République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Équations Différentielles stochastiques Rétrogrades : cas non Lipchitziens

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saïda-Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Mokhtaria **ANTRI**[1]

Sous la direction de

Dr. Lamia. **B**OUSMAHA

Soutenu le 15/07/2019 devant le jury composé de

Mr. M. Kadi	Université Dr. Tahar Moulay - Saïda	Président
Melle. L. Bousmaha	Université Dr. Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mr. L. Mimoun	Université Dr. Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mme. O. Benzatout	Université Dr. Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : antrimokhtaria10@gmail.com

Dédicaces

✓ **A la mémoire de mon pére ;**

✓ **A ma très chère mère ;**

✓ **A mes frères ;**

✓ **A mes soeurs ;**

✓ **A mes amies.**

Remerciement

Je tiens à exprimer mes remerciement à "***ALLAH***" qui m'a aidé et m'a donné la patience et le courage durant ces longues années d'études.

Je remercie particulièrement mon encadreur, ***Dr. Lamia BOUSMAHA***, pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité du début jusqu'à la fin de ce travail.

La pertinence de ses questions et ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger.

Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je remercier également tous les membres de jury, ***Mr. Kadi MOKHTAR*** d'avoir accepté de présider le jury, ***Mme. Ouahiba BENZAOTOUT*** et ***Mr. Laouni MIMOUN*** d'avoir examiner ce modeste travail.

J'adresse mes remerciements à Monsieur ***Pr. Abdeldjebbar KANDOUCI*** directeur du laboratoire LMSSA, ainsi que tous les membres du Laboratoire pour leurs écoutes sympathie et enthousiasme en me considérant comme un élément a part entière de leur équipe ce qui a renforcé mon épanouissement personnel et professionnel.

J'exprime mes remerciements à toute ma famille et mes proches pour leurs soutiens tout au long de ce travail pour surpasser toute les difficultés.

Enfin, je tiens à remercier mes amis, et tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastique rétrogrades, notée (EDSRs), ou en englais BSDR (Backwards Stochastics Differentials Equations) sont des nouveaux types des équations différentielles stochastiques (EDSs), leurs valeur est donnée en temps finale T. Les EDSR ont recevé une attention considérable dans la recherche en probabilité car les EDSRs fournissent une représentation probabiliste pour les solutions de certaine classe des équations aux dérivées partielles quasilinéaires paraboliques de second ordre, et ont une relation avec les solutions de viscosité des EDP. La théorie des EDSR a trouvé beaucoup d'applications telles que la théorie du contrôle stochastique, économie, et à des problèmes de mathématiques financières.

L'équation du processus adjoint dans un contrôle stochastique optimal (voir [2],[4],[13],[20]) est une version linéaire de l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$x(t) + \int_t^T f(s, x(s), y(s))ds + \int_t^T [g(s, x(s)) + y(s)]dW(s) = X \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad (1)$$

où : $\{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien de dimension d défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ muni de la filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ (i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$), et X est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^d$ tels que $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$. De plus, f est une application de $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times m}$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$ qui est supposé d'être $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}_d\otimes\mathcal{B}_{d\times m}/\mathcal{B}_{d\times q}$-mesurable, où $\mathcal{P}$ désigne la σ-algèbre de sous-ensembles $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurables sur $(\Omega \times [0,T])$. Aussi g est une application de $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d$ à valeur dans $\mathbb{R}^{d\times m}$, qui est supposé d'être $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_d/\mathcal{B}_{d\times m}$-mesurable.

Dans le domaine de contrôle, nous considérons généralement $y(t)$ comme un contrôle adapté et $x(t)$ comme l'état de système. Nous sommes permis à choisir un contrôle adapté $y(t)$ qui contrôle l'état $x(t)$ du système à un cible donné X à l'instant $t = T$. C'est ce qu'on appelle "l'accessibilité du problème". Donc, en fait nous recherchons un couple de processus stochastiques $\{x(t), y(t) : 0 \leq t \leq T\}$ avec des valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times m}$ qui est $\mathcal{F}_t$-adapté et satisfait l'Eq (1).

Pardoux et Peng (1990) ([24]) ont montré l'existence et l'unicité de la solution adaptée sous la condition que $f(x, y, t)$ et $g(x, t)$ soient uniformément continus lipschitziens dans (x, y) et dans x respectivement. Pardoux et Peng (1992) et Peng (1991) ([26]) ont donné la représentation probabiliste pour une solution donnée d'un certain système des équations aux dérivées partielles paraboliques quasilinéarité en termes de solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades. D'autres part, ils ont obtenu une généralisation de la formule de Feynman-Kac. Vu la puissance de la formule dans l'étude des équations aux dérivées partielles, par ex. l'équation de KPP (.10) (Andrey Kolmogorov, Ivan Petrovsky, et Nikolai Piskunov) (cf. Freidlin, 1985), on peut s'attendre à ce que la formule généralisée de Pardoux-Peng joue un rôle important dans l'étude des équations différentielles partielles parabolique quasi-linéaire. Ainsi, des deux points de vue de la théorie du contrôle et de l'étude des équations différentielles partielles, il est utile d'étudier les équations différentielles stochastiques rétrogrades plus en détail.

Pardoux et Peng (1990)([24]) ont établi l'existence et l'unicité de la solution à l'équation (1) sous la condition uniformement lipschitzienne, c'est à dire, il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$|f(x, y, t) - f(\overline{x}, \overline{y}, t)|^2 \leq K(|x - \overline{x}|^2 + |y - \overline{y}|^2|) \qquad p.s., \tag{2}$$

$$|g(x, t) - g(\overline{x}, t)|^2 \leq K|x - \overline{x}|^2 \qquad p.s. \tag{3}$$

pour tout $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^d; y, \overline{y} \in \mathbb{R}^{d\times m}$ et $0 \leq t \leq T$. D'autre part, il est en quelque sorte trop forte d'exiger la continuité uniformement lipschitzienne dans les applications, par ex. dans le traitement des équations différentielles partielles paraboliques quasi-linéaires. Il est donc important de trouver des conditions plus faibles que celle de lipschitz dans laquelle l'équation différentielle stochastique rétrograde a une solution unique. En premier lieu, on pourrait peut-être essayer la condition localement lipschitzienne plus la condition de croissance linéaire, car ces conditions garantissent l'existence et l'unicité de la solution pour une équation différentielle stochastique. Pour être précis, énonçons ces conditions comme suit : Pour chaque $n = 1, 2, ...,$ il existe une constante $K_n > 0$ telle que

$$|f(x, y, t) - f(\overline{x}, \overline{y}, t)|^2 \leq K_n(|x - \overline{x}|^2 + |y - \overline{y}|^2|) \qquad p.s., \tag{4}$$

$$|g(x, t) - g(\overline{x}, t)|^2 \leq K_n|x - \overline{x}|^2 \qquad p.s. \tag{5}$$

pour tout $0 \leq t \leq T, x, \overline{x} \in \mathbb{R}^d, y, \overline{y} \in \mathbb{R}^{d\times m}$ avec $max\{|x|, |\overline{x}|, |y|, |\overline{y}|\} < n$; et de plus il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|f(x,y,t)|^2 \leq K(1+|x|^2+|y|^2) \quad et \quad |g(x,t)|^2 \leq K(1+|x|^2) \qquad p.s. \tag{6}$$

pour tout $0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^{d\times m}$. Malheureusement, on ne sait pas toujours si $((3.1)-(3.3))$ garantissent l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (1). La difficulté ici est que la technique du temps d'arrêt et de la localisation ne semble pas fonctionner pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Maintenant, la question est la suivante : existe-t-il des conditions plus faibles que la continuité lipschitzienne sous laquelle l'équation différentielle stochastique rétrograde a une solution unique ?.

Dans ce mémoire, nous donnerons une réponse positive. Nous proposerons la condition suivante : pour tout $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^d, y, \overline{y} \in \mathbb{R}^{d\times q}, 0 \leq t \leq T$

$$|f(t,x,y) - f(t,\overline{x},\overline{y})|^2 \leq \kappa(|x-\overline{x}|)^2 + K(|y-\overline{y}|^2|) \qquad p.s \tag{7}$$

$$|g(t,x) - g(t,\overline{x})|^2 \leq \kappa(|x-\overline{x}|^2) \qquad p.s. \tag{8}$$

où K est une constante positif et κ est une fonction croissante concave de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\kappa(0) = 0, \kappa(u) > 0$ pour $u > 0$ et

$$\int_{0+} \frac{du}{\kappa(u)} = \infty.$$

L'objectif principal de ce chapitre est de montrer que sous cette condition l'équation différentielle stochastique rétrogrades (1) a une solution unique.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre : On présente quelques notions de base sur la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades dans un cas légeremnt spécial où $g \equiv 0$, puis on démontre le théorème fondamentale d'existence et d'unicité d'une solution dû a E. Pardoux et S. Peng dans le cas où le générateur f est non linéaire avec la condition terminale ξ est de carré intégrable.

Le deuxième chapitre : On étudié l'existence et l'unicité de solution d'une EDSR générale sous la condition que $f(x,y,t)$ et $g(x,t)$ sont uniformément lipchitziens en $(x;y)$ et x respectivement, avec la condition terminale X est de carré intégrable.

Le troisième chapitre : On étudié l'existence et l'unicité de la solution d'EDSR où les coefficients sont non Lipchitziens.

Chapitre 1

Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion des équations différentielles stochastiques rétrogrades en général.

Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, \quad \text{avec } 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition treminale $Y_T = \xi$ où ξ est une variable aléatoire de carré intégrable, ou équivalente :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \ \ 0 \leq t \leq T.$$

Cette appellation (rétrograde), provient de fait que le processus contrairement à d'autres EDS est déteminé à partir de la condition finale $Y_T = \xi$.

La théorie des EDSR a été grandement developpé en raison de ses relations étroites avec les mathématiques financières et les EDP. Donnons un exemple affecté sur les deux thèmes précédents :

En finance, une question importante est imposée : **Comment déterminer le prix d'une option un produit financier ?**

Cette oeuvre est consacré à étudier l'évaluation et la couverture des options européennes et américaines à l'aide des EDSRs tout en restreignant l'étude dans le cadre d'un marché complet. Le modèle qui nous permet de décrire la dynamique du marché reste, par excellence, celui de

Black-Scholes, le prix de ce produit financier, $(V_t)_{0\leq t\leq T}$ satisfait l'équation :

$$dV_t = (rV_t + \theta Z_t)dt + Z_t dW_t, \tag{1.1}$$

où :

1. r est le taux d'intéret à court terme ;
2. θ est le prime de risque ;

avec la condition finale $V_T = (S_T - K)^+$ où :

1. S_t est le prix de l'action sous-jacente ;
2. K une constante fixé à l'avance.

Nous voyons que (1.1) est une EDSR linéaire.

Et au second exemple, Considérons l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\partial^2_{x,x}u(t,x) + f(u(t,x)) = 0 \\ \\ ou : u(T,x) = g(x) \end{cases}$$

Supposons que cette équation possède une solution régulière u. Appliquons la formule d'Itô à $u(s, w_s)$; on obtient

$$\begin{aligned} du(s,w_s) &= \{\partial_s u(s,W_s) + \frac{1}{2}\partial^2_{x,x}u(s,W_s)\}ds + \partial_x u(s,W_s)dW_s \\ \\ &= -f(u(s,W_s))ds + \partial_x u(s,W_s)dW_s. \end{aligned}$$

Nous obtenons une EDSR qui est non-linéaire si f l'est, en posant $Y_s = u(s, W_s)$ et $Z_s = \partial_x u(s, W_s)$ puisque :

$$dY_s = -f(Y_s)ds + Z_s dW_s, \text{ avec, } Y_T = g(W_T).$$

1.1 Rappels préliminaires sur la théorie des EDSR

1.1.1 Justification de la structure des EDSR

On donne un mouvement Brownien W, d-dimensionnel défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dont la filtration naturelle augmentée est notée $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, imaginons à présent que l'on souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dY_t}{dt} = -f(Y_t), \ \forall t \in [0,T], \text{ avec } Y_T = \xi, \tag{1.2}$$

où ξ est une variable aléatoire $\{\mathcal{F}_T\}$-mesurable, c'est-à-dire une variable aléatoire connue à l'instant T. Le temps T est aussi parfois appelé horizon. Supposons pour simplifier que $f \equiv 0$, le problème (1.2) devient alors :

$$\frac{dY_t}{dt} = 0, \ \forall t \in [0, T], \quad \text{avec } Y_T = \xi. \tag{1.3}$$

Un candidat solution à ce problème est alors $Y_t = \xi, \forall t \in [0, T]$. Cependant, si nous demandons à la solution de ne pas dépendre du futur, supposant que la solution a l'instant t ne dépende que du passé, c'est-à-dire d'être adapté à la filtration générée par le mouvement brownien $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, alors la solution proposée ne convient pas. Un moyen naturel est de rendre adapté sans changer sa valeur terminale est de considérer son espérance conditionnelle par rapport à la filtration du mouvement brownien. Un nouveau candidat solution est alors :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t).$$

Nous utilisons le théorème de représentation des martingales browniennes pour faire apparaître une intégrale stochastique. Y_t étant une martingale brownienne qui est la meilleure approximation dans L^2, permet de construire un processus Z adapté et de carré intégrable tel que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s$$

En différenciant la relation précédente et un calcul élémentaire montre alors que

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \ \text{i.e.} \ \ dY_t = Z_t dW_t \text{ avec}, \ \ Y_T = \xi. \tag{1.4}$$

Manifestement, la structure de l'équation initiale (1.3) a été modifiée, faisant apparaître un nouveau terme $Z_t dW_t$ qui permet de rendre la solution adaptée. Revenons à présent au problème initial (1.2), comme nous introduisons un terme supplémentaire Z dans l'équation, il est naturel d'autoriser la fonction f à dépendre de Z, ce qui nous conduit au problème :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_s, Z_s)dt + Z_t dW_t & \forall t \in [0, T], \\ \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

1.1.2 Vocabulaire et notations :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et W un MB d-dimensionnel dans $(\mathbb{R}^d)$ sur cet espace.

$$W = \{W_t^i, t \geq 0, 1 \leq i \leq d\}.$$

On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB W.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s \cup \mathrm{N}, 0 \leq s \leq t).$$

On travaillera avec les quatres espaces de processus :

1. $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$: est l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que :

$$\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty;$$

2. $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$: est le sous-espace formé par les processus continus ;
3. $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: celui l'espace vectoriel formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, telle que :

$$\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty;$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z_t\|^2 = trace(ZZ^*)$;

4. $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

$\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis ; les espaces $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}^2_c$ et M^2 sont des espaces de Banach pour ces normes. On désigne par $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dans tout ce qui suit, on considère une application aléatoire f s'appelle le génerateur, telle que le processus $\{f(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable, et une variable aléatoire ξ, $\mathcal{F}_T$-mesurable. On donne l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) suivante :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T, \\ \\ Y_T = \xi & \text{si} \quad t = T, \end{cases}$$

où équivalente (sous forme intégrale) :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \ 0 \leq t \leq T. \tag{1.5}$$

où : $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k, \quad \xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Immédiatement, présentons le solution de l'EDSR (1.5).

Définition 1.1.1. *Une solution de l'EDSR* (1.5) *est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. *Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$;*
2. *$\mathbb{P}-p.s.$ $\int_0^T \{|f(s,Y_s,Z_s)| + \|Z_s\|^2\}ds < \infty$;*
3. *$\mathbb{P}$-p.s. On a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \le t \le T.$$

Remarque 1.1.1. *Il est important de rappeller les points suivants :*

1 *les intégrales de l'équation* (1.5) *étant bien définies ;*

2 *Y est une semi-martingale continue, progressivement mesurable donc : il est adapté ;*

3 *Y_0 est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$.

Proposition 1.1.1. *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\le t\le T}$, positif, appartenant à $M^2(\mathbb{R})$ et une constante positive λ tels que*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d},\ |f(t,y,z)| \le f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\le t\le T}$ est une solution de l'EDSR (1.5) *telle que $Z \in M^2$ alors Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$.*

Preuve : Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall (.1) et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s,$$

et par suite, en utilisant l'hypothèse sur f,

$$|Y_t| \le |Y_0| + \int_0^T (f_s + \lambda\|Z_s\|)ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Z_s dW_s\right| + \lambda\int_0^t |Y_s|ds.$$

On Pose :

$$K = |Y_0| + \int_0^T (f_s + \lambda\|Z_s\|)ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Z_s dW_s\right|.$$

Par hypothèse, Z appartient à M^2 et par l'utilisation de l'inégalité de Doob (.1), le troisième terme $Z_s dW_s$ est de carré intégrable ; et de même pour $\{f_t\}_{0\le t\le T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; par suit K est une variable aléatoire de carré intégrable.

Comme Y est un processus continu qui vérifié,

$$|Y_t| \le K + \lambda\int_0^t |Y_s|ds$$

D'aprés le lemme de Gronwall (.1), on obtient :

$$|Y_t| \leq K e^{\lambda t}$$

d'où :

$$\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \leq K e^{\lambda T}$$

comme K est de carré intégrable, alors Y appartient à $\mathcal{S}^2$.

Lemme 1.1.1. *Soient $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors $\left\{ \int_0^t Y_s.Z_s dW_s,\ t \in [0,T] \right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve : Les inégalités BDG (.3) donnent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t \langle Y_s, Z_s dW_s\rangle\Big|\Big] &\leq C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |Y_s|^2\|Z_s\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \\
&\leq C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |Y_t|^2\|Z_s\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \\
&\leq C\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\Big(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].
\end{aligned}$$

et par suite, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t \langle Y_s, Z_s dW_s\rangle\Big|\Big] &\leq \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t \langle Y_s, Z_s dW_s\rangle\Big|\Big] \\
&\leq C'\Big(\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\Big]\Big) \\
&\leq \infty.
\end{aligned}$$

Où $C' = \frac{C}{2}$, puisque $\int_0^t Y_s, Z_s dW_s$ est une martingale, $\mathbb{E}\Big[\int_0^t Y_s, Z_s dW_s\Big] = 0$.

Puisque cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. $\square$

1.2 Le cas Lipschitz

1.2.1 Le résultat fondateur de Pardoux-Peng :

EDSR Lipschitziennes non linéaire :

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui sera généralisé au chapitre suivant. Ce résultat est dû à E. Pardoux et S. Peng [25] ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Considérons les hypothèses **(L)** suivantes :

1. Condition de Lipschitz en (y,z) ; Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}$-p. s., pour tout t, y, y', z, z',
$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda(|y-y'| + \|z-z'\|);$$
2. Condition d'intégrabilité :
$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds\right] < \infty.$$

Un cas simple : Nous commençons par un cas très simple, celui où $f(t,y,z) = F_t$ ne dépend ni de y ni de z. On considère l'équation :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s, \;\; 0 \leq t \leq T. \tag{1.6}$$

Lemme 1.2.1. *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR (1.6) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve :

L'existence : Supposons que (Y,Z) est une solution de (1.6) telle que $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\{\mathcal{F}_t\}$, on a :

$$Y_t = \mathbb{E}\Big(Y_t \backslash \mathcal{F}_t\Big) = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s \backslash \mathcal{F}_t\Big), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Puisque $\int_t^T Z_s dW_s$ est une martingale nulle en 0.

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'après le théorème de Fubini (.2), comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans $\mathcal{S}_c^2$ puisque F est de carré intégrable.

On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\Big[\xi + \int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \backslash \mathcal{F}_t\Big] - \mathbb{E}\Big[\int_0^T Z_s dW_s - \int_0^t Z_s dW_s \backslash \mathcal{F}_t\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big(\xi + \int_0^T F_s ds \backslash \mathcal{F}_t\Big) - \int_0^t F_s ds \end{aligned}$$

on pose :

$$M_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^T F_s ds \backslash \mathcal{F}_t\Big) = Y_t + \int_0^t F_s ds$$

M_t est une martingale brownienne de carré intégrable. D'après le Théorème de représentation des martingales, il existe un processus prévisible Z de carré intégrable $Z \in M^2$, telle que :

$$M_t = \mathbb{E}(M_T) + \int_0^t Z_s dW_s$$

Donc :

$$\begin{aligned} Y_t &= M_t - \int_0^t F_s ds \\ &= \mathbb{E}(M_0) + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds \\ &= Y_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds \end{aligned}$$

On vérifiant que (Y,Z) est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T &= Y_t - \xi \\ &= M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds - \Big(M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T F_s ds\Big) \\ &\Rightarrow\ Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s \end{aligned}$$

Unicité :

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$.

Supposons que $(Y_1; Z_1)$ et $(Y_2; Z_2)$ sont deux solutions.

Soient

$\widetilde{Y} = Y_1 - Y_2;\ \widetilde{Z} = Z_1 - Z_2$, alors : $\widetilde{Y} = \int_t^T \widetilde{Z} dW_s, \quad t \in [0; T]$ Nous allons prouvés que : $\widetilde{Y} = \widetilde{Z} = 0\,;\, dt \times d\mathbb{P}.\ \mathbb{P} -$ p.s.

En effet, premièrement écrivons ;

$$\widetilde{Y} = \int_0^T \widetilde{Z} dW_s - \int_0^t \widetilde{Z} dW_s; \qquad t \in [0; T].$$

On applique l'inégalité martingale de Doob, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} |M_t|^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_T|\right]^p$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} |\widetilde{Y}_t|^2\right] \le 4\mathbb{E}\left[|\widetilde{Y}_T|\right]^2$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} |\widetilde{Y}_t|^2\right] \le 2\int_0^t \widetilde{Z}_s ds \le \infty \tag{1.7}$$

Nous appliquons la formule d'Itô à $f(Y_t) = |\widetilde{Y}_t|$ de t à T et on note que :
$\widetilde{Y}_t = \xi - \xi = 0$.

On a :

$$0 = |\widetilde{Y}_t|^2 + 2\int_t^T \widetilde{Y}_s d\widetilde{Y}_s + \int_0^T |\widetilde{Z}_s|^2 ds$$

Où :

$$\widetilde{Y}_s d\widetilde{Y}_s = -\widetilde{Y}_s \widetilde{Z}_s dW_s$$

Donc :

$$|\widetilde{Y}_t|^2 + \int_t^T |\widetilde{Z}_s|^2 ds = 2\int_t^T \widetilde{Y}_s \widetilde{Z}_s dW_s \tag{1.8}$$

Soit $N_t = \int_t^T |\widetilde{Y}_s \widetilde{Z}_s| dW_s$ alors pour tout $t \ge 0$ le processus a variation quadratique ;

$$\langle N_t \rangle = \int_0^t |\widetilde{Y}_s \widetilde{Z}_s|^2 ds, \quad t \in [0, T]$$

en utilisant l'estimation (1.7), et l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$|\langle M,N\rangle_t| \leq \sqrt{\langle M_t\rangle}\sqrt{\langle N_t\rangle} \quad , \qquad t \geq 0,$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\langle N\rangle_t| &= |\langle N,N\rangle_t| \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T |\widetilde{Y}_s\widetilde{Z}_s|^2 ds\right]^{1/2} \\ &\leq \mathbb{E}\left[|\widetilde{Y}_t|^2\right]\mathbb{E}\left[\int_0^T |\widetilde{Z}_s|^2 ds\right]^{1/2} \\ &\leq \infty. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1. *On peut montrer que la martingale locale* $N_t = \{N\}_t$ *est une martingale uniformément intégrable. En prenant l'espérance dans* (1.8) *et appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient que :*

$$\mathbb{E}\,|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T |Z_s|^2\,ds = 0$$

ceci démontre que $\widetilde{Y} = 0$ *et* $\widetilde{Z} = 0$ *donc l'unicité de* Y.

En ce qui concerne l'unicité de Z, elle est assurée par le théorème de représentation des martingales. □

Nous montrons à présent le théorème d'existence de Pardoux et Peng.

Théorème 1.2.1. (***Pardoux-Peng 90***) :

Sous l'hypothèse ***(L)****, l'EDSR* (1.5) *possède une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve : Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui même de façon que $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'EDSR (1.5) ssi c'est un point fixe de Ψ.

Pour (U,V) élément de $\mathcal{B}^2$, on définit $(Y,Z) = \Psi(U,V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T Z_s dw_s,\ 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$. En effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$|F_s| \leq |f(s,0,0)| + \lambda|U_s| + \lambda\|V_s\|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (1.2.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$. (Y, Z) appartient à $\mathcal{B}^2$: l'intégralité de Z est obtenue par construction et d'après la Proposition (1.1.1), Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$. L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui même est donc bien définie.

Soient (U, V) et (U', V') deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et $(Y, Z) = \Psi(U, V)$, $(Y', Z') = \Psi(U', V')$. Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$. On a, $y_T = \xi - \xi = 0$ et

$$dy_t = -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\}dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t}|y_t|^2) &= \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt + 2e^{\alpha t}|y_t| dy_t + \langle e^{\alpha t}|z_t|^2\rangle dt \\ &= \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt + e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dt + 2e^{\alpha t}|y_t|\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\}dt + z_t dW_t \\ &= \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t}y_t.\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\}dt + 2e^{\alpha t}y_t.z_t dW_t + e^{\alpha t}\|z_t\|^2 dt \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds = \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha|y_s|^2 + 2y_s.\{f(s, U_s, V_s) - f(s, U'_s, V'_s)\})ds - \int_t^T 2e^{\alpha s}y_s.z_s dW_s,$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement,

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds \leq \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha|y_s|^2 + 2\lambda|y_s||u_s| + 2\lambda|y_s|\|v_s\|)ds - \int_t^T 2e^{\alpha s}y_s.z_s dW_s.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on a $2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 s &\leq \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha + \frac{2\lambda^2}{\epsilon})|y_s|^2 ds - \int_t^T 2e^{\alpha s}y_s.z_s dW_s \\ &\quad + \epsilon\int_t^T e^{\alpha s}(|u_s|^2 + \|v_s\|^2)ds, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\epsilon}$, on a, notant $R_\epsilon = \epsilon\int_0^T e^{\alpha s}(|u_s|^2 + \|v_s\|^2)ds$,

$$\forall t \in [0, T], \quad e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\|z_s\|^2 ds \leq R_\epsilon - 2\int_t^T e^{\alpha s}y_s.z_s dW_s. \tag{1.9}$$

D'après le Lemme (1.1.1)s, la martingale locale $\left\{ \int_0^t e^{\alpha s} y_s . z_s dW_s \right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque $Y, Y,'$ appartiennent à $\mathcal{S}^2$ et Z, Z' appartiennent à M^2. En particulier, prenant l'espérance ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] \leq \mathbb{E}[R_\epsilon]. \tag{1.10}$$

Revenant à l'inégalité (1.9), les inégalités BDG fournissent-avec C universelle-

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] &\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha s} |y_s|^2 \|z_s\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}} |y_t| \left(\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right],
\end{aligned}$$

puis, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, avec $a = \sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}} |y_t|$, $b = \int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}}$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] \leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right].$$

Prenant en considération l'inégalité (1.10), on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] &\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] \\
\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] &\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] \\
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] &\leq 2\mathbb{E}[R_\epsilon] + C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] \\
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] \right. &\leq 2\mathbb{E}[R_\epsilon] + C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] \\
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] \right. &\leq 3\mathbb{E}[R_\epsilon] + C^2\mathbb{E}[R_\epsilon]
\end{aligned}$$

et par suite, revenant à la définition de R_ϵ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds \right] \leq \epsilon(3 + C^2)(1 \vee T)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \|v_s\|^2 ds \right].$$

Prenons ϵ tel que $\epsilon(3+C^2)(1\vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui même si on le munit de la norme

$$\|U,V\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}e^{\alpha t}|U_t|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\|V_s\|^2ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach- cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (1.5) dans $\mathcal{B}^2$.

On obtient donc une unique solution vérifiant $Z\in M^2$ puisque la Proposition (1.1.1) implique qu'une telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$.

Remarque 1.2.2. À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression "la solution de l'EDSR " signifiera la solution de l'EDSR vérifiant $Z\in M^2$.

1.2.2 Le rôle de Z.

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_s dW_s$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 1.2.1. *Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR (1.5) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T. On suppose, outre l'hypothèse (L), que ξ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et que $f(t,y,z)=0$ dès que $t\ge\tau$.*

Alors $Y_t=Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t=0$ si $t\ge\tau$.

Preuve : Soit $t\in[0,T]$. On a $\mathbb{P}$- p. s.,

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_t^T Z_s dW_s.$$

Si $t\le\tau$ alors $t\wedge\tau=t$ et donc $Y_{t\wedge\tau}=Y_t$. Soit à présent $t\ge\tau$ alors

$$\begin{aligned}
Y_{t\wedge t} &= Y_\tau \\
&= \xi+\int_\tau^T f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_\tau^T Z_s dW_s \\
&= \xi-\int_\tau^T Z_s dW_s
\end{aligned}$$

On a alors

$$Y_\tau = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_\tau) = \xi.$$

$$\xi = \xi - \int_\tau^T Z_s dW_s.$$

et par suite

$$\int_\tau^T Z_s dW_s = 0$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \|Z_s\|^2 ds\right] = 0,$$

et finalement

$$Z_s 1_{s\geq\tau} = 0.$$

Puisque par hypothèse, si $t \geq \tau$,

$$Y_\tau = \xi - \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s + \int_\tau^t f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_\tau^t Z_s dW_s$$

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_\tau^t Z_s dW_s = Y_t.$$

ce qui termine la preuve. Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0), \quad Y_T = \xi,$$ □

1.3 EDSR linéaires

Dans ce paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; Y est donc un réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ c'est-à-dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 1.3.1. *Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable et à valeurs réelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y(t) = \xi + \int_t^T \{a_s y_s, b_s Z_s, c_s\}ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_s\Gamma_s ds/\mathcal{F}_t\right), \qquad \forall t \in [0,T].$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s ds\right).$$

Preuve : Remarquons d'abord que le processus Γ vérifie :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t dW_t), \qquad \Gamma_0 = 1.$$

En effet, soient $G = G_{t\in[0,T]}$ et $H = H_{t\in[0,T]}$ deux processus définis par : $G_t = \displaystyle\int_0^t b_s dW_s$ et $H_t = \displaystyle\int_0^t \left(a_s - \frac{1}{2}|b_s|^2\right) ds.$

Γ s'exprime alors comme : $\Gamma_t = \exp(G_t + H_t)$. On applique la formule d'Itô pour $h(x,y) = e^{x+y}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= 1 + \int_0^t \Gamma_s b_s dW_s + \int_0^t \Gamma_s(a_s - \frac{1}{2}|b_s|^2)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma_s |b_s|^2 ds;\\ &= 1 + \int_0^t \Gamma_s b_s dW_s + \int_0^t \Gamma_s a_s ds.\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

D'autre part, Γ est de carré intégrable. En effet, comme a et b sont bornés, alors

$\exists\ \alpha,\ \beta$ des réels positifs tels que $t \in [0,T],\ \ alors\ \ \exp\left(\displaystyle\int_0^t a_s ds.\right) < \alpha,\ \ \exp\left(\displaystyle\int_0^t |b_s|^2 ds\right) < \beta.$

Utilisera dans le calcul suivant l'inégalité de Doob à la troisième ligne pour $\{\exp\left(\displaystyle\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 ds\right)\}_{t\in[0,T]}$ qui est une martingale locale d'après le Lemme (1.2.1), mais comme b est borné, alors c'est une vraie martingale.

On pose $M_t = \int_0^t b_s dW_s$ et donc $\langle M, M\rangle_t = \int_0^t |b_s|^2 ds$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\big(\sup_{0\le t\le T}|\Gamma|^2\big)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\le t\le T}\exp\Big\{\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s\Big\}\Big)^2\Big] \\
&= \alpha^2\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\le t\le T}\exp\Big\{M_t - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t\Big\}\Big)^2\Big] \\
&= 4\alpha^2\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\le t\le T}\exp\Big\{M_t - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t\Big\}\Big)^2\Big] \\
&= 4\alpha^2\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\le t\le T}\exp\Big\{2M_t - \frac{1}{2}\langle 2M, 2M\rangle_t\Big\}\Big)^2\Big] \\
&= 4\alpha^2\beta\Big(\exp\Big\{2M_0 - \frac{1}{2}\langle 2M, 2M\rangle_0\Big\}\Big) \\
&= 4\alpha^2\beta
\end{aligned}$$

où l'avant dernière ligne vient du fait que $\exp\Big\{2M_t - \frac{1}{2}\langle 2M, 2M\rangle_t\Big\}_{t\in[0,T]}$ soit aussi une martingale, d'où la constance de son espérance. Donc comme b est borné, l'inégalité de Doob montre que le processus Γ appartient bien à $\mathcal{S}^2$.

De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z) à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser $f(t, Y, Z) = a_t Y + Z b_t + c_t$ et de vérifier que $(\mathbf{L})$ est satisfaite. Y appartient à $\mathcal{S}^2$ par la Proposition (1.1.1).

La formule d'intégration par parties donne

$$d(\Gamma Y)_t = \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y\rangle_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t b_t dW_t.$$

Ce qui montre que le processus $\Big(\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s c_s ds\Big)$ est une martingale locale qui est en fait une vraie martingale car $c \in \mathrm{M}^2$ et Γ, Y sont dans $\mathcal{S}^2$.

Par suite

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s c_s ds = \mathbb{E}\Big(\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s c_s ds \backslash \mathcal{F}_t\Big).$$

Ce qui donne

$$\Gamma_t Y_t = \mathbb{E}\Big(\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s c_s ds / \mathcal{F}_t\Big).$$

Ce qui donne la formule annoncée. □

1.3.1 Théorème de comparaison

Ce paragraphe est consacré au « théorème de comparaison » qui permet de comparer les solutions de deux EDSR (dans $\mathbb{R}$) dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs. Ce théorème est dû à l'origine à S. Peng [34].

Théorème 1.3.1. *Supposons que $k = 1$ et que (ξ, f), (ξ', f') vérifient l'hypothèse ($\boldsymbol{L}$). On note (Y, Z) et (Y', Z') les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que $\mathbb{P} - p.s$, $\xi \leq \xi'$ et que $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$ (m mesure de Lebesgue). Alors,*

$$Y_t \leq Y'_t \qquad \mathbb{P} - p.s, \qquad \forall t \in [0, T].$$

Si de plus, $Y_0 = Y'_0$, alors $\mathbb{P} - p.p, Y_t = Y'_t, 0 \leq t \leq T$ et $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y_t, Z_t)$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$

En particulier, dès que $\mathbb{P}(\xi \leq \xi') > 0$ ou $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ sur un ensemble de $m \otimes \mathbb{P}$-mesure strictement positive alors $Y_0 \leq Y'_0$.

Preuve du Théorème (1.3.1) : La preuve s'effectue par linéarisation ce qui permet de se ramener aux EDSR linéaires. On cherche une équation satisfaite par $U = Y' - Y$; on a notant $V = Z' - Z$ et $\zeta = \xi' - \xi$,

$$U_t = \zeta + \int_t^T (f'(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s))ds - \int_t^T V_s dW_s.$$

On découpe l'accroissement des f en trois morceaux en écrivant

$$f'(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s) = f'(s, Y'_s, Z'_s) - f'(s, Y_s, Z'_s) + f'(s, Y_s, Z'_s) - f'(s, Y_s, Z_s) + f'(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s, Z_s)$$

On introduit deux processus a et b : a est à valeurs réelles et b est un vecteur (colonne) de dimension d. On pose :

$$\begin{cases} a_s = \dfrac{f'(s, Y'_s, Z'_s) - f'(s, Y_s, Z'_s)}{U_s}, & \text{si} \qquad U_s \neq 0 \\ \\ a_s = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour définir b, on doit introduire une autre notation : pour $0 \leq i \leq d$, $Z_s^{(i)}$ est la ligne dont les $d - i$ dernières composantes sont celles de Z'_s et les i premières celles de Z_s. Pour $1 \leq i \leq d$, on pose

$$\begin{cases} b_s^i = \dfrac{f'(s, Y_s, Z_s^{(i-1)}) - f'(s, Y_s, Z_s^i)}{V_s^i}, & \text{si} \qquad V_s^i \neq 0, \\ \\ b_s^i = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que, puisque f' est Lipschitz, ces deux processus sont progressivement mesurables et bornés. Avec ces notations, on a,

$$U_t = \zeta + \int_t^T (a_s U_s + V_s b_s + c_s) ds - \int_t^T V_s dW_s,$$

où $c_s = f'(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s, Z_s)$. Par hypothèse, on a $\zeta \geq 0$et $c_s \geq 0$. Utilisant la formule « explicite » pour les EDSR linéaires, on a, pour $t \in [0, T]$,

$$U_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\bigg(\zeta \Gamma_T + \int_t^T c_s \Gamma_s ds / \mathcal{F}_t\bigg),$$

avec, pour tout $0 \leq s \leq T$,

$$\Gamma_s = \exp\bigg\{\int_0^s b_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^s |b_u|^2 du + \int_0^s a_u du\bigg\}.$$

Comme déjà mentionné lors de la remarque suivant la Proposition (1.3.1), cette formule montre que $U_t \geq 0$, dès que $\zeta \geq 0$ et $c_s \geq 0$.
Pour la seconde partie du résultat, si de plus $U_0 = 0$ on a :

$$\mathbb{E}\bigg(\zeta \Gamma_T + \int_0^T c_s \Gamma_s ds\bigg) = 0,$$

et la variable aléatoire intégrée est positive. Par conséquent, elle est nulle $\mathbb{P} - p.s$, ce qui termine la preuve de ce théorème en remarquant que dans ce cas $\zeta = 0$ et $c_s = 0$. $\square$

Remarque 1.3.1.1. *On peut supposer que $f(t, Y_t', Z_t') \leq f'(t, Y_t', Z_t')$ au lieu de $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ pour obtenir le résultat précédent. Il suffit de faire une linéarisation en partant de l'écriture*

$$f'(s, Y_s', Z_s') - f(s, Y_s, Z_s) = f'(t, Y_t', Z_t') - f(t, Y_t', Z_t') + f(t, Y_t', Z_t') - f(t, Y_t, Z_t') + f(t, Y_t, Z_t') - f(t, Y_t, Z_t).$$

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques rétrogrades générales avec des coefficients Lipschitziens

Dans ce chapitre, nous étudierons l'équation différentielle stochastique rétrograde de la forme suivante :

$$x(t) + \int_t^T f(x(s), y(s), s)ds + \int_t^T [g(x(s), s) + y(s)]dW(s) = X \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{d\times m}$, respectivement.

L'équation du processus adjoint dans un contrôle stochastique optimal (voir [2],[4],[13],[20]) est une version linéaire de l'équation ci dessus. Dans le domaine du contrôle, nous considérons généralement $y(t)$ comme un contrôle adapté et $x(t)$ comme l'état de système. Le but est de choisir un contrôle adaptée $y(t)$ qui contrôle l'état $x(t)$ du système à un cible donné X à l'instant $t = T$. C'est ce qu'on appelle l'accessibilité du problème. Dans le domaine des équations différentielles stochastiques rétrogrades, nous recherchons un couple de processus adaptées $\{x(t), y(t)\}$ résolvant l'équation (2.1). Un tel couple est appelé une solution adapté à cette équation. On a le droit de choisir le processus $y(t)$ qui permet de trouver une solution adaptée.

Pardoux et Peng (1990) ont établi des résultats sur l'existence et l'unicité de la solution adaptée sous la condition que $f(x, y, t)$ et $g(x, t)$ sont uniformément Lipschitziens continus dans (x, y) et dans x, respectivement. Mao ([22]) a obtenu quelques résultats dans cette direction dans des conditions autre que lipschitz.

2.1 Préliminaires

Soit $\mathcal{P}$ la σ-algèbre des sous-ensembles de $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurables sur $[0,T]\times\Omega$. Soit f une application de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times m} \times [0,T] \times \Omega$ sur $\mathbb{R}^d$ qui est supposé d'être $\mathcal{B}^d \otimes \mathcal{B}^{d\times m} \otimes \mathcal{P}$-mesurable. Soit g une fonction de $\mathbb{R}^d \times [0,T] \times \Omega$ sur $\mathbb{R}^{d\times m}$ qui est supposé d'être $\mathcal{B}_d \otimes \mathcal{P}$-mesurable. Soit X une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$, c'est-à-dire $X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Si nous écrivons l'équation (2.1) comme

$$x(T) - x(t) = \int_t^T f(x(s), y(s), s)ds + \int_t^T [g(x(s), s) + y(s)]dW(s),$$

on voit clairement que $x(t)$ est un processus d'Itô avec le différentiel stochastique

$$dx(t) = f(x(t), y(t), t)dt + [g(x(t), t) + y(t)]dW(t). \tag{2.2}$$

On peut donc interpréter l'équation rétrograde (2.1) comme l'équation différencielle stochastique (2.2) avec la valeur finale $x(T) = X$. C'est cette valeur finale, au lieu de valeur initiale, qui rend les équations différentielles stochastiques rétrogrades très différentes.

2.2 Solution d'une EDSR

Donnons maintenant une définition précise de la solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde.

Définition 2.2.1. *Un couple de processus stochastique ;*

$$\{x(t), y(t)\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m}).$$

est appelée une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (2.1) si elle vérifie les propriétés suivantes :

i) $f(x(t), y(t), t) \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$ *et* $g(x(t), t) \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ *;*

ii) *l'équation (2.1) est vérifiée pour tout* $t \in [0,T]$ *avec une probabilité de 1.*

Une solution {x(t),y(t)} est dite unique si pour toute autre solution $\{\overline{x}(t), \overline{y}(t)\}$ *on a*

$$P\{x(t) = \overline{x}(t) \quad pour\ \ tout \quad 0 \le t \le T\} = 1,$$

et

$$\mathbb{E}\int_0^T |y(s)-\overline{y}(s)|^2 ds = 0.$$

2.3 Théorème de représentation de martingale

Dans cette section, nous présenterons le théorème de représentation de la martingale qui jouera un rôle important dans ce chapitre.

On considére un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ et un mouvement brownien m-dimensionnel $W(t)$ (sans filtration). On suppose ensuite $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle générée par le mouvement brownien, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ l'augmentation sous P de cette filtration naturelle. Alors $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ satisfaisant les conditions usuelles, de plus, $W(t)$ est un mouvement brownien par rapport a la filtration.

Soit $T > 0$. Il a été montré dans la section (1.5) ([22]) que pour tout $f \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$, l'intégrale d'Itô

$$\int_0^t f(s)dW(s),$$

est une martingale continue de carré intégrable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$ sur $t \in [0,T]$. Dans ce chapitre, nous allons montrer l'inverse toute martingale continue de carré intégrable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$ peut être représentée comme une intégrale d'Itô. Ce résultat, connu sous le nom de théorème de représentation de martingale, est très utile dans de nombreuses applications et est décrit comme suit.

Théorème 2.3.1. *Soit $\{M_t\}_{0\leq t\leq T}$ une martingale continue de carée intégrable à valeur dans $\mathbb{R}^d$ par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$. Donc, il existe un unique processus stochastique $f \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ tel que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t f(s)dW(s), \qquad sur\ \ t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Par unicité, nous entendons que s'il existe un autre processus $g \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t g(s)dW(s), \qquad \text{sur}\ \ t \in [0,T].$$

Alors

$$\mathbb{E}\int_0^T |f(s)-g(s)|^2 ds = 0. \tag{2.4}$$

Clairement, il suffit de montrer le théorème dans le cas où $d = 1$. Pour ce faire, il faut présenter plusieurs lemmes. Soit $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{m\times n}; \mathbb{R})$ la famille d'une infinité de fonctions différentiables de

$\mathbb{R}^{m\times m}$ à $\mathbb{R}$ avec un support compact. Soit $L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega,\mathbb{R})$ la famille de toutes les ξ variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables à valeur réelle telles que $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$. Soit $L^2([0,T];\mathbb{R}^{1\times m})$ la famille de toutes les fonctions mesurables de Borel h de $[0,T]$ à valeur dans $\mathbb{R}^{1\times m}$ telles que $\int_0^T |h(t)|^2 dt < \infty$. Notez que les fonctions dans $L^2([0,T];\mathbb{R}^{1\times m})$ sont déterministes et que $L^2([0,T];\mathbb{R}^{1\times m})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{1\times m})$.

Lemme 2.3.1. *L'ensemble des variables aléatoires*

$$\{\varphi(W(t_1),...,W(t_n)) : t_i \in [0,T], \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{m\times n};\mathbb{R}), n = 1,2,...\}$$

est dense dans $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$.

Preuve du Lemme (2.3.1) : Soit $\{t_i\}_{i\geq 1}$ un sous-ensemble dense dans $[0,T]$. Pour chaque entier $n \geq 1$, soit $\mathcal{G}_n$ la σ-algèbre générée par $W(t_1),...,W(t_n)$, c'est-à-dire $\mathcal{G}_n = \sigma\{W(t_1),...,W(t_n)\}$. évidemment

$$\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1} \qquad et \qquad \mathcal{F}_T = \sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n\Big).$$

Soit $g \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R})$ un arbitraire. Par le théorème de convergence de la martingale de Doob (c'est-à-dire le Théorème (1.3.5) [22]), nous avons

$$\mathbb{E}(g\backslash\mathcal{G}_n) \to \mathbb{E}(g\backslash\mathcal{F}_T) = g, \qquad quand\ \ n \to \infty,$$

presque sûrement et dans L^2 aussi. D'autre part, par le Lemme (2.3.1), pour chaque n, il existe une fonction mesurable de Borel $g_n : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}(g\backslash\mathcal{G}_n) = g_n(W(t_1),...,W(t_n)).$$

Cependant, un tel $g_n(W(t_1),...,W(t_n))$ peut être approché en $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ par les fonctions $\varphi_{n,k}(W(t_1),...,W(t_n))$, où $\varphi_{n,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{m\times n};\mathbb{R})$, et par conséquent l'assertion suit.

Lemme 2.3.2. *L'espace linéaire des variables aléatoires de la forme*

$$\exp\Big(\int_0^T h(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T |h(t)|^2 dt\Big), \qquad h \in L^2([0,T];\mathbb{R}^{1\times m}) \tag{2.5}$$

est dense en $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$.

Preuve du Lemme (2.3.2) : L'affirmation est vérifiée à condition que nous puissions montrer que si $g \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ est orthogonal (dans $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$) sur toutes les variables aléatoires de la forme (2.5), alors $g = 0$.

Soit g une telle variable aléatoire. Alors pour tout $\lambda = (\lambda_{ij})_(n \times m) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et tout $t_1, ..., t_n \in [0,T]$, nous avons

$$G(\lambda) := \mathbb{E}\Bigg\{ g \exp\bigg(trace[\lambda(W(t_1), ..., W(t_n))] \bigg) \Bigg\} = 0, \tag{2.6}$$

pour

$$\exp\left(\int_0^T h(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T |h(t)|^2 dt \right)$$

$$= \exp\left(trace[\lambda(W(t_1), ..., W(t_n))] - \frac{1}{2}\int_0^T |h(t)|^2 dt \right)$$

si on définit

$$h(t) = \Sigma_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda_{i+1}) I_{[t_1,t_{i-1})}(t),$$

où $t_0 = 0$, $\lambda_i = (\lambda_{i1}, ..., \lambda_{im})$ and $\lambda_{n+1} = 0$. La fonction $G(\lambda)$ est réelle analytique en $\lambda \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et donc a une extension analytique à l'espace complexe $\mathcal{C}^{n\times m}$ donné par

$$G(z) := \mathbb{E}\Bigg\{ g \exp\bigg(trace[z(W(t_1), ..., W(t_n))] \bigg) \Bigg\}$$

pour $z = (z_{ij})_{n\times m} \in \mathcal{C}^{n\times m}$. Puisque $G = 0$ sur $\mathbb{R}^{n\times m}$ et G est analytique, nous devons avoir $G = 0$ sur tout l'ensemble $\mathcal{C}^{n\times m}$. En particulier,

$$G(iY) := \mathbb{E}\Bigg\{ g \exp\bigg(i \;\; trace[Y(W(t_1), ..., W(t_n))] \bigg) \Bigg\} = 0 \tag{2.7}$$

pour tout $Y = (y_{ij})_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Alors, pour tout fonction $\varphi(X)$, $X = (x_{ij})_{n\times m}$, sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n\times m})$, soit $\widehat{\varphi}(Y)$ une transformation de Fourier de $\varphi(X)$

$$\widehat{\varphi}(Y) = (2\pi)^{-\frac{nm}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n\times m}} \varphi(X) \exp[-i \;\; trace(YX)] dX.$$

Notons du théorème de transformée de Fourier inverse que

$$\varphi(X) = (2\pi)^{-\frac{nm}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n\times m}} \widehat{\varphi}(Y) \exp[i \;\; trace(YX)] dY,$$

on calcule ensuite

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\Big[g\varphi(W(t_1),...,W(t_n))\Big] \\
= \;& \mathbb{E}\Big[g(2\pi)^{-\frac{nm}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n\times m}}\widehat{\varphi}(Y)\exp\Big(i\;\; trace[Y(W(t_1),...,W(t_n))]\Big)dY\Big] \\
= \;& (2\pi)^{-\frac{nm}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n\times m}}\widehat{\varphi}(Y)\mathbb{E}\Big\{g\exp\Big(i\;\; trace[Y(W(t_1),...,W(t_n))]\Big)\Big\}dY \\
& = 0.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Ceci, associé au lemme (2.3.1), signifie que g est orthogonal à un sous-ensemble dense de $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$. Donc il faut que $g = 0$. La preuve est donc complète.

Lemme 2.3.3. *Pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$, il existe un unique processus stochastique $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{1\times m})$ tel que*

$$
\xi = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T f(s)dW(s). \tag{2.9}
$$

Par l'unicité nous voulons dire que s'il y a un autre processus $g \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{1\times m})$ tel que

$$
\xi = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T g(s)dW(s), \tag{2.10}
$$

donc

$$
\mathbb{E}\int_0^T |f(s)-g(s)|^2 ds = 0. \tag{2.11}
$$

Preuve du Lemme (2.3.3) : L'unicité est assez évident, pour (2.9) et (2.10) donne

$$
\xi = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T [f(s)-g(s)]dW(s) = 0,
$$

ce qui implique (2.11) par la propriété de l'intégrale d'Itô. Pour montrer l'existence, nous supposons d'abord que ξ a la forme de (2.5), c'est-à-dire

$$
\xi = \exp\left(\int_0^T h(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T |h(t)|^2 dt\right)
$$

pour quelque $h \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{1\times m})$. On définit

$$
x(t) = x(t)\Big[\int_0^t h(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^t |h(t)|^2 dt\Big].
$$

Par la formule d'Itô

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t)\left[h(t)dW(t) - \frac{1}{2}|h(t)|^2dt\right] + \frac{1}{2}x(t)|h(t)|^2dt \\ &= x(t)h(t)dW(t). \end{aligned}$$

Cela donne que

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(t)h(t)dW(t).$$

En particulier,

$$\xi = x(T) = 1 + \int_0^t x(t)h(t)dW(t),$$

ce qui donne $\xi = 1$. Donc l'assertion requise (2.9) est vérifie dans ce cas avec $f(t) = x(t)h(t)$. Par la linéarité de (2.9), on voit que (2.9) est vérifie pour tout combinaison linéaire des fonctions de la forme (2.5). Maintenant, supposons que $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ un arbitraire. D'après le lemme (2.3.2), nous pouvons approximer ξ dans $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ par $\{\xi_n\}$, où chaque ξ_n est une combinaison linéaire des fonctions de la forme (2.5). Donc, pour chaque n, nous avoir un processus $f_n \in \mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^{1\times m})$ tel que

$$\xi_n = \mathbb{E}(\xi_n) + \int_0^T f_n(s)dW(s), \tag{2.12}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_n(s) - f_m(s)|\right]ds \\ &= \mathbb{E}\left|\left[\int_0^T f_n(s) - f_m(s)\right]dW(s)\right|^2 \\ &= \mathbb{E}\left[|\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n) - \xi_m - \mathbb{E}(\xi_m)|^2\right] \\ &= \mathbb{E}|\xi_n - \xi_m|^2 - |\mathbb{E}(\xi_n) - \mathbb{E}(\xi_m)|^2 \\ &\to 0, \qquad \text{quand } n,\ m \ \to \infty. \end{aligned}$$

En d'autres termes, $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{1\times m})$ et converge donc à certains $f \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{1\times m})$. Nous pouvons maintenant fait tendre $n \to \infty$ dans (2.12) on obtient

$$\xi = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T f(s)dW(s).$$

Donc, la preuve est complète.

Nous pouvons maintenant commencer à prouver le théorème de la représentation de la martingale.

Preuve du Théorème (2.3.1) : Sans aucune perte de généralité, on peut supposer que $d = 1$. En appliquant le Lemme (2.3.3) à $\xi = M(T)$, nous voyons qu'il existe un unique processus (l'unicité suit ici) $f \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{1\times m})$ tel que

$$M(T) = \mathbb{E}(M(T)) + \int_0^T f(s)dW(s).$$

Par la propriété martingale de $M(t)$ nous avons $\mathbb{E}(M(t)) = \mathbb{E}(M(0))$. Puisque $M(0)$ est $\mathcal{F}_0$-mesurable, il doit être une constante presque sûrement et donc $\mathbb{E}(M(0)) = M(0)$ $p.s.$, alors

$$M(T) = M(0) + \int_0^T f(s)dW(s). \tag{2.13}$$

Maintenant, pour tout $0 \leq t \leq T$, d'après le Théorème (2.3.1), nous avons

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbb{E}(M(T)\backslash\mathcal{F}_t) \\ &= M(0) + \mathbb{E}\bigg(\int_0^T f(s)dW(s)\backslash\mathcal{F}_t\bigg) \\ &= M(0) + \int_0^t f(s)dW(s). \end{aligned}$$

qui est l'assertion requise (2.3). La preuve est donc complète.

2.4 Théorème d'existence et d'unicité

Le théorème suivant est dû à Pardoux et Peng (1990).

Théorème 2.4.1. *On suppose que*

$$f(0,0,t) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^d) \ \ et \ \ g(0,t) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m}). \tag{2.14}$$

Supposons aussi qu'il existe une constante positive $K > 0$ tel que :

$$|f(x,y,t) - f(\overline{x},\overline{y},t)|^2 \leq K(|x-\overline{x}|^2 + |y-\overline{y}|^2|) \qquad p.s., \tag{2.15}$$

et

$$|g(x,t) - g(\overline{x},t)|^2 \leq K|x - \overline{x}|^2 \qquad\qquad p.s. \tag{2.16}$$

pour tout $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^d; y, \overline{y} \in \mathbb{R}^{d\times m}$ *et* $t \in [0,T]$. *Alors il existe une unique solution* $\{x(t), y(t)\}$ *pour l'équation (2.1) sur* $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$.

Présentons un certain nombre de lemmes afin de prouver ce théorème.

Lemme 2.4.1. *Soit* $f(t) \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$ *et* $g(t) \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$. *Donc, il existe un couple unique* $\{x(t), y(t)\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ *tel que*

$$x(t) + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T [g(s) + y(s)]dW(s) = X. \tag{2.17}$$

pour tout $0 \leq t \leq T$.

Preuve : On définit

$$M(t) = \mathbb{E}\Big(X - \int_0^T f(s)ds \backslash \mathcal{F}_t\Big), \qquad\qquad 0 \leq t \leq T.$$

Alors $M(t)$ est une martingale de carré intégrable. Selon le Théorème (2.4.1), il existe un processus unique $\hat{y}(t) \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ tel que

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \hat{y}(s)dW(s), \qquad\qquad 0 \leq t \leq T.$$

On définit

$$x(t) = M(t) + \int_0^t f(s)ds \qquad \text{et} \quad y(t) = \hat{y}(t) - g(t).$$

pour tout $0 \leq t \leq T$. Clairement, $\{x(t), y(t)\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$. De plus

$$\begin{aligned}\int_t^T [g(s) + y(s)]dW(s) &= \int_t^T \hat{y}(s)dW(s) \\ &= \int_0^T \hat{y}(s)dW(s) - \int_0^t \hat{y}(s)dW(s) \\ &= M(T) - M(t).\end{aligned}$$

Notant

$$M(T) = X - \int_0^T f(s)ds,$$

on obtient que

$$\int_t^T [g(s)+y(s)]dW(s) = X - \int_0^T f(s)ds - M(t) = X - x(t) - \int_t^T f(s)ds,$$

qui est l'équation (2.17). Pour montrer l'unicité, soit $\{\overline{x}(t), \overline{y}(t)\}$ un autre couple qui résout l'équation (2.17). Alors

$$x(t) - \overline{x}(t) = -\int_t^T [y(s) - \overline{y}(s)]dW(s), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} x(t) - \overline{x}(t) &= \mathbb{E}\Big(x(t) - \overline{x}(t) \backslash \mathcal{F}_t\Big); \\ &= -\mathbb{E}\Big(\int_t^T [y(s) - \overline{y}(s)]dW(s) \backslash \mathcal{F}_t\Big); \\ &= 0 \qquad p.s. \end{aligned}$$

Notant que $x(t)$ est continu, on voit facilement que $x(t) = \overline{x}(t)$ pour tout $0 \leq t \leq T$ p.s. Maintenant

$$0 = x(0) - \overline{x}(0) = -\int_0^T [y(s) - \overline{y}(s)]dW(s).$$

qui donne immédiatement que

$$\mathbb{E}\int_0^T |y(s) - \overline{y}(s)|^2 ds = 0.$$

L'unicité a également été prouvé. □

Lemme 2.4.2. *Soient $g(t) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ et f est une application de $\mathbb{R}^{d\times m} \times [0,T] \times \Omega$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$ qui est supposé d'être $\mathcal{B}^{d\times m} \otimes \mathcal{P}$-mesurable. Supposons que*

$$f(0,t) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^d).$$

Supposons aussi qu'il existe une constante positive $K > 0$ telle que

$$|f(y,t) - f(\overline{y},t)|^2 \leq K|y - \overline{y}|^2 \qquad p.s. \tag{2.18}$$

pour tout $y, \overline{y} \in \mathbb{R}^{d\times m}$ et $t \in [0,T]$. Donc on a l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$x(t) + \int_t^T f(y(s), s)ds + \int_t^T [g(s) + y(s)]dW(s) = X. \tag{2.19}$$

a une solution unique $\{x(t), y(t)\}$ dans $\mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$.

Preuve :

L'unicité

Nous prouvons d'abord l'unicité. Supposons que $\{x(t), y(t)\}$ et $\{\overline{x}(t), \overline{y}(t)\}$ sont deux solutions. Donc, rappelant (2.2), on voit facilement que

$$d[x(t) - \overline{x}(t)] = [f(y(t), t) - f(\overline{y}(t), t)]dt + [y(t) - \overline{y}(t)]dW(t).$$

Par la formule de Itô, pour tout $0 \le t \le T$, on a

$$\begin{aligned} d[x(t) - \overline{x}(t)]^2 &= 2[x(t) - \overline{x}(t)]^T [f(y(t), t) - f(\overline{y}(t), t)]dt \\ &+ |y(t) - \overline{y}(t)|^2 dt + 2[x(t) - \overline{x}(t)]^T [y(t) - \overline{y}(t)]dW(t). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} -|x(t) - \overline{x}(t)|^2 &= 2\int_t^T [x(s) - \overline{x}(s)]^T [f(y(s), s) - f(\overline{y}(s), s)]ds \\ &+ \int_t^T |y(s) - \overline{y}(s)|^2 ds + 2\int_t^T [x(s) - \overline{x}(s)]^T [y(s) - \overline{y}(s)]dW(s). \end{aligned}$$

On prend l'espérance sur les deux côtés, on obtient

$$\mathbb{E}|x(t) - \overline{x}(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |y(s) - \overline{y}(s)|^2 ds = -2\mathbb{E}\int_t^T [x(s) - \overline{x}(s)]^T [f(y(s), s) - f(\overline{y}, s)]ds.$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $2ab \le \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$ $(\varepsilon > 0)$ et la condition de Lipschitz (2.18), on trouve

$$\mathbb{E}|x(t) - \overline{x}(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |y(s) - \overline{y}(s)|^2 ds \le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\int_t^T |x(s) - \overline{x}(s)|^2 ds + \varepsilon K \mathbb{E}\int_t^T |y(s) - \overline{y}(s)|^2 ds.$$

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2K}$

$$\mathbb{E}|x(t)-\overline{x}(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |y(s)-\overline{y}(s)|^2 ds \leq 2K\mathbb{E}\int_t^T |x(s)-\overline{x}(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |y(s)-\overline{y}(s)|^2 ds. \tag{2.20}$$

En particulier, cela implique que

$$\mathbb{E}|x(t)-\overline{x}(t)|^2 \leq 2K\mathbb{E}\int_t^T |x(s)-\overline{x}(s)|^2 ds.$$

L'inégalité de Gronwall donne maintenant que

$$\mathbb{E}|x(t)-\overline{x}(t)|^2 = 0, \qquad \text{pour tout } \ 0 \leq t \leq T,$$

ce qui implique que $x(t) = \overline{x}(t)$ pour tout $0 \leq t \leq T$ $p.s.$ En remplaçant ceci en (2.20) on voit aussi que

$$\mathbb{E}\int_0^T |y(s)-\overline{y}(s)|^2 = 0.$$

L'unicité a été prouvé.

L'existence

Passons maintenant à la preuve de l'existence. Posons $y_0(t) \equiv 0$. D'après le Lemme (2.4.1), il y a un unique couple $\{x_1(t), y_1(t)\}$ dans $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ tel que

$$x_1(t) + \int_t^T f(y_0(s), s)ds + \int_t^T [g(s) + y_1(s)]dW(s) = X.$$

En utilisant le Lemme (2.4.1) récursivement, on peut définir, pour chaque $n = 1, 2, ...$, un couple $\{x_n(t), y_n(t)\}$ dans $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ par

$$x_n(t) + \int_t^T f(y_{n-1}(s), s)ds + \int_t^T [g(s) + y_n(s)]dW(s) = X. \tag{2.21}$$

De la même manière que dans la preuve de l'unicité ci-dessus, nous pouvons montrer que

$$\mathbb{E}|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |y_{n+1}(s) - y_n(s)|^2 ds$$

$$\leq 2K\mathbb{E}\int_t^T |x_{n+1}(s)-x_n(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |y_n(s)-y_{n-1}(s)|^2 ds. \tag{2.22}$$

Pour tout $n \geq 1$, On définit

$$u_n(t) = \mathbb{E}\int_t^T |x_n(s)-x_{n-1}(s)|^2 ds$$

et

$$v_n(t) = \mathbb{E}\int_t^T |y_n(s)-y_{n-1}(s)|^2 ds.$$

Il s'ensuit alors de (2.22) que

$$-\frac{d}{dt}\Big(u_{n+1}(t)e^{2Kt}\Big) + e^{2Kt}v_{n+1}(t) \leq \frac{1}{2}e^{2Kt}v_n(t). \tag{2.23}$$

Intégrant les deux côtés entre t et T, on obtient :

$$u_{n+1}(t)e^{2Kt} + \int_t^T e^{2Ks}v_{n+1}(s)ds \leq \frac{1}{2}\int_t^T e^{2Ks}v_n(s)ds.$$

Alors

$$u_{n+1}(t) + \int_t^T e^{2K(s-t)}v_{n+1}(s)ds \leq \frac{1}{2}\int_t^T e^{2K(s-t)}v_n(s)ds. \tag{2.24}$$

En particulier, cela implique que

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{2Ks}v_{n+1}(s)ds &\leq \frac{1}{2}\int_0^T e^{2Ks}v_n(s)ds \\ &\leq \frac{1}{2^n}\int_0^T e^{2Ks}v_1(s)ds \\ &\leq \frac{1}{2^n}v_1(0)\int_0^T e^{2Ks}ds \\ &\leq \frac{Ce^{2KT}}{k2^{n+1}},\end{aligned} \tag{2.25}$$

où $C = v_1(0) = \mathbb{E}\int_0^T |y_1(s)|^2 ds$. En substituant cette inégalité dans (2.23) implique que

$$u_{n+1}(0) \leq \frac{Ce^{2KT}}{k2^{n+1}}. \tag{2.26}$$

Il résulte de (2.22) et (2.26) que

$$v_{n+1}(0) \leq 2Ku_{n+1}(0) + \frac{1}{2}v_n(0) \leq \frac{1}{2^n}Ce^{2KT} + \frac{1}{2}v_n(0),$$

ce qui implique immédiatement que

$$v_{n+1}(0) \leq \frac{1}{2^n}\Big[nCe^{2KT} + v_1(0)\Big]. \tag{2.27}$$

Nous voyons maintenant dans (2.26) et (2.27) que $\{x_n(t)\}$ et $\{y_n(t)\}$ sont des suites de Cauchy dans $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$, et notons leurs limites par $x(t)$ et $y(t)$, respectivement. Enfin, en fait tendre $n \to \infty$ dans (2.21) on obtient que

$$x(t) + \int_t^T f(y(s),s)ds + \int_t^T [g(s) + y(s)]dW(s) = X,$$

C'est-à-dire $\{x(t), y(t)\}$ est une solution. L'existence a été prouvée aussi et donc la preuve du lemme est complète.

Nous pouvons maintenant commencer à prouver le Théoreme (2.4.1).

Preuve du Théorème(2.4.1) :

L'unicité Nous prouvons d'abord montrer l'unicité. supposons que $\{x(t), y(t)\}$ et $\{\overline{x}(t), \overline{y}(t)\}$ sont deux solutions. De la même manière que dans la preuve du Lemme (2.4.2), nous pouvons montrer que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|x(t)-\overline{x}(t)|^2 &+ \mathbb{E}\int_t^T |y(s)-\overline{y}(s)|^2 ds \\
&= -2\mathbb{E}\int_t^T [x(s)-\overline{x}(s)]^T[f(x(s),y(s),s)-f(\overline{x}(s),\overline{y}(s),s)]ds \\
&- \mathbb{E}\int_t^T |g(x(s),s)-g(\overline{x}(s),s)|^2 ds \\
&- 2\mathbb{E}\int_t^T trace\Big([g(x(s),s)-g(\overline{x}(s),s)]^T[y(s)-\overline{y}(s)]\Big)ds \\
&\leq 4K\mathbb{E}\int_t^T |x(s)-\overline{x}(s)|^2 + \frac{1}{4K}\mathbb{E}\int_t^T |f(x(s),y(s),s)-f(\overline{x}(s),\overline{y}(s),s)|^2 ds \\
&+ 4\mathbb{E}\int_t^T |g(x(s),s)-g(\overline{x}(s),s)|^2 ds + \frac{1}{4}\mathbb{E}\int_t^T |y(s)-\overline{y}(s)|^2 ds \\
&\leq (8K+1)\mathbb{E}\int_t^T |x(s)-\overline{x}(s)|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |y(s)-\overline{y}(s)|^2 ds. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

L'unicité a été prouvé en appliquant l'inégalité de Gronwall comme nous l'avons fait dans la preuve du Lemme (2.4.2).

L'existence Montrons maintenant l'existence. On définit $y_0(t) \equiv 0$. A l'aide de Lemme (2.4.2), on peut définir récursivement, pour tout $n = 1, 2, ...$, un couple $\{x_n(t), y_n(t)\}$ dans $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ par

$$x_n(t) + \int_t^T f(x_{n-1}(s), y_n(s), s)ds + \int_t^T [g(x_{n-1}(s), s) + y_n(s)]dW(s) = X. \qquad (2.29)$$

De la même manière que dans la preuve de (2.28), nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2 &+ \mathbb{E}\int_t^T |y_{n+1}(s)-y_n(s)|^2 ds\\ &\leq 4K\mathbb{E}\int_t^T |x_{n+1}(s)-x_n(s)|^2 ds\\ &+ (4K+1)\mathbb{E}\int_t^T |x_n(s)-x_{n-1}(s)|^2 ds\\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |y_{n+1}(s)-y_n(s)|^2 ds.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |y_{n+1}(s)-y_n(s)|^2 ds \leq (4K+1)\mathbb{E}\int_t^T \left[|x_{n+1}(s)-x_n(s)|^2 s+|x_n(s)-x_{n-1}(s)|^2\right]ds. \tag{2.30}$$

On définit

$$u_n(t)=\mathbb{E}\int_t^T |x_n(s)-\overline{x}_{n-1}(s)|^2 ds.$$

Donc, il résulte de (2.30) que

$$-\frac{d}{dt}\left(u_{n+1}(t)e^{(4K+1)t}\right) \leq (4K+1)e^{(4K+1)t}u_n(t).$$

Intégrant les deux côtés entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned}u_{n+1}(t) &\leq (4K+1)\int_t^T e^{(4K+1)(s-t)}u_n(s)ds\\ &\leq (4K+1)e^{(4K+1)T}\int_t^T u_n(s)ds.\end{aligned}$$

En itérant cette inégalité, on obtient que

$$u_{n+1}(0) \leq \frac{\left[(4K+1)Te^{(4K+1)T}\right]^n}{n!}u_1(0).$$

Ceci, associé à (2.30), implique que $\{x_n(t)\}$ et $\{y_n(t)\}$ sont des suites de Cauchy dans $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$

et $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$. Notons leurs limites par $x(t)$ et $y(t)$, respectivement. Enfin, on fait tendre $n\to\infty$ dans (2.29) pour obtenir que

$$x(t)+\int_t^T f(x(s),y(s),s)ds+\int_t^T [g(x(s),s)+y(s)]dW(s)=X.$$

C'est-à-dire que, $\{x(t),y(t)\}$ est une solution. $\square$

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques rétrogrades générales avec des coefficients non-Lipschitziens

3.1 Notations, hypothèses et définitions

Dans le chapitre précédent, nous avons établi le théorème d'existence et d'unicité de la solution pour une équation différentielle stochastique rétrograde sous la condition uniformément Lipschitzienne. D'autre part, il est en quelque sorte trop forte d'exiger la continuité uniformement lipschitzienne dans les applications, par ex. dans le traitement des équations différentielles partielles paraboliques quasi-linéaires. Il est donc important de trouver des conditions plus faibles que celle de lipschitz dans laquelle l'équation différentielle stochastique rétrograde a une solution unique. En premier lieu, on pourrait peut-être essayer la condition localement lipschitzienne plus la condition de croissance linéaire, car ces conditions garantissent l'existence et l'unicité de la solution pour une équation différentielle stochastique. Pour être précis, énonçons ces conditions comme suit :

Pour chaque $n = 1, 2, ...$, il existe une constante $K_n > 0$ telle que

$$|f(x, y, t) - f(\overline{x}, \overline{y}, t)|^2 \leq K_n(|x - \overline{x}|^2 + |y - \overline{y}|^2|) \qquad p.s., \tag{3.1}$$

$$|g(x, t) - g(\overline{x}, t)|^2 \leq K_n|x - \overline{x}|^2 \qquad p.s. \tag{3.2}$$

pour tout $0 \leq t \leq T, x, \overline{x} \in \mathbb{R}^d, y, \overline{y} \in \mathbb{R}^{d\times m}$ avec $\max\{|x|, |\overline{x}|, |y|, |\overline{y}|\} < n$. De plus il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|f(x,y,t)|^2 \leq K(1+|x|^2+|y|^2) \quad \text{et} \quad |g(x,t)|^2 \leq K(1+|x|^2) \qquad p.s. \tag{3.3}$$

pour tout $0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^{d\times m}$.

Malheureusement, on ne sait pas toujours si ((3.1)-(3.3)) garantit l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (2.1). La difficulté ici est que la technique du temps d'arrêt et de la localisation ne semble pas fonctionner pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Maintenant, la question est la suivante : **existe-t-il des conditions plus faibles que le continuité lipschitz sous laquelle l'équation différentielle stochastique rétrograde a une solution unique ?.**

Dans ce chapitre, nous donnerons une réponse positive. Nous proposerons la condition suivante : pour tout $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^d, y, \overline{y} \in \mathbb{R}^{d\times m}, 0 \leq t \leq T$, on a

$$|f(x,y,t) - f(\overline{x},\overline{y},t)|^2 \leq \kappa(|x-\overline{x}|)^2 + K(|y-\overline{y}|^2|) \qquad p.s., \tag{3.4}$$

et

$$|g(x,t) - g(t,\overline{x})|^2 \leq \kappa(|x-\overline{x}|^2) \qquad p.s., \tag{3.5}$$

où K est une constante positif et $\kappa(t)$ est une fonction croissante concave de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\kappa(0) = 0, \kappa(u) > 0$ pour $u > 0$ et

$$\int_{0^+} \frac{du}{\kappa(u)} = \infty. \tag{3.6}$$

On peut faire quelques commentaires sur ces conditions avant d'énoncer le résultat principal. Tout d'abord, Puisque κ est concave et $\kappa(0) = 0$, on peut trouver une paire de constantes positives a et b tel que :

$$\kappa(t) \leq a + bu \qquad \text{pour tout } \; u \geq 0. \tag{3.7}$$

Nous voyons donc que sous les hypothèses (2.14), et (3.4)-(3.6),

$$f(x(t), y(t), t) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^d) \;\text{ et }\; g(x(t), y(t), t) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$$

quand

$$x(t) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^d) \;\text{ et }\; y(t) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m}).$$

Pour voir la généralité de notre résultat, donnons quelques exemples de la fonction $\kappa(t)$ afin de voir que les conditions (3.4)-(3.6) sont restrictives.

Soit $K > 0$ et que $\delta \in (0,1)$ soit suffisamment petit. On définit

$$\kappa_1(u) = Ku \qquad \text{pour} \qquad u \geq 0;$$

$$\kappa_2(u) = \begin{cases} u\log(u^{-1}), & 0 \leq u \leq \delta; \\ \delta\log(\delta^{-1}) + \kappa_2(\delta-)(u-\delta), & u > \delta; \end{cases}$$

$$\kappa_3(u) = \begin{cases} u\log(u^{-1})\log\log(u^{-1}) & ,0 \leq u \leq \delta; \\ \delta\log(\delta^{-1})\log\log(u^{-1}) + \kappa_3'(\delta-)(u-\delta) & ,u > \delta. \end{cases}$$

Ce sont toutes des fonctions croissantes concaves satisfaisant :

$$\int_{0^+} \frac{du}{\kappa_i(u)} = \infty.$$

nous voyons clairement que si $\kappa(u) = Ku$, alors les conditions (3.4)-(3.5) réduire aux conditions de Lipschitz (2.15) et (2.16). En d'autres termes, les conditions (3.4)-(3.5) sont beaucoup plus faibles que les conditions de Lipschitz (2.15) et (2.16). Donc en d'autres termes, dans ce chapitre, nous obtenons un résultat plus général que celui de Pardoux et Peng (1990)([24]).

D'autre part, nous devrions également attirer l'attention du lecteur sur un article de Pardoux et Peng (1994)([27]), dans lesquelles des différentes études sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades non lipschitz ont été présentées, Pardoux et Peng (1994) ([27]) ont considéré un cas légèrement spécial d'Eq (2.1) c'est-à-dire le cas où $g(t,x) \equiv 0$. Dans d'autres mots, ils ont considéré l'équation différentielle stochastique rétrogrades suivante :

$$x(t) + \int_t^T f(x(s), y(s), s)ds + \int_t^T y(s)dW(s) = X. \tag{3.8}$$

sur $0 \leq t \leq T$. Ils ont montré l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (3.8) sous les conditions suivantes : $f(t,x,y)$ est localement lipschitz continu dans x mais uniformément lipschitz continu en y ; $f(t,x,y)$ satisfait la condition de la croissance linéaire ; et la valeur finale X est bornée. De plus, ils ont également donné d'autres conditions non-lipschitz. Pour l'essentiel, ils ont supposé que non seulement $f(t,x,y)$ est continuellement différentiable en (x,y) avec des dérivées de premier ordre localement bornées, mais que X satisfait également certaines conditions, par exemple. X est une variable aléatoire bornée appartenant à l'espace de Wiener et ses dérivées sur ce espace sont bornées. Une caractéristique commune à ces résultats de Pardoux et Peng est que X doit être borné. Cependant, X est généralement dans L^2 dans les applications. Par rapport à leurs résultats, notre travail nécessite X en L^2 uniquement et correspond à une équation plus générale (2.1) que (3.8). Bien sûr les techniques utilisées et les conditions proposées dans notre chapitre sont différentes de celles de Pardoux et Peng (1994) et l'inégalité de Bihari jouera un rôle clé dans notre chapitre.

3.2 Résultat principale d'existence et d'unicité

Théorème 3.2.1. *Supposons que (2.14), et (3.4)-(3.6) sont satisfaisantes, Alorss, il existe une solution unique $\{x(t), y(t)\}$ à l'équation (2.1) dans $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$.*

Nous devons présenter un certain nombre de lemmes. Nous construisons maintenant une suite approximative en utilisant une itération de type Picard à l'aide du Lemme (2.4.2). Soit $x_0(t) \equiv 0$, et soit $\{x_n(t), y_n(t) : 0 \leq t \leq T\}_{n\geq 1}$ soit une suite dans $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ défini récursivement par

$$x_n(t)+\int_t^T f(x_{n-1}(s), y_n(s), s)ds+\int_t^T g[(x_{n-l}(s), s)+y_n(s)]dW(s) = X; \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.9}$$

Cette suite est bien définie car une fois $x_{n-1}(t) \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$ est donné, $f(x_{n-1}(t), y, t)$ est Lipschitz continu en y et

$$f(x_{n-1}(t), 0, t) \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \text{ et } g(x_{n-l}(t), t) \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m}).$$

Par conséquent, le Lemme (2.4.2) peut donc être utilisé pour définir $x_n(t)$ et $y_n(t)$.

Lemmes

Lemme 3.2.1. *Supposons que sous les hypothèses (2.14), et (3.4)-(3.6), on a pour tout $0 \leq t \leq T$ et $n \geq 1$,*

$$\mathbb{E}|x_n(t)|^2 \leq C_1 \text{ et } \mathbb{E}\int_0^T |y_n(s)|^2 ds \leq C_2, \tag{3.10}$$

où C_1 et C_2 sont tous des deux constantes positives indépendant de n.

Preuve : En appliquant la formule d'Itô à $|x_n(t)|^2$, on peut en déduire que

$$\begin{aligned}
|X|^2 - |x_n(t)|^2 &= 2\int_t^T (x_n(s), f(x_{n-1}(s), y_n(s), s))ds \\
&+ 2\int_t^T (x_n(s), [g(x_{n-1}(s), s) + y_n(s)]dW(s)) \\
&+ \int_t^T |g(x_{n-1}(s), s) + y_n(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x_n(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |y_n(s)|^2 ds &= \mathbb{E}|X|^2 - 2\mathbb{E}\int_t^T (x_n(s), f(x_{n-1}(s), y_n(s), s))ds \\
&- \mathbb{E}\int_t^T (|g(x_{n-1}(s), s)|^2 + 2trace[g^T(x_{n-1}(s), s)y_n(s)])ds.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $2|uv| \leq u^2/\alpha + \alpha v^2$ pour tout $\alpha > 0$, on voit que :

$$\mathbb{E}|x_n(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |y_n(s)|^2 ds \leq \mathbb{E}|X|^2 + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}|x_n(s)|^2 ds +$$

$$\alpha\mathbb{E}\int_t^T |f(x_{n-1}(s), y_n(s), s)|^2 ds + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\int_t^T |g(x_{n-1}(s), s)|^2 ds + \alpha\mathbb{E}\int_t^T |y_n(s)|^2 ds. \tag{3.11}$$

Mais par les hypothèses (3.4) et (3.7), on peut facilement montrer que :

$$\begin{aligned}
&|f(x_{n-1}(s), y_n(s), s)|^2 \\
&\leq 2|f(0,0,s)|^2 + 2|f(x_{n-1}(s), y_n(s), s) - f(0,0,s)|^2 \\
&\leq 2|f(0,0,s)|^2 + 2\kappa\Big(|x_{n-1}(s)|^2\Big) + 2K|y_n(s)|^2 \\
&\leq 2|f(0,0,s)|^2 + 2a + 2b|x_{n-1}(s)|^2 + 2K|y_n(s)|^2.
\end{aligned}$$

De même, il en résulte de (3.5) et (3.7) que

$$|g(x_{n-1}(s), s)|^2 \leq 2|g(0,0,s)|^2 + 2a + 2b|x_{n-1}(s)|^2.$$

En les substituant à (3.11), on obtient :

$$\mathbb{E}|x_n(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |y_n(s)|^2 ds$$

$$\leq C_3(\alpha) + \tfrac{1}{\alpha}\int_t^T \mathbb{E}|x_n(s)|^2 ds + 2b(\alpha + \frac{1}{\alpha})\int_t^T \mathbb{E}|x_{n-1}(s)|^2 ds + \alpha(2K+1)\mathbb{E}\int_t^T |y_n(s)|^2 ds,$$

où :

$$C_3(\alpha) = \mathbb{E}|X|^2 + 2a(\alpha + \frac{1}{\alpha}) + 2\alpha\mathbb{E}\int_0^T |f(0,0,s)|^2 ds + \frac{2}{\alpha}\mathbb{E}\int_0^T |g(0,0,s)|^2 ds.$$

En particulier, on choisir $\alpha = 1/(4K+2)$ et on mise $C4 = C_3(1/(4K+2))$, on a

$$\mathbb{E}|x_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T |y_n(s)|^2 ds$$

$$\leq C_4 + (4K+2) + \int_t^T \mathbb{E}|x_n(s)|^2 ds + 2b\left[\frac{1}{4K+2} + 4K + 2\right]\int_t^T \mathbb{E}|x_{n-1}(s)|^2 ds$$

$$\leq C_4 + C_5\int_t^T \left(\max_{\{} \mathbb{E}|x_{n-1}(s)|^2, \mathbb{E}|x_n(s)|^2\right) ds. \tag{3.12}$$

où $C_5 = 4K + 2 + 2b[(4K+2)^{-1} + 4K + 2]$. Soit maintenant k un entier positif. Si $1 \leq n \leq k$, (3.12) implique (rappelant $x_0(t) \equiv 0$) que

$$\mathbb{E}|x_n(t)|^2 \leq C_4 + C_5\int_t^T \left(\max_{1\leq i\leq k} \mathbb{E}|x_i(s)|^2\right) ds.$$

Donc

$$\left(\max_{1\leq n\leq k} \mathbb{E}|x_n(t)|^2\right) \leq C_4 + C_5\int_t^T \left(\max_{1\leq n\leq k} \mathbb{E}|x_n(s)|^2\right) ds.$$

Par une application de l'inégalité de Gronwall implique :

$$\left(\max_{1\leq n\leq k} \mathbb{E}|x_n(t)|^2\right) \leq C_4 e^{C_5(T-t)} \leq C_4 e^{C_5 T}.$$

Puisque m est arbitraire, la première inégalité de (3.10) suit en posant $C_1 = C_4 e^{C_5}$. Enfin, il résulte de (3.12) que

$$\mathbb{E}\int_0^T |y_n(s)|^2 ds \leq 2(C_4 + C_5 C_1 T) := C_2.$$

La preuve est terminée.

Lemme 3.2.2. *Sous les hypothéses (2.14), et (3.4)-(3.6), il existe une constante $C_6 > 0$ tels que*

$$\mathbb{E}|x_{n+k}(t) - x_n(t)|^2 \leq C_6\int_t^T \kappa(\mathbb{E}|x_{n+k-1}(t) - x_{n-1}(t)|^2) ds \tag{3.13}$$

pour tout $0 \leq t \leq T$ et $n, k \geq 1$.

Preuve : En appliquant la formule d'Itô à $|x_{n+m}(t) - x_n(t)|^2$, nous avons

$$
\begin{aligned}
&-\mathbb{E}|x_{n+k}(t) - x_n(t)|^2 \\
&= 2\mathbb{E}\int_t^T (x_{n+k}(s) - x_n(s), f(x_{n+k-1}(s), y_{n+k}(t), s) \\
&- f(x_{n-1}(s), y_n(s), s))ds + \mathbb{E}\int_t^T |g(x_{n+k-1}(s), s), y_{n+m}(s) \\
&- g(x_{n-1}(s), s), y_n(s))|^2 ds.
\end{aligned}
$$

De la même manière que dans la preuve du Lemme (3.2.1), nous pouvons alors montrer que par l'inégalité de Jensen (.12), on peut alors déduire de la même manière que la preuve de Lemme (3.2.1) que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|x_{n+k}(t) - x_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |y_{n+k}(s) - y_n(s)|^2 ds \;\; &\leq \;\; (4K+2)\int_t^T \mathbb{E}|x_{n+k}(s) - x_n(s)|^2 ds \\
&+2\left[4K + 2 + \frac{1}{4K+2}\right]\int_t^T \kappa(\mathbb{E}|x_{n+k-1}(s) - x_{n-1}(s))|^2 ds. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Maintenant on fixe $t \in [0, T]$ arbitrairement. Si $t \leq r \leq T$, alors

$$
\begin{gathered}
\mathbb{E}|x_{n+k}(r) - x_n(r)|^2 \leq \\
(4K+2)\int_r^T \mathbb{E}|x_{n+k}(s) - x_n(s)|^2 ds + \\
2\left[4K + 2 + \tfrac{1}{4K+2}\right]\int_t^T \kappa\mathbb{E}|x_{n+k-1}(s) - x_{n-1}(s)|^2 ds.
\end{gathered}
$$

Par l'application d'inégalité de Gronwall, nous voyons que

$$
\mathbb{E}|x_{n+k}(t) - x_n(t)|^2 \leq 2\left[4K + 2 + \frac{1}{4K+2}\right]e^{4K+2(T-t)}\int_t^T \kappa\Big(\mathbb{E}|x_{n+k-1}(s) - x_{n-1}(s)|^2\Big)ds.
$$

Donc l'équation requise suit, en mettant

$$
C_6 = 2\left[4K + 2 + \frac{1}{4K+2}\right]e^{(4K+2)T}.
$$

La preuve est complète.

Lemme 3.2.3. *Sous les hypothéses (2.14), et (3.4)-(3.6), il existe une constante $C_7 > 0$ tels que :*

$$\mathbb{E}|x_{n+k}(t) - x_n(t)|^2 \leq C_7(T - t)$$

pour tout $0 \leq t \leq T$ et $n, k \geq 1$.

Preuve : Par les Lemmes (3.2.1), (3.2.2), on a

$$\mathbb{E}|x_{n+k}(t) - x_n(t)|^2 \leq C_6 \int_t^T \kappa(4C_1)ds = C_6\kappa(4C_1)(T - t).$$

et l'assertion suit, en supposant que $C_7 = C_6\kappa(4C_1)$. La preuve est complète.

Nous commençons maintenant à présennter un lemme clé. Pour ce faire, présentons quelques nouvelles notations. Choisissez $T \in [0, T)$ tel que

$$\overline{\kappa}(C_7(T - t)) \leq C_7 \qquad \textit{pour tout } T_1 \leq t \leq T, \tag{3.15}$$

On fixe $k \geq 1$ arbitrairement et on définit deux suites de fonctions $\{\varphi_n(t) : 0 \leq t \leq T\}_{n\geq 1}$ et $\{\widetilde{\varphi}_{n,k}(t) : 0 \leq t \leq T\}_{n\geq 1}$ comme suit :

$$\varphi_1(t) = C_7(T - t),$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \int_t^T \overline{\kappa}(\varphi_n(s))ds, \qquad n = 1, 2, ...,$$

$$\widetilde{\varphi}_{n,k}(t) = \mathbb{E}|x_{n+k}(t) - x_n(t)|^2, \qquad n = 1, 2, ...,$$

Lemme 3.2.4. *Supposons que les hypothéses (2.14), et (3.4)-(3.6) sont satisfaites. Alors, pour tout $k \geq 1$ et $n \geq 1$, on a*

$$0 \leq \widetilde{\varphi}_{n,k}(t) \leq \varphi_n(t) \leq \varphi_{n-1}(t) \leq ... \leq \varphi_1(t) \qquad \textit{quand} \quad t \in [T_1, T]. \tag{3.16}$$

De plus, la valeur $1 - T_1$ ne dépend que de la fonction k et non de la valeur finale X.

Preuve : Soit $t \in [T_1, T]$, tout d'abord, par le Lemme (3.2.3),

$$\widetilde{\varphi}_{1,k}(t) = \mathbb{E}|x_{1+k}(t) - x_1(t)|^2 \leq C_7(T - t) = \varphi_1(t),$$

pour $n = 1$ (3.16) est vérifie. Maintenant, par le Lemme (3.2.2),

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{2,k}(t) &= \mathbb{E}|x_{2+k}(t) - x_2(t)|^2 \\
&\le C_6 \int_t^T \kappa\Big(\mathbb{E}|x_{1+k}(s) - x_1(s)|^2\Big) ds \\
&= \int_t^T \overline{\kappa}(\widetilde{\varphi}_{1.k}(s)) ds \\
&\le \int_t^T \overline{\kappa}(\varphi_1(s)) ds = \varphi_2(t).
\end{aligned}$$

Mais par (3.15) nous avons aussi :

$$\varphi_2(t) = \int_t^T \overline{\kappa}(C_7(T-s)) ds \le \int_t^T C_7 ds = C_7(T-t) = \varphi_1(t).$$

En d'autres termes, nous avons déjà montré que

$$\widetilde{\varphi}_{2,k}(t) \le \varphi_2(t) \le \varphi_1(t) \qquad \text{si } \ t \in [T_1, T], s$$

c'est-à-dire (3.16) est également vérifie pour $n = 2$. Nous supposons donc que (3.16) est vérifie pour certains $n \ge 2$. Alors par le Lemme (3.2.2),

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{n+1,k}(t) &\le \int_t^T \overline{\kappa}(\widetilde{\varphi}_{n.k}(s)) ds \\
&\le \int_t^T \overline{\kappa}(\varphi_n(s)) ds = \varphi_{n+1}(t) \\
&\le \int_t^T \overline{\kappa}(\varphi_{n-1}(s)) ds = \varphi_n(t).
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que (3.16) est également vérifie pour $n+1$. Donc, par induction, (3.16) doit tenir pour tout $n \ge 1$. La preuve est complète.

Pour montrer le fait que la valeur $1 - T_1$ ne dépend que de la fonction κ et non de la valeur finale X, notez que (3.15) est vérifie si

$$C_6\kappa(C_7(T-T_1)) \le C_6\kappa(4C_1) \qquad \text{où} \qquad C_7(T-T_1) = C_6\kappa(4C_1)(T-T_1) \le 4C_1$$

Mais, par (3.7), cela est vrai si

$$C_6(a + 4bC_1)(T - T_1) \leq 4C_1$$

et donc si

$$C_6(1 + 4b)(T - T_1) \leq 4$$

depuis $C_1 \geq a$. En d'autres termes, si nous choisissons $T - T_1 = 4/[C_6(1+4b)] < 1$, alors (2.20) est vérifie. En rappelant la définition de C_6, on voit clairement que $T - T_1$ ne dépend que de la fonction et non de la valeur finale X.

De plus, enonçons maintenant l'inégalité de Bihari ([3] ; [21]) qui sera un outil essentiel dans la démonstration du Théorème (3.2.1)

L'inégalité de Bihari

Lemme 3.2.5. *Soit $T > 0$ et $u_0 \geq 0$. Soit $u(t), v(t)$ des fonctions continues sur $[0, T]$. Soit $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues et croissantes tel que $H(r) > 0$ pour $r > 0$. Si*

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t v(s)H(u(s))ds \qquad \textit{pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

Alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(u_0) + \int_0^t v(s)ds\right),$$

pour tous $t \in [0, T]$ tels que

$$G(u_0) + \int_0^t v(s)ds \in Dom(G^{-1}),$$

où

$$G(r) = \int_1^r \frac{ds}{H(s)}, \qquad \text{pour} \qquad r \geq 0,$$

et G^{-1} est la fonction inverse de G. En particulier, si, de plus, $u_0 = 0$ et

$$\int_{0^+} \frac{ds}{H(s)} = \infty.$$

Alors $u(t) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq T$ Nous pouvons enfin commencer à prouver notre résultat principal, le Théorème (3.2.1).

Preuve du Théorème (3.2.1)

Existence : Nous prouvons d'abord l'existence d'une solution. Cela se fera en quatre étapes. Dans la preuve suivante, n'oubliez pas que les constantes C_1–C_7 ainsi que T_1 ont déjà été définies ci-dessus.

Etape 1. Nous prétendons que

$$\sup_{T_1 \leq t \leq T} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 \to 0 \qquad n, i \to \infty. \tag{3.17}$$

En effet, notons que pour chaque $n \geq 1$, $\varphi_n(t)$ est continue et décroissante sur $[T_1, T]$ et, d'après le Lemme (3.2.4), pour chaque t, $\varphi_n(t)$ est décroissante monotone quand $n \to \infty$. Par conséquent, On peut donc définir la fonction $\varphi_(t)$ par $\varphi_n(t) \downarrow \varphi_(t)$ sur $[T_1, T]$. Il est facile de vérifier que $\varphi_(t)$ est continue et décroissante sur $[T_1, T]$ Par la définition de $\varphi_n(t)$ et $\varphi(t)$ on obtient :

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_t^T \overline{\kappa}(\varphi_n(s))ds = \int_t^T \overline{\kappa}(\varphi(s))ds, \qquad t \in [T_1, T].$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\varphi(t) \leq \varepsilon + \int_t^T \overline{\kappa}(\varphi(s))ds, \qquad t \in [T_1, T].$$

L'inégalité de Bihari implique que $\varphi(t) \equiv 0$ sur $t \in [T_1, T]$.

$$\varphi(t) \leq G^{-1}(t)(G(\varepsilon) + T - t) \leq G^{-1}(t)(G(\varepsilon) + T - T_1), \qquad t \in [T_1, T], \tag{3.18}$$

où

$$G(r) = \int_1^r \frac{ds}{\overline{\kappa}(s)} = \infty, \qquad r > 0.$$

et $G^{-1}(t)$ est la fonction inverse de G. En particulier, Par la condition (3.8) et la définition de $\overline{\kappa}(t)$, nous avons

$$\int_{0^+} \frac{du}{\overline{\kappa}(u)} = \infty,$$

ce qui implique

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon) = -\infty \quad et \;\; alors \;\; \lim_{\varepsilon\to 0} G^{-1}(G(\varepsilon) + T - T_1) = 0.$$

Par conséquent, on fait tendre $\varepsilon \to 0$ dans (3.18), on obtient que

$$\varphi(t) = 0 \qquad pour \;\; tout \;\; t \in [T, T_1].$$

En particulier, on voit que $\varphi_n(T_1) \downarrow \varphi(T_1) = 0$ quand $n \to \infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $N \geq 1$ tel que $\varphi_n(T_1) < \varepsilon$ chaque fois que $n \geq N$. Maintenant pour tout $k \geq 1$ et $n \geq N$, de Lemme (3.2.4), on a

$$\sup_{T_1 \leq t \leq T} \mathbb{E}|x_{n+k}(t) - x_n(t)|^2 = \sup_{T_1 \leq t \leq T} \widetilde{\varphi}_{n,k}(t) \leq \sup_{T_1 \leq t \leq T} \varphi_n(t) = \varphi_n(T_1) < \varepsilon,$$

Donc (3.17) est vérifier.

Etape 2.

On définit

$$T_2 = \inf\{s \in [0,T] : \sup_{s \leq t \leq T} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 \to 0, \text{quand} \quad \text{n}, \quad \text{i} \to \infty\}.$$

On voit immédiatement que de l'etape 1 que $0 \leq T_2 \leq T_1 < T$. Dans cette étape en peut montrer que :

$$\sup_{T_2 \leq t \leq T} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 \to 0, \qquad \text{quand n, i} \to \infty. \tag{3.19}$$

Soit $\varepsilon > 0$ un arbitraire, on choisit $\delta \in (0, T - T_2)$ pour

$$C_6 \kappa(4C_1)\delta < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.20}$$

Quand $\kappa(0) = 0$, on peut trouver une constante $\theta \in (0, \varepsilon)$ tel que

$$TC_6 \kappa(\theta) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.21}$$

Par le définition de T_2 , on observe que pour un N suffisamment grand,

$$\mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 < \theta \qquad \textit{pour } t \in [T_2 + \delta, T] \qquad \textit{si } \ n, i \geq N. \tag{3.22}$$

Maintenant, soit $n, i \geq N + 1$, Par les Lemmes (3.2.1) et (3.2.2) ainsi que les inégalités (3.20)-(3.22), on peut en déduire que si $T_2 \leq t \leq T_2 + \delta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 &\leq C_6 \int_{T_2}^{T_2+\delta} \kappa(\mathbb{E}|x_{n-1}(s) - x_{i-1}(s)|^2) ds + C_6 \int_{T_2+\delta}^{T} \kappa(\mathbb{E}|x_{n-1}(s) - x_{i-1}(s)|^2) ds \\
&\leq C_6 \kappa(4C_1)\delta + TC_6 \kappa(\theta) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci, avec (3.22) et $\theta < \varepsilon$

$$\sup_{T_2 \leq t \leq T} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 < \varepsilon, \qquad \text{pour n, i} \geq N + 1.$$

C'est-à-dire que (3.19) est vérifie.

Etape 3. A cette étape, nous montrerons que $T_2 = 0$. Supposons autrement que $T_2 > 0$. A l'etape 2, nous pouvons choisir une suite de nombres $\{a_i\}_{i\leq 1}$ tels que $a_i \downarrow 0$ comme $i \to \infty$ et

$$\sup_{T_2\leq t\leq T} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 < a_i, \qquad \text{quand } n > i \geq N+1. \tag{3.23}$$

Si $0 \leq t \leq T_2$ et $n > i \geq 2$, Par les Lemmes (3.2.1) et (3.2.2) avec (3.23), nous avons dériver que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 &\leq C_6 \int_t^T \kappa(\mathbb{E}|x_{n-1}(s) - x_{i-1}(s)|^2)ds \\ &\leq TC_6\kappa(a_{i-1}) + C_6 \int_t^{T_2} \kappa(\mathbb{E}|x_{n-1}(s) - x_{i-1}(s)|^2)ds \\ &\leq TC_6\kappa(a_{i-1}) + C_6\kappa(4C_1)(T_2 - t). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer une assertion semblable au Lemme (3.2.4). Pour énoncer l'affirmation, il faut introduire de nouvelles notations. Choisissez un nombre positif $\delta \in (0, T_2)$ et un entier positif $j \geq 1$ pour

$$TC_6\kappa(a_j) + C_6\kappa(4C_1)\delta \leq 4C_1. \tag{3.24}$$

On définit une suite de fonctions $\{\phi_k(t)\}_{k\geq 1}$ sur $T_2 - \delta \leq t \leq T_2$ par :

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= TC_6\kappa(a_j) + C_6\kappa(4C_1)(T_2 - t), \\ \phi_{k+1}(t) &= TC_6\kappa(a_{j+k}) + C_6 \int_t^{T_2} \kappa(\phi_k(s))ds, \qquad k \geq 1. \end{aligned}$$

On fixe arbitrairement $l \geq 1$ et on définit une suite de fonctions $\{\overline{\phi}_{k,l}(t)\}_{k\geq 1}$ par

$$\overline{\phi}_{k,l}(t) = (\mathbb{E}|x_{j+k+l}(t) - x_{j+k}(t)|^2), \qquad T_2 - \delta \leq t \leq T_2.$$

Nous prétendons que

$$\overline{\phi}_{k,l}(t) \leq \phi_k(t) \leq \phi_{k-1}(t) \leq ... \leq \phi_1(t), \qquad T_2 - \delta \leq t \leq T_2. \tag{3.25}$$

En réalité, il résulte de (3.24) que

$$\overline{\phi}_{1,l}(t) = (\mathbb{E}|x_{j+1+l}(t) - x_{j+1}(t)|^2) \leq TC_6\kappa(a_j) + C_6\kappa(4C_1)(T_2 - t) = \phi_1(t).$$

c'est (3.25) vérifie pour $k = 1$. Alors, par (3.24) et (3.24), on déduit que

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}_{2,l}(t) &= \mathbb{E}|x_{j+2+l}(t) - x_{j+2}(t)|^2 \\
&\leq TC_6\kappa(a_{j+1}) + C_6\int_t^{T_2} \kappa(\mathbb{E}|x_{j+1+l}(s) - x_{j+1}(s)|^2)ds \\
&= TC_6\kappa(a_{j+1}) + C_6\int_t^{T_2} \kappa(\overline{\phi}_{1,l}(s))ds = \phi_2(t) \\
&\leq TC_6\kappa(a_j) + C_6\int_t^{T_2} \kappa\Big[C_6\kappa(a_j) + C_6\kappa(4C_1)(T_2 - t)\Big] \\
&\leq TC_6\kappa(a_j) + C_6\kappa(4C_1)(T_2 - t) \\
&= \phi_1(t).
\end{aligned}$$

En d'autres termes, nous avons déjà montré que

$$\overline{\phi}_{2,l}(t) \leq \phi_2(t) \leq \phi_1(t), \qquad T_2 - \delta \leq t \leq T_2.$$

c'est (3.25) vérifie pour $k = 2$. Supposons maintenant que (3.25) s'applique à un certain $k \leq 2$. Alors, par (3.24),

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}_{k+1,l}(t) &= \mathbb{E}|x_{j+k+1+l}(t) - x_{j+k+1}(t)|^2 \\
&\leq TC_6\kappa(a_{j+k}) + C_6\int_t^{T_2} \kappa(\mathbb{E}|x_{j+k+l}(s) - x_{j+k}(s)|^2)ds \\
&= TC_6\kappa(a_{j+k}) + C_6\int_t^{T_2} \kappa(\overline{\phi}_{k,l}(s))ds \\
&\leq TC_6\kappa(a_{j+k}) + C_6\int_t^{T_2} \kappa(\phi_k(s))ds = \phi_{k+1}(t) \\
&\leq TC_6\kappa(a_{j+k-1}) + C_6\int_t^{T_2} \kappa(\phi_{k-1}(s))ds \\
&= \phi_k(t).
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que (3.25) est également vérifie pour $k + 1$. Donc, par induction, (3.25) est vérifie pour tout $k \geq 1$. Notons que pour chaque $k \geq 1$, $\phi_k(t)$ est continue et décroissante sur $[T_2 - \delta, T_2]$ et, de plus, pour chaque t, $\phi_k(t)$ ne croît pas de façon monotone comme $k \to \infty$. Donc on peut définir la fonction $\phi(t)$ sur $[T_2 - \delta, T_2]$ par $\phi_k(t) \downarrow \phi(t)$. Il est facile de vérifier que $\phi(t)$ est continue et décroissante sur $[T_2 - \delta, T_2]$. Par la définition de $\phi_n(t)$ et $\phi(t)$ nous avons aussi cela

$$\phi(t) = \lim_{k\to\infty} \phi_{k+1}(t) = \lim_{k\to\infty} \left[TC_6\kappa(a_{j+k}) + C_6 \int_t^{T_2} \kappa(\phi_k(s))ds\right] = C_6 \int_t^{T_2} \kappa(\phi_k(s))ds, \qquad T_2 - \delta \leq t \leq T_2.$$

De la même manière qu'à l'etape 1, nous pouvons Alors appliquer l'inégalité de Bihari pour montrer que

$$\phi(t) = 0, \qquad \text{sur} \quad T_2 - \delta \leq t \leq T_2.$$

En particulier, nous voyons que $\phi_k(T_2 - \delta) \downarrow \phi(T_2 - \delta)$ comme $k \to \infty$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $k_0 \geq 1$ tel que $\phi_k(T_2 - \delta) < \varepsilon$ chaque fois que $k \geq k_0$. Il découle Alors de (3.25) que

$$\sup_{T_2-\delta\leq t\leq T_2} \mathbb{E}|x_{j+l+k}(t) - x_{j+k}(t)|^2 \leq \phi_k(T_2 - \delta) < \varepsilon. \tag{3.26}$$

chaque fois que $k \geq k_0$. Puisque $l \geq 1$ est arbitraire et que k_0 est indépendante de l, (3.26) signifie que

$$\sup_{T_2-\delta\leq t\leq T_2} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 \to 0 \qquad \text{quand n, i} \quad \to \infty.$$

Ceci, avec (3.19), on trouve

$$\sup_{T_2-\delta\leq t\leq T} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 \to 0 \qquad \text{quand n, i} \quad \to \infty.$$

Mais ceci est en contradiction avec la définition de T_2. Nous devons donc avoir $T_2 = 0$. En d'autres termes, nous avons montré que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|x_n(t) - x_i(t)|^2 \to 0 \qquad \text{quand n, i} \quad \to \infty. \tag{3.27}$$

Etape 4. En appliquant (3.27) et (3.14) nous voyons que $\{x_n(t)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^d)$ et $\{y_n(t)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^{d\times m})$. On définit leurs limites par $x(t)$ et $y(t)$, respectivement. En fait tendre $n \to \infty$ in (3.9) nous avons finalement

$$x(t) + \int_t^T f(x(s), y(s), s)ds + \int_t^T [g(x(s), s) + y(s)]dW(s) = X$$

sur $0 \leq t \leq T$. En d'autres termes, nous avons montré l'existence de la solution sur $[T_1, T]$. Remarquons dans Lemme (3.2.4) que la valeur $1 - T_1$ ne dépend que de la fonction k et non de la valeur finale X. On peut donc déduire par itération l'existence sur $[1 - k(1 - T_1), T]$, pour chaque k, et donc l'existence globale $[0, T]$.

l'existence a été prouvée.

L'unicité :

Pour montrer l'unicité, supposons que $\{x(t), y(t)\}$ et $\{\overline{x}(t), \overline{y}(t)\}$ sont deux solutions de l'équation (2.1). Alors, de la même manière que dans la preuve du Lemme (3.2.1), on peut montrer que

$$\mathbb{E}|x(t)-\overline{x}(t)|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T|y(s)-\overline{y}|^2ds \quad\leq\quad 2[4K+2+\frac{1}{4K+2}]\int_t^T[\mathbb{E}|x(s)-\overline{x}(s)|^2$$

$$+\kappa(\mathbb{E}|x(s)-\overline{x}(s)|^2)]ds. \tag{3.28}$$

pour $0 \leq t \leq T$. Puisque $\kappa(t)$ est une fonction concave et $\kappa(0)=0$, on a

$$\kappa(u) \geq \kappa(1)u \qquad\qquad 0 \leq u \leq 1.$$

Alors

$$\int_{0^+}\frac{du}{u+\kappa(t)} \geq \frac{\kappa(t)}{\kappa(t)+1}\int_{0^+}\frac{du}{\kappa(u)}=\infty.$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Bihari à (3.28) pour obtenir

$$\mathbb{E}|x(t)-\overline{x}(t)|^2=0, \qquad\qquad \textit{pour tout } 0 \leq t \leq T,$$

ce qui imlique immédiatement que $x(t)=\overline{x}(t)$ pour tous $0 \leq t \leq T$ p.s. Il découle Alors de (3.27) que

$$\mathbb{E}\int_0^T|y(s)-\overline{y}(s)|^2=0.$$

Alors $y(t)=\overline{y}(t)$ pour tous $\quad 0 \leq t \leq T \qquad$ p.s.

L'unicité a été prouvée et la preuve du théorème est alors complète.

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'intéressé à étudier les solutions d'une équation différentielle stochastique rétrograde générale sous une hypothèse faible sur les coefficients f et g.

Premièrement, on a présenté quelques rapples préliminaires sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Ensuite, on a démontré le théorème fondamental d'existence et d'unicité d'une solution pour les EDSR dû à Pardoux et Peng (1990) dans le cas où le générateur f est non-linéaire et lipschitzien par rapport aux deux variables y et z.

Deuxièment, on a étudié l'existence et l'unicité d'une solution pour une EDSR générale sous la condition que $f(x; y; t)$ et $g(x; t)$ sont uniformément Lipschitziens continues dans $(x; y)$ et dans x, respectivement.

Dernièrement, on a prouvé que sous une hypothèse relativement faible que celle de Lipschitz sur les coefficents f, g, il existe une unique solution d'une EDSR générale à l'aide de l'inégalité de Bihari.

Annexe

Théorème .1. ***(Inégalité De Doob)*** *Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue a droite, alors*

$$\forall p > 1, \quad \left(\mathbb{E}[|\sup_{0\leq r\leq t} X_r|^p]\right) \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0\leq r\leq t} \left(\mathbb{E}[|X_r|^p]\right).$$

Soit (M_t) une martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_T)$) continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ p.s. Alors

1. $\mathbb{P}(\sup_{0\leq r\leq t} |M_r| \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|M_t|)}{\lambda}, \qquad \forall\, t > 0,\ \lambda > 0,$
2. $\mathbb{E}(\sup_{0\leq r\leq t} |M_r|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_t|^2), \qquad \forall\, t > 0.$

Preuve : voir [35]

Lemme .1. ***(Inégalité De Gronwall)***

Soit $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(r)dr \qquad a \in \mathbb{R}, b \geq 0$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = ae^{bt}.$$

Preuve : voir [12]

Théorème .2. ***(Théorème stochastique De Fubini)*** *Supposons que $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable et soit*

$$\Phi : (t, \omega, x) \to \Phi(t, \omega, x)$$

une application mesurable de $(\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E))$ dans $(L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0))$. On suppose en outre que

$$\int_E |||\Phi(\cdot, \cdot, x)|||_T \mu(dx) < +\infty$$

alors $\mathbb{P} - P.s.$

$$\int_E \left[\int_0^T \Phi(t, x)dW(t)\right] \mu(dx) = \int_0^T \left[\int_E \Phi(t, x)\mu(dx)\right] dW(t).$$

Preuve : voir [11]

Théorème .3. ***(Inégalité De Burkholder-Davis-Gundy)*** *Soit $p > 0$ un réel, il existe deux constantes c_p et C telles que : pour toute martingale locale continue X nulle en zéro, on a*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\alpha^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\alpha^{p/2}\right]$$

Preuve : voir [1]

Théorème .4. ***(Formule D'Itô)*** *La formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Cette formule offre un moyen de manipuler le mouvement Brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).*

Soit X un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: pour $i = 1, ..., n$,

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{i,k} dW_s^k.$$

Si f est deux fois différentiable en x et une fois en t on a :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_{x_i} f(s, X_s) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \partial^2_{x_i,x_j} f(s, X_s) d\langle X^i, X^j\rangle_s, \end{aligned}$$

avec $dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} dW_s^k$ et $d\langle X^i, X^j\rangle_s = \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} H_s^{i,k} ds$.

Le résultat est plus simple à retenir sous forme vectorielle. Pour cela, on note X le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées X^i, K le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées K^i et W le vecteur de $\mathbb{R}^d$ de coordonnée W^j. On introduit alors la matrice de taille $n \times d$, $H = (H^{i,j})_{i\leq i\leq n, 1\leq j\leq d}$. Avec ces notations, on a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_r ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

où $H_s dW_s$ est un produit matrice-vecteur colonne. La formule d'Itô s'écrit sous la forme, notant $x.y$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et H^* la transposée de H

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s).dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t trace(D^2 f(s, X_s) H_s H_s^*) d_s^i,$$

soit encore

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t (\partial_s f(s, X_s) + \nabla f(s, X_s).K_s) ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t trace(D^2 f(s, X_s) H_s H_s^*) d_s^i + \int_0^t Df(s, X_s) H_s dW_s. \end{aligned}$$

Théorème .5. ***(Girsanov)*** *Soit $(h_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{P}$-p.s. $\displaystyle\int_0^T |h_r|^2 dr < +\infty$. On suppose que le processus $(D_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par*

$$D_t = \exp\left(\int_0^t h_s.dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2 ds\right)$$

est une martingale. Soit $\mathbb{P}^*$ la mesure de densité D_T par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$. Introduisons le processus $B_t = W_t - \displaystyle\int_0^t h_s ds$. Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}$, W est un mouvement brownien standard.

Preuve : voir [18]

Théorème .6. ***(inégalité de Young)*** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, strictement croissante et surjective, vérifiant $f(0) = 0$. On note $g = f^{-1}$, F et G, respectivement, les applications qui à x associent $\int_0^t f(t)dt$ et $\int_0^t g(t)dt$. On a alors*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad F(x) + G(y) \geq x.y$$

et l'égalité est vérifiée pour $y = f(x)$.

Preuve : voir [39]

Théorème .7. ***(Formule de Tanaka)*** *Soit X une semimartingale continue. Il existe $(L_t^a)_{t\geq 0}, a \in \mathbb{R}$ processus croissant continu, appelé temps local en a de la semimartingale X, tel que*

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2}L_t^a$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2}L_t^a$$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a) dX_s + L_t^a$$

où

$$sgn = \begin{cases} -1 & x \leq 0\,; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

De plus, la mesure (de Stieltjes) dL_t^a associée L_t^a est portée par $\{t \in \mathbb{R} : X_t = a\}$.

Preuve : voir [6]

Théorème .8. ***(De convergence monotone (TCM))*** *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonction mesurables telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad |f_n(x)| \leq g(x) \qquad \textit{pour tout } x \in X,$$

où g est une fonction intégrable. Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f_n d\mu.$$

Théorème .9. ***(Inégalité De Holder)*** *Pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{C}^n$ on a :*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

L'inégalité de Holder s'écrit, en notant $\langle x|y\rangle$ le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$,

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|_p\|y\|_q$$

et cette inégalité est encore valable pour $p = 1$ et $q = +\infty$. Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Preuve : voir [8]

Lemme .2. ***(De Fatou)*** *Soit $f_n \geq 0$ une suite. Alors*

$$\int_X \Big(\lim\inf_{n\to\infty} f_n\Big)d\mu = \lim\inf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Preuve : voir [7]

Théorème .10. ***(Une équation De type KPP)*** *Une équation de type KPP est une équation différentielle partielle non linéaire proposée par Andrey Kolmogorov, Ivan Petrovsky et Nikolai Piskunov comme suit :*

$$u_t - \alpha u - \beta u^2 + \gamma u^3 = 0.$$

Preuve : voir [40]

La formule de Feynman-Kac est une généralisation de l'équation à retard de Kolmogorov. Pour $X = (X_t)_{t\leq 0}$ une diffusion d'Itô de générateur A.

Théorème .11. ***(Formule De Fyenman-Kac)*** *Soient $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Supposons aussi que q est minorée par une constante.*

Possons

$$v(t,x) = \mathbb{E}^x\Big[\exp\Big(-\int_0^t q(X_s)ds\Big)f(X)_t\Big]. \tag{29}$$

Alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv; \qquad t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{30}$$

$$v(0,x) = f(x); \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{31}$$

Si de plus, $w : (t,x) \to w(t,x)$ est bornée dans $K \times \mathbb{R}^n$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et vérifie (30) et (31), alors $w(t,x) = v(t,x)$ donnée par (29).

Preuve : voir [15]

Théorème .12. ***(Inégalité De Jensen)*** *Soit f une fonction convexe sur un intervalle réel I et X une variable aléatoire à valeurs dans I, dont l'espérance $\{\mathbb{E}(X)\}$. Alors,*

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

Preuve : voir [23]

Théorème .13. ***(Itération type De Picard)*** *Si les deux $f(x,y), f_y(x,y)$ sont continus sur le rectangle $\mathbb{R} = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, alors il existe une solution unique au problème de la valeur initiale (I.V.P.)*

$$dy(t) = f(x,y), \qquad \text{avec} \qquad y(x_0) = y_0 \tag{32}$$

pour toutes les valeurs de x dans un intervalle $x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma$ (plus petit) contenu dans $a \leq x \leq b$.

Approximations successives - Itération De Picard)

La solution à I.V.P dans (32) est trouvée en construisant récursivement une suite des fonctions $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

$$y_0(x) = y_0.$$

et

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \qquad \text{pour} \qquad n \geq 0.$$

Alors la solution de (32) est donnée par la limite :

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x).$$

Preuve :voir [37]

Bibliographie

[1] N. L. Bassily. *A new proof of the right hand side of the Burkholder-Davis-Gundy inequality, Proc.* 5 *th Pannonian Symp. Math. Statistics*, pp. 7-21, Visegrad, Hungary, (1985).

[2] A. Bensoussan, *Lectures on stochastic contrôl, in : S. K. Mitter and A. Moro, eds.*, Nonlinear Filtering and Stochastic Contrôl, Lecture Notes in Mathematics, Vol.**972**, (Springer, Berlin, 1982).

[3] I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problem of differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **7**, 71-94, (1956).

[4] J. M. Bismut, Théorie probabiliste du contrôle des diffusions, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **No. 176** (1973).

[5] J. M. Bismut, *Analyse convexe et probabilités, thèse, Faculté des sciences de Paris,* Paris, (1978).

[6] P. Briand, *equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades*, pp 12, (Mars 2001)

[7] N. L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, (lire en ligne [archive]), p. 321, (2000).

[8] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, CUP, 2004 (ISBN 9780521603720, lire en ligne [archive]), p. 120.

[9] Z. Chen, *Existence and uniqueness for BSDE with stopping time*, Chinese Sci. Bull., *43*, 2,Chen, Z., Chi- nese Sci. Bull., *43*,

[10] M. I. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations,*(Princeton Univ. Press, Princeton, NJ), (1985).

[11] G. Fubini, *Sugli integrali multipli, Rom. Acc. L. Rend.* **5**, pp. 608-614, (1907).

[12] T. H. Gronwall, *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, Ann. of Math,* **20(2)** : 292-296, (1919).

[13] U. G. Haussmann, *A Stochastic maximum Principle for Optimal Contrôl of Diffusions, Pitman Research Notes in Mathematics,* Vol. **151**, (1986).

[14] E. Hille, Lectures on Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley. *Pub. Co., Reading, MA,* pp. 32-41.

[15] M. Kac. *On Distributions of Certain Wiener Functionals. Transactions of the American Mathematical Society.* **65(1)**, 1-13, (1949).

[16] N. El Karoui, S. Peng, Quenez, M. C, *Backward stochastic differential equation in Finance, Mathematical Finance,* **7(1)**, 1-71, (1997).

[17] N. El Karoui, *Backward stochastic differential equation : a general introduction. Pitman Research Notes in Mathematics* Series (editors : El karoui and Mazliak), **364**, 7-26, (1997).

[18] M. Kobylanski, *Résultats d'existence et d'unicité pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec des générateurs Pa croissance quadratique.* C. R. Acad. Sci. Paris SXer. I Math. **324** (1997), 81-86.

[19] M. Kobylanski, *Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth*, Ann. Probab., **18**, (2000), 256-276.

[20] H. J. Kushner, Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization prolems, *SIAM J. Contrôl*,**10**, pp. 550-565 (1972).

[21] X. Mao, *Stability of Stochastic Differential Equations with Respect to Semimartingales, Pitman Research Notes in Mathematics,* **251**, (1991).

[22] X. Mao, *Stochastics differentials equation and application -second edition,* 267-279 (1997-2007).

[23] T. Needham, *A Visual Explanation of Jensen's Inequality*, American Mathematical Monthly, **100(8)**, 768-71, (1993).

[24] E. Pardoux and S. G. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems contrôl Lett,* **14**, 55-61,(1990).

[25] E. Pardoux, S. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems and Contrôl letters,* **14**, 44-75, (1990).

[26] E. Pardoux and S. G. Peng, *Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations, in : Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications* .(Charlotte, NC, 1991), *Lecture Notes in Contrôl and Information Science,* Vol. **176**, pp. 200-217, (Springer, Berlin, 1992).

[27] E. Pardoux and S. G. Peng, *Some backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, Prepublication* , URA **225**, 94-3, University de Provence (1994).

[28] E. Pardoux. S. Peng, *Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs, Probab, Theory Related Fields,* **98(2)**, 209-227, (1994).

[29] E. Pardoux. S. Peng, *Backward doubly stochastic differential equation and systems of quasilinear SPDEs, Probab., Theory Related Fields,* **98(2)**, 209-227, (1994).

[30] S. G. Peng, *Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equation, Stochastics*,**14**, 61-74, (1991).

[31] S. Peng, Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *SIAM J. Contrôl Optimal,* **30**, **2**, 284-304,(1992).

[32] S. Peng, Y. Shi, *Infinite forward backward stochastic differential equation, stochastic processes and their ,applications,* **85**, 75-92, (2000).

[33] S. G. Peng, *Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equation, Stochastics*,**14**, 61-74, (1991).

[34] S. Peng, Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *SIAM J. Contrôl Optimal,* **30**, **2**, 284-304,(1992).

[35] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion (Third ed.)*, Berlin. Springer (1999).

[36] S. Tang, E. Pardoux. *Forward backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs, Probab, Theory Related Fields,* **114**, 123-150, (1998).

[37] A. Wouk, *On the Cauchy-Picard Method, The American Mathematical Monthly*, Vol. **70**, No. 2, pp. 158-162, Jstor (Feb., 1963).

[38] Z. Wu, S. Peng, Fully coupled forward backward stochastic differential equation and applicationsto optimal contrôl, *SIAM J. Contrôl optimal,* **37(3)**, 825-843, (1999).

[39] W. H. Young, *On classes of summable functions and their Fourier series*, Proc. Roy. Soc. Lond. Series A, vol. **87**, 1912, p. 225-229

[40] V. F. Zaitsev, A. D. Polyanin, *Handbook of nonlinear parteil differentiel equation, second edition*, p 1633 - CRC PRESS