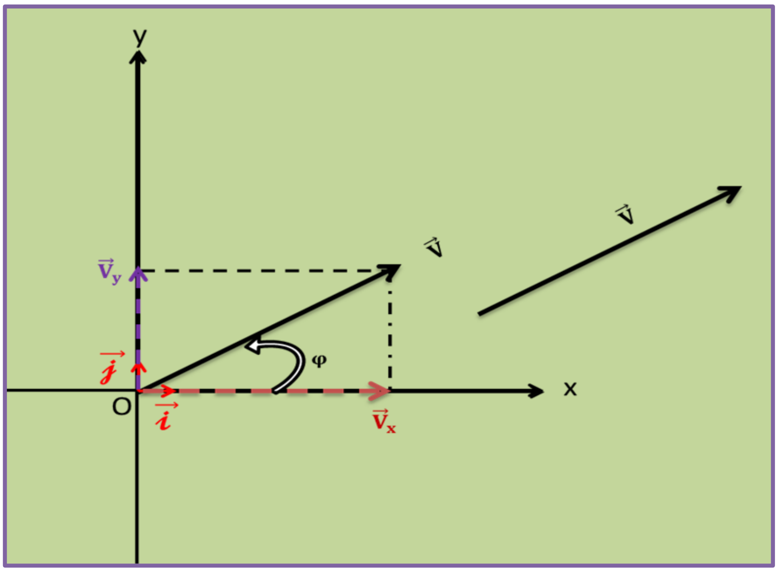


Composantes d'un vecteur $\vec{V}$

$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_1' + \vec{V}_2'$; Les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont les composantes du vecteur $\vec{V}$.

Les vecteurs $\vec{V}_1'$ et $\vec{V}_2'$ sont aussi les composantes du vecteur $\vec{V}$. Il y'a une infinité de façon d'obtenir les composantes du vecteur $\vec{V}$.

Dans le plan on prend une base orthonormée $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



Composantes d'un vecteur dans le plan$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Le vecteur $\vec{V}$ s'écrit $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$

Ou les vecteurs $\vec{V}_x$ et $\vec{V}_y$ sont les composantes du vecteur $\vec{V}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On peut écrire aussi

$\vec{V}_x = V_x.\vec{\imath}$ et $\vec{V}_y = V_y.\vec{\jmath}$ ou V_x et V_y mesures algébriques des composantes du vecteur $\vec{V}$ ou tout simplement composantes du vecteur $\vec{V}$.

On peut écrire aussi

$$\vec{V} = V_x.\vec{\imath} + V_y.\vec{\jmath} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$$

$$V_x = V\cos\varphi \quad \text{avec} \quad \varphi = (\vec{\imath},\vec{V})$$

$$V_y = V\sin\varphi$$

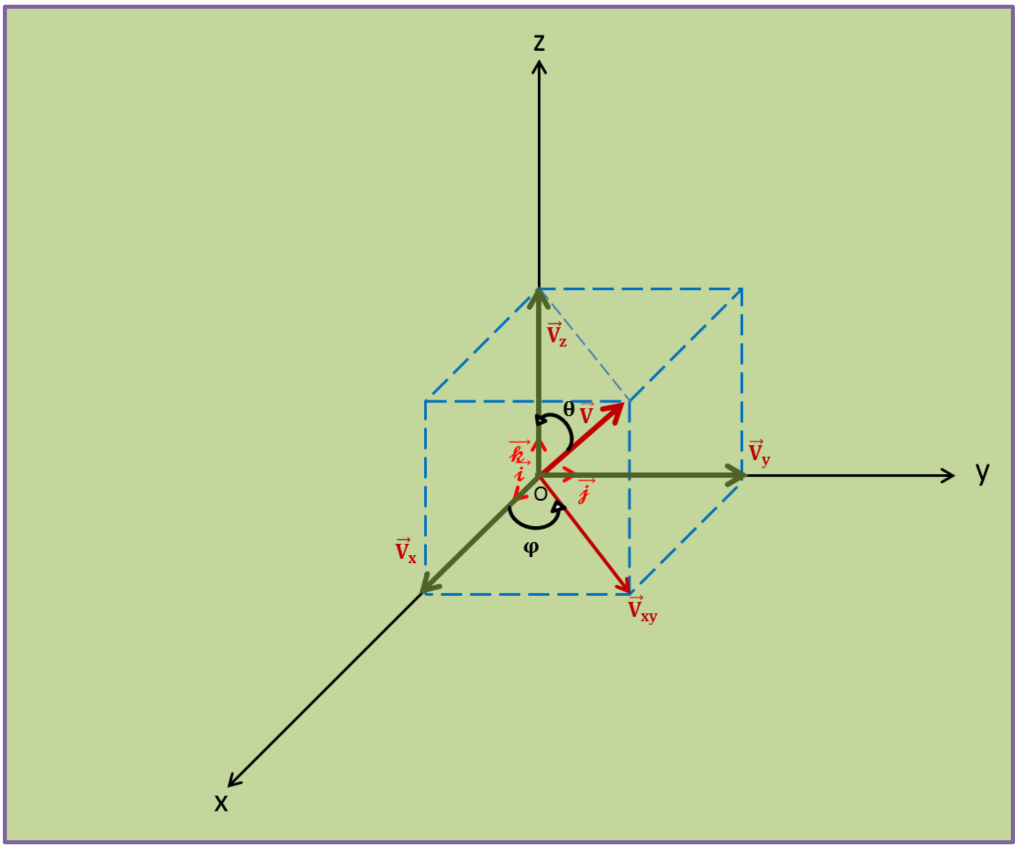
Le module du vecteur $\vec{V}$ est :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\vec{V} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ Ou $\vec{v}_x$,$\vec{v}_y$ sont les composantes du vecteur $\vec{V}$ dans le repère $\overrightarrow{ox}$ et $\overrightarrow{oy}$.

Dans l'espace on prend une base orthonormée $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$



Composantes d'un vecteur dans l'espace

Les composantes d'un vecteur $\vec{V}$ dans l'espace V_x , V_y et V_z

$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$

Ou $V_z = V \cos\theta =$

$V_x = V_{xy} \cos\varphi = V \sin\theta \,.\, \cos\varphi$

$V_y = V_{xy} \sin\varphi = V \sin\theta \,.\, \sin\varphi$ ou $\vec{V}_{xy}$ est la projection du vecteur $\vec{V}$ dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Le module du vecteur

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Cas particulier

Si le vecteur $\vec{V}$ est un vecteur unitaire $\vec{V} = \vec{u}$

Les composantes de ce vecteur unitaire $\vec{u}$ sont u_x , u_y et u_z ou

$u_x = \cos\alpha$ avec $\alpha = (\vec{\imath}, \vec{u})$

$u_y = \cos\beta$ avec $\beta = (\vec{\jmath}, \vec{u})$

$u_z = \cos\gamma$ avec $\gamma = (\vec{k}, \vec{u})$

Le module de $\vec{u}$ est égal à un

$\|\vec{u}\|^2 = (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$

Les cosinus des trois angles α ,β et γ sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire $\vec{u}$.

IV- Systèmes de coordonnés

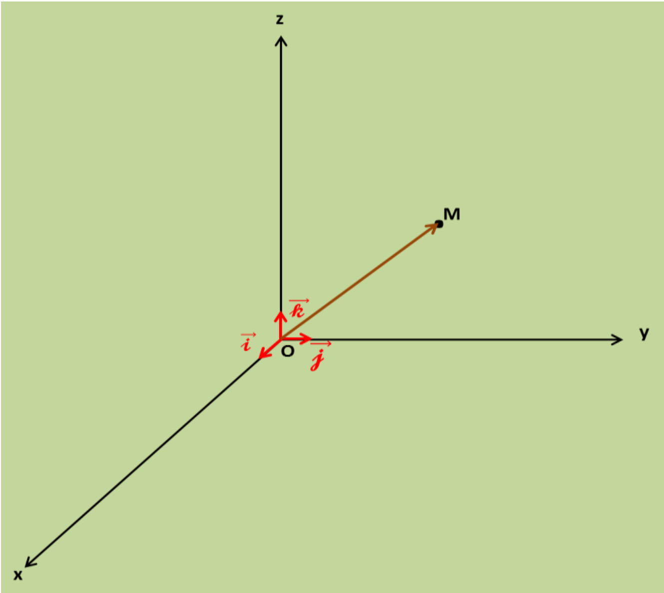
Il existe différentes façon de repérer un point dans l'espace, le repère choisi sera en fonction du problème étudié

IV-1- Coordonnées cartésiennes

Dans un repère orthonormé directe $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le point M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

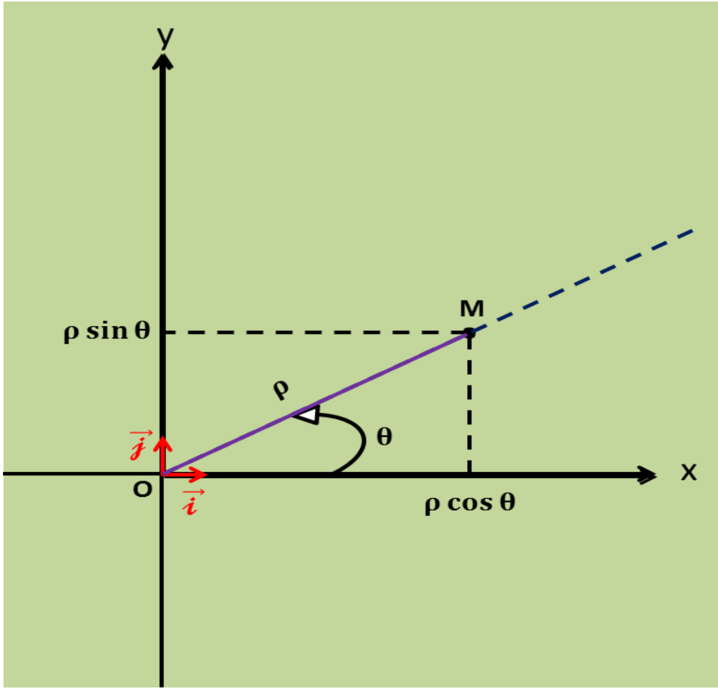
Ou x ,y et z représentent les coordonnées du point M dans l'espace ou les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$



Coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace

IV-2 -Coordonnés polaires coordonnées cylindrique

IV-2 -1- Coordonnées polaires



Coordonnées polaires

Soit l'axe $\overrightarrow{ox}$ axe polaire

Le point M est repéré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{OM})$ et la norme ρ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \geq 0$

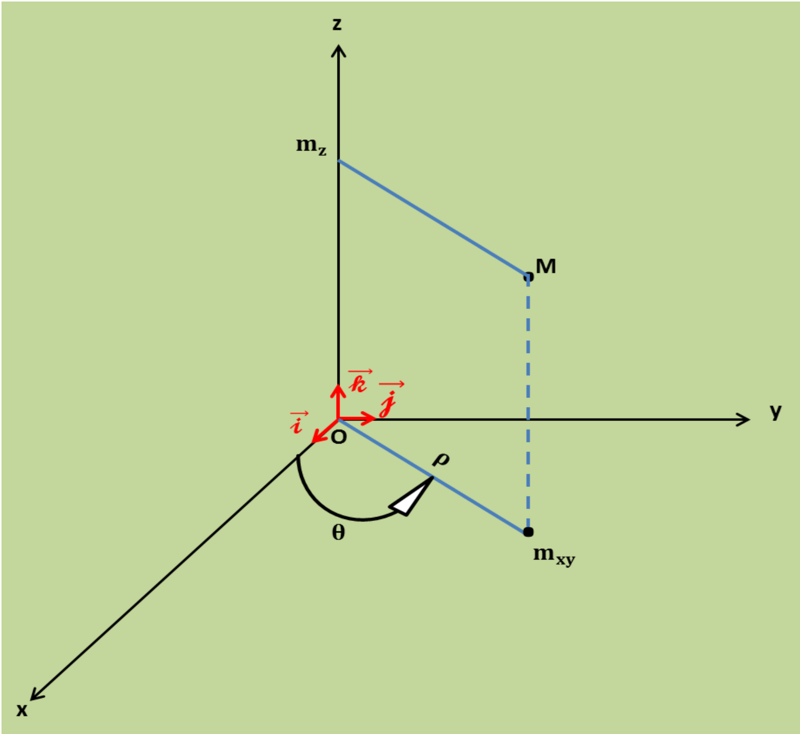
Les relations qui lient les coordonnées cartésiennes avec les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

étant donné x et y on peut calculer ρ et θ

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\tan\theta = \frac{y}{x}$; $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ceci est valable excepté les problèmes de rotations

IV-2 -2-Coordonnées cylindriques



Coordonnées cylindriques

le point M est repéré par trois coordonnées ρ, θ, et z avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,
$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

IV-2 -3 -Coordonnés spheriques

le point M est repéré par r, θ, et ϕ

ou

$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = r$$

$$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om_{xy}})$$

$$\theta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Oz})$$

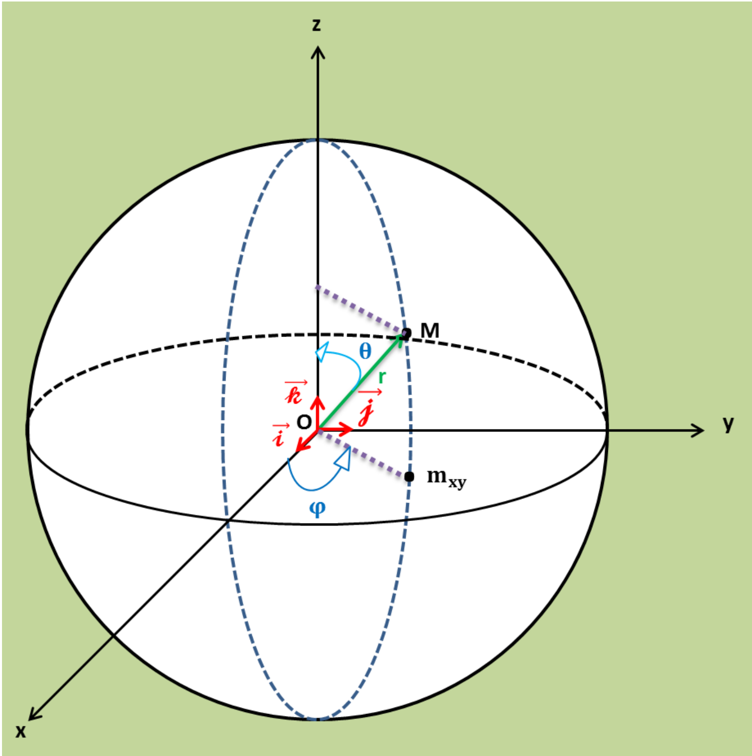
$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

Les relations inverses sont données par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cos(\theta) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



Coordonnés sphériques

V- Produit scalaire

V-1 -Définition

Le produit scalaire du vecteur $\vec{v}_1$ par le vecteur $\vec{v}_2$ noté $\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2$ est un scalaire qui est égal au module de $\vec{v}_1$ par le module de $\vec{v}_2$ par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

.

Soit $\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = v_1 . v_2 . \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$;

Les quantités $\vec{v}_2 . \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $\vec{v}_1 . \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ représentent respectivement la projection du vecteur $\vec{v}_2$ sur $\vec{v}_1$ et la projection du vecteur $\vec{v}_1$ sur $\vec{v}_2$. On peut définir le produit scalaire

$\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2 = \vec{v}_1 . \operatorname{proj} \left. \vec{v}_2 \middle/ \vec{v}_1 \right.$ ou

$\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2 = \vec{v}_2 . \operatorname{proj} \left. \vec{v}_1 \middle/ \vec{v}_2 \right.$

De ces définitions on remarque que le produit scalaire est une quantité intrinsèque (ne dépend pas du système de coordonnées)

V-2 -Propriétés du produit $\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2$

-commutativité

$\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2 = \vec{v}_2 . \vec{v}_1$

-distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition vectorielle

$\vec{v}_1 \,.\, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2 + \vec{v}_1 . \vec{v}_3$

-cas particuliers

Si $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ alors $\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2 = 0$ ou encore $\vec{v}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_2 = \vec{0}$

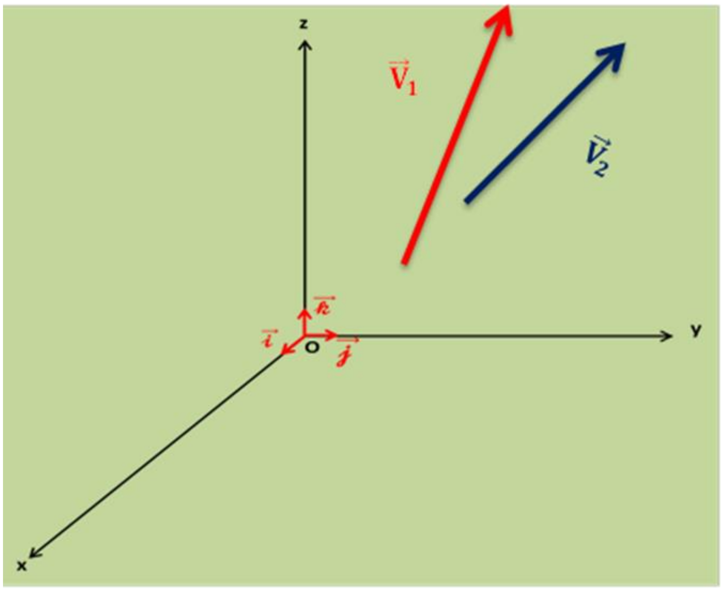
V-3 -Expression analytique du produit scalaire

$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2 = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) . \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$

Dans le cas d'un repère orthonormé



Produit scalaire

$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$

Si $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$

$\vec{v}^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Si $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + 2.\vec{v}_1.\vec{v}_2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + 2.v_1.v_1.\cos(\vec{v}_1 , \vec{v}_2)$$

VI- Produit vectoriel

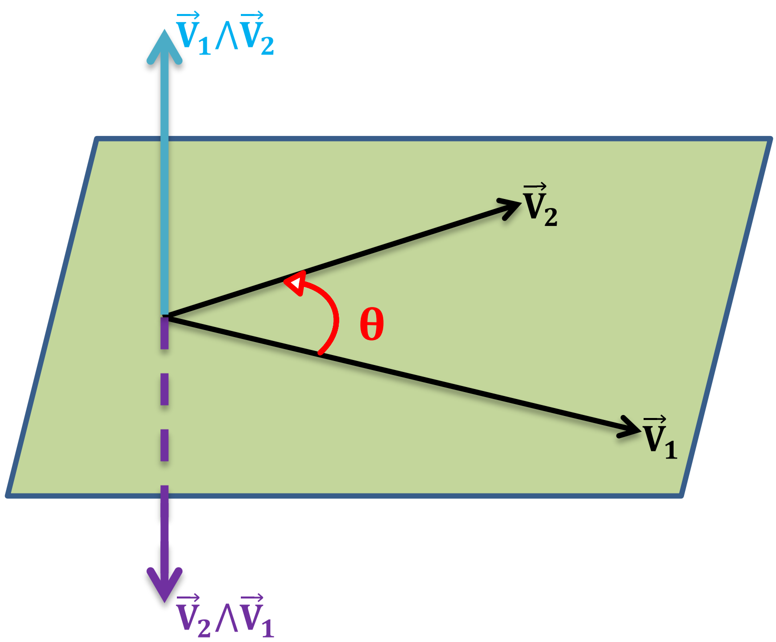
VI-1-Définition

le produit vectoriel du vecteur $\vec{v}_1$ par le vecteur $\vec{v}_2$ notée

$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ ou $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ est un vecteur dont la direction est perpendiculaire aux deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$,son sens est tel que le trièdre formé par les trois $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$ soit direct, son module $\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|$ est égal au produit des modules des deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ par la valeur absolue du sinus de l'angle formé par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

$\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\| = v_1.v_2.|\sin(\vec{v}_1, \vec{v}_2)|$

$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$



Produit vectoriel

-Le produit vectoriel n'est pas commutatif

Distributivité par rapport à l'addition

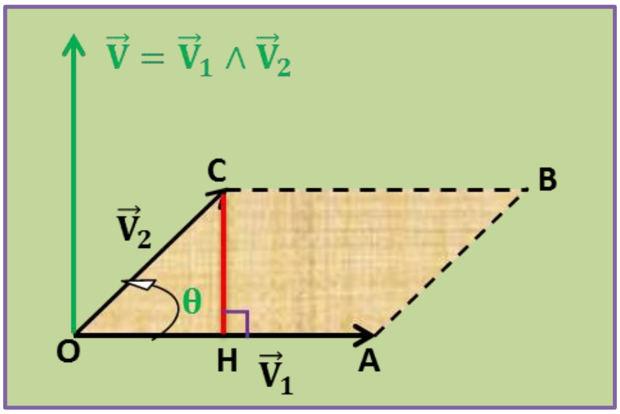
$\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3)$

et

$(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \wedge \vec{v}_1 = (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1) + (\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1)$

-On remarque que le sens du produit vectoriel dépend de l'orientation de l'espace : c'est un pseudo vecteur ou vecteur axial

VI -2 -Signification géométrique du module du produit vectoriel



$$\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\| = v_1 . v_2 . |\sin(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = OA . CH = 2 . S_{OAC} = S_{OABC}$$

$$\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\| = 2 . S_{OAC} = S_{OABC}$$

Ou S_{OABC} est la surface du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

VI -3 -Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé

D'après la définition du produit vectoriel

On a:

$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ et

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \wedge \vec{i}$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \wedge \vec{j}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} = -\vec{k} \wedge \vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \quad &= \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \wedge \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) \\ &= (y_1.z_2 - z_1.y_2)\vec{i} + (z_1.x_2 - x_1.z_2)\vec{j} + (x_1.y_2 - y_1.x_2)\vec{k} \end{aligned}$$

Les composantes $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \begin{cases} y_1.z_2 - z_1.y_2 \\ z_1.x_2 - x_1.z_2 \\ x_1.y_2 - y_1.x_2 \end{cases}$

Si on emploie l'écriture du déterminant, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

VII-Moment d'un vecteur ,moment d'un couple de vecteurs

VII -1 -Moment d'un vecteur par rapport à un point

VII -1 -1-Definition

Par définition le moment d'un vecteur $\vec{v}$ par rapport au point O est le produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{OA}$ (A origine du vecteur $\vec{v}$) par le vecteur $\vec{v}$.

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{v}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}$$

VII -1 -2-Cas d'une force $\vec{v} = \vec{F}$

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

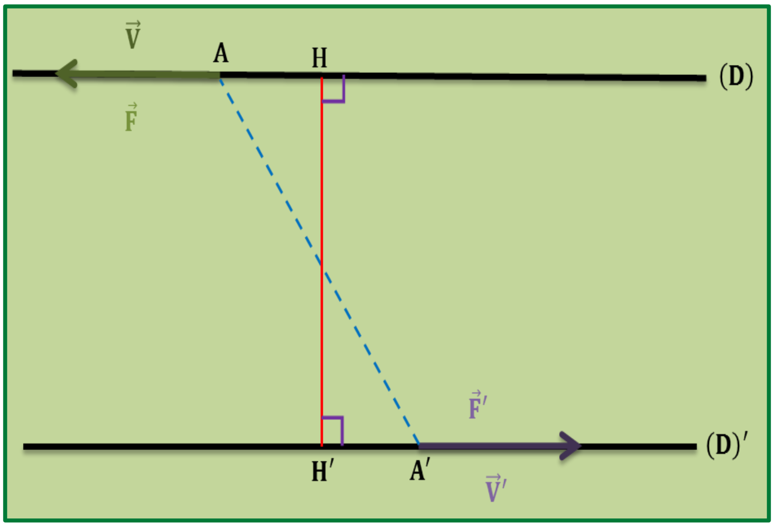
$\left|\vec{\mathcal{M}}_{/O}\left(\vec{F}\right)\right| = OH.F = F.d$ Ou d est le bras de levier : la distance du point O à la ligne d'action de la force$\vec{F}$.

L'unité du moment d'une force est le mètre .Newton (m.N)

VII -2-Moment d'un couple de vecteurs

VII -2-1-Définition

Un couple de vecteurs $(\vec{v}, \vec{v}')$ est un ensemble de deux vecteurs de même module de sens opposés et de direction parallèle au sens stricte du terme.



Moment d'un couple de vecteurs

Le moment d'un couple de vecteur par rapport à un point O est égale à la somme vectorielle des moments de chaque vecteur par rapport à ce point.

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{v},\vec{v}') = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{v}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{v}') = \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}\right) + \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}'\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}\right) + \left(\overrightarrow{OA'} \wedge (-\vec{v})\right) = \overrightarrow{AA'} \wedge \vec{v}$$

Le moment d'un couple de vecteur par rapport à un point est indépendant de ce point.

VII -2-2-Cas d'un couple de force

Si il s'agit d'un couple de force qui s'exerce sur un solide indéformable, il y aura un mouvement de rotation autour d'un axe passant par O milieu de AA′

$$\vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F},\vec{F}'\right) = \overrightarrow{AA'} \wedge \vec{F} =$$

$$\left|\vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F},\vec{F}'\right)\right| = \ H'H.F = d.F$$

La distance d est le bras du couple de forces .

Remarque

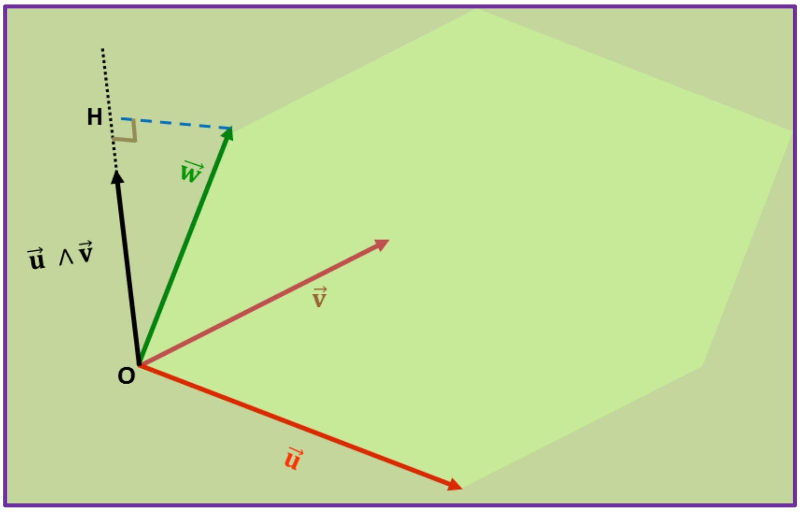
Quel que soit le couple de force $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$ on a toujours : $\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$, donc ce qui caractérise le mouvement de rotation du solide indéformable c'est le moment du couple.

VIII-Produit mixte de trois vecteurs

VIII -1-Définition

Le Produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$, $\vec{w}$ est un scalaire noté par :
$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$

VIII -2-Représentation géométrique



Produit mixte de trois vecteurs

On a $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u}$
$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{v}$

$|(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}|$ le module du produit mixte est égale au volume du parallélépipède bâti sur les trois vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$, $\vec{w}$

On convient de noter le produit mixte par

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

L'ordre des opérations .et $\wedge$ n'a
pas d'importance

-par permutation circulaire on obtient le même produit mixte
C'est à dire

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v})$$
$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$$

VIII -3-Cas particulier de trois vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$, $\vec{w}$ coplanaires

Dans le cas de trois vecteurs coplanaires leurs produit mixte est nul
On a

$$(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$$

Expression analytique

Si on se donne les composantes des trois vecteurs

$\vec{u}\begin{cases}u_x\\u_y\\u_z\end{cases}$ $\vec{v}\begin{cases}v_x\\v_y\\v_z\end{cases}$ $\vec{w}\begin{cases}w_x\\w_y\\w_z\end{cases}$ alors le produit mixte est donné par :

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix}u_x & v_x & w_x\\u_y & v_y & w_y\\u_z & v_z & w_z\end{vmatrix}$$

Si on développe ce déterminant par rapport à la 3^{ième} ligne on trouve :

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\v_x & v_y & v_z\\w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}$$
$$= w_x(u_y.v_z - u_y.v_z) + w_y(u_y.v_z - v_y.u_z) + w_z(u_y.v_x - u_y.v_z)$$

VIII --4 -Moment d'un vecteur par rapport à un axe (comoment)

Définition

le moment d'un vecteur $\vec{v}$ par rapport à l'axe Δ est égal au produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$,$\vec{V}$,$\vec{u}$ ou o un point de l'axe Δ , le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de Δ ,le point A est l'origine du vecteur $\vec{V}$.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/\Delta}(\vec{V}) = (\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}).\vec{u}$$

CHAPITRE III : CINEMATIQUE

Introduction :

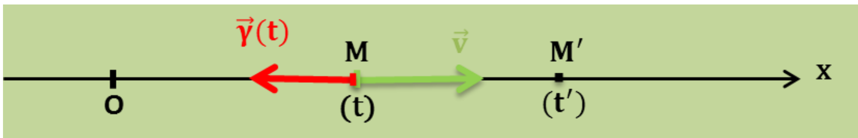
La cinématique est l'étude du mouvement d'un point matériel ou d'un solide sans se préoccuper des causes du mouvement.

Tout d'abord on va étudier les mouvements rectilignes.

I- Mouvements Rectilignes

I-1 - Définitions : Vitesse – Accélération

I-1 -1-Vitesse



Mouvement rectiligne

La vitesse algébrique moyenne $\bar{v}_m$ est définit par : $\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} = \frac{\overline{MM'}}{t'-t}$

La vitesse algébrique instantanée $\bar{v} = \lim_{t'\to t} \frac{\overline{MM'}}{t'-t}$

La position du point matériel est donnée par la mesure algébrique $\overline{OM}$ du vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

La mesure algébrique $\overline{OM}$ du vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ est donnée par l'abscisse du point M à l'instant t

$$\overline{OM} = x \equiv x(t)$$

D'où la vitesse algébrique instantanée vitesse

$$\bar{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est donnée par la dérivée première du vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ par rapport au temps.

$$\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

<u>Représentation du vecteur vitesse $\vec{v}$</u>

$$\vec{v}\begin{cases} -\text{direction du vecteur vitesse est la même quela direction de } l'\text{axe } x'ox \\ -\text{sens du vecteur vitesse est celui du mouvement } c'\text{est à dire de } x'\text{vers } x \\ -\text{intensité est proportionnelle au module du vecteur vitesse } \|\vec{v}\| \\ -\text{origine du vecteur vitesse est celui du point matériel(mobile)à } l'\text{instant } t \end{cases}$$

-direction du vecteur vitesse est la même que la direction de l'axe x'ox

-sens du vecteur vitesse est celui du mouvement c'est-à-dire de x' vers x

-intensité est proportionnelle au module du vecteur vitesse

-origine du vecteur vitesse est celui du point matériel (mobile) à l'instant t

I-1-2- Accélération $\vec{\gamma}$

Le vecteur accélération instantanée $\vec{\gamma}$ est définit par la dérivée première du vecteur vitesse $\vec{v}$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

<u>Représentation du vecteur accélération $\vec{\gamma}$</u>

-direction du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ est celui de l'axe x'ox

-le sens de l'accélération dépend de x(t)

-le module de l'accélération dépend de x(t)

-l'origine du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ est celui du point matériel M(t) (mobile) à l'instant t

<u>Remarque</u>

Si le produit scalaire entre le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur accéleration $\vec{\gamma}$ vérifie :

-si cette relation est vérifiée $\vec{v}.\vec{\gamma} > 0$ le mouvement est accéléré

-si cette relation est vérifiée $\vec{v}.\vec{\gamma} < 0$ le mouvement est retardée

I-2- Cas particuliers

I-2-1-Mouvement rectiligne uniforme

a/-La vitesse algébrique v est constante

$v = cte$

b/-L'accélération $\gamma = \frac{dv}{dt} = 0 \ (\forall \ t)$

$v = cte = v_0 = \frac{dx}{dt}$ d'où $dx = v_0 dt \Rightarrow x = \int_0^t v_0 \, dt = v_0 \, t + c$

à l'instant t=0 on a $x = x_0$, l'équation horaire du mouvement rectiligne s'écrit :

c/-L'équation horaire :

$$x = v_0 \, t + x_0$$

I-2-1-Mouvement rectiligne uniformément varié

a/-L'accélération algébrique est constante $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma_0$ =cte

$\frac{dv}{dt} = \gamma_0$ $\quad dv = \gamma_0 .dt$ la vitesse $v = \int_0^t \gamma_0 \, .dt = \gamma_0 \, .t + c$

A l'instant t=0 la vitesse du mobile est $v = v_0$ on trouve que $c = v_0$ vitesse initiale

b/-La vitesse instantanée du mobile est $v = \gamma_0 \, .t + v_0$

Cherchant maintenant l'abscisse instantanée x du mobile

On a $\frac{dx}{dt} = \gamma_0 \, .t + v_0$ on tire $x = \int_0^t (\gamma_0 \, .t + v_0) dt$ on trouve que

$$x = \frac{1}{2} \gamma_0 \, t^2 + v_0 \, t + c'$$

Pour t=0 ,on a $x = x_0$ condition initiale $c' = x_0$

c/-L'équation horaire : $x = \frac{1}{2} \gamma_0 \, t^2 + v_0 \, t + x_0$

d/-Relation entre vitesse, déplacement et accélération

A l'instant t_1 la position du mobile est x_1, sa vitesse est v_1

A l'instant t_2 la position du mobile est x_2, sa vitesse est v_2

on a $dv = \gamma_0 .dt$ multipliant cette relation par v on aura

$v .dv = \gamma_0 .dt . v$

$= \gamma_0 .dt .\frac{dx}{dt} = \gamma_0 .dx$ intégrant cette relation entre t_1 et t_2

$\int_{t_1}^{t_2} vdv = \int_{t_1}^{t_2} \gamma_0 . dx$, on trouve

$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \gamma_0 (x_2 - x_1)$ ou $v_2^2 - v_1^2 = 2\,\gamma_0 (x_2 - x_1)$

I-2-3- Mouvement rectiligne sinusoïdal

-a/Equation horaire

Un mouvement sinusoïdal est régit par une équation horaire de la forme

-a/ $x(t) = a \sin(\omega t + \phi)$

Ou

- $x(t)$ est l'élongation instantanée
- a : élongation maximale ou amplitude
- $\omega t+\phi$: la phase (algébrique) à l'instant t
- ϕ : phase à l'origine
- ω : pulsation donnée en radian par seconde (radian /seconde)
- période : $T = 2\pi/\omega$ elle est donnée en seconde
- fréquence est définit par $f = 1/T = \omega/2\pi$, elle donnée par le Hertz (Hz)

Remarque

Le mouvement est périodique de période T qui est le plus petit nombre tel que : $X(t + T) = x(t)$ quel que soit t

La vitesse et l'accélération varie sinusoïdalement

b/-La vitesse est donnée par : $v = \frac{dx}{dt} = \omega\, a \cos(\omega t+\phi)$

c/- L'accélération est donnée par : $\gamma = \frac{dv}{dt} = -\,\omega^2 a \sin(\omega t+\phi) = -\,\omega^2 x$

$$\gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2 x$$

Cette accélération correspond à une force de rappel $F = -k.x = m.\boldsymbol{\gamma}$

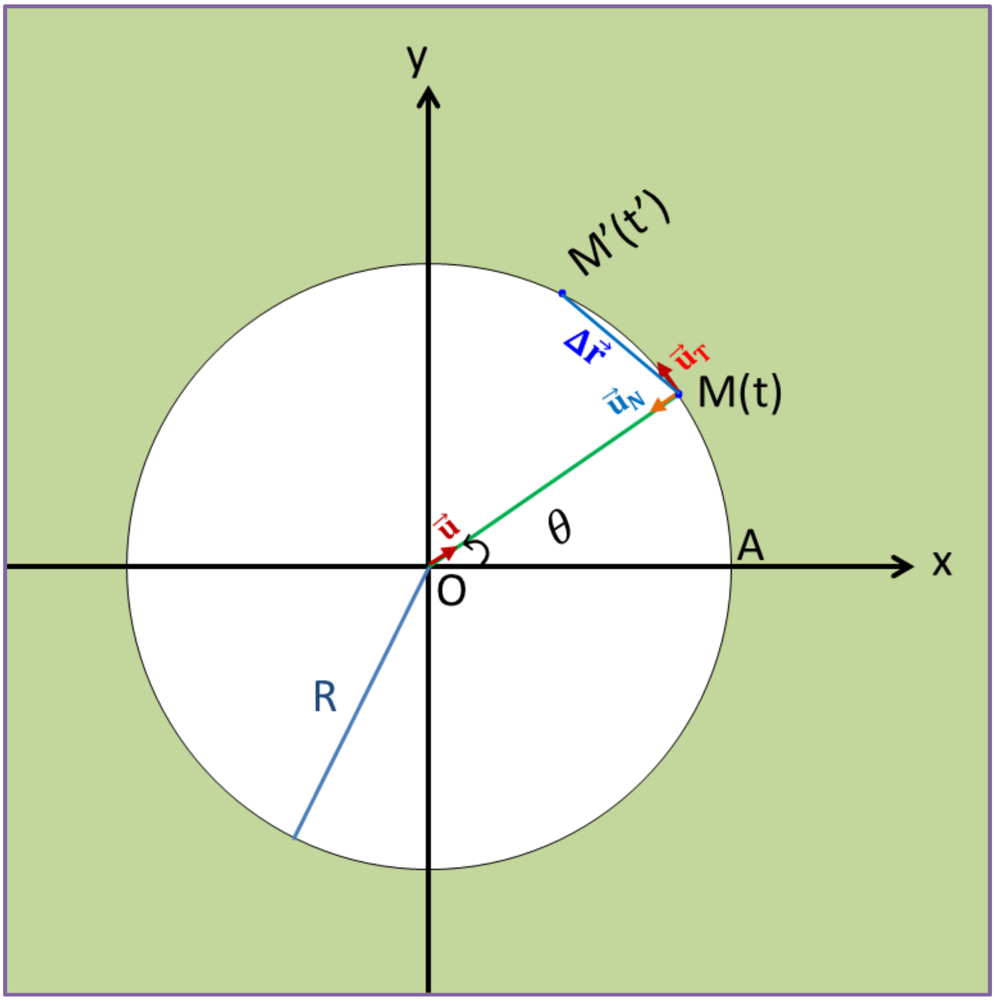
Ces dernières équations nous donnent l'équation différentielle du mouvement rectiligne sinusoïdal

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$ dont la solution de cette équation est : $x = a \sin(\omega t + \phi)$

II- Mouvements circulaires

II-1- Définitions : Vitesse – Accélération tangentielle et normale

II-1-1-Vitesse



Mouvement circulaire

On repère le mouvement du point matériel (mobile) M soit par l'angle$\theta = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ ou par l'abscisse curviligne (mesure algébrique de l'arc de cercle) : $\widehat{AM} = s = R.\,\theta$ ou R est le rayon de la trajectoire.

Le vecteur vitesse instantanée est définit par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Soit $$v(t) = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Ou

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\acute{M}\to M}\frac{\overrightarrow{M\acute{M}}}{M\acute{M}}$$ C'est un vecteur tangent en M au cercle de la trajectoire

$$\lim_{\acute{M}\to M}\left|\frac{\overrightarrow{M\acute{M}}}{M\acute{M}}\right| = 1$$

Donc

$$\lim_{\acute{M}\to M}\frac{\overrightarrow{M\acute{M}}}{M\acute{M}} = \vec{u}_T$$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v.\vec{u}_T$$

Ou $v = \frac{ds}{dt}$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire

II-1-2-Accélération

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

Le vecteur $\vec{u}_N$ est un vecteur unitaire normal au vecteur unitaire tangentiel et dirigé vers le centre de la trajectoire O (centre du cercle)

L'angle formé entre par $\vec{u}$ et $\vec{u}_N$ est égale $\frac{\pi}{2}$

$$(\vec{u},\vec{u}_N) = \frac{\pi}{2}$$

Les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}\begin{cases}\cos\theta\\ \sin\theta\end{cases}$

Les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}_N = -\vec{u}\begin{cases}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{cases}$

Les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}_T\begin{cases}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta\\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta\end{cases}$

On remarque que :

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{u}_T$$

On définit l'accélération

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v.\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + v\,\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Or les composantes de :

$$\frac{d\vec{u}_T}{d\theta}\begin{cases}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{cases}$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_N$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + v\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_N$$

$s = R.\theta$ d'où $ds = R\,d\theta$ ici le rayon R est constant

Donc on aura $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$

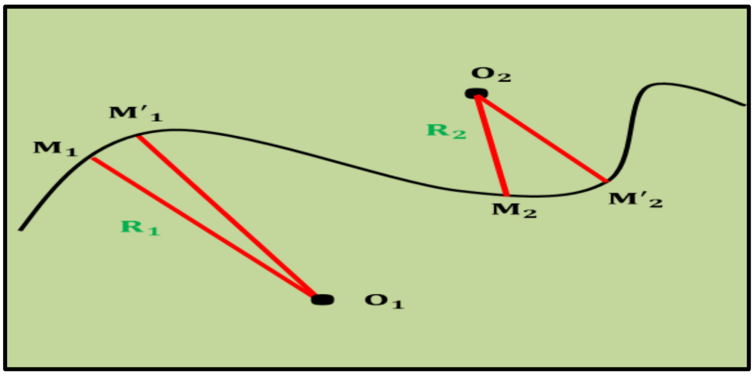
Remarque

Cette formule : $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$ reste valable pour un mouvement curviligne quelconque ou R(M) désigne le rayon du courbure de la trajectoire au point M

La position limite du point O_1 est celle du centre de courbure de la courbe au point M_1 ; la distance O_1M_1 désigne le rayon de courbure R_1 en M_1

Sur cette figure, on remarque qu'en général le rayon de courbure dépend de la position du mobile M .

Le rayon de courbure $R(M_1) \neq R(M_2)$.



Rayon de courbure

II-1-3-Composantes de l'accélération

On a l'expression de l'accélération est :

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{u}_N$$

L'accélération $\vec{\gamma}$ a donc deux composantes l'une est la composante tangentielle $\vec{\gamma}_T$, l'autre est la composante normale $\vec{\gamma}_N$.

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_N = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$$

Avec

$\vec{\gamma}_T = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\,\vec{u}_T = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T$ L'accélération tangentielle

$\vec{\gamma}_N = \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_N = \frac{\frac{ds^2}{dt^2}}{R}\vec{u}_N$ L'accélération normale

<u>Cas particuliers</u>

- Si l'accélération normale $\vec{\gamma}_N = 0$, le mouvement est rectiligne.

-Si l'accélération tangentielle est nulle $\vec{\gamma}_T = 0$ et l'accélération normale $\vec{\gamma}_N$ est constante, le mouvement est circulaire uniforme.

II-2 -Vitesse et accélération angulaire

II-2-1- Définition de la vitesse angulaire

On repère le mouvement d'un mobile M soit par l'abscisse curviligne $s = \widehat{AM}$ ou par l'angle θ

La relation qui lie l'abscisse curviligne s et l'angle θ est :

$$s = R\,\theta$$

Par définition la vitesse angulaire est $\frac{d\theta}{dt}$ notée aussi par ω ou θ′ ou bien $\dot{\theta}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = \dot{\theta} = \omega$$

Il y a une représentation vectorielle de la vitesse angulaire ω

On a

$$\frac{ds}{dt} = v = R\,\omega$$

$v = r\,\omega$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

On a

$$\vec{\omega} \vec{\perp} \vec{r}$$

$$\vec{\omega} \vec{\perp} \vec{v}$$

On peut écrire :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} :$$

L'origine du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ coïncide avec le centre de courbure de la trajectoire.

II-2-2- Accélération angulaire

L'accélération angulaire est définit par :

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$

Cas d'un mouvement circulaire uniforme

Puisque la vitesse angulaire est constante, l'accélération angulaire est nulle

On a donc

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

L'accélération linéaire $\vec{\gamma}$ qui s'écrit :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_N = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

Le vecteur $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ est dirigé comme le vecteur unitaire $\vec{u}_N$ c'est à dire comme le vecteur accélération normale $\vec{\gamma}_N$.

Le module de cette accélération est égale a

$$\gamma_N = \omega^2 r$$

II-3-Cas particuliers

Comme pour le mouvement rectiligne, il existe aussi le mouvement circulaire uniforme, le mouvement circulaire uniformément varié et le mouvement circulaire sinusoïdale .les résultats sont analogues pour les différents grandeurs en ajoutant le qualitatif angulaire.

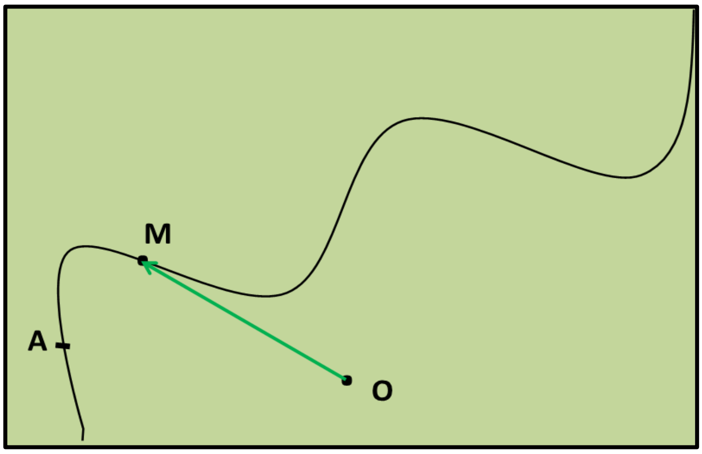
III- Mouvement curviligne

III-1- Vecteur vitesse

Les résultats précédents du mouvement circulaires reste valable pour un mouvement curviligne quelconque, le vecteur vitesse reste tangent à la trajectoire.

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v.\vec{u}_T$$

On repère le mobile M soit par l'abscisse curviligne s=$\widehat{AM}$ ou par le rayon vecteur : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$



Mouvement curviligne

III-2- Vecteur accélération

En coordonnée curviligne s=$\widehat{AM}$;la démonstration réalisée dans le cas d'un mouvement circulaire reste valable sauf que le rayon de courbure varie d'un point à un autre.

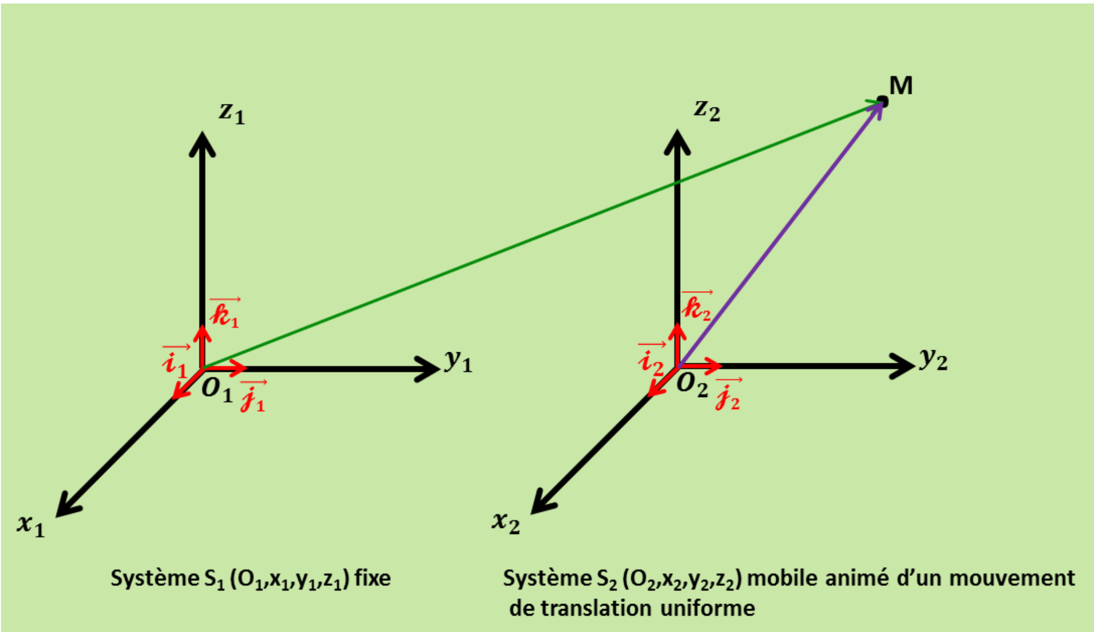
$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + v\,\frac{d\theta}{ds}\,\frac{ds}{dt}\,\vec{u}_N$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{R(M)}\,\vec{u}_N = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$$

Ou R(M) est le rayon de courbure qui n'est pas constant c'est-à-dire, il fonction du point matériel (mobile).

IV- Mouvement relatif

Cas d'un repère animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport à un repère fixe.



Mouvement relatif

Calculons la vitesse du point matériel M par rapport au système mobile S_1 $\vec{v}_{M/S_1}$ sachant que la vitesse de ce point matériel par rapport au repère mobile animé d'une vitesse constante $\vec{v}_{S_2/S_1}$ est $\vec{v}_{M/S_2}$

On a :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$$

$$\overrightarrow{O_2M} = x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2$$

$$\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}$$

$$\vec{v}_{M/S_1} = \vec{v}_{S_2/S_1} + \frac{dx_2}{dt}\vec{\imath}_2 + \frac{dy_2}{dt}\vec{\jmath}_2 + \frac{dz_2}{dt}\vec{k}_2 + x_2\frac{d\vec{\imath}_2}{dt} + y_2\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt} + z_2\frac{d\vec{k}_2}{dt}$$

Or ona

$$\frac{d\vec{\imath}_2}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}_2}{dt} = \frac{d\vec{k}_2}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{M/S_1} = \vec{v}_{S_2/S_1} + \frac{dx_2}{dt}\vec{\imath}_2 + \frac{dy_2}{dt}\vec{\jmath}_2 + \frac{dz_2}{dt}\vec{k}_2$$

$$\vec{v}_{M/S_1} = \vec{v}_{S_2/S_1} + \vec{v}_{M/S_2}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

La Vitesse absolue$\vec{v}_a$ est égale à la vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$ plus la vitesse relative $\vec{v}_r$.

<u>Remarque</u>

En général le repère S_2 est animé d'un mouvement relatif quelconque

CHAPITRE IV : DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

On appelle dynamique l'étude des relations qui existe entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent

I-Premiere loi de Newton

Un corps isolé ou (point matériel) tout corps sur lequel n'agit aucune force, il reste au repos ou il garde la même valeur du vecteur vitesse.

Un corps isolé (point matériel), tout corps qui n'est soumis à l'action d'aucune autre particule (ni attraction ni répulsion ni choc) physiquement un tel corps n'existe pas. On considère, un corps est isolé si les forces qui agissent sur lui s'équilibrent.

Par exemple

-Une particule se trouvant entre la terre et la lune tel que la pesanteur de la lune est égale à celle de la terre $g_T = g_L$.

-Une bille d'acier se trouvant sur une table de marbre horizontale.

Le repère qui est lui-même un corps isolé, il s'agit d'un repère d'inertie ou un repère galiléen

-deux repères d'inertie sont donc en translation uniforme ou au repos l'un par rapport à l'autre

II- Quantité de mouvement conservation de la quantité de de mouvement.

II-1 Définition

La quantité de mouvement d'une particule de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ est la quantité vectorielle $\vec{P}$ donnée par l'expression suivante :

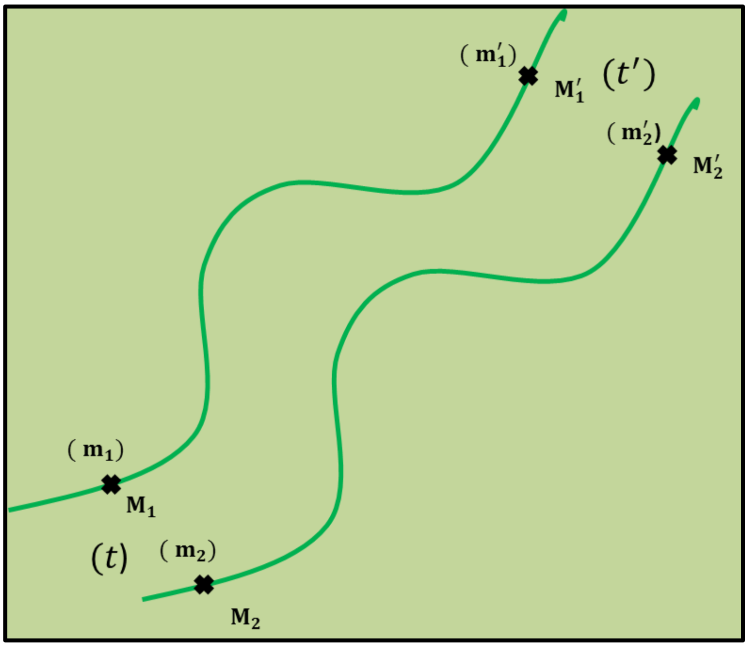
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

II-2 -Conservation de la quantité de mouvement

On considère deux particules de masse m_1 et m_2 à l'instant t :

Il y'a une interaction mécanique entre les deux particules (on suppose qu'il n'a pas de pas de réaction nucléaire)

À l'instant t



<u>Conservation de la quantité de mouvement</u>

La quantité de mouvement totale des deux particules

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$
$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

À l'instant t́

$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$\vec{p}' = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

On constate et on admet comme principe qu'il y'a conservation de la quantité de mouvement des deux particules entre les deux instants t et t́ , c'est-à-dire que la quantité mouvement des deux particules reste constante au cours du temps.

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

Autre écriture du principe de conservation des deux particules.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_1)$$

C'est à dire

$$\triangle \vec{p}_1 = - \triangle \vec{p}'_2$$

La quantité de mouvement perdue par l'une des deux particules est gagnée par l'autre.

à partir de cette égalité, on peut définir les masses par un rapport aux variations de vitesse

En mécanique classique

On a

$$m_1 \triangle \vec{v}_1 = -m_1 \triangle \vec{v}_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\triangle \vec{v}_2|}{|\triangle \vec{v}_1|}$$

On fait agir une force résultante sur une masse étalon pendant un certain temps il va donc en résulter une variation de vitesse, si on fait agir la même force pendant le même temps sur une masse inconnue il en résultera une autre variation de vitesse d'où la mesure de la masse inconnue par la formule précédente

III-Les trois lois de Newton-notion de force

III-1 Introduction

Soient deux particules de masse m_1 et m_2,la variation de la quantité de mouvement ou (l'impulsion) des deux particules pendant un intervalle de temps Δt

On a

$$\frac{\triangle\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\triangle\vec{p}_2}{\Delta t}$$

III-2 Définition de la forcce

par définition la force $\vec{F}$ est la deriveé du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ par rapport au temps par :

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

$\vec{F}_1$: est la force exercé sur la particule de masse m_1 par la particule de masse m_2

$\vec{F}_2$: est la force exercé sur particule de masse m_2 la particule de masse m_1

$$\vec{F}_2 = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

En mécanique classique non relativiste

La masse m est constante la force

$$\vec{F} = \frac{d(\overrightarrow{mv})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ou

$\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}}$ C'est la deuxième loi de Newton

La première loi de Newton ou loi d'inertie pour un corps isolé (c'est à dire pour un corps ou il n'est soumis à aucune force$\vec{F} = \vec{0}$) peut être formulé de la manière suivante :

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ C'est-à-dire que la quantité de mouvement est constante $\vec{p} = \overrightarrow{constante}$

D'où le vecteur vitesse soit il est constant $\vec{v} = \overrightarrow{constant}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ .le corps soit il est au repos ou soit il est animé d'un mouvement uniforme

Troisième loi de Newton ou principe de l'égalité de l'action et la réaction

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Dans le cas général si une particule de masse m est soumise à l'interaction de plusieurs particules de masses m_1,m_2…………………m_n auxquelles on n'associe les forces $\vec{F}_1$,$\vec{F}_2$,………………… $\vec{F}_n$,il en résulte une force $\vec{R}$ tel que

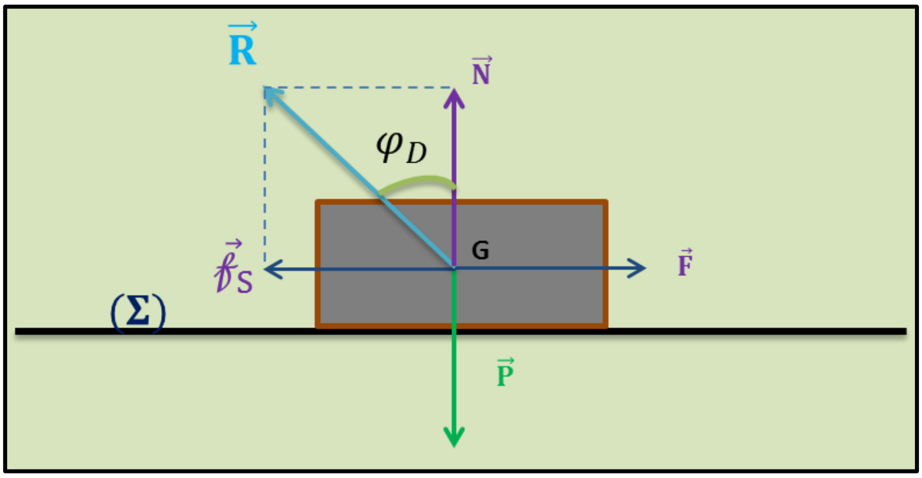
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i d\vec{v}_i}{dt}$$

$$\vec{R} = m\,\vec{\gamma}$$

IV- Forces de frottement et forces de contactes

Coefficient de frottement statique et dynamique

Les frottements proviennent de l'interaction entre particule, il s'agit généralement d'attraction. L'attraction entre particules d'un même corps fait intervenir les forces de cohésions.



L'attraction entre particules de deux corps différents fait intervenir les forces d'adhérences

Il y a une valeur limite de l'angle α soit φ_S : angle limite de frottement statique de type solide .

La force $f_S = k_S . N$ ou k_S coefficient de frottement statique et f_m est la valeur maximale de la force F à partir de laquelle l'équilibre est rompue.

Le coefficient de frottement statique est égale à :

$$k_S = \tan \varphi_S = \frac{f_m}{N}$$

Pour rompre l'équilibre statique on exerce une force d'intensité $f_S = k_S . P$, pour maintenir l'équilibre dynamique (c'est à dire vitesse constante) on exerce une force d'intensité f_D inferieure à f_S ,Il existe φ_D angle de frottement de type dynamique $\varphi_D < \varphi_S$

$\mathscr{k}_D = \tan \varphi_D$: Coefficient de frottement dynamique de type solide

$\mathscr{f}_D < \mathscr{f}_S$ d'où $\mathscr{k}_D < \mathscr{k}_S$ et par suite $\varphi_D < \varphi_S$

$\mathscr{f}_D = \mathscr{k}_D . P = \mathscr{k}_D N$

$\mathscr{k}_D < \mathscr{k}_S$

IV- Forces de frottements dans les fluides

Les forces de frottements s'exerçant sur un corps en mouvement dans un fluide ne sont pas constantes et dépendent de la vitesse et de la forme géométrique du corps, elles dépendent aussi de la nature du fluide.

En statique ces forces sont nulles.

L'expression de ces forces sont données par cette relation

$$\vec{f}_v = -k\,\eta\,\vec{v}$$

Ou

$\eta > 0$: Coefficient de frottement de type visqueux ou coefficient de viscosité dynamique du fluide.

k : Constante de dimension de longueur L, elle dépend de la forme géométrique du corps.

Stokes a montré que ce coefficients k, dans le cas d'une sphère de rayon R, vaut $k = 6\pi R$.

Le coefficient η est de dimension : $[\eta] = L^{-1} M\, T^{-1}$ L'unité de mesure η est Poiseuille (P.I) ou pascale. seconde (Pa.s)

Remarques

-puisque le coefficient η et la constante k sont positifs

La force de frottement $\vec{f}_v$ est à l'opposé du vecteur vitesse $\vec{v}$

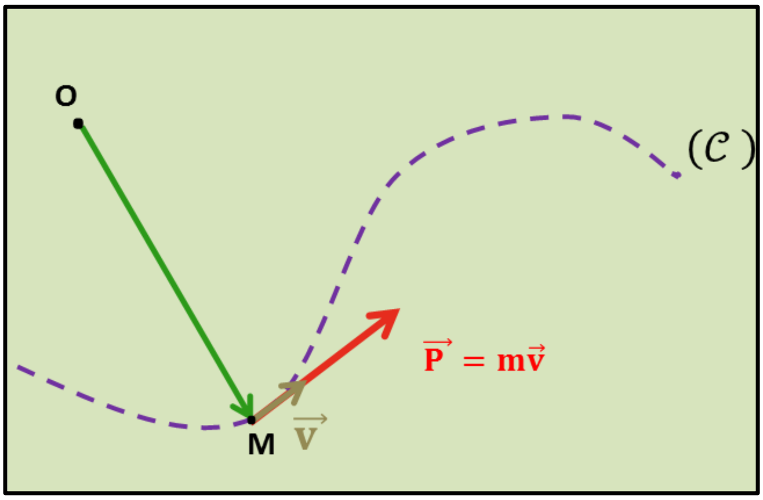
-Les viscosités des gaz est cent fois plus faible que celles des liquides, et elles augmentent avec la température contrairement aux liquides.

V- Moment cinétique

V-1- Définition

Le moment cinétique d'une particule de masse par rapport à un point O est le moment de la quantité de mouvement de cette particule par rapport à O.

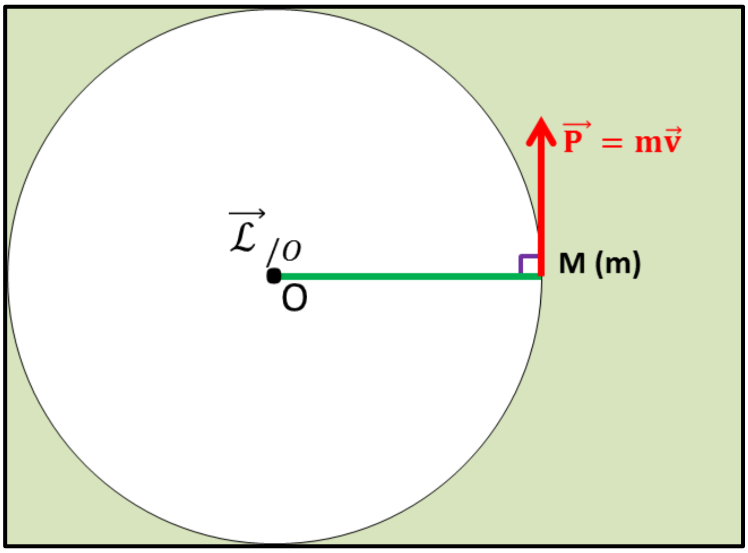
$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{Mt}(\vec{P}_{/O}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge \vec{P}$$



Moment cinétique

V-2- Etude de quelque cas

V-2 -1- Mouvement circulaire



Moment cinétique pour un mouvement circulaire

Le module du moment cinétique est donné par la relation suivante :

$|\vec{L}_{/0}| = L = OM.mv$

Ou OM= r le rayon de la trajectoire qui est constant

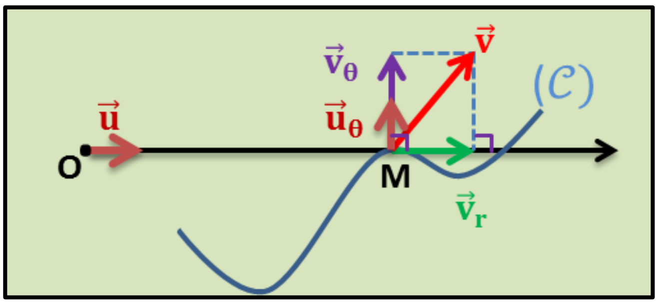
D'où $L = r\,m\,v = r\,mr\omega = mr^2\omega$

Ou ω est la vitesse angulaire

Cette dernière relation reste vectoriellement valable

$$\vec{L}_{/O} = mr^2\vec{\omega}$$

V-2 -2 -Mouvement curviligne plan



Moment cinétique pour un mouvement curviligne

Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est un vecteur unitaire de la perpendiculaire en M au vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

L'angle $(\vec{u}, \vec{u}_\theta) = \frac{\pi}{2}$

$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{Mt}\vec{P}_{/O} = \vec{r} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m(\vec{v}_r \wedge \vec{v}_\theta) = \vec{r} \wedge m\vec{v}_r + \vec{r} \wedge m\vec{v}_\theta$

Puisque les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}_r$ sont colinéaires on aura

$$\vec{L}_{/O} = \vec{r} \wedge m\vec{v}_\theta$$

Calculant maintenant $\vec{v}_\theta$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}$

La vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{u})}{dt} = r\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\vec{u} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\vec{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\vec{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad \text{et} \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

D'où $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\omega\vec{u}_\theta$

En identifiant avec cette relation

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

On trouve

$$\vec{v}_\theta = r\omega\vec{u}_\theta$$

En module $v_\theta = \omega r$

Le moment cinétique

$$|\vec{L}_{/O}| = r\ m\ \omega\ r = mr^2\omega$$

Vectoriellement il s'écrit

$$\vec{L}_{/O} = mr^2\vec{\omega}$$

On trouve la même formule que le mouvement circulaire sauf que le rayon r varie au cours du temps.

V-2 -3 -Théorème du moment cinétique cas d'une particule

Soit le moment cinétique

$$\vec{L}_{/O} = \vec{r} \wedge \vec{P}$$

Dérivant cette expression par rapport au temps ,on trouve

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\vec{\gamma} = \vec{0} + \vec{r} \wedge \vec{R}$$

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{R} = \overline{\vec{Mt}\vec{R}}_{/O}$$

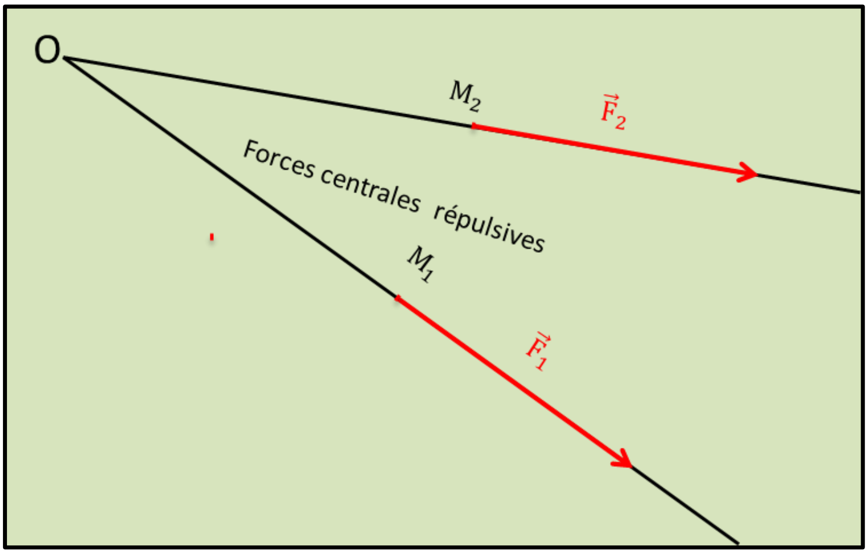
<u>Énoncé du théorème</u>

La dérivée du moment cinétique par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent sur la particule.

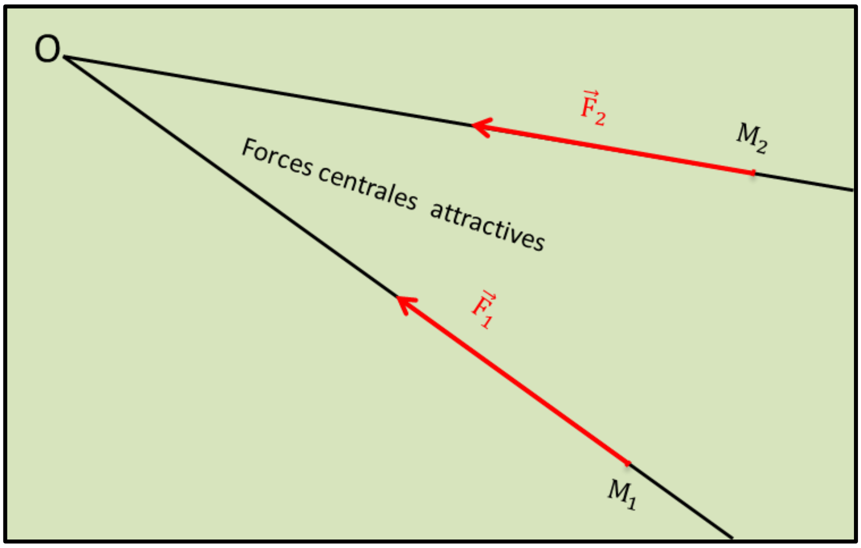
VI- Forces centrales

Ils existent deux cas :-l'attraction universelle (toujours forces attractives)

-forces électrostatiques (forces attractives ou répulsives)



<u>Forces centrales répulsives</u>



Forces centrales attractives

VI-1-Définition :

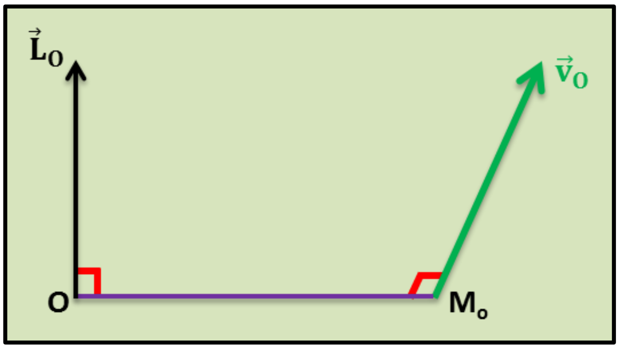
Une force centrale est une force dirigée vers un point fixe appelé centre de force.

Le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et le vecteur force $\vec{F}$ sont colinéaires c'est àdire $\vec{r} \parallel \vec{F}$

Alors la dérivée du moment cinétique est nulle :

$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ d'où le moment cinétique est constant $\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{cst} = \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OM}_O \wedge m\vec{v}_O$

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}_O$ et $\vec{v}_O$ définit un plan



Si une particule est soumise à une force centrale, la trajectoire est plane.

$L = m\, r^2 \frac{d\theta}{dt}$

VI-2-Vitesse aréolaire-

Cette surface est balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant le temps dt

$S = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est appelée vitesse aréolaire.

Si une particule est soumise à une force centrale, la vitesse aréolaire est constante $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ =cte cette expression représente la deuxième loi de K

CHAPITRE V: TRAVAIL ET ENERGIE

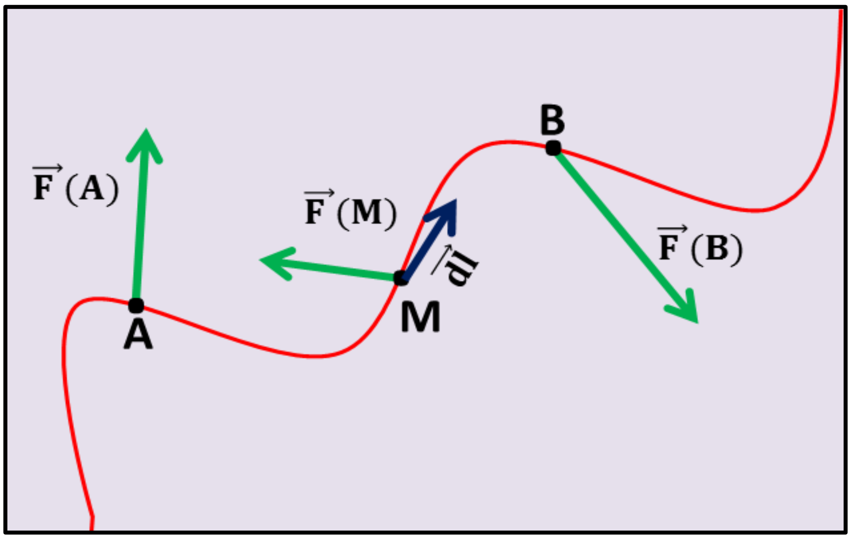
I- Travail et puissance

I-1-Travail d'une force

I-1-1-Définition :

Le travail fournit par une force $\vec{F}$ pour déplacer son point d'application de A vers B le long d'une courbe $\mathcal{C}$ noté $\underbrace{W}_{\mathcal{C},AB}(\vec{F})$ est donné par :

$$\underbrace{W}_{\mathcal{C},AB}(\vec{F}) = \oint_{\mathcal{C},AB} \vec{F}\,.\,\vec{dl} \qquad \text{ou} \qquad \vec{dl} = d\vec{M} = d\vec{r}$$



Travail d'une force quelconque

I-1-2-Expression analytique

Si on donne les expressions des composantes de la force $\vec{F}$ ainsi que les composantes de l'élément $\vec{dl}$

$$\vec{F}(M)\begin{cases} F_x(M) \\ F_y(M) \\ F_y(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{dl}\begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$$

L'expression du travail de la force est :

$$\underset{\mathcal{C}_{AB}}{W(\vec{F})} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} F_x(M)dx + F_y(M)dy + F_z(M)dz$$

Soit

$$W(\vec{F}) = \int_{\mathcal{C}_{AB}} F_x(M)dx + F_y(M)dy + F_z(M)dz$$

I-1-3-Étude de l'élément du travail $dW = \vec{F}(M).\overrightarrow{dl}$

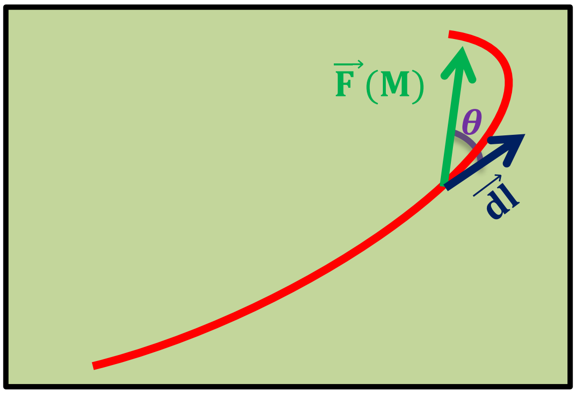
$$dw = F(M).dl.\cos\theta = F(M).\cos\theta W.dl$$

$F(M).\cos\theta = F_T$ la projection de la force $\vec{F}$ sur l'élément $\overrightarrow{dl}$ représente la composante tangentielle de la force $\vec{F}$.

on a donc :

$dW = F_T(M).dl$

Le travail de la force $\vec{F}$ est :



$$\underset{\mathcal{C}_{AB}}{W(\vec{F})} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F}_T(M).\overrightarrow{dl}$$

On remarque que la composante normale F_N de la force $\vec{F}$ ne travaille pas.

Puisque $\vec{F}_N \perp \overrightarrow{dl}$

$$dW = (\vec{F}_T + \vec{F}_N).\overrightarrow{dl} = \vec{F}_T.\overrightarrow{dl} + \vec{F}_N.\overrightarrow{dl} = \vec{F}_T.\overrightarrow{dl}$$

Remarque

-Si le travail $W > 0$,le travail moteur

Si le travail $W < 0$,le travail résistant

I-2 -Puissance

I-2 -1-Définition de la puissance moyenne

Soit une force $\vec{F}$qui effectue un travail ΔW pendane un temps Δt la puissance moyenne est définie par :

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

L'unité de la puissance est le Joule par seconde J/S
qui est le Watt (W), on utilise aussi le cheval vapeur.
1 cheval vapeur est égale à736 Watts

I-2 -2-Définition de la puissance instantanée

Elle est définit par

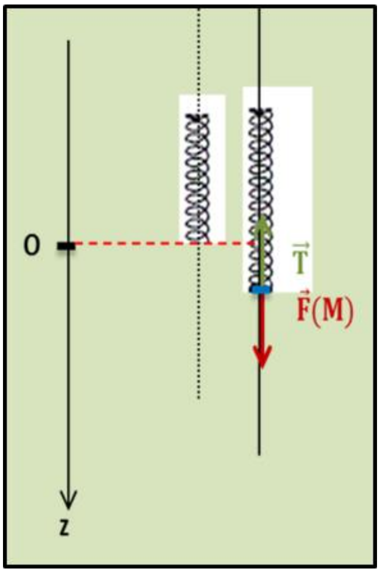
$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Autre expression de la puissance instantanée

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}(M).\vec{dl}}{dt} = \vec{F}(M).\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F}(M).\vec{v}(t)$$

II- Travail d'un ressort, travail d'un couple

II-1-Travail dans le cas d'un un ressort



À chaque instant la force $\vec{T}$,tension du ressort équilibre la force $\vec{F}$,le travail du ressort est égale au travail de force de tension $\vec{T}$.

Le travail de la force $\vec{F}$, on a
$F = k.x$

$$W(\vec{F}) = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F}(M).\vec{dl}$$

$$W(\vec{F}) = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F}(M).\vec{dl} = \vec{F}_T(M).\vec{dl} = \int_{x_A}^{x_B} F.dx = \int_{x_A}^{x_B} k.x.dx = \frac{1}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

Si on prend le point A en O (point d'origine $x_O = 0$) , le travail de la force $\vec{F}$ devient :

$$W(\vec{F}) = \frac{1}{2}kx^2$$

le travail de la tension du ressort $\vec{T}$

$W(\vec{T}) = -\frac{1}{2}(x_B^2 - x_A^2)$ ou $W(\vec{T}) = -\frac{1}{2}kx^2$

ici $W(\vec{F}) > 0$ donc pour étirer un ressort il faut fournir un travail

II-2 -Travail d'un couple

II-2 -1-Travail d'un couple constant

Le travail du couple constant ($\vec{F}$,$\vec{F'}$)est la somme des travaux des deux forces .

$$W(\vec{F},\vec{F'}) = W(\vec{F}) + W(\vec{F'}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dM} + \int_{M_1'}^{M_2'} \vec{F'}.\overrightarrow{dM'}$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} F.ds + \int_{s_1'}^{s_2'} F'.ds'$$

$$= F(s_2 - s_1) + F'(s_2' - s_1')$$

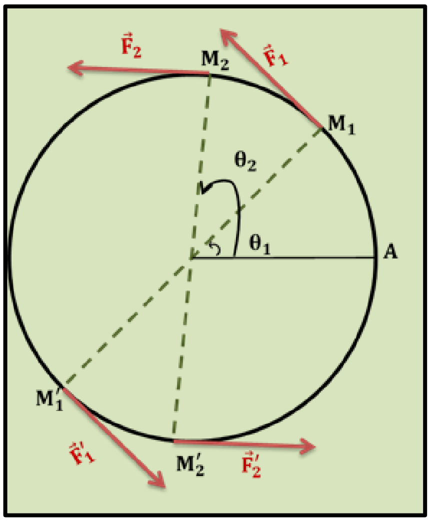
$$= F.R.\theta + F'.R.\theta$$

$$= 2RF\theta$$

Le travail du couple est : $W(\vec{F},\vec{F'}) = \mathcal{C}.\theta$

Ou $\mathcal{C}$ est le moment du couple

$\overset{\frown}{AM_1} = s_1$, $\overset{\frown}{AM_2} = s_2$, $\overset{\frown}{AM_2'} = s_2'$, $\overset{\frown}{AM_1'} = s_1'$



Travail d'un couple constant

II-2 -2 -puissance exercé par un couple

L'expression de la puissance exercé par le couple est :

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\mathcal{C}.\theta)}{dt}$$

dt petit on aura $\mathcal{C}$ constant

L'expression de la puissance devient :

$$P(t) = = \mathcal{C}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$P(t) = \mathcal{C}.\dot{\theta}$$

Cette expression reste valable vectoriellement

$$P(t) = \overrightarrow{\mathcal{C}}\,.\,\overrightarrow{\omega}$$

Elle est analogue à cette relation

$$P(t) = \vec{F}(M).\vec{v}(t)$$

II-3 -Travail d'une force constante

II-3-1-Definition

Une force est constante si elle garde le même module, le même sens et la même direction.

Soit $\vec{F}$ cette force on a : $\vec{F}(A) = \vec{F}(B) = \vec{F}(M) = \vec{F}$

Le travail de la force $\vec{F}$ le long du trajet $\mathcal{C}_{AB}$ est :

$$W(\vec{F}) = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F}(M).\overrightarrow{dr}$$

Ou $\overrightarrow{dr} = \vec{r}$- $\vec{r}'$=$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$=$\overrightarrow{MM'}$

$$W(\vec{F}) = \vec{F}\int_A^B \overrightarrow{dr}$$

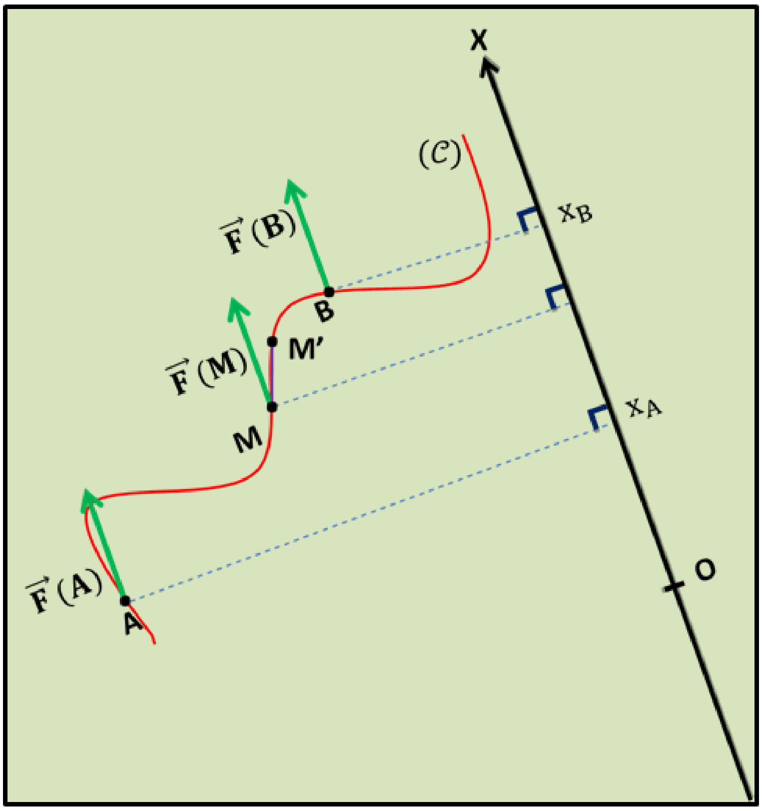
$$= \vec{F}.(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

$$W(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{r}_A - \vec{F}.\vec{r}_B$$

Le travail effectué par une force constante ne dépend pas du chemin suivi, c'est la différence des valeurs prise par la fonction scalaire $\vec{F}.\vec{r}$ entre le point de départ A et le point d'arrivé B.

II-3-2- Expression analytique

Si on prend la force constante $\vec{F}$ parallèle à l'axe Ox,le travail de la force



Travail d'une force constante

$\vec{F}$ prend la forme $\underset{\mathcal{C}_{AB}}{W(\vec{F})} = F(x_B - x_A) = F\,x_B - Fx_A =$

II-3-3-Application : travail du poids d'un corps

Le poids d'un corps de masse m est :

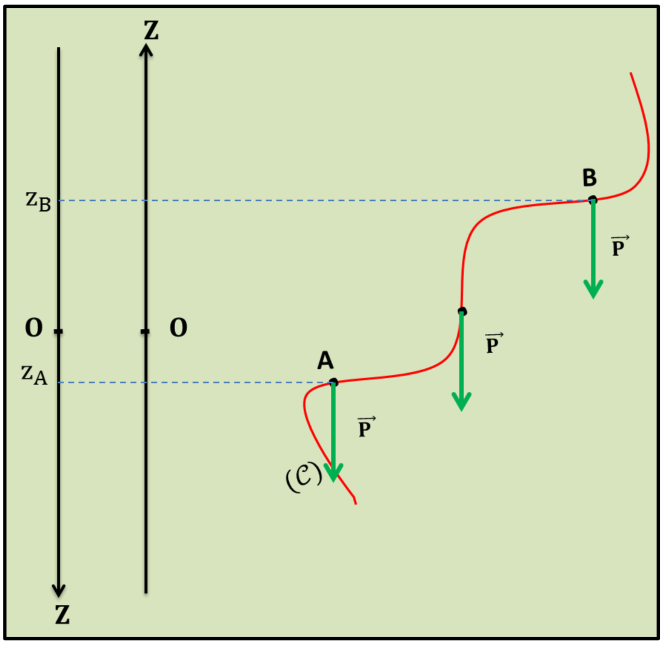
$$\vec{F} = \vec{P} = m.\vec{g}$$

Le travail du poids est donc ;

$$W(\vec{P}) = P.z_A - P.z_B$$

$$W(\vec{P}) = P.(\,z_A - z_B)$$

$W(\vec{P}) = mgh$ ou h est la différence d'altitude entre les points A et B $h = z_A - z_B$



Travail du poids

Selon que l'on oriente Oz vers le haut ou vers le bas, le travail s'écrit mgh ou $-mgh$ (dans le cas de figure il toujours résistante)

III-4-Energie cinétique et énergie potentille

III-4-1 -conservation de l' énergie mécanique

III-4-1 -1-Définition de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'une particule de masse m et qui se déplace à une vitesse $\vec{v}$ au point M est donnée par l'expression

$$E_c(M) = \frac{1}{2}\ m\,v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

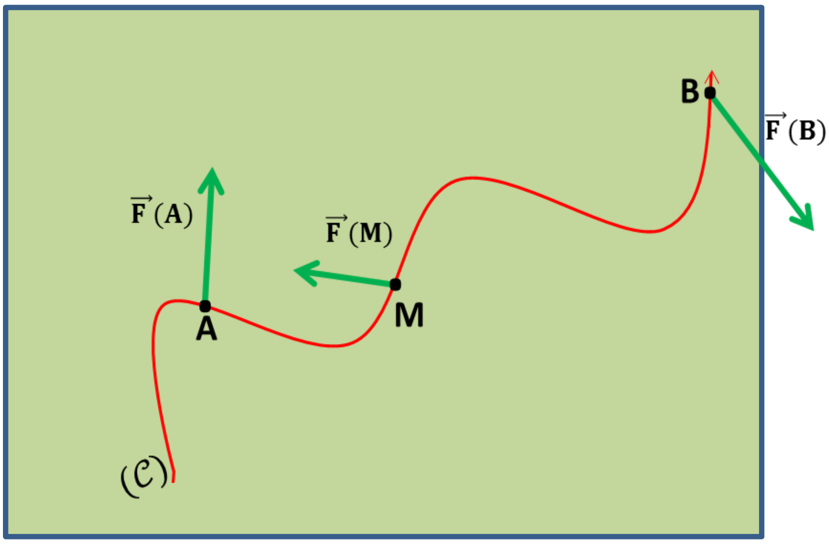
III-4-1 -2-Théorème de l'énergie cinétique

Dans le cas général d'une trajectoire curviligne

a/Enoncé

La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la résultante des forces extérieures.

b/Démonstration



$$\underset{\mathcal{C}_{AB}}{W(\vec{F})} = \int_A^B \vec{F}_T.\overrightarrow{ds} = \int_A^B m\,.\gamma_T.ds$$

$$= \int_A^B m\ \frac{ds}{dt}.ds$$

$$= \int_A^B m\ \frac{dv}{dt}.ds$$

$$= \int_A^B m\ v.dv$$

$$\underset{\mathcal{C}_{AB}}{W(\vec{F})} = \int_{v_A}^{v_B} \frac{m}{2}.d(v^2) = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2$$

III-4-1 -3--Énergie potentielle

Soit une fonction définit par :

$$U: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

On appelle gradient de U notée $\overrightarrow{grad\,U}$, le vecteur définit par :

$$\overrightarrow{grad}\ U = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\ \vec{k}$$

Autres notation on peut faire intervenir l'opérateur différentiel nabla noté : $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\ \vec{k}$$

$$E_p = \vec{\nabla}\, U$$

a/Définition

L'énergie potentielle notée E_p , associe à une force $\vec{F}$ si elle existe la fonction scalaire $E_p(x,y,z)$ telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ E_p(x,y,z)$$

On dit alors que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $E_p(x,y,z)$

Cette expression peut être écrite sous forme différentielle

$$dE_p = -\vec{F}\,.\,d\vec{r}$$

b/Remarque

L'énergie potentielle E_p est définit a un constant pré.

<u>Exemple</u> : énergie potentielles de pesanteur au voisinage de la terre

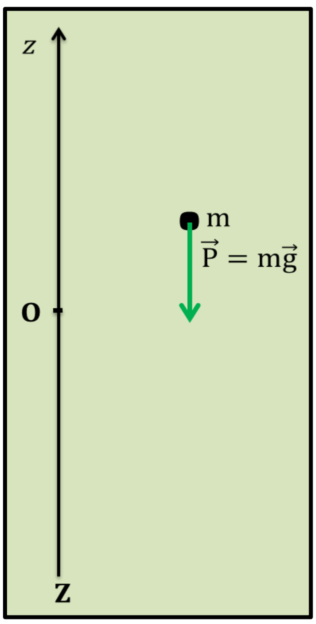
On part de l'expression suivante

$$dE_p = -\vec{F}\,.\,d\vec{r}$$

La force $\vec{F}$ est le poids $\vec{P}$

$$dE_p = -\vec{P}\,.\,d\vec{r}$$

les composantes du poids et $\vec{P}\begin{cases}0\\0\\-mg\end{cases}$ et $d\vec{r}\begin{cases}dx\\dy\\dz\end{cases}$



$$dE_p = -(-mg\ dz)$$

D'où : $E_p = mgz + c$

III-4-1 -4-Conservation de l'énergie mécanique totale

a/Définition de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$E_M = E_C + E_P$

b/Conservation de l'énergie mécanique

Si la force $\vec{F}$ dérive d'un potentielle, alors on a

D'une part

$dE_p = -\overrightarrow{F} . d\vec{r}$

D'autre part

Le travail de la force est

$dW = \overrightarrow{F} . d\vec{r}$

On a donc

$dE_p = -dW$

$dE_p + dW = 0$

En intégrant on trouve

$\Delta E_p + \Delta W = 0$

$E_{P_B} - E_{P_A} + (E_{C_B} - E_{C_A}) = 0$

$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_A}$=constante

Une particule soumise à une force qui dérive d'un potentielle admet une énergie mécanique constante.

Chapitre VII : DYNAMIQUE DU SOLIDE

I- Théorème du centre de gravité pour un système matériel

I -1 Centre de gravité (Centre de masse)

I -1 -1-Définition

Soit un système (S)de particules A_1 ,A_2,A_3 ………A_n de masse respectives m_1,m_2 ,m_3 …….m_n ,on appelle centre de masse du système(S) ,le point G auquel on peut rattacher la masse totale du système M et dont le vecteur position par rapport à un référentiel fixe est donné par la relation suivante.

pour une répartition discontinue :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA}_i$$

Dans un repère cartésien les coordonnées du centre de masse sont données par :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad ; y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} ;\ z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Habituellement, on écrit la masse du système (S)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M$$

Pour une répartition continue le centre de masse est défini par :

$$\left(\int dm\right)\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM}\ \ dm$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int \overrightarrow{OM}\ \ dm}{\int dm}$$

Le point M est le point ou se situe la masse élémentaire dm .

Selon le cas le symbole d'intégration représente soit une intégration simple, double ou triple

-pour une répartition de masse continue sur une ligne :on définit la masse linéique λ_l.

$$dm = \lambda_l\, dl$$

-pour une répartition de masse continue sur une surface :on définit la masse surfacique σ .

$$dm = \sigma\, ds$$

pour une répartition de masse continue dans un volume :on définit la masse volumique ρ.

$$dm = \rho\, dv$$

Remarques

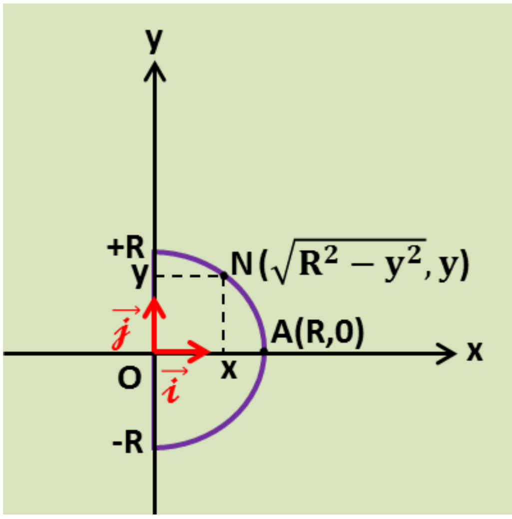
-Pour un solide non homogène les masses linéiques, surfaciques et volumiques se sont des fonctions des points M du solide.

Propriétés

-si un solide possède un élément de symétrie, son centre de masse se situe sur cet élément.

I -1 -2-Exemples

Trouver le centre de gravité d'un demi-disque homogène de rayon R



a/Première méthode en coordonnées cartésiennes

Puisque il existe un axe de symétrie, on place l'un des axes ox ou oy sur l'axe de symétrie

On a $x^2 + y^2 = R^2$ d'où $x = \sqrt{R^2 - y^2}$

Le demi disque D est tel que

$D = \{M(x,y)/x^2 + y^2 \leq R^2 \text{avec } x \geq 0\}$

Dans la figure on a pris l'axe Ox comme axe de symétrie, le centre de gravité se situe donc sur cet axe

Les coordonnées du centre de gravité G est tel que

$y_G = 0$ il nous reste à déterminer $x_G = ?$

On a l'élément de masse : $dm = \sigma\, ds$

Puisque le demi disque est homogène σ est constante

$\overrightarrow{OG} = \frac{\int \overrightarrow{OM} dm}{\int dm} = \frac{\int \overrightarrow{OM} ds}{\int ds}$

$$x_G = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

$$y_G = 0$$

L'élément de surface en coordonnée cartésiennes

$$ds = dx.\, dy$$

$$y_G = \frac{\iint y.\, dx\, dy}{\iint dx.\, dy} = 0 \quad ; \quad x_G = \frac{\iint x.\, dx\, dy}{\iint dx.\, dy}$$

$$\iint dx.\, dy = \frac{\pi R^2}{2}$$

Surface du demi-disque

$$x_G = \frac{\int_{\text{Proj de D/y}} \left(\int_{\text{Proj de D/x pour y fixe}} x\, dx\right) dy}{\iint dx.\, dy}$$

La projection de D sur l'axe x pour y fixé est $\left[0,\ \sqrt{R^2 - y^2}\right]$

$$x_G = \frac{\int_{-R}^{+R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} x\, dx \right) dy}{\iint dx.\, dy}$$

$$x_G = \frac{\int_{-R}^{+R} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \right) dy}{\iint dx.\, dy}$$

$$x_G = \frac{\int_{-R}^{+R} \left(\frac{R^2 - y^2}{2} \right) dy}{\iint dx.\, dy}$$

$$x_G = \frac{\left[\frac{R^2 y - y^3}{2}\right]_{-R}^{+R}}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

$$x_G = \frac{\left[\frac{R^2 y - {y^3}/{3}}{2}\right]_{-R}^{+R}}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

$$x_G = \frac{\frac{2R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

$$x_G = \frac{4R}{3\pi}$$

b/Deuxième méthode en coordonnées polaires

On part de la relation suivante

$$x_G = \frac{\iint x.ds}{\iint ds}$$

Le demi disque D est tel que

$$D = \left\{M(\rho, \theta) \,/ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2} \text{ et } \rho \leq R\right\}$$

On a

$$ds = \rho.d\rho.d\theta$$

$$\iint ds = \iint \rho.d\rho.d\theta = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\iint ds = \int_0^R \rho\, d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$x_G = \frac{\iint \rho\cos(\theta)\rho.d\rho.d\theta}{\iint ds}$$

$$x_G = \frac{\int_0^R \rho^2 d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

On trouve $$x_G = \frac{4R}{3\pi}$$

I -2- Enoncé du théorème du centre de gravité

En dérivant cette expression par rapport au temps toute en sachant que $\sum m_i = M$ masse totale du système matériel, on trouve

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}$$

$$M\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}\right)}{\mathrm{dt}} \ ;$$

soit

$$\mathrm{M}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{G} = \frac{\sum \mathrm{m_i d}\overrightarrow{\mathrm{OA_i}}}{\mathrm{dt}}$$

$$\mathrm{M}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{G} = \sum \mathrm{m_i}\,\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{i}$$

$$\mathrm{M}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{G} = \sum \vec{\mathrm{P}}_\mathrm{i} = \vec{\mathrm{P}}$$

$$\mathrm{M}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{G} = \vec{\mathrm{P}}$$

La quantité du mouvement d'un système matériel est égale au produit de la masse totale du système par la vitesse du centre de gravité.

La quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la quantité de mouvement du système situe au centre de gravité

en dérivant cette l'expression par rapport au temps on trouve

$$\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{G}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\left(\sum \vec{\mathrm{P}}_\mathrm{i}\right)}{\mathrm{dt}}$$

$$M\vec{\gamma}_G = \sum \vec{F}_i$$
$$M\vec{\gamma}_G = \vec{R}$$

Le centre de gravité d’un système matériel rigide ou indéformable a le même mouvement qu’un point matériel ou serait concentré toute la masse et ou serait appliquées toutes les forces agissantes sur le système.

II- Théorème du moment cinétique

II-1-Définition du moment cinétique d’un système matériel

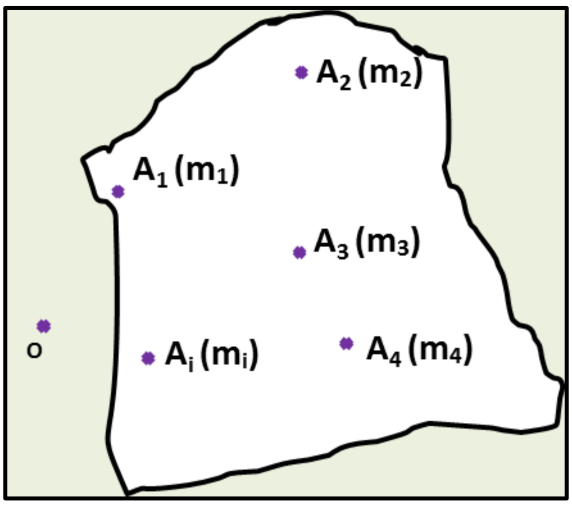
Le moment cinétique d’un système matériel (S) constitués de n particules A_1 ,A_2,A_3 ……………A_n de masse respectives m_1,m_2 ,m_3 ……………..m_n par rapport à un point O est égale la somme vectorielle des moments cinétiques de chaque particule qui le constituent .

Soit le moment cinétique de la particule i par rapport à O est $\vec{L}_{i/O}$:

$$\vec{L}_{i/O} = \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i\vec{v}_i$$

Le moment du système matériel (S) par rapport à O $\vec{\mathcal{L}}_{S/O}$ est égale à :

$$\vec{\mathcal{L}}_{S/O} = \sum \vec{L}_{i/O} = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i\vec{v}_i = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{P}_i$$



II-1-Enoncé du Théorème du moment cinétique

En dérivant la relation précédente par rapport au temps on trouve

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{S/O}}{dt} = \sum\left[\left(\frac{d\overrightarrow{OA_i}}{dt} \wedge \vec{P_i}\right) + \left(\overrightarrow{OA_i} \wedge \frac{d\vec{P_i}}{dt}\right)\right]$$

$$= \vec{0} + \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{S/O}}{dt} = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_i)$$

Soit

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{S/O}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_i)$$

La dérivée du moment cinétique du système (S) par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces qui agissent sur le système.

BIBLIOGRAPHIE

-Berkeley, Cours de Physique, Vol. 1 : Mécanique, A. Colin, Paris.

-Eléments de mécanique du point DUNOD université

- Feynman R., Le cours de physique de Feynman, 5 volumes, Dunod, (2013).

- Mécanique, ondes. Julien Bok. Pierre Morel -Hermann, 1971

- https://www.univ-usto.dz/images/coursenligne/cours_de_mecanique_point.pdf de Z - NOSSAIR

-http://cours-examens.org/index.php/etudes-superieures/tronc-commun-technologie.

- A. CHAFA, A.DIB, F.CHAFA, MEKIDECHE, A.DERBOUZ, FKAOUAH, Polycopié d'examens de mécanique du point, USTHB, www.usthb.dz/fphy/IMG/pdf/examens.pdf