République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Points critiques avec contraintes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Si youcef **E**lhadj [1]

Sous la direction de

Mme N. Bekkouche

Soutenue le 13/07/2019 devant le jury composé de

H. M.Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
S. Benmansour	Ecole Supèrieure de Management - Tlemcen	Examinateur
A. Mattalah	Ecole Supèrieure de Management - Tlemcen	Examinateur

1. e-mail : hadjsyf@gmail.com

Table des matières

Remerciements

Comme le veut la tradition, je vais tenter de satisfaire au difficile exercice de la page des remerciements. Non qu'exprimer ma gratitude envers les personnes en qui j'ai trouvé un soutien soit contre ma nature, bien au contraire. La difficulté tient plutôt dans le fait de n'oublier personne. C'est pourquoi, je remercie par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. Ils se reconnaîtront.
En premier lieu, nous remercions Dieu le tout-puissant qui nous a procuré la volonté, la force et la connaissance pour accomplir ce modeste travail. Nous aimerions d'abord remercier Docteur Bekkouche Noria, notre directrice de recherche, pour son aide précieuse, se conseils judicieux, ainsi que le temps qu'elle nous a consacré tout au long de cette période, sans oublier sa participation au cheminement de notre mémoire.

Je remercie Docteur Dida Hamou Mohamed pour avoir accepté de présider le jury. Je remercie également les membres de jury les Docteurs S.Benmansour et A.Mattalah d'avoir accepter de lire et d'évaluer ce travail.
Un grand merci adressé au personnel et aux enseignants du département de mathémathique.
Comme je remercie ceux qui m'aident de proche ou de loin à concrétisé ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents qui m'ont donnée la possibilité de poursuivre mes études, pour leurs guides affectueux, pour l'espoir qu'ils me donnent, pour les conseils dans la vie et leurs soutiens durant mes années d'études avec patience, courage et j'espère que je puisse leurs rende le maximum de bonheur qu'ils m'ont offert et que dieu les bénisse.
A mes sœurs, A mes frères, Ames cousins et cousines, A tous mes amis ainsi qu'a tous mes camarades, A tous mes chers proffeseurs durant toutes mes années d'études.
Finalement, à tous ceux qui me sont chères, qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect et ma gratitude.

A tous ce qui m'aiment, A tous ceux que j'aime.

Abreviations

EDP	Equation aux dérivées partielles.
$p.p.$	Presque partout.

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ N fois.
∇u	Gradient de u défini par $\nabla u \overset{def}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.
Δu	Laplacien de u.
$\Delta_p u$	p-Laplacien de u défini par $\Delta_p u = div \left(\lvert \Delta u \rvert^{p-2} \Delta u \right)$.

0.1 Introduction Générale

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (parfois appelée équation différentielle partielle et abrégée en EDP) est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.
Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire à une seule variable; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes.
Les EDP sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.
De nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles sont non linéaires à l'instar des systèmes Hamiltoniens et des problèmes elliptiques faisant intervenir des non linéarités. Immense champ de recherches, motivé par d'innombrables questions dans divers domaines, il a connu des développements spectaculaires depuis les travaux pionniers de Leray et de Schauder au début des années trente. Distinguons quelques catégories :

a Les problèmes semi-linéaires: Il s'agit par exemple de problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) \text{ dans } \Omega \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $f(x; u)$ est une fonction donnée et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Cette catégorie inclut entre autres les problèmes de bifurcation où l'on étudie la structure de l'ensemble des solutions(λ, u) du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f_\lambda(x, u(x)) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

avec λ un paramètre variable.

b Les problèmes quasi-linéaires: Il s'agit de résoudre des problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x,u,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f(x,u,\nabla u) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

où les fonctions $a_{i,j}(x,u,p)$ sont elliptiques. On a par exemple

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x,u,p)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(u,p)|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

avec $\alpha(u,p) > 0$; $\forall u \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{R}^N$ mais $\alpha(u,p)$ n'est pas uniformément minorée par une constante $\alpha > 0$, Ainsi, l'équation des surfaces minima s'écrit sous la forme (3) avec $a_{i,j} = \delta_{i,j}(1+|\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}}, \delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

Plus généralement encore, on envisage des problèmes elliptiques de la forme

$$F(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}) = 0$$

où la matrice $\frac{\partial F}{\partial q_{i,j}}(x,u,p,q)$ est elliptique. L'équation de Monge-Ampère rentre dans cette catégorie.

c Les problèmes de frontière libre: Il s'agit de résoudre une équation elliptique linéaire sur un ouvert Ω qui n'est pas donné a priori, le fait que Ω soit inconnu est souvent compensé par la donnée de deux conditions aux limites sur $\partial\Omega$, par exemple celles de Dirichlet et de Neumann.

Pour étudier les problèmes (1) et (2), on dispose de nombreuses techniques:

1. Des méthodes de monotonie Browder [5].
2. Des méthodes topologiques telles que le théorème du point fixe de Schauder, théorie du degré de Leray-Schauder [14].
3. Des méthodes variationnelles (théorie des points critiques, théorie de Morse, voir M. Krasnoselskii [14].

La résolution des problèmes du type (3) exige parfois une technique élaborée d'estimations, ceci est le cas par exemple pour l'équation des surfaces minima. Des progrès importants concernant l'équation de Monge-Ampère ont été obtenus Yau [**?**].
Pour ce qui est des problèmes de frontière libre, beaucoup de résultats sont apparus en liaison principalement avec la théorie des inéquations variationnelles Kinderlehrer-Stampacchia [16].

Dans ce travail, nous nous intéressons aux méthodes variationnelles, plus précisément à la théorie des points critiques, celle-ci occupe une place considérable dans l'analyse non linéaire. Elle est utilisée dans plusieurs disciplines des mathématiques pures et appliquées ainsi qu'en physique mathématique et en géométrie analytique. Développée pour résoudre des problèmes notamment non linéaires, elle consiste à trouver les points critiques d'une fonctionnelle d'énergie associée.
Prenons par exemple le problème semi-linéaire: soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction de $C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

Nous cherchons une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u(x) = f(u)$ au sens des distributions:
Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Associons à ce problème la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx.$$

La fonctionnelle J est bien définie et de classe C^1sur $H_0^1(\Omega)$, de plus tout point critique u de la fonctionnelle J c-à-d pour lequel $J'(u) = 0$ est une solution du problème (4) .
La majorité des contributions de cette théorie est l'oeuvre de Lagrange, Legendre, Jacobi, Hamilton, Poincaré. Au début, les mathématiciens étudiaient seulement le minimum absolu pour les fonctionnelles bornées inférieurement. En 1905, Poincaré a développé dans sa thèse quelques idées de Hilbert sur le principe de Dirichlet qui est en fait à l'origine de la théorie des points critiques.
Parfois, il est intéressant d'étudier les solutions de certains problèmes en considérant une fonctionnelle adéquate sur une contrainte bien choisie. Pour de multiples raisons, on peut placer le problème en question dans le cadre d'une famille de problèmes dépendant d'un ou de plusieurs paramètres et comprendre ainsi certains phénomènes qui ne paraissent pas clairs a priori; on peut obtenir des conditions nécessaires pour l'existence de solutions ou bien éliminer des inconnues du problème en les obtenant a posteriori comme des multiplicateurs de Lagrange. C'est le cas lorsque l'on cherche des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert en tant que multiplicateurs de Lagrange sur la sphère unité de l'espace .
Par des méthodes directes du Calcul des Variations.ainsi que la théorie des points critiques, nous considérons dans cette thèse l'étude de l'existence et la multiplicité d'une certaine catégorie de solutions dite solutions non radiales pour des problèmes de Dirichlet associés à des équations aux dérivées partielles

elliptiques dans differents cas. Notre travail tente d'étendre certains résultats comme ceux de, [**?**].
Cette thèse se compose de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les outils nécessaires à la suite de notre travail. Dans le second, nous présentons un résultat d'existence de solution pour un problème de Dirichle avec singularité [24]. Par une methode variationnelle Tyagi a été établir l'existence de solution.
Le chapitre 3 est l'exposé de l'article [2]. Nous y abordons un problème de Dirichlet dans le cas de présence de singularité, se basant sur des résultats du à Lions [17], nous obtenons, en plus d'un résultat d'existence de solutions non radiales, pour un problème de Dirichlet associé au p- Laplacien, un résultat de bifurcation.
Finalement, parmi les nombreuses références bibliographiques, nous avons choisi à la fin de ce travail un nombre assez consistant permettant au lecteur interéssé d'avoir accès à quelques sources que nous avons utilisées pour réaliser cette thèse.

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations et outils utilisés tout au long de cette thèse. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte. Nous rappelons également divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références à la bibliographie et seront utilisés dans le texte de manière transparente. L' ouvrages de base utilisé dans ce chapitre est, [4].

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Nous commençons par introduire les espaces de Lebesgue.

Pour Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, $D(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω.
L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

L^p est muni de la norme $\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$. Cette norme le rend complet, c'est donc un espace de Banach.
Pour $p = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } ess \sup |u| < +\infty\},$$

$L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme suivante: $\|u\|_\infty = ess\sup\limits_\Omega |u|$; avec

$$ess \sup |u| = \inf \{C > 0; \; |u(x)| \leq C \quad p.p \text{ dans } \Omega\}.$$

$L^p(\Omega)$ est reflexif et séparable pour $1 < p < +\infty$ et son dual est isomorphe à $L^q(\Omega)$ avec q le conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Hôlder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et q le conjugué de p alors :

$$f.g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega |f.g| \, dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

lemme de Fatou

Lemme 1.1.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ telle que, pour chaque n, $f_n(x) \geq 0 \;\; p.p$ sur Ω.Si $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n(x)$, pour tout $x \in \Omega$; alors $f \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega f(x) \, dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x) \, dx,$$

i.e.

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) \, dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x) \, dx.$$

Définition 1.1.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et ω une fonction poids. Pour $1 < p < \infty$, on définit $L^p(\Omega, \omega)$, l'espace de Banach de toutes les fonctions mesurables u définies sur Ω , telles que*

$$||u||_{L^p(\Omega,\omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u(t)|^p \, \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Exemple 1.1.1 *La fonction $\omega(x) = |x|^{\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^N$, est une fonction poids si et seulement si $-N < \alpha < N(p-1)$ (cf. [[**?**], Chapitre 15]).*
Alors pour $1 < p < N$, $|x|^{-p}$ est une fonction poids.

1.1.2 Espace de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Brezis [4].
Pour Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_J} \in L^p(\Omega), \text{ pour } J \in \{1, ..., N\} \right\},$$

où les dérivées sont au sens des distributions.
$W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_{J=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_J} \right\|_p, \tag{1.1}$$

est un espace de Banach.
L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est noté $H^1(\Omega)$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$ denote la complétion de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ i.e $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$, pour $1 \leq p < +\infty$. Où $D(\Omega) = C_0^{\infty}(\Omega)$, ensemble des fontions de classe C^{∞} a support compact dans Ω. Comme, l'espace $D(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (pour $1 \leq p < +\infty$), le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ peut être identifié à un sous-espace de l'espace des distributions $D'(\Omega)$ par:

$$W^{1,q}(\Omega) = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'; \; q \text{ conjugué de } p.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 1.1.2 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :*
1. un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. il est réflexif pour $1 < p < \infty$.
3. il est separable pour $1 \leq p < \infty$.

Remarque 1 *Soit $1 < p < \infty$, l'espace de Sobolev $W_T^{1,p}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions T-périodiques ayant une dérivée faible $u' \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $W_T^{1,p}(\mathbb{R})$ est muni de la norme*

$$\|u\|_{W_T^{1,p}(\mathbb{R})} = \left[\int_0^T |u(t)|^p \, dt + \int_0^T |u'(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Les injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue. Pour l'espace $W^{k,p}(\Omega)$, on a le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Soit Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soient $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty)$. Alors*
a). Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$;
b). Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p; +\infty[$, (mais pas pour $q = +\infty$);
c). Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Toutes ces injections sont continues.
Sans hypothèse de régularité sur Ω, les injections sont vraies localement : $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ elles restent globalement vraies si on remplace $W^{k,p}(\Omega)$ par $W_0^{k,p}(\Omega)$. Concernant la compacité des injections précédentes, on a le théorème suivant.

Théorème 1.2 ***(Rellich-Kondrachov** ([4])**):*** *Si Ω un domaine ouvert borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N$, alors*
a). Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*[$, où $p^* = \frac{N.p}{N-p}$;
b). Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$;
c). Pour tout $q \in]1, +\infty[$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Remarque 2 ***a)*** *La condition sur le domaine Ω est nécessaire, si Ω n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes en général comme le démontre le contre exemple suivant: Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que, $\phi \geq 0$, on pose $\phi_n(x) = \phi(x + ne)$, $e = (1, 1, 1, ..., 1)$, il est facile de voir que $\phi_n \to 0$ p.p. Et $\|\phi_n\|_{L^q} = \|\phi\|_{L^q} > 0$.*
b) *On note $\alpha(N, q) > 0$, la constante de Sobolev de l'injection compacte de $W_0^{1,p}(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega)$, avec $q \in [1, p^*)$ où $p^* = \frac{Np}{(N-p)}$. Ainsi, pour chaque $u \in W_0^{1,p}$, nous avons*

$$\|u\|_{L^q} \leq \alpha(N, q) \|u\|. \tag{1.2}$$

Inégalitè de Poincaré

L'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie du domaine sur lequel elle est considérée.

Soit p, tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, nous avons

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p . \tag{1.3}$$

Remarque 3 *L'inégalité de Poincaré permet d'établir l'équivalence sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ entre la norme* 1.1 *et celle définie par*

$$\|u\| = \sum_{k=0}^{m} \left\|\nabla^k u\right\|_p .$$

Il est évident que l' inégalité (1.3) *ne peut être généralisée à $W^{m,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).*

1.2 Quelques définitions et théorèmes

1.2.1 Fonction L^p-Carathéodory

Définition 1.2.1 *Nous rappelons que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction L^p-Carathéodory si*
a). $f(x,u)$ est dans $L^p(\Omega)$ pour chaque $u \in \mathbb{R}$;
b). $f(x,u)$ est continue presque par tous $x \in \Omega$;
c). Pour chaque $\rho > 0$ il existe une fonction $l_\rho \in L^p(\Omega)$ telle que p.p $x \in \Omega$.

$$\sup_{|u|\leq\rho} |f(x,u)| \leq l_\rho(x).$$

1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzela

Définition 1.2.2 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_n$ est équicontinue ssi :*

$$\forall x \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in I,\ \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Autrement dit, toutes les fonctions (f_n) sont continues sur I, et elles sont continues "de la même façon".
La notion d'équicontinuité intervient notamment dans le théorème d'Ascoli-Arzela:

Théorème 1.3 ***(Théorème d'Ascoli-Arzela)***

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle fermé borné I, à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue, et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f_n(x)| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$. Alors on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) qui converge uniformément sur I vers une fonction continue f.

Théorème 1.4 *Soit $(f_n)_n$ une suite de L^p et $f \in L^p$, tels que*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0 \text{ lorsque } u \to \infty.$$

Alors il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
a). $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p sur Ω;
b). $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ pour tout k et p.p sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.

1.2.3 Résultat sur la concentration de compacité

Nous énonçons un résultat de concentration de compacité, pour plus de details nous reférons le lecteur [17].

Théorème 1.5 *(cf. [17])*
Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite dans L^1 avec

$$\rho_n \geq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \rho_n dx = \lambda.$$

Où $\lambda > 0$ (λ est fixé). Alors il existe une suite extraite $(\rho_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie l'une des propriétés suivantes:
(i) Compacité: il existe $(y_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\rho_{n_k}(. + y_k)$ est tendu c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R < \infty, \int_{y_k + B_R} \rho_{n_k}(x)\, dx \geq \lambda - \varepsilon;$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \int_{y+B_R} \rho_{n_k}(x)\, dx = 0, \text{ pour tout } R < \infty;$$

(iii) Dichotomie: il existe $\delta \in \left]0, \lambda\right[$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \geq 1$ et $\rho_k^1,\ \rho_k^2 \in L_+^1\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ satisfaisant pour $k \geq k_0$

$$\begin{cases} \left\|\rho_{n_k} - (\rho_k^1 + \rho_k^2)\right\|_{L^1} \leq \varepsilon, \ \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \rho_k^1 dx - \delta\right| \leq \varepsilon, \ \left|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \rho_k^2 dx - (\lambda - \delta)\right| \leq \varepsilon \\ \quad dist(Supp\rho_k^1,\ Supp\rho_k^2) \underset{k}{\to} +\infty. \end{cases}$$

Remarque 4 *Pour la démonstration de ce théorème voir [26].*

1.2.4 Convergence forte et Convergence faible

Soient X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $(u_n)_n$ une suite dans X.

Définition 1.2.1 *On dit que la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u dans X si $\|u_n - u\|_E \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Définition 1.2.3 *$(u_n)_n$ est dite convergente faiblement vers u si $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ $\forall v \in X'$ dual de X et elle est notée par $u_n \rightharpoonup u$.*

Définition 1.2.4 *On dit que $C \subset X$ est faiblement fermé si pour toute suite $(u_n) \subset C$ telle que: $u_n \rightharpoonup u$ alors $u \in C$.*

Théorème 1.6 *Un convexe C de X est faiblement fermé si et seulement si il est fortement fermé.*

Dans le cas particulier de $X = W_T^{1,p}$, nous avons le résultat suivant

Proposition 1.2.1 *Si une suite $(u_k)_k$ converge faiblement vers u dans $W_T^{1,p}$, alors $(u_k)_k$ converge uniformement vers u sur $[0, T]$. Et il existe $C > 0$ telle que pour $u \in W_T^{1,p}$,*

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{W_T^{1,p}(\Omega)} \text{ où } \|u\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|.$$

Théorème 1.7 ***(Eberlein–Šmulian)*** *Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si de toute suite bornée (x_n) de X, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans X.*

1.3 Approche variationnelle

Dans cette thèse, nous nous sommes basées sur une approche variationnelle pour étudier la solvabilité de problèmes de Dirichlet associés à des EDP elliptiques. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.4}$$

où L est un opérateur uniformément elliptique, Ω est un domaine régulier dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$. Les solutions de (1.4) sont cherchées comme points critiques de fonctionnelles réelles définies sur un espace de Banach X.
Dans le cas où f est minorée ou majorée, il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum ou le maximum est atteint. Pour plus de détails, nous référons le lecteur à [22].

1.3.1 Formulation variationnelle

Au problème (1.4) on associé une fonctionnelle dite fonctionnelle d'énergie, définie par $J : X \to \mathbb{R}$,

$$J(u) = \langle Lu, u\rangle - \int_{\Omega} F(x, u)\, dx,$$

où $\langle , \rangle$ denote le produit scalaire dans L^2 et

$$F(x, u) = \int_0^u f(x, s)\, ds.$$

Points critiques

Définition 1.3.1 *Soit J une fonctionnelle de classe C^1 définie sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $u \in X$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.*
La valeur c est dite valeur critique de J s'il existe un point critique $u \in X$ tel que : $J(u) = c$.

Solution faible

Définition 1.3.2 *u est dite solution faible du problème* (1.4) *si*

$$\int_{\Omega} Lu.\varphi(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x).\varphi(x)\, dx \ \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Définition 1.3.3 *Une fonction $J : X \to \mathbb{R}$, est dite semi-continue inférieurement et on la note (s.c.i), en $x \in X$ si, pour toute suite $\{x_k\} \in X$ convergente vers x,*

$$\liminf_{x_k \to x} J(x_k) \geq J(x).$$

Définition 1.3.4 *Une fonctionnelle J est dite coercive si:* $\lim\limits_{\substack{\|u\| \to +\infty \\ u \in E}} J(u) = +\infty.$

Théorème 1.8 ***(minimisation directe** [22]) Si X est réflexif, $M \subset X$ un sous ensemble faiblement fermé de X. et $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, coercive et faiblement semi continue inférieurement sur M, alors J est borné inférieurement dans M et atteint son minimum dans M.*

Définition 1.3.5 ***(Suite minimisante)** Une suite minimisante pour une fonctionnelle $J : X \to \mathbb{R}$ est une suite $(w_k)_k$ telle que $J(w_k) \to \inf J$ quand $k \to \infty$.*

Remarque 5 *L'existence d'une suite minimisante est assurée en particulier quand J est coercive. Un outil essentiel dans le calcul de la variation est la compacité des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier pour chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non des valeurs critiques. Elle sera par contre un outil essentiel pour montrer cette existence dans plusieurs cas.*

Conditions de Palais-Smale

Définition 1.3.6 *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$ et le note $(PS)_c$, si de toute suite (u_n) de X telle que*

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } X',$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarques

1 La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.

2 Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si $c = \inf_X J$; on peut parfaitement avoir une suite minimisante u_n telle que $J'(u_n) \nrightarrow 0$. Il suffit de prendre $X = \mathbb{R}$, $J(u) = \sin u^2$, $c = -1$, et $u_n = \left(\frac{3\pi}{2} + n2\pi + \frac{1}{\sqrt{n2\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$ on a $J(u_n) \to -1$ et $J'(u_n) \to 2$.

3 Dans une série d'articles publiés dans les années 1960, R. Palais et S. Smale ont introduit une condition de compacité, maintenant appelée condition Palais-Smale, qui fournit l'existence d'une condition d'existence de point critique pour nombreux problèmes variationnels. Divers fonctionnels pertinents provenant de la physique et de la géométrie différentielle ne satisfont cette condition qu'à certains niveaux; une condition locale, est appliquée avec succès dans de nombreux problèmes.

Théorème 1.9 *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 bornée inferieurement et $c = \inf J$. Si la condition $(PS)_c$ est satisfaite, alors c est minimum de J.*

La preuve est basée sur le principe Ekeland appliqué à l'espace X équipé de distance géodésique.

Le théorème du Col (Mountain Pass Theorem)

Le premier exemple de construction de valeur critique par le procédé de min-max est le théorème du Col de la montagne (en anglais Mountain Pass Theorem) qui exprime très bien le contenu du résultat et sa démonstration: si on se trouve en un point A dans une cuvette à une altitude h_0, entourée de montagnes d'une altitude supérieure ou égale à $h > h_0$; si on veut aller à un point B située en dehors de la cuvette au delà des montagnes, et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B. Pour le trouver il suffit de prendre parmis tous les chemins allant de A à B, celui qui monte le moins haut.

Théorème 1.10 *Soit $J \in C^{\ 1}(X, \mathbb{R})$ supposons que J satisfait la condition $(PS)_c$, et*
(i) $J(0) = 0$,
(ii) il existe des constantes $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ telles que $J(x) > \alpha$ si $\|x\| = \rho$,
(iii) il existe $e \in X$, $\|e\| > \rho$, tel que $J(e) < 0$.
Alors J admet une valeur critique $c > \alpha$ qui peut être caractérisée comme suit

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[01]} J\left(\gamma\left(t\right)\right),$$

où,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([01], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Remarque 6 *a) Nous comprenons mieux pourquoi ce théorème s'appelle théorème du Col, quand nous interprètons géométriquement ou plutôt géographiquement les conditions (i) à (iii) dans le cas où $X = \mathbb{R}^2$ et $J(u)$ représente l'altitude d'un point u $\left(\text{dans } \mathbb{R}^3\right)$. Les conditions (i) et (ii) signifient que l'origine est placée dans une cuvette entourée de montagnes d'altitude au moins α. La condition iii) signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point e situé moins haut que les dites montagnes, disons dans une vallée. Par conséquent, il est intuitivement clair que l'on peut joindre continûment 0 à e en passant par un col de montagne et la construction du min-max nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.*
b) Il faut toute fois faire attention à l'intuition montagnarde. Ainsi, le théorème du Col est vrai même si J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale quand $X = \mathbb{R}$ (par le théorème des valeurs intermédiaires et celui de Rolle), par contre il est faux quand $X = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il peut ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte. Ainsi, par exemple, la fonction

$$J(x_1, x_2) = x_1^2(1 + x_2)^3 + x_2^4,$$

n'a clairement qu'un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$, à savoir l'origine où $J = 0$. Ce point critique est un minimum local, donc une cuvette entourée de montagnes, et l'on peut descendre encore plus bas à l'extérieur de la cuvette car $\inf_{\mathbb{R}^2} J = -\infty$. C'est donc un exemple de fonction présentant un seul point critique, qui est un minimum local mais pas global. Comme il n'y a pas d'autre point critique que le minimum local, c'est donc qu'il n'existe pas de col pour sortir de la cuvette. Cela ne peut se produire que si les chemins minimisants partent vers l'infini. Cette perte de compacité est évidemment liée au fait que J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale au niveau de l'inf-max.

Théorème 1.11 *Soit $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition $(PS)_c$. Supposons qu'il existe un espace métrique compact K, et $K_0 \subset K$ une partie fermée et $h_0 \in C(K_0, K)$ telle que*

$$\max_{z\in K_0} J\left(h_0\left(z\right)\right) < \max_{z\in K} J\left(h\left(z\right)\right),$$

si

$$c = \inf_{h\in\Gamma}\ \max_{t\in K} J\left(h(t)\right).$$

où

$$\Gamma = \left\{h \in C(K, X) \setminus h_{|K_0} = h_0\right\},$$

Alors c est une valeur critique de J.

Théorème 1.12 [20] *Soient X un espace de Banach réel séparable et réflexive, $I \subset \mathbb{R}$, et $\Psi : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifier les conditions suivantes :*

1 *Pour chaque $x \in X$, $\Psi(x, .)$ est continu et concave;*

2 *Pour chaque $\lambda \in\ I$, $\Psi(., \lambda)$ est faiblement semi-continue inférieurement et différentiable au sens de Gâteaux et $\lim_{\|x\|\to\infty} \Psi(x, \lambda) = +\infty$;*

3 *Il existe une fonction concave continue $h : I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\sup_{\lambda\in I}\inf_{x\in X}(\Psi(x, \lambda) + h(\lambda)) < \inf_{x\in X}\sup_{\lambda\in I}(\Psi(x, \lambda) + h(\lambda)).$$

Alors, il existe un intervalle ouvert $\Lambda \subset I$ et η est un nombre réel positif , tel que pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'équation

$$\Psi'_x(x, \lambda) = 0$$

admet au moins deux solutions dans X sont inférieures à η .

Remarque 7 *Si la fonction g est continue dans $X \times I$, et pour chaque $\lambda \in I$, la fonction $g(., \lambda)$est de classe C^1 et vérifie la condition $(PS)_c$, alors le théorème ci-dessus est valable pour «trois solutions» au lieu de «deux solutions».*

Théorème 1.13 [3]*Soit X un espace de Banach réel séparable et réfléxive et, $\Phi, J : X \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continûments Gateaux-différentiables . Supposons qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $\Phi(x_0) = 0 = J(x_0)$ et $\Phi(x_0) \geq 0$ pour tout $x \in X$ et supposons qu'il existe $x_1 \in X$ et $r > 0$ tel que*

i $r < \Phi(x_1)$;

ii $\sup_{\Phi(x)<r} J(x) < r\frac{J(x_1)}{\Phi(x_1)}$;

De plus,

$$a = \frac{hr}{r\frac{J(x_1)}{\Phi(x_1)} - \sup_{\Phi(x)<r} J(x)}$$

avec $h > 1$, et la fonctionnelle $\Phi - \lambda J$ est faiblement semi continue inférieurement et vérifiant la condition $(PS)_c$,

iii $\lim_{||x||\to+\infty}(\Phi(x) - \lambda J(x)) = +\infty$, pour chaque $\lambda \in [0, \overline{a}]$;

Alors, il existe un intervalle ouvert $\Lambda \subseteq [0, a]$ et $\eta > 0$ tel que pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'équation

$$\Phi'(x) - \lambda J'(x) = 0$$

admet au moins trois solutions dans X sont inférieures à η.

1.3.2 Approche variationnelle pour un problème avec singularité

Dans cette section nous présentons les outils utilisés dans le chapitre 2 et le chapitre 3, où nous abordons un problème de Dirichlet associé à une EDP elliptique en présence de singularité.

Inégalité de Hardy

L'inégalité de Hardy prouve que l'inclusion de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p\left(\Omega, \frac{1}{|x|^p}\right)$ est continue mais n'est pas compact comme l'injection de Sobolev (1.2), pour plus d'informations voir , [11]. Elle est donnée par,

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \frac{1}{C_{N,p}} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p , \; u \in W_0^{1,p}(\Omega) , \tag{1.5}$$

avec, $C_{N,p} = \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$.

Application de l'inégalité de Hardy L'inégalité de Hardy a été utilisée dans [11] pour montrer la semicontinuité de fonctionnelles de type,

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^p - \frac{\lambda\,|u(x)|^p}{|x|^p}\right)dx - \int_{\Omega} f(x)\,u(x)\,dx,$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, f étant une fonction de $L^{p'}(\Omega)$, et λ est un nombre réel positif.
Posons

$$\psi_\lambda(u) := \frac{1}{p}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^p - \frac{\lambda\,|u(x)|^p}{|x|^p}\right)dx. \tag{1.6}$$

Dans [18] E. Montefusco a montré la semicontinuité inférieure de fonctionnelle $\psi_\lambda(u)$ (1.6) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, à condition que $\lambda \in [0, C_{N,p}]$, c.a.d λ est tel que la coercivité de la fonctionnelle soit assurée; il a utilisé le principe de concentration de compacité de P. L. Lions (1.5).
Maintenant nous énonçons ce résultat important du à E. Montefusco, présenté et démontré dans [18] concernant la semi- continuité inférieure de la fonctionnelle ψ_λ, et l'outil principal de la démonstration de ce théorème (1.14), formulé en lemme (1.3.1) et concernant le comportement des suites faiblement convergentes dans les espaces de Sobolev et qui est du à P. L. Lions (cf. [17]).

Théorème 1.14 [*cf* : *th*.3.2 *de* [*18*]]

Si $\lambda \in [0, C_{N,p}]$; alors $\psi_\lambda(u)$ est une fonctionnelle semi continue inférieurement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
La preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant:

Lemme 1.3.1 [*cf* : *Lemme*.3.1 *de* [*18*]]*:*
Si $\{u_n\}$ *est une suite convergente faiblement dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *vers* u *alors*

$$|\nabla u_n(x)|^p\,dx \to \mu,$$

et

$$\frac{|u_n(x)|^p\,dx}{|x|^p} \to \nu,$$

pour la topologie faible-*, et

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{|u(x)|^p\,dx}{|x|^p} + \nu_0\delta_0, \\ \mu &\geq |\nabla u(x)|^p\,dx + \mu_0\delta_0, \qquad 0 \leq \nu_0 \leq \mu_0/C_{N,p}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.3.3 Valeur propre du p-Laplacien

Notion de valeur propre

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < +\infty$; on cherche les couples $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$, avec $u \neq 0$, solutions de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u & dans \;\; \Omega \\ u = 0 & sur \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\Delta_p u$ est l' opérateur differentiel défini par :

$$\Delta_p u = \nabla \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right).$$

avec $|\nabla \cdot|^{p-2}$ donné par

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

Définition 1.3.7 *Le réel λ est appelé valeur propre, et la fonction u fonction propre. L'ensemble des valeurs propres est appelé le spectre de (1.8).*

La suite$(\mu_n)_n$de toutes les valeurs propres de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$ est telle que

$$\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq .... \to +\infty$$

Le théorème de Courant affirme que si u est fonction propre associée à λ_k, alors u admet au plus k domaines nodaux .
Ce théorème a été partiellement étendu au p-Laplacien par Anane–Tsouli.
La suite des valeurs propres de $-\Delta_p$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ obtenue par la méthode de Ljusternik–Schnirelman est telle que

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq .... \to +\infty$$

Dans le cas linéaire $p = 2$, cette suite $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ....$ coïncide avec la suite précédente $\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq ....$

Chapitre 2

Problème de minimisation sans contrainte

Sommaire

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solvabilité du problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \frac{g(x)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + a(x) f_1(\lambda, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ avec $\partial\Omega$ un bord lisse, $0 \in \Omega$ et λ et μ sont des paramètres positifs et f_1, g sont des fonctions satisfaisant à certaines conditions précisées par la suite, Δ_p l'opérateur p-Laplacien déféni par

$$\Delta_p u = \nabla \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right).$$

où $|\nabla \cdot|^{p-2}$ est défini par

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

Nous commençons tout d'abord par citer certains résultats d'existence pour le problème précédant (2.1).

Le problème (2.1) peut être écrit sous la forme plus générale,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \frac{g(x)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \varphi(\lambda, x, u) & x \in \Omega \\ \quad u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.2}$$

dans les dernières années, le problème (2.2) avec $\mu = 0$, $\varphi(\lambda, x, u) = \lambda f(u)$ a été largement étudié [?]. Dans le cas $p = 2$, il existe de nombreuses publications traitant *l'existence de solutions* pour (2.2), avec $\varphi(\lambda, x, u) = Q(x)|u|^{2^*-2}u + \lambda u$, telle que $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev [10].
Quand $\mu \neq 0$, la situation est différente à cause de la présence du potentiel singulier.
Les problèmes quasilinéaires avec singularité sont largement étudié dans la littérature, nous renvoyons le lecteur au livre de Drabek et al et pour l'existence et la multiplicité de résultats concernant le problème p-Laplacien singulier, voir [12, 17], et les références qui y figurent. Les résultats dépendent en général de la relation entre λ et la meilleure constante dans l'inégalité de Hardy. Pour plus de commodité du lecteur, nous donnons un bref résumé de certains résultats anterieurs.
Dans [10] (2001), les auteurs par des méthodes variationnelles en particulier l'application du theorème de Brezis-Nirenberg ont montré l'existence de solutions non triviales, pour le problème (2.2) quand $\varphi(\lambda, x, u) = Q(x)|u|^{2^*-2}u + \lambda u$, telle que $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$ et $Q(x) = 1$, $0 \leq \mu < \overline{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$ et $\lambda > 0$.D. Ruiz et M. Willem [21] (2003) , ont étudié la solvabilité du problème (2.2). Ils ont établi l'existence de solutions positives pour $N \geq 3$ et $Q(x) = 1$, sous différentes hypothèses sur le domaine Ω; qui incluent certains types de domaines non bornés, ils ont utilisé la concentration de compacité; et le Principe de criticité Symmetrique.
Récemment, D. Caoa., P. Hana [6] (2004), ont étudié le problème (2.2) avec $Q(x) = 1$ et $\lambda > 0$. En utilisant la théorie de points critiques, ils ont montré l'existence d'une solution non triviale du problème (2.2) pour $N \geq 5$ et $0 \leq \mu < \frac{(n-2)^2}{4} - \frac{(n+2)^2}{4}$.
Dans [18] (2001) , Montefusco a considéré le problème (2.2) avec $\varphi(\lambda, x, u) = |u|^{q-2}u$ quand $1 < p < N$ et $p < q < p^*$, il a établi l'existence d'une solution pour $\mu \in (0, \left(\frac{N-p}{p}\right)^p)$, il a utilisé le principe de la concentration de compacité de P. L. Lions [?], il a montré la semicontinuité inférieure faible de certaines classes de functionelles. Faraci et Livrea [9] ont utilisè le résultat de Montefusco [18] et ont donné des résultats de bifurcation pour le problème p-Laplacian singulier.
Récemment, Kristaly et Varga [15] (2007) ont obtenu l'existence de trois solutions au problème (2.2) avec $g = 1$, par application du théorème de Bonanno [3], avec $\varphi(\lambda, x, u) = \lambda f(u)$. Tyagi [24] (2010) , a généralisé ce résultat, lorsque $\varphi(\lambda, x, u) = \lambda a(x) f(u)$.

2.2 Formulation du problème

Dans cette section, nous démontrons l'existence de deux solutions au problème (2.1) par l'application du théorème de Bonanno, dans le cas où $\varphi(\lambda, x, u) = \lambda a(x) f(u)$

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \frac{g(x)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda a(x) f(u) & x \in \partial\Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

Où Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ avec $\partial\Omega$ un bord lisse, $0 \in \Omega$ et $0 \leq \mu < (\frac{n-p}{p})^p$, $\lambda > 0$, $a \in L^\infty(\Omega)$ et la non-linéarité f et g satisfaisant les hypothèses suivantes

(H_1) (i) $f_1 : (0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction contuinue.

(ii) $\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0$.

(iii) $\lim_{|s| \to \infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0$.

$(iiii)$ $F(s) = \int_0^a f(t)dt$, et $\sup\limits_{s \in \mathbb{R}} F(s) > 0$.

(H_2) $g : \Omega \to \mathbb{R}$, est une fonction de $L^\infty(\Omega)$, $\exists M > 0$ tel que $-M \leq g(|x|) \leq 1$, pour tout $x \in \Omega$.

2.3 Formulation variationnelle

Nous définissons la fonction F par:

$$F(s) := \int_0^s f(t)\, dt.$$

Et nous considérons la fonctionnelle associée à (2.3),

$$E_{\mu,\lambda}(u) = \Phi_\mu(u) - \lambda J(u), \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ , \tag{2.4}$$

Où

$$\Phi_\mu(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{p} \int_\Omega \frac{g(x)|u(x)|^p}{|x|^p} dx,$$

et

$$J(u) = \int_u a(x) F(u(x)) dx.$$

Évidemment, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est un point critique de la fonctionnelle$E_{\mu,\lambda}$ (2.4), alors u est une solution faible de problème (2.3).

2.4 Résultat

Nous avons un résultat d'existence des solutions pour le problème considéré (2.3).

Théorème 2.1 *: Sous les hypothèse* $(H_1)-(H_2)$ *et pour chaque* $\mu \in [0, (\frac{N-p}{p})^p)$ *il existe un intervalle ouvert* $\Lambda_\mu \subset (0, \infty)$ *et* $\eta_\mu > 0$ *telle que* $\lambda \in \Lambda_\mu$*, le problème* (2.3) *admet une solution non trivial faible* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *telle que* $||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant \eta_\mu$.

Preuve: Pour prouver ce résultat, nous adaptons une approche variationnelle; nous utilisons le théorème de Bonano(1.13) de trois poins critiques (cf. [3]) est un cas particulier du théorème des trois points critiques de Ricceri(1.12). Pour prouver l'existence d'un point critique pour la fonctionnelle $E_{\mu,\lambda}$, nous considérons et montrons quelques résultats auxiliaires.

Lemme 2.4.1 *Pour chaque* $\mu \in [0, C_{N,p})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *, la fonctionnelle* $E_{\mu,\lambda}$ *est coercive.*

Preuve: *D'aprés* (H_1) (iii) *et* $\mu \in [0, C_{N,p})$*, pour toute* $\lambda \in \mathbb{R}$*, il existe* $\delta = \delta(\mu, \lambda) > 0$ *tel que*

$$|f(s)| < (1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})(\frac{c(N,p)^{-1}}{(1 + ||a||_{L^\infty})}(1 + |\lambda|)^{-1}|s|^{p-1}$$

Quand $|s| > \delta$, (H_1) (i) *cela implique*

$$|f(s)| < (1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})(\frac{c(N,p)^{-1}}{(1 + ||a||_{L^\infty})}(1 + |\lambda|)^{-1}|s|^{p-1} + \max_{|t|\leq\delta} |f(t)|, \ \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

L'intégration de (2.5) *donne*

$$|F(s)| < \frac{1}{p}(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})(\frac{c(N,p)^{-1}}{(1 + ||a||_{L^\infty})}(1 + |\lambda|)^{-1}|s|^p + \max_{|t|\leq\delta} |f(t)||s|, \ \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Nous avons

$$E_{\mu,\lambda}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{g(x)|u(x)|^p}{|x|^p} dx - \lambda \int_\Omega a(x)F(u(x))dx,$$

Maintenant (H_2), (2.6) *et* (1.5), *impliquent que*

$$
\begin{aligned}
E_{\mu,\lambda}(u) &\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^p}dx - \lambda\int_\Omega a(x)F(u(x))dx,\\
&\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{pC_{N,p}}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda\int_\Omega a(x)F(u(x))dx,\\
&\geqslant \frac{1}{p}(1-\frac{\mu}{C_{N,p}})\int_\Omega |\nabla u|^p dx - |\lambda|\int_\Omega a(x)F(u(x))dx,\\
&\geqslant \frac{1}{p}(1-\frac{\mu}{C_{N,p}})\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{|\lambda|}{(1+|\lambda|)p}c(N,p)^{-p}\int_\Omega |u|^p dx\\
&\quad -|\lambda|c(N,1)\max_{|t|\leq\delta}|f(t)|||u||_{W_0^{1,p}}\\
&\geqslant \frac{1}{p}(1-\frac{\mu}{C_{N,p}})(\frac{1}{1+|\lambda|})\int_\Omega |\nabla u|^p dx - |\lambda|c(N,1)\max_{|t|\leq\delta}|f(t)|||u||_{W_0^{1,p}}\\
&\geqslant \frac{1}{p}(1-\frac{\mu}{C_{N,p}})(\frac{1}{1+|\lambda|})||u||^p_{W_0^{1,p}} - |\lambda|c(N,1)\max_{|t|\leq\delta}|f(t)|||u||_{W_0^{1,p}}
\end{aligned}
$$

alors, $\lim\limits_{\|u\|\to+\infty} E_{\mu,\lambda}(u) = +\infty$. *Cela implique que* $E_{\mu,\lambda}(u)$*est coercive.*

■

Lemme 2.4.2 *Pour chaque* $\mu \in [0, C_{N,p}]$*, la fonctionnelle* $\phi_\mu(u)$ *, est faiblement semi-continue inférieurement sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *.*

Preuve: *A partir du principe de concentration de compacité* [17]*, Montefusco a prouvé dans* [18]*, lorsque g est bornée inférieurement. que la fonctionnelle* ϕ_μ *est faiblement semi continue inférieurement.*
Puisque g satisfait (H_2*), la preuve du lemme* (2.4.2) *est similaire à la démonstration du résultat* [*th*3.2 [18]] , *de sorte que nous omettons les détails* 1.3.1.

■

Lemme 2.4.3 *Pour chaque* $\mu \in [0, C_{N,p}]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, la fonctionnelle* $E_{\mu,\lambda}(u)$*, est faiblement semi-continue inférieurement sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *.*

Preuve: *D'aprés* $(H_1)\,(iii)$*, il existe* $C > 0$ *de telle sorte que*

$$|f(s)| \leqslant C(1+|s|^{p-1})\ ,\ s\in\mathbb{R} \tag{2.7}$$

L'intégration de (2.7) *donne*

$$|F(s)| < C|s|^p + C|s|,\ \forall s\in\mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Maintenant, utilsant (2.7) *et l'injection compacte de* $W_0^{1,p}(\Omega) \circlearrowleft L^p(\Omega)$*, nous déduisons que* $E_{\mu,\lambda}$ *est faiblement semi continue inférieurement, et par suite se basant sur le lemme* (2.4.2) $E_{\mu,\lambda}$ *est une fonctionnelle faiblement semi continue inférieurement pour tous les* $\mu \in [0, C_{N,p})$ *et* $\lambda > 0$. ■

Lemme 2.4.4 *Pour chaque $\mu \in [0, C_{N,p})$*

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{\sup\{J(u) : \Phi_\mu(u) < \xi\}}{\xi} = 0.$$

Preuve: *En appliquant $(H_1)\,(ii)$, soit $\mu \in [0, C_{N,p})$, et pour toute $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon)$ telle que*

$$|f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})\frac{c(N,p)^{-1}}{(1 + ||a||_{L^\infty})}|s|^{p-1} \text{ , pour toute } |s| < \delta \tag{2.9}$$

il existe $\gamma_1 \in (p, p^*)$ et en appliquant (2.8) et (2.9) nous obtenons

$$|F(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2p}(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})\frac{c(N,p)^{-1}}{(1 + ||a||_{L^\infty})}|s|^p + C\frac{(1 + \delta)}{(1 + ||a||_{L^\infty})}\delta^{1-\gamma_1}|s|^{\gamma_1}. \tag{2.10}$$

Pour $\xi > 0$ et $s \in \mathbb{R}$, nous définissons les ensembles

$$A_\xi = \{u \in W_0^{1,p} : \Phi_\mu(u) < \xi\};$$

$$B_\xi = \{u \in W_0^{1,p} : (1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})||u||^p_{W_0^{1,p}} < \xi p\}.$$

En appliquant (1.5), de plus on a $A_\xi \subseteq B_\xi$ et (2.10), pour chaque $u \in A_\xi$ et donc $u \in B_\xi$ nous avons

$$\begin{aligned}
J(u) &\leqslant \frac{\varepsilon}{2p}(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})c(N,p)^{-p}\int_\Omega |u|^p dx + C(1+\delta)\delta^{1-\gamma_1}\int_\Omega |u(x)|^{\gamma_1}dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2p}(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})\int_\Omega |\nabla u|^p dx + C(1+\delta)^{1-\gamma_1}c(N,\gamma_1)^{\gamma_1} \\
&\quad p^{\frac{\gamma_1}{p}}\xi^{\frac{\gamma_1}{p}}(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})^{\frac{-\gamma_1}{p}} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\xi + C(1+\delta)^{1-\gamma_1}c(N,\gamma_1)^{\gamma_1}p^{\frac{\gamma_1}{p}}\xi^{\frac{\gamma_1}{p}}(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})^{\frac{-\gamma_1}{p}} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\xi + C_1\xi^{\frac{\gamma_1}{p}},
\end{aligned}$$

avec

$$C_1 = C(1+\delta)^{1-\gamma_1}c(N,\gamma_1)^{\gamma_1}p^{\frac{\gamma_1}{p}}\xi^{\frac{\gamma_1}{p}}(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}})^{\frac{-\gamma_1}{p}}.$$

Ainsi, il existe $\xi(\varepsilon) > 0$ telle que pour chaque $0 < \xi < \xi(\varepsilon)$,

$$0 \leqslant \frac{\sup_{u \in A_\xi} J(u)}{\xi} \leqslant \frac{\sup_{u \in B_\xi} J(u)}{\xi} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + C_1\xi^{\frac{\gamma_1 - p}{p}} < \varepsilon,$$

ce qui prouve le lemme (2.4.4). ■

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que$F(t_0) > 0$, D'aprés $(H_1)\,(iiii)$. Nous choisissons $R_0 > 0$ telle que $R_0 < dist(0, \partial\Omega)$ et $\eta \in (0,1)$, nous définissons

$$u_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \backslash B_N(0, R_0); \\ t_{0,} & \text{si } x \in B_N(0, \eta R_0) \\ \frac{t_0}{R_0(1-\eta)}(R_0 - |x|), & \text{si } x \in B_N(0, R_0) \backslash B_N(0, \eta R_0), \end{cases}$$

où $B_N(0, r)$ est une boule ouverte de N-dimension de centre 0 et de rayon $r > 0$, on'a $u_\eta \in W_0^{1,p}$ et V_N le volume de N-dimension de la boulle unité dans $\mathbb{R}^n$, nous avons

$$||u_\eta||^p_{W_0^{1,p}} = t_0^p R_0^{N-p}(1-\eta)^{-p} V_N (1-\eta^N) \tag{2.11}$$

et

$$J(u_\eta) \geqslant [F(t_0)\eta^N - \max_{|t| \leqslant |t_0|} |F(t)|(1-\eta^N)] V_N R_0^N. \tag{2.12}$$

Pour η proche de 1, le côté droit de la dernière inégalité devient strictement positif, donc nous choisissons η_0 et nous fixons $\mu \in [0, C_{N,p})$ d'aprés le lemme (2.4.4) et (2.11), nous pouvons choisir ξ_0 tel que

$$\begin{aligned} p\xi_0 &< (1 - \frac{\mu}{C_{N,p}}) C ||u_{\eta_0}||^p_{W_0^{1,p}} \\ \sup\{J(u) \quad : \quad \Phi_\mu(u) < \xi_0\} &< \frac{p[F(t_0)\eta^N - \max_{|t|<|t_0|} |F(t)|(1-\eta^N)] V_N R_0^N}{||u_{\eta_0}||^p_{W_0^{1,p}}}. \end{aligned}$$

En choisissant $x_1 = u_{\eta_0}$, les hypothèses du théorème (1.13) sont satisfaites. Définir

$$\bar{A} = \bar{A}_\mu = \frac{1 + \xi_0}{\frac{J(u_{\eta_0})}{\Phi_\mu(u_{\eta_0})} - \frac{\sup\{J(u):\Phi_\mu(u)<\xi_0\}}{\xi_0}}$$

D'aprés le lemmes (2.4.1), (2.4.3), et toutes les hypothèses du théorème [20] sont satisfaites. I'application du théorème [20] implique qu'il existe un'interval $\Lambda_\mu \subset [0, \bar{A}_\mu]$ et un nombre $\eta_\mu > 0$ tel que pour toute $\lambda \in \Lambda_\mu$, l'équation $E'_{\mu,\lambda} \equiv \Phi'_\mu(u) - \lambda J(u) = 0$. Alors (2.3) admet au moins deux solutions dans$W_0^{1,p}$ qui sont inférieure à η_μ. D'aprés $(H_1)\,(ii)$ implique que $f(0) = 0$.Ce qui prouve l'existence d'une solution non trivial du problème (2.3) et achève la démonstration du théorème (2.1) . ■

Remarque 8 *Kristaly et Verga [15] ont étudié le problème (2.3) avec $g(x) \equiv 1 \equiv a(x)$ et $p = 2$.En utilisant le théoréme [3], ils ont montré $E_{\mu,\lambda}$ vérifier la condition de Palais-Smale alors le probléme (2.3) admet trois solutions.*

Exemple 2.4.1 *Nous considérons (2.3) avec $g(x) = \frac{1+\sin|x|}{2}$, $a(x) = (1 + |x|)^{-\alpha}\cos|x|$, où $\alpha > 0$ et $\mu \in [0, (\frac{N-p}{p})^p)$. Supposons qu'il existe $\beta > 0, c > 0$*

telle que $\beta < p - 1 < c$ *et* $S > 0$ *telle que*

$$f(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0; \\ e^{(s^c)} - 1, & 0 < s \leq S \\ e^{(S^c)} - S^\beta + s^\beta - 1, & S < s \end{cases}$$

Les fonctions g, a *et* f *satisfont les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *du théorème* (2.1). *L'application du théorème* (2.1) *donne l'existence d' une solution non-trivial faible* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *telle que* $||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \eta_\mu$ *et pour chaque* $\lambda \in \Lambda_\mu$ *où* $\Lambda_\mu \subset (0, \infty)$ *et* $\eta_\mu > 0$.

Chapitre 3

Problème de minimisation sous contrainte

Sommaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons des problèmes présentant des singularités du type suivant ,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \frac{g(|x|)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda f(|x|, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.1}$$

où, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ avec $\partial\Omega$ est un bord lisse, $0 \in \Omega$, $|x|$ est la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^N$, λ et μ sont des paramètres positifs et f, g sont des fonctions radiales satisfaisant à certaines conditions précisées par la suite.
Nous nous proposons de montrer l'existence de solutions nonradiales bien que tous les termes figurant dans l'équation differentielle sont radiaux.

Nous commençons par donner un petit aperçu sur la recherche précédant notre travail et concernant le problème (3.1) .
Le problème (3.1) peut être écrit sous la forme plus générale,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \frac{g(x)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \varphi(\lambda, x, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.2}$$

Concernant les types de solutions cherchées pour le problème(3.2), alors malgré le développement intense sur l'existence de solutions radiales pour le problème (3.2), sans terme singulier (c.à.d pour $\mu = 0$), ou avec terme singulier (pour $\mu \neq 0$) [23], les résultats sur l'existence de solutions non radiales est loin d'être aussi abondants. Au meilleur de notre connaissance, il n'y a que quelques articles sur ce sujet dans la littérature et concernant le cas régulier $\mu = 0$, [19], avec terme singulier (pour $\mu \neq 0$) [13].
Une question naturelle est de savoir si le nombre infini de solutions persiste dans le cas de présence de terme singulier dans l'équation originale. En particulier, le fait que le problème (3.2), avec terme singulier (c.a.d pour $\mu \neq 0$) possèdent une infinité de solutions non radiales. Dans cette étude, notre objectif principal inspiré par [1, 25] et [15, 24], est de montrer que le résultat obtenu par [1, 25] peut être étendue au p-Laplacien singulier avec un changement de signe de la non-linéarité et que les conditions introduites par [24] sur f peuvent être changées en considérant f avec une croissance"p-sublinéaire" en $u = 0$ (voir $(H_1)\,(iii)$).

3.2 Formulation du problème

Dans cette section, nous démontrons l'existence de solutions non radiales pour le problème (3.3)

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \frac{g(|x|)|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda f(|x|, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.3}$$

qui est étudié, avec $1 < p < N$, et λ, μ sont des paramètres positifs et la non-linéarité f et g satisfaisant les hypothèses suivantes:

(H_1) (i) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction Carathéodory radiale, et impaire par rapport à la second variable, c.à.d

$$\text{pour presque tout } x \in \Omega, \text{ et tout } s \in \mathbb{R}. f(|x|, s) = -f(|x|, -s)$$

(ii) $\lim\limits_{|u| \to +\infty} \frac{f(|x|,u)}{|u|^{p-1}} = 0$,uniformément pour presque tout $x \in \Omega$.

(iii) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(|x|,u)}{|u|^{p-1}}=+\infty$, uniformément pour presque tout $x\in\Omega$.

(H_3) $g:\Omega\to\mathbb{R}$, est une fonction de $L^{\infty}(\Omega)$, tel que $0\leq g(|x|)\leq 1$, pour tout $x\in\Omega$.

3.3 Résultats

3.3.1 Resultat d'existence

Nous établissons l'existence de solutions non radiales pour le problème aux limites (3.3) sous les hypothèses introduites .

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses* (H_1)*et* (H_3) *et pour tout* $\mu\in[0,C_{N,p}[$, $\lambda>0$, *le problème* (3.3) *admet une suite de solutions non radiales bornée.*

Preuve: Pour prouver ce résultat, nous adaptons une approche variationnelle.
Pour tout $u\in\mathbb{R}$ et pour presque tous $x\in\Omega$, nous définissons F la primitive de f par

$$F(|x|,u):=\int_{0}^{u}f\left(|x|,s\right)ds.$$

Sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme $\|u\|:=\left[\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}$, nous définissons la fonctionnelle d'énergie J associé à (3.3) par,

$$J_{\mu,\lambda}(u)=\phi_{\mu}(u)-\lambda J(u)\,. \tag{3.4}$$

Où,

$$\phi_{\mu}(u)=\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^p\,dx-\frac{\mu}{p}\int_{\Omega}\frac{g(x)\,|u(x)|^p}{|x|^p}dx \quad \text{et} \quad J(u)=\int_\Omega F(|x|,u(x))dx.$$

$J_{\mu,\lambda}$ est définie dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour $\mu\in[0,C_{N,p}[$, et $\lambda>0$, $J_{\mu,\lambda}$ est une fonctionnelle différentiable, de dérivée $J'_{\mu,\lambda}(u)\in\left(W_0^{1,p}\right)^*(\Omega)$, donnée par,

$$\begin{aligned} J'_{\mu,\lambda}(u)v &= \int_{\Omega}|\nabla u|^{p-1}\nabla v dx-\mu\int_{\Omega}\frac{g(x)}{|x|^p}\,|u(x)|^{p-1}\,v dx \\ &\quad -\lambda\int_\Omega f(|x|,u(x))v dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Il est évident que, si $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ est un point critique de la fonctionnelle $J_{\mu,\lambda}$, alors u est une solution faible du problème (3.3). Par conséquent, pour prouver

l'existence de solutions faibles pour (3.3), il suffit de montrer l'existence de points critiques pour $J_{\mu,\lambda}$, pour certaines valeurs de μ et λ.
Pour obtenir la multiplicité de solutions non radiales nous cherchons des solutions périodiques en θ_{N-1} sur les ensembles E_k, $k = 1, 2, \ldots$définis par

$$E_k = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,;\ u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, .) \text{ impaire, et } \frac{2\pi}{k} \text{ périodique} \right\}. \quad (3.6)$$

Les ensembles E_k sont des contraintes naturelles pour le problème (3.3) dans le sens que chaque point critique de la fonctionnelle d'énergie $J_{\mu,\lambda}$ associée à (3.3) sur E_k est un point critique de $J_{\mu,\lambda}$ sur l'ensemble $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Pour établir l'existence de points critiques de $J_{\mu,\lambda}$ sur E_k, nous montrons quelques lemmes auxilliaires.

Lemme 3.3.1 *Supposons que* $(H_1)\,(i) - (ii)$ *est vérifiée alors :*
1*- L'ensemble* E_k *est faiblement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.

Preuve: *L'affirmation 1 du lemme* (3.3.1), *est une conséquence de la nature de l'ensemble* E_k*, qui est convexe et fortement fermé alors* E_k *est faiblement fermé (cf.* (1.6) *chap1).*
E_k *est convexe en effet, soient* $u, v \in E_k$

$$\begin{aligned} & tu(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) + (1-t)\, v(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) \\ = \; & -\left[tu(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) + (1-t)\, v(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) \right]. \end{aligned}$$

Donc $tu + (1-t)\, v$ *est impaire.*

$$\begin{aligned} & tu\left(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) + (1-t)\left(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) \\ = \; & tu(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) + (1-t)(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-2}, \theta_{N-1}). \end{aligned}$$

Donc $tu + (1-t)\, v$ *est impaire et périodique en* θ_{N-1} *. Alors* $tu + (1-t)\, v \in E_k$ $\forall t \in [0, 1]$*. Par conséquent* E_k *est convexe.*
Montrons que E_k *est fortement fermé:*
Soit $(u_n)_n \subset E_k$ *tel que* $u_n \to u$*, montrons que* $u \in E_k$.
Nous avons $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *car* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est complet*

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

d'aprés théorème (*cf.* (1.4) *chap1*) *nous obtenons*

$$u_{n_k} - u \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad p.p \ sur \ \Omega.$$

Nous avons $x \in \Omega,\ x = (r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1})$

$$\begin{aligned}
u\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}\right) &= \lim_{n\to\infty} u_n\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}\right) \quad p.p \ sur \ \Omega \\
&= \lim_{n\to\infty} -u_n\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}\right) \\
&= -\lim_{n\to\infty} u_n\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}\right) \\
&= -u\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) &= \lim_{n\to\infty} u_n\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) \\
&= u\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}\right),
\end{aligned}$$

onc $u \in E_k$.
E_k *est convexe et fortement fermé alors* E_k *est faiblement fermé.*
■

Lemme 3.3.2 *Supposons que* $\mu \in [0, C_{N,p}[$, *alors* ϕ_μ *est une fonctionnelle faiblement semi continue inférieurement sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve: A partir du principe de concentration de compacité [17], Montefusco a prouvé dans [18], lorsque g est bornée inférieurement. que la fonctionnelle ϕ_μ est faiblement semi continue inférieurement.
Puisque g satisfait (H_3), la preuve du lemme (3.3.2) est similaire à la démonstration du résultat [th3.2 [18]] , de sorte que nous omettons les détails 1.3.1.
■

Lemme 3.3.3 *Pour tout* $\mu \in [0, C_{N,p}[$, *et* λ *un paramètre positif, la fonctionnelle* $J_{\mu,\lambda}$ *est faiblement semi continue inférieurement sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve: *Soit* $\mu \in [0, C_{N,p}[$, *et* λ *est un paramètre positif, l'hypothèse* $(H_1)(ii)$, *implique l'existence de* $\delta = \delta(\mu, \lambda) > 0$ *tel que pour presque tous* $x \in \Omega$, *nous avons,*

$$|f(|x|, s)| < \left(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\frac{\alpha(N,p)^p}{(1+\lambda)}\right)|s|^{p-1}, \tag{3.7}$$

quand $|s| > \delta$. *En utilisant* $(H_1)(i)$ *et* (3.7), *pour tout* s *dans* $\mathbb{R}$ *et pour presque tous* x *dans* Ω *nous obtenons,*

$$f(|x|, s) < \left(1 - \frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\frac{\alpha(N,p)^p}{(1+\lambda)}\right)|s|^{p-1} + \max_{|s|\le\delta}|f(|x|, s)|. \tag{3.8}$$

L'intégration de (3.8) *donne*

$$F\left(|x|,u\right)<\frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\frac{\alpha(N,p)^{p}}{(1+\lambda)}\right)|u|^{p}+\max_{|s|\leq\delta}|f\left(|x|,s\right)||u|. \tag{3.9}$$

Maintenant, utilsant (3.9) *et l'injection compacte de* $W_0^{1,p}(\Omega) \circlearrowleft L^p(\Omega)$*, nous déduisons que* J *est faiblement semi continue inférieurement, et par suite se basant sur le lemme* (3.3.2) $J_{\mu,\lambda}$ *est une fonctionnelle faiblement semi continue inférieurement pour tous les* $\mu \in [0, C_{N,p})$ *et* $\lambda > 0$. ∎

Lemme 3.3.4 . *Pour tout* $\mu \in [0, C_{N,p})$ *et* $\lambda > 0$*, la fonctionnelle* $J_{\mu,\lambda}$ *est coercive dans l'ensemble* E_k *qui est faiblement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve: ***1***. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, l'ensemble* E_k *est convexe et fortement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, donc* E_k *est faiblement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$*,(cf.* (1.6) *).*
2. *Maintenant, nous allons montrer que* $J_{\mu,\lambda}$ *est coercive sur* E_k*, (c-à-d* $\lim\limits_{\substack{\|u\|\to+\infty \\ u\in E_k}} J_{\mu,\lambda}(u) = +\infty$*).*
D'après (3.9)*, nous avons pour chaque* $\mu \in [0, C_{N,p})$ *, et* $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}F\left(|x|,u\right)dx \quad < \quad & \frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\alpha\left(N,p\right)^{p}\left(1+\lambda\right)^{-1}\int_{\Omega}|u|^{p}\,dx\\ & +\max_{|s|\leq\delta}|f\left(|x|,s\right)|\int_{\Omega}|u|\,dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Maintenant (H_3), (3.9) *et* (1.5)*, impliquent que,*

$$\begin{aligned}J_{\mu,\lambda}(u) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx-\frac{\mu}{p}\int_{\Omega}\frac{g\left(x\right)|u\left(x\right)|^{p}}{|x|^{p}}dx-\lambda\int_{\Omega}F\left(|x|,u\left(x\right)\right)dx\\ &\geq \frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx-\frac{\mu}{p}\int_{\Omega}\frac{|u\left(x\right)|^{p}}{|x|^{p}}dx-\lambda\int_{\Omega}F\left(|x|,u\left(x\right)\right)dx\\ &\geq \frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx-\frac{\mu}{pC_{N,p}}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx-\lambda\int_{\Omega}F\left(|x|,u\left(x\right)\right)dx\\ &\geq \frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx-\frac{\lambda}{(1+\lambda)}\left(\alpha\left(N,p\right)^{p}\int_{\Omega}|u|^{p}\,dx\right)\right)+\\ &\quad -\lambda\max_{|s|\leq\delta}|f\left(|x|,s\right)|\int_{\Omega}|u|\,dx,\end{aligned}$$

utilisant les constantes d'injection de Sobolev, nous obtenons,

$$J_{\mu,\lambda}(u)\geq\frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{C_{N,p}}\right)\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)\|u\|^{p}-\lambda\alpha\left(N,1\right)\max_{|s|\leq\delta}|f\left(|x|,s\right)|\,\|u\|. \tag{3.11}$$

D'après (3.11) *nous avons* $J_{\mu,\lambda} \to +\infty$ *quand* $\|u\| \to +\infty$. *Par conséquent,* $J_{\mu,\lambda}$ *est coercive dans* E_k.
Ainsi, par les lemmes (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) *et utilisant la méthode directe de calcul variationnel, nous obtenons immédiatement que pour tout entier* $k \geq 1$, *il existe* $u_k \in E_k$ *telle que* $J_{\mu,\lambda}(u_k) = m_k$ *où*

$$m_k = \inf_{E_k} J_{\mu,\lambda}.$$

■

Lemme 3.3.5 *Pour tout entier* $k \geq 1$,

$$-\infty < m_1 \leq m_k < 0.$$

Preuve: D'après la coercivité de $J_{\mu,\lambda}$ sur E_1, nous obtenons clairement que $m_1 > -\infty$. En outre, de $E_k \subset E_1$, nous avons $m_1 \leq m_k$ pour tout entier $k \geq 1$. Pour prouver que $m_k < 0$ pour tout entier $k \geq 1$, nous considérons le domaine Ω_k, défini par,

$$\Omega_k := \left\{ (r, \theta_2, ..., \theta_N) \in \Omega;\ \theta_N \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right[\right\}.$$

Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta_p$ sur $W_0^{1,p}(\Omega_k)$ et $v_1^k \in L^\infty(\Omega_k)$ la fonction propre associée a λ_1. Pour plus de détails sur la valeur propre de p-Laplacien (cf. [**?**]).
Et soit v_1 la prolongation $\frac{2\pi}{k}$ périodique et impaire de v_1^k sur Ω. $v_1 \in E_k \cap L^\infty$. Pour tout $\lambda > 0$, nous pouvons choisir $A > 0$, vérifiant, $A\lambda > 2\lambda_1$, et par $(H_1)(iii)$ il existe $\alpha_A > 0$, tel que, pour tout $|u| \leq \alpha_A$ et pour presque tout $x \in \Omega$,

$$F(x,u) \geq \frac{1}{p} A\lambda |u|^p. \tag{3.12}$$

Alors, pour tout $s \in]0, \frac{\alpha_A}{\|v_1^k\|_{L^\infty}}[$, on obtient $sv_1^k \in E_k$ et $|sv_1^k| < \alpha_A$.
Ainsi, en utilisant (**??**) et (3.12), nous avons

$$\begin{aligned} J_{\mu,\lambda}(sv_k) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla s v_1^k|^p \, dx - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{g(|x|)\,|sv_1^k|^p}{|x|^p} dx - \lambda \int_\Omega F(x, sv_1^k)\, dx \\ &\leq \frac{1}{p} s^p \lambda_1 \int_\Omega |v_1^k|^p \, dx - \frac{\mu}{p} s^p \int_\Omega \frac{g(|x|)\,|v_1^k|^p}{|x|^p} dx - \lambda s^p \frac{A}{p} \int_\Omega |v_1^k|^p \, dx. \end{aligned}$$

(H_3), et g positive impliquent,

$$J_{\mu,\lambda}(sv_k) \leq (\lambda_1 - A\lambda) \frac{1}{p} s^p \int_\Omega |v_1^k|^p \, dx < 0.$$

Ainsi, nous concluons que $m_k < 0$. ■

Lemme 3.3.6 *Il existe $M > 0$ tel que pour tout entier $k \geq 1$*

$$\|u_k\| \leq M.$$

Preuve: *u_k est une solution faible du problème (3.3) et $J_{\mu,\lambda}(u_k) = m_k$. Puisque $m_k < 0$ et $J_{\mu,\lambda}(0) = 0$, nous déduisons que $u_k \neq 0$. De plus, $u_k \in E_k$ est donc non radiale car elle est impaire par rapport à θ_{N-1}.*
Puisque, $m_1 \leq m_k = J_{\mu,\lambda}(u_k) < 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$|J_{\mu,\lambda}(u_k)| < |m_1|. \tag{3.13}$$

En utilisant la coercivité de $J_{\mu,\lambda}$, on en déduit l'existence d'une constante $M > 0$, de telle sorte que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\|u_k\| < M. \tag{3.14}$$

■

A partir des lemmes (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) le problème (3.3) admet une suite de solutions non radiales satisfaisant (3.14) et la démonstration du théorème (3.1) est achevée. ■

3.3.2 Résultat de bifurcation

Nous nous intéressons à l'éxistence de points de bifurcation. Nous appelons point de bifurcation pour le problème (3.3) une valeur $(\mu, \lambda) \in [0, C_{N,p}[\times]0, +\infty[$ pour laquelle il existe une suite (μ_k, λ_k, u_k) de solutions de (3.3) avec pour tout entier $k \geq 1$, $u_k \neq 0$ et $(\mu_k, \lambda_k, u_k) \rightarrow (\mu, \lambda, 0)$ dans $[0, C_{N,p}[\times]0, +\infty[\times W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 3.2 *Pour tout $\mu \in [0, C_{N,p})$, et $\lambda > 0$, $(\mu, \lambda, 0)$ est un point de bifurcation pour le problème (3.3).*

Preuve: *Nous allons montrer que pour chaque $(\mu, \lambda) \in [0, C_{N,p}[\times]0, +\infty[$, la suite de solutions non radiales (u_k), obtenue par le théorème (3.1), converge vers 0. Ce qui prouvera que 0 est un point de bifurcation pour le problème (3.3).*
Ainsi, nous établissons que de toute sous-suite de (u_k), il est possible d'extraire une sous-suite convergente vers zéro, ce sera suffisant pour prouver que toute la suite (u_k) converge vers zéro.
Soit (u_{k_n}) une suite extraite de (u_k). Utilisant (3.14), et la réflexivité de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ nous en déduisons qu'il existe une sous-suite $\left(u_{k_{n_j}}\right)$ de (u_{k_n}) de telle sorte que $u_{k_{n_j}} \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Du fait que les ensembles

E_k sont faiblement fermé dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \in E_k$. Le théorème Ascoli- Arzelà (cf. (1.3) chap1), entraine la convergence forte de $\left(u_{k_{n_j}}\right)$ vers u.
Nous allons prouver que $u \equiv 0$, pour simplifier l'écriture, notons $u_j := u_{k_{n_j}}$.
Pour chaque $y \in [0, R] \times [0, \pi]^{N-2}$ rappelons que la fonction $u_j(y, .)$ est $\frac{2\pi}{j}$ périodique.
Maintenant, supposons au contraire que $u \neq 0$ alors il existe $y_0 \in [0, R] \times [0, \pi]^{N-2}$ et $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ tel que $u(y_0, \theta_0) \neq 0$. Posons,

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon := |u(y_0, \theta_0)| \\ v_j(\theta) = u_j(y_0, \theta) \\ v(\theta) = u(y_0, \theta) \end{array} \right. .$$

Par la continuité de v, il existe un intervalle $J_0 \subset [-\pi, \pi]$, tel que $|v(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $\theta \in J_0$. Par conséquent, et par la convergence uniforme de v_j vers v, nous déduisons qu'il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que, pour chaque $j \geq j_0$, $|v_j(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ pour tous les $\theta \in J_0$.
D'autre part, pour $j \geq j_0$,. Mais si $|J_0| > \frac{2\pi}{j}$, alors J_0 doit contenir au moins un zéro de v_j (principe d'oscillation)
Ce-ci est une contradiction avec $|v_j(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ pour tous les $\theta \in J_0$. ■

Exemple 3.3.1 *Soit β un entier impair tel que $\beta > p - 1 > 0$ et considérons la fonction f définie par*

$$f(|x|, u(x)) = u^{\frac{p-1}{\beta}} \sin|x|,$$

et

$$g(x) = 1 - e^{-|x|^2}.$$

Il est facile de voir que g et f satisfont les hypothèses (H_1) et (H_3). L'application du théorème 3.1 donne l'existence d'une suite de solutions non radiales du problème (3.3), pour chaque $\lambda > 0$ et $\mu \in [0, C_{N,p})$.

3.4 Conclusion

3.4.1 Conclusion

Une étude variationnelle de certains problèmes faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien a été présenté dans cette thèse. Nous avons été essentiellement concernées par l'étude de l' existence de solutions de problème de Dirichlet dans le cas de singularité [24] en utilisant le théorème de Bonano. Nous avons aussi démontré l'existence de solutions non radiales, pour un problème singulier (lacune de compacité), et un résultat de bifurcation [2], se basant sur des résultats du à Lions [17]. Les résultats ont été établis par minimisation sous contraintes.

Bibliographie

[1] F. Alessio, W. Dambrosio, Multiple solutions to a Dirichlet problem on bounded symmetric domains. J. Math. Anal. Appl. 235(1999), $p.217-226$.

[2] N. Bekkouche, N. Daoudi-Merzagui, M. Hellal, On the multiplicity of non radial solutions for singular elliptic equations. Afrika Mathematika. $27\,(2016)$, $p.\ 1-9$.

[3] G. Bonanno, Some remarks on a three critical points theorem. Nonlinear Anal. 54, (2003), $p.\ 651-665$.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, (1983).

[5] F. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution, Proc. Symp. Pure Math. ,Vol. 18, Part. 2, Amer. Math. Soc. (1976).

[6] D. Caoa, P. Hana, Solutions for semilinear elliptic equations with critical exponents and Hardy potential. J. Differential Equations. 205(2004), $p.\ 521-537$.

[7] J. Chen, Exact local behavior of positive solutions for a semilinear elliptic equation with Hardy term. Proc. Amer. Math. Soc. $132\,(2004)$, $p.\ 3225-3229$.

[8] K. S. Chou, C. W. Chu, On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality. J. London Math. Soc. 48(1993), $p.\ 137-151$.

[9] F. Faraci, R. Livrea, Bifurcation theorems for nonlinear problems with lack of compactness. Ann. Polon. Math. $82\,(2003)$, $p.77-85$

[10] A. Ferrero, F. Gazzola, Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations. J. Differ. Equ. 177(2001), $p.\ 494-522$.

[11] J. P. Garcia Azorero and I. Peral, Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems. J. Differential Equations. 144(1998), $p.\ 441-476$.

[12] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford. Mathematical. Monographs, The Cleredon Press, Oxford University Press, New York (1993).

[13] G. Karali, C. Sourdis, Radial and bifurcating non-radial solutions for a singular perturbation problem in the case of exchange of stabilities. Annales de l'Institut Henri Poincare. Non Linear Analysis. 29 (2012) , $p.131-170$.

[14] M. A. Krasnosel'skii, A. I. Perov, A. I. Povolotskii, and P. P. Zabreiko, Plane Vector Fields. Academic Press. New York, (1966) .

[15] A. Kristaly, C. Varga, Multiple solutions for elliptic problems with singular and sublinear potentials. Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007) , $p.$ $2121-2126$.

[16] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to variational inequalities and their applications, Acad. Press(1980).

[17] P.L. Lions, The concentration–compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1. Rev Mat Iberoamericana1. (1985) , $p.$ $145-201$.

[18] E. Montefusco, Lower semicontinuity of functionals the concentration-compactness principle. J. Math. Anal. Appl. 263, (2001) , $p.$ $264-276$.

[19] F. Pacard, Radial and nonradial solutions of $-\Delta u=\lambda f(u)$ on an annulus of $\mathbb{R}^N$ $N\geq 3$. J. Differential Equations. 101(1993), $p.$ $103-138$.

[20] B. Ricceri, On a three critical points theorem, Arch. Math. 75(2000), $p.220-226$.

[21] D. Ruiz, M. Willem, Elliptic problems with critical exponents and Hardy potential. J. Diff. Eq. 190 (2003) , $p.$ $524-538$.

[22] M. Struve, Variationnel methods applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlags. (1999) .

[23] S.Sun Lin, On the Existence of Positive RadialSolutions for Nonlinear Elliptic Equations in Annular Domains. Journal of differential equations. 81(1989), $p.$ $221-233$.

[24] J. Tyagi, Existence of nontrivial solutions for singular quasilinear equations with sign changing non linearity. Elec. J. Diff. Eq. 117 (2010) , $p.$ $1-9$.

[25] E.W.C. Van Groesen, Existence of multiple normal mode trajectories on convex energy surfaces of even classical hamiltonian systems. J. Differential Eq. 57 (1985) , $p.$ 70 − 89.

[26] Vedran Sohinger, Lecture notes for 18.155 on concentration compactness and soliton solutions for the nls equation. CiteSeerX, (2013)(www.math.upenn.edu).