République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Estimation de la fonction Mode pour des données complètes et incomplètes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saïda - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Bessadat Souheyla[1]

Sous la direction de

Dr. N. Hachemi

Soutenue le 16/07/2019 devant le jury composé de

Mlle. S. Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Dr. N. Hachemi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mme. F. Mokhtari	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mme. F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : souhilabess94@gmail.com

Remerciement

Mes sincères remerciements à Dieu le tout puissant, qui m'a donnée la force, la volonté et le courage afin d'élaborer ce travail.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à mon encadreur Docteur N. Hachemi qui a bien voulu accepter de m'accorder ce privilège, et d'avoir consacré beaucoup de temps à m' informer .

Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude. Je voudrais également remercier tous les membres de jury, **Mme. S. I**drissi de m'avoir honorée en acceptant de présider le jury,**Mme. F. M**okhtari et **Mme. F. B**enziadi d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques.

A tous les membres de ma famille , petits et grands, veuillez trouvez dans ce modeste. travail l'expression de mon affection.

A tous mes collègues de Master 2 ASSPA. Et enfin, à tous ceux qui me sont chers.

Merci a tous

Dédicaces

Je dédie ce travail

La lumière de ma vie, et la joie du vieux temps, qui son sourire était Noor Derby, A qui était la raison de ma vison, A mon cœur maman "Dawia" que dieu barrisse son âme.

A l'être le plus cher à mon cœur, à celui qui m'a toujours guidée par ses conseils et qui m'a encouragée à pour suivre mes études : Mon père "Tayeb"

Je ne saurai passer sous silence l'apport Inestimable des autres membres de ma famille qui m'ont soutenue, de près ou de loin durant mes études masters. A mon très chers frères "Bachir, Ayoub" et à mes sœurs "Massouda , Zahra". Je veux remercier aussi toute la famille "Bessadat" sons oublier la ont su famille "Abid". En particulier, mes grand-mères "Fatna et Oum Elkheir"

Je voulais aussi remercié mes premiers enseignants, ma mère et mon père qui ont su croire en moi et qui m'ont apporté toute leur aide quand j'en ai eu besoin, tous les remerciements du monde ne suffiraient pas. Ce mémoire leur est dédié

Je veux remercier, aussi. Mes ames et collègues qui m'ont toujours soutenu (Souhir, Khadidja Djamila, Fadila, Mokhtaria,Yassamine, Rachida et tous qui ont toujours été présents proche de moi dans toutes mes étapes d'étude.

Table des matières

Introduction

La statistique est la science dont l'objet est de recueillir, de traiter et d'analyser des données issues de l'observation de phénomènes aléatoires, c'est à dire dans lesquels le hasard intervient. En statistique, le mode, ou valeur dominante, est la valeur la plus représentée d'une variable quelconque dans une population donnée. Une répartition peut être unimodale ou plurimodale (bimodale, trimodal,$\cdots$), si deux ou plusieurs valeurs de la variable considérée émergent également, voire sans aucun mode (distribution uniforme) si toutes les valeurs de la variable considérée émergent également. Le but principale de ce mémoire est d'étudier l'estimation du mode par des données complètes et incomplètes.

Historiquement, le problème d'estimation non paramétrique du mode à fait l'objet de nombreux travaux une revue des différents, on pourra consulter a Parzen (1962, [50]) qui a été l'un des premiers a considérer le problème de l'estimation du mode d'une densité de probabilité univariée. Il a montré que, sous certaines conditions, l'estimateur du mode obtenu en maximisant l'estimateur à noyau était convergent en probabilité dans le cas indépendant identiquement distribué. Notons que Yamato (1971, [69]) a obtenu les mêmes résultats dans le cas d'une densité multivariée et que Nadaraya (1965, [47]) et Van Ryzin([63], 1969) ont établi des résultats de convergence presque sûre dans R et R^d tel que $(d > 1)$ respectivement. Parzen ([50], 1962) a également établi la normalité asymptotique. Konakov (1973, [33]) et Samanta (1973, [55]) ont donné une version multivariée. Les techniques de base qu'il a développées pour l'étude du mode ont été reprises par de nombreux auteurs. Eddy ((1980,[16]), (1982, [17])) a amélioré le résultat de Parzen ([50], 1962) en obtenant la loi limite de R sous des conditions moins restrictives. Romano (1988, [53]) s'est affranchi des conditions globales de régularité sur la densité, il a montré que la convergence presque sûre et la distribution limite de $\hat{\theta}_n$ s'obtiennent au moyen d'une hypothèse sur le comportement de f au voisinage du mode. De plus, ces deux résultats se généralisent au cas d'une suite aléatoire. Romano ([53], 1988) a également établi un résultat de type minimax intéressant. Grund et Hall (1995, [27]) ont étudié sa convergence en norme L_p. Vieu (1996, [65]) obtenu une vitesse de convergence presque complète. Leclerc et Loti-Viaud (2000, [36]) ont donné un majorant de la vitesse de convergence presque sûre du mode en utilisant des résultats de type logarithme itéré. Abraham et al. (2004, [2]) ont étudié la normalité asymptotique du mode à partir de la densité à support dans R^d. Dans le cas de données incomplètes, Louani ([39], 1998) a étudié la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau du mode dans le cas censuré à droite. Gannoun et sarocco ([22], 2002) ont étudié la convergence presque sûre .Dabo-Niang et al. ([14], 2004) a établi l'estimation du mode dans un espace vectoriel semi-norme. La normalité asymptotique a été obtenue par Ezzahrioui et Ould-Saïd (([18],[19]), 2008), dans les deux cas indépendant et dépendant. La liste des travaux est longue, on peut citer ceux de Van Ryzin ([63], 1969). Plus récemment, Shi et al ([56], 2009)on amélioré le taux de convergence de l'estimateur du mode en fonction de la fenêtre h. Vieu ([65],1996) a proposé l'étude de quatres estimateurs à noyau (globaux et locaux) du mode basés sur des estimateurs à noyau de la densité et de sa dérivée. Par la méthod directe on doit observer les travaux Chernoff([13],1964), Dalenues([15], 1965), Grenander([23], 1965), Venter([64], 1967), ... Les données tronquées sont également courantes peuvent être trouvées dans Woodroofe ([68], 1985), Wang et al.([67], 1986), Tsai et al.([61], 1987), Anderson et al. ([5], 1993), Lai et Ying ([35], 1991) et Chen et al. ([11], 1995). Les cas multidimensionnelles de ces résultats ont été obtenues par Samanta ([55], 1973) et récemment, Abraham et al. (([1], 2003), ([2], 2004)) ont considéré l'estimation du mode comme élément des points d'échantillonnage et a obtenu la consistance forte ainsi que des propriétés asymptotiques. Mokkadem et Pelletier (([44], 2003), ([45], 2005)) et Mokkadem et al. ([46], 2006) ont étudié la loi du logarithme itéré ([20], 1943) . Hermann et Ziegler ([31], 2004) ont obtenu des taux d'estimation non paramétrique du mode en l'absence d'hypothèses de lissage. Bickel ([6], 2002) et Bickel et Fühwirth ([8], 2006) ont proposé avec des applications, un estimateur robuste du mode et comparées à d'autres estimateurs robustes de mesure de localisation. Bickel ([7], 2003) a conclu que, même si la médiane est résistante aux valeurs aberrantes, le mode est reste contre elles, aussi, c'est une mesure de localisation plus sûre lorsque les données peuvent en souffrir.

Ce chapitre est divisé en cinq chapitres et il considère les deux cas des observations indépendants et identiquements distribuées et le cas mélange.

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des définitions et aux outils téchnique utilisées pour l'élaboration de nous résultats, en particulier, nous rappelons la définition des processus de mélange, les définitions de différents mode de convergence. On trouvera aussi dans ce chapitre un nombre trés importants des outils intéressant pour l'élaboration des résultats obtenus.

Le deuxième chapitre est consacré à la convergence presque complète de l'estimateur du mode dans le cas indépendant en précisant sa vitesse de convergence. Ensuite, on a montré la normalité asymptotique.

Dans le troisième chapitre, on à étudié la convergence presque sûre de l'estimateur sous la troncateure à gauche avec vitesse de convergence. En outre, on a montré que sous des conditions de régularité, l'estimateur à noyan du mode convenablement normalisé est asymptotiquement normal. En suite, nous avons opté pour des conditions un peu plus restrictives mais qui donne la même vitesse de convergence du cas indépendant et identiquement distribuées au cas dépendant.

Dans le chapitre quatre, on a proposé des résultats qui sont spécifiques à des données censurées à droite.

Le dernier chapitre est une extension des résultats des chapitres deux et trois au cas tranquées à gauche et censurées à droite. Nous construisons des nouveaux estimateurs à noyan de la densité

On trouvera aussi quelque commentaires sur nos résultats dans la conclusion.

Chapitre 1

Définitions et Notations

1.1 Données incomplètes

L'analyse de survie est un domaine des statistiques qui trouve sa place dans tous les champs d'application où l'on étudie la survenue d'un évènement. L'objectif de cette analyse réside dans l'analyse du délai de survenue d'un évènement dans un ou plusieurs groupes d'individus. Dans le domaine biomédical, par exemple, plusieurs évènements sont intéressants à étudier : le développement d'une maladie, la réponse à un traitement donné, la rechute d'une maladie ou le décés. Une des caractéristiques des données de survie est l'existence d'observations incomplètes. La censure et la troncature font partie de processus générant ce type de données. Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques notions de base dans l'analyse de survie pour rendre la lecture plus facile.

1.2 La durée de survie et la date d'origine

La durée de survie, notée par T, définie comme le délai écoulé entre deux états (états 0 et1). Pour définir ce délai il est nécessaire de définir une date d'origine qui est la date de début du phénomène étudié. Par exemple, dans l'étude de l'évolution d'une maladie, la date d'origine T_0 est la date de début de la maladie et si on s'intéresse à l'âge du sujet à la survenue de l'évènement, la date d'origine sera la date de naissance du sujet $T_0 = 0$. Chaque individu peut avoir une date d'origine différente.

1.3 Les données Censure

La censure est le phénomène le plus couramment rencontré lors du recueil de données de survie. pour l'individu i, considérons

– son temps de survie X_i

– son temps de censure C_i

– la durée réellement observée T_i

La durée Y est dite censure si la durée n'est pas intégralement observée.

1.3.1 Censure aléatoire à droite où à gauche

Une durée de vie aléatoire X est dite censurée par une variable aléatoire de censure C si on observe parfois C au lieu de X. L'information donnée par C sur X est :

$$X > C \quad \text{s'il y a} \quad \text{censure droite}$$

$$X < C \quad \text{s'il y a} \quad \text{censure gauche}$$

1.3.2 Censure par intervalle :

Si, au lieu de X on observe $C_1 < C_2$ tels que $C_1 < X < C_2$ (X non observé), il y a censure par intervalle.

1.4 Les données troncatures

Une autre situation dans laquelle les données incomplètes apparaissent est celle des données tronquées. Les troncatures différent des censures au sens où elles concernent l'échantillonnage lui même. Une observation est dite tronquée si elle est conditionnelle à un autre événement. On dit que la variable T de durée de vie est tronquée si T n'est observable que sous une certaine condition dépendante de la valeur de T.

1.4.1 Troncature à gauche

On dit qu'il y a troncature à gauche lorsque la variable d'intérêt X n'est observable que si elle est supérieure à T. T est alors la variable aléatoire de troncature gauche :

$$X \quad \text{n'est observée que si} \quad X > T.$$

1.4.2 Troncature à droite

On dit qu'il y a troncature à droite lorsque X n'est observable que si elle est inférieure à T. T est alors la variable aléatoire de troncature droite :

$$X \quad \text{n'est observée que si} \quad X < T.$$

1.5 Les données troncature à gauche et censure à droite

On note X le temps de survie, T la variable de troncature et C la variable de censure. Dans le cas des données tronquées à gauche et censurées à droite on observe (Z, δ, T) si $Z \geq T$, où $Z = \min(X, C)$ et $\delta = \mathbb{1}_{\{X \leq C\}}$. Lorsque $Z < T$ on observe rien .

1.6 Définitions et Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\{\Delta_i\}_{i \in \mathcal{Z}}$ une famille des variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un espace probabilisable $(\mathbb{E}, \xi)$. On note $(\sigma_i^j)_{i \neq j}$ dans $\mathcal{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la tribu engendrée par $\{\Delta_k, i < k < j\}$ et par $L_2(\sigma_i^j)$ l'espace des variables aléatoires σ_i^j- mesurable et de carrée sommable.

Définition 1.6.1. *Soit $\{\Delta_i\}_{i \in \mathcal{Z}}$ une famille des variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un espace probabilisable $(\mathbb{E}, \xi)$. On dit que la famille $\{\Delta_i, i \in \mathcal{Z}\}$ est α- mélangent si la suite*

$$\alpha_n = \sup_{\left\{k \in \mathcal{Z}, A \in \sigma_{-\infty}^{k}, B \in \sigma_{n+k}^{+\infty}\right\}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infinie. La suite α_n est appelée coefficient de mélange .

Définition 1.6.2. *On dit que qu'une famille $\{\Delta_i, i \in Z\}$ de variables aléatoires á valeurs dans un même espace probabilisable ($\mathbb{E}$,ε) est algébriquement α-mélangeante, s'il existe deux constantes $c \in \mathbb{R}^{*+}$ et $a \in \mathbb{R}^{*+}$ telles que les coefficients de melange verifient*

$$\alpha(n) \leq cn^{-a}.$$

Définition 1.6.3. *On dit que qu'une famille $\{\Delta_i, i \in Z\}$ de variables aléatoire á valeurs dans un même espace probabilisable ($\mathbb{E}$,ε) est géometriquement α-mélangeante, s'il existe deux constantes s$\in \mathbb{R}^{*+}$ et t$\in$]0,1[telles que les coefficients de mélange vérifient*

$$\alpha(n) \leq st^n.$$

Définition 1.6.4. *([21], 2004) Une fonction K de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est dite noyau d'ordre k, $k \in \mathbb{N}^*$, si :*

$$T_{i_1,\ldots,i_p}(K) = 0,\ \forall(i_1,\ldots,i_p) \in \mathbb{R}^p_* \quad \textit{vérifiant} \ \ i_j < k,\ 1 \leq j \leq p.$$

et

$$T_j(K) \neq 0,\ \forall j \leq k.$$

où

$$T_{i_1,\ldots,i_p}(K) = \int_{\mathbb{R}} u_1^{i_1},\ldots,u_p^{i_p} K(u_1,\ldots,u_p)du_1,\ldots,du_p.$$

et

$$T_j(K) = \int_{\mathbb{R}} u_j^k K(u_1,\ldots,u_p)du_1,\ldots,du_p.$$

1.7 Outils

Lemme 1.7.1. *([21], 2004) Soit $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ des variables aléatoires réelles centrées, indépendantes et identiquement distribuées, telles qu'il existe deux réels positifs d et δ vérifiant :*

$$|\Delta_1| \leq d \ \textit{et} \quad E\Delta_1^2 \leq \delta^2.$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\delta^2}{d}[$ on a

$$\mathbb{P}\left[n^{-1}\left|\sum_{i=1}^n \Delta_i\right| > \varepsilon\right] \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4\delta^2}}.$$

Cette inégalité a été donnée par W.Hoeffding en (1963, ([21])). Les lemmes suivants donnent les deux version de l'inégalité de Fuk Nagave

Lemme 1.7.2. *([21], 2004) Soit$\{\Delta_i, i\epsilon\mathbb{N}\}$ une suite des variables aléatoires réelles α-mélangeante, de coefficient de mélange α_n vérifiant :*

$$\exists c \in \mathbb{R}^{*+}, \quad a \in \mathbb{R}^{*+} \qquad \alpha(n) \leq cn^{-a}$$

et si $\forall i, \|\Delta_i\|_\infty < \infty$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et $r > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left[|\sum_{k=1}^n \Delta_k| > 4\varepsilon\right] \leq \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{rS_n^2}\right)^{\frac{-r}{2}} + 2ncr^{-1}\left(\frac{2r}{\varepsilon}\right)^{a+1}. \tag{1.1}$$

Pour calculer l'expression de S_n^2, définie dans le lemme précédent, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.7.3. *([21], 2004) Soit*$\{\Delta_i, i\varepsilon\mathbb{N}\}$ *une suite des variables aléatoires réelles* α*-mélangeante, de coefficient de mélange* α_n *vérifiant :*

$$\exists c \in \mathbb{R}^{*+}, \quad a \in \mathbb{R}^{*+} \qquad \alpha(n) \leq cn^{-a}$$

et si $\|\Delta_i\|_\infty < \infty, \forall i$*, alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $r > 0$

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |cov(\Delta_i, \Delta_j)|.$$

Pour calculer l'expression de S_n^2, définie dans le lemme précédent, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.7.4. *([21], 2004) Soit*$\{\Delta_i, i\varepsilon\mathbb{N}\}$ *une suite de variables aléatoires réelle* α*-mélangeante, de coefficient de mélange* α_n*, telle que* $\|\Delta_i\|_\infty < \infty, \forall i$*. On a pour tout* $i \neq j$ *:*

$$|cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq 4\|\Delta_i\|_\infty \|\Delta_j\|_\infty \alpha_{|i-j|}.$$

Lemme 1.7.5. *Soit* $(X_n)_{n\geq A}$ *une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, indépendantes. Supposons que, pour* $n \geq 1$*,* X_n *ait une espérance finie* μ_n *et un écart-type fini* σ_n*, et posons* $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ *et* $Z_n = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)$*. Si, pour tout* $\epsilon > 0$*,* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{S_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left((X_i - \mu_i)^2 \mathbb{1}_{|X_i-\mu_i|>\epsilon S_n}\right) = 0$ *alors la loi de* Z_n *converge vers la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0, 1)$*.*

Lemme 1.7.6. *Inégalité de* C_r*([38], 1963)*

$$\mathbb{E}[|X + Y|^r] \quad \leq \quad C_r\mathbb{E}[|X|]^r + C_r\mathbb{E}[|Y|]^r$$

qui vaut 1(resp.2^{r+1}*) selon que* $r \leq 1$*(resp.*$r \geq 1$*)*

Lemme 1.7.7. *Borel-Cantelli([52], 2000)*

1. *Soit* A_n *une suite d'événements si*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty,$$

alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$*.*

2. *On suppose maintenant que les événements* (A_n) *sont indépendants .Si*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty,$$

alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$*.*

Lemme 1.7.8. *Inégalités Talagrand([60], 1996)*
Si $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées. et si $\mathcal{F}$ est une classe de fonction mesurable et uniformément bornée telles que

$$U \geq \sup_{f \in \mathcal{F}} \| f \|_\infty \quad et \quad \sigma^2 \geq \sup_{f \in \mathcal{F}} Var(f(\epsilon_1))$$

où σ et U sont des nombres réels vérifiant $0 \leq \sigma \leq U$, alors il existe des constantes C et K_0 ne dépendant que des caractéristique A et v de la classe telle que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i=1}^{n} [f(\epsilon_i) - \mathbb{E}f(\epsilon_i)] \right| > t \right\} \leq K_0 \exp\left\{-\frac{1}{K_0 U} \log\left(1 + \frac{tU}{K_0 V_n^2}\right)\right\}$$

Tel que $\forall t \geq C\sqrt{\log(AU/\sigma)} V_n$ *où* $V_n = \sqrt{n}\sigma + U\sqrt{\log\left(\frac{AU}{\sigma}\right)}$

Convergence presque sûre([28], 1992)
La suite (X_n) converge presque sûrement (p.s.) vers X si

$$\{W : \lim_{n \to \infty} X_n(W) = X(W)\}$$

a une probabilité 1

La Loi Forte des Grands Nombres ([28], 1992)
Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées . Posons

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

et supposons $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Alors $\dfrac{S_n}{n}$ converge presque surement vers $\mathbb{E}[X_1]$.

Loi du logarithme itéré([20], 1943)
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. possédant un moment d'ordre 2 fini. En notant μ leur espérance, σ leur écart-type supposé non nul et en posant $\overline{X}_n := \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, nous avons les deux égalités suivantes :

$$\lim_{n \to \infty} \sup \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma\sqrt{2 \log \log n}} = 1, \qquad \text{p.s.}$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \inf \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma\sqrt{2 \log \log n}} = -1, \qquad \text{p.s.}$$

Chapitre 2

Estimation du mode par des données complètes

Dans ce chapitre, considérons l'estimateur à noyau du mode dans le cas où les observations sont indépendantes identiquement distribuées. Ce chapitre est divisé en deux sections. Dans la première section, nous établissons la convergence presque complète. La normalité asymptotique se trouve dans la deuxième section. Dans le cadre de l'approche non paramétrique, la plupart du temps l'estimation consiste à estimer au préalable la densité puis à l'inverser pour obtenir un estimateur du mode.

2.1 Modèle

Soit $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes définie sur l'espace de probabilitée $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que la version régulière de la probabilité existe et admet une densité bornée par rapport X notée f_X dans un compact. Le mode simple θ de f défini comme suit :

$$f(\theta) = \sup_{t \in R} f(t)$$

Où d'une façon équivalente

$$\theta = arg \sup_{t \in R} f(t)$$

Et son estimateur $\hat{\theta}(x)$ est définie par

$$\hat{\theta} = arg \sup_{t \in R} \hat{f}(t)$$

Où $\hat{f}(t)$ est l'estimateur de $f(t)$ telle que ;

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

Où K est un noyau qui supposée et $h > 0$ est une suite de nombres réels positifs. Notons que cet estimateur a été utilisé par Rosemblatt ([54], 1965). En suite, Vieu ([65], 1996) a utilisé une idée trés différente de l'estimation du noyau de la densité. Dans ce cas le paramètre h est remplacée par n-différentes dépends de X_i. l'idée est de construire un estimateur placées aux points de données observées mais permet la largeur d'un point à un autre. L'estimateur de la densité à noyau $f_n(x)$ de $f(x)$ est comme suit :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i h} K\left(\frac{x - X_i}{\lambda_i h}\right)$$

où $\lambda_i = \hat{f}(X_i)^{-\alpha}$ pout tout i, $0 < \alpha < 1$ tel que $\hat{f}(X_i) > 0$. Albanson (1982, [3]) montre que $\alpha = 1/2$ est un bon choix car on peut obtenir un biais d'ordre h^4 plutot que h^2 et a présenté un estimateur de mode basé sur l'estimation du noyau local de la densité.

2.2 Convergence presque complete

On suppose que les observations sont indépendantes et identiquement distribuée. Pour établir cet convergence, on introduit les hypothèses suivantes :

1. H1) **Sur la densité**
   (i) La fonction de la densité $f(x)$ est uniformement continue.
   (ii) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
   (iii) La fonction $f(x)$ est continue de seconde ordre
2. H2) **Sur le noyau**
   La fonction K(x) est une fonction de Borel qui vérifée les conditions suivants :
   a) K(x) est dérentiable.
   b) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathrm{K}(x)| < \infty$.
   c) $\int_{\mathbb{R}} |K(x)| d(x) < \infty$.
   d) $\int_{\mathbb{R}} K(x) d(x) = 1$.
   e) $\lim_{x \to \infty} |nK(x)| = 0$.

3. H3) **Sur le paramètre de lissage**

   Le paramètre $h = h_n$ est une fonction de n qui vérifié la condition suivante tel que :

$$\lim_{n\to\infty} h = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} nh = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} nh^2 = 0$$

Théorème 2.2.1. *Sous les hypothèses H1, H2 et H3, on a*

$$\mathbb{P}[|\theta_n - \theta| < \epsilon] \to 1$$

Preuve :

Pour $\eta(\epsilon) > 0$ existe, on a d'aprés $(H1, i)$

$$|x - \theta| \geq \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(\theta)| \geq \eta(\epsilon), \qquad \epsilon > 0 \tag{2.1}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |f(\theta_n) - f(\theta)| &= |f(\theta_n) - f_n(\theta_n)| + |f_n(\theta_n) - f(\theta)| \\ &\leq \sup_x |f(x) - f_n(x)| + \sup_x |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq 2\sup_x |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|\theta_n - \theta| \geq \epsilon] &\leq \mathbb{P}[|f_n(\theta) - f(\theta)| \geq \eta(\epsilon)] \\ &\leq \mathbb{P}[\sup_x |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}\eta(\epsilon)] \end{aligned}$$

La preuve est basée sur la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Sous les hypothèses H1 , H2 et H3 du théorème 2.2.1, on a*

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0\right] = 1$$

Démonstration : La preuve se repose sur la décomposition suivante :

$$f_n(x) - f(x) = \underbrace{f_n(x) - \mathbb{E}f_n(x)}_{despersion} + \underbrace{\mathbb{E}f_n(x) - f(x)}_{biais}$$

Lemme 2.2.1. *Sous les hypothèses H2, H4, on a*

$$\sup_x |\mathbb{E}f_n(x) - f(x)| = O(1) \tag{2.2}$$

Preuve

On a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f_n(x) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i h}K\left(\frac{x-X_i}{\lambda_i h}\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\lambda_i h}K\left(\frac{x-X_i}{\lambda_i h}\right)\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\left(\frac{x-u}{h}\right)f(u)^{\frac{1}{2}}\right) f(u)^{\frac{1}{2}}f(u)dx
\end{aligned}$$

Avec un changement de variable $y=\frac{x-u}{h}\Rightarrow x=u-hy\Rightarrow dx=-hdy$ et par le développement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} K\left(yf^{\frac{1}{2}}(x+hy)\right)f^{\frac{3}{2}}(x+hy)dy\\
&\approx \int_{\mathbb{R}}[f(x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}hyf^{\frac{1}{2}}(x)f'(x)]K(yf^{\frac{1}{2}}(x+hy))dy\\
&+ \int_{\mathbb{R}}\left\{\frac{h^2y^2}{2}\left[\frac{3}{4}f^{\frac{-1}{2}}(x)f'(x)+\frac{3}{2}f^{\frac{1}{2}}(x)f''(x)\right]+0(h^2)\right\}K(yf^{\frac{1}{2}}(x+hy))dy\\
&\approx f(x)^{\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}}K(yf^{\frac{1}{2}}(x+hy))dy+\frac{3}{2}hf^{\frac{1}{2}}(x)f'(x)\int_{\mathbb{R}}yK\left(yf^{\frac{1}{2}}(x+hy)\right)dy\\
&+ \frac{h^2}{2}\left[\frac{3}{2}f^{\frac{1}{2}}(x)f'(x)+\frac{3}{2}f^{\frac{1}{2}}(x)f''(x)\right]\int_{\mathbb{R}}y^2K\left(yf^{\frac{1}{2}}(x+hy)\right)dy
\end{aligned}$$

Pour $t=yf^{\frac{1}{2}}(x+hy)$ et le dévelppement de Taylor on a $f^{\frac{1}{2}}(x+hy)$ autour de x, on obtient

$$\mathbb{E}f_n(x)\approx f(x)+0(h^2)$$

Lemme 2.2.2. *Sous les hypothèses H2, H4, on a*

$$\sup_x|f_n(x)-\mathbb{E}f_n(x)|=0(1) \tag{2.3}$$

Preuve :

On pose $f_n(u)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(u-X_i)$, tel que

$$\begin{cases} I(x-y)=1 \quad si \quad x\geq y\\ I(x-y)=0 \quad si \quad x<y\end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\sup_x |f_n(x) - \mathbb{E}f_n(x)| &= \sup_x \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f^{\frac{1}{2}}(X_i)h} K\left(\frac{x-X_i}{f^{\frac{1}{2}}(X_i)h}\right) - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{f^{\frac{1}{2}}(u)h} K\left(\frac{x-u}{f^{-\frac{1}{2}}(u)h}\right) f(u)du \right| \\
&= \sup_x \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{f^{-\frac{1}{2}}(u)h} K\left(\frac{x-u}{f^{-\frac{1}{2}}(u)h}\right) \Big\{ df_n(u) - df(u) \Big\} \right| \\
&\leq h^{-1} \sup_x \Big| f_n(u) - f(u) \Big| \mu
\end{aligned}$$

Où

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} \Big\{ h^{-1} f(u) K'((x-u)h^{-1} f^{\frac{1}{2}}(u)) + \frac{1}{2} h^{-1} K'((x-u)h^{-1} f^{\frac{1}{2}}(u)) + \frac{1}{2} h^{-1} f^{\frac{1}{2}}(u) K((x-u)h^{-1} f^{\frac{1}{2}}(u)) \Big\}$$

Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big\{ \sup_x \Big| f_n(x) - f(x) \Big| > \epsilon \Big\} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big\{ \sup_x f^{\frac{1}{2}}(x) \Big| f_n(x) - f(x) \Big| > \frac{\epsilon h}{\mu} \Big\} \\
&\leq C \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left\{ \frac{-2\epsilon^2 n h^2}{\mu^2} \right\} < \infty, \quad nh^2 \to \infty
\end{aligned}$$

Ensuite, par le lemme de Borel-Cantelli ([52], 2000), voir Pranab et Seng (([51], 1993), pp. 55) avec (2.2), la preuve du lemme est complétée.

2.3 Normalité Asymptotique

La normalité asymptotique nous permet de construire les intervalles de confiance et de faire les tests. On établit la normalité asymptotique de cet estimateur lorsque les observations sont indépenants et identiquements distribuées.

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses H1, H2 et H3, on a*

$$\sqrt{nh^3}(\theta_n - \theta) \to \mathcal{N}\left[0, \frac{f^{5/2}(\theta) \int_{\mathbb{R}} K'(t)dt}{f''(\theta)^2}\right] \tag{2.4}$$

Preuve

L'utilisation du dévelpement de taylor, nous permet d'écrire

$$0 = f_n'(\theta_n) = f'(\theta_n) + (\theta_n - \theta) f_n''(\theta_n^*). \tag{2.5}$$

Avec $\theta_n^* \in [\theta_n, \theta]$. Donc,

$$\theta_n - \theta = -\frac{f_n'(\theta)}{f_n''(\theta_n^*)} \qquad \text{Avec} \quad f_n''(\theta_n^*) \neq 0. \tag{2.6}$$

Sous le théorème (2.3.1), $\theta_n^* \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ et par le lemme (2.3.2, (2.10)), on a

$$f_n''(\theta_n^*) \longrightarrow f''(\theta^*). \tag{2.7}$$

Lemme 2.3.1. *Sous les hypothèses du proposition (2.2.1), on obtient*

$$\sqrt{nh^3}\Big(f_n'(x) - f'(x)\Big) \longrightarrow \mathcal{N}\Big[0, f^{5/2}(\theta)\int_{\mathbb{R}} K'^2(t)dt\Big] \tag{2.8}$$

Lemme 2.3.2. *Sous les hypothèses H1, H2 et H3, on a*

$$\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} \sup_x |\mathbb{E}f_n'(x) - f'(x)| = 0] = 1 \tag{2.9}$$

$$\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} \sup_x |\mathbb{E}f_n''(x) - f''(x)| = 0] = 1 \tag{2.10}$$

Preuve

Pour simplifiée les notations, on pose

$$f'(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\lambda_i h)^2}K'\Big(\frac{x - X_i}{\lambda_i h}\Big)$$

et

$$f''(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\lambda_i h)^3}K''\Big(\frac{x - X_i}{\lambda_i h}\Big)$$

La preuve est similaire que celle utilisées dans le théorème précédente.

Preuve du lemme (2.3.2)

On pose

$$V_{ni} = \frac{1}{(\lambda_i h)^2}K'\left(\frac{x - X_i}{\lambda_i h}\right)$$

Tel que

$$f'(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ni} \tag{2.11}$$

Où $(V_{ni})_{i=\overline{1,n}}$ sont des variables indépendants et identiquements distribuées. La démonstration de ce lemme est basée sur le théorème du central limite qui exige comme une condition de Liapounov ([4], 1992) qui satisfait pour $\delta > 0$,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\mathbb{E}|V_n - \mathbb{E}(V_n)|^{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}}\sigma^{2+\delta}(V_n)} = 0 \tag{2.12}$$

Tel que

$$V_n = \frac{1}{(\lambda h)^2} K'\left(\frac{x - X}{\lambda h}\right)$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_n]^{2+\delta} &= \int_{\mathbb{R}} \left| h^{-2} f(u) K'((x-u)h^{-1} f^{\frac{1}{2}}(u)) \right|^{2+\delta} f(u) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} h^{-2(2+\delta)} f^{3+2\delta}(u) \left\{ K'\Big((x-u)h^{-1} f^{\frac{1}{2}}(u) \Big) \right\}^{2+\delta} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} h^{-3-2\delta} f^{3+2\delta}(x+hy) \left\{ K'\Big(y f^{\frac{1}{2}}(x+hy) \Big) \right\}^{2+\delta} dy
\end{aligned}$$

Par le changement du variable $t = yf^{\frac{1}{2}}(x + hy)$ et le développement Taylor de $f^{\frac{1}{2}}(x + hy)$ et $f^{3+2\delta}(x + hy)$ autour de x, on obtient

$$\mathbb{E}|V_n|^{2+\delta} \approx h^{-3-2\delta} f^{\frac{5}{2}+2\delta}(x) \int_{\mathbb{R}} K'(t)^{2+\delta} dt$$

pour $\delta = 0$, on a

$$Var(V_n) \approx h^{-3} f^{\frac{5}{2}}(x) \int_{\mathbb{R}} K'(t)^2 dt. \tag{2.13}$$

Donc,

$$\frac{\mathbb{E}|V_n - \mathbb{E}(V_n)|^{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}} \sigma^{2+\delta}(V_n)} = \frac{(\lambda h)^{3+2\delta} \mathbb{E}|V_n - \mathbb{E}(V_n)|^{2+\delta}}{\lambda^{3+2\delta} (nh)^{\frac{\delta}{2}} h^{3+\frac{3}{2}\delta} \sigma^{2+\delta}(V_n)} \to 0$$

puisque $h^{3+\frac{3}{2}\delta}\sigma^{2+\delta}(V_n) = h^3\sigma^2(V_n)^{\frac{2+\delta}{2}} \to f^{5/2}(x) \int_{\mathbb{R}} K'^2(t)dt)^{\frac{2+\delta}{2}} < \infty$ et $nh \to \infty$

Maintenant, d'aprés la condition (2.12) de liapounov ([4], 1992), on obtient pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$, V_{ni} est normalement asymptotique distribuées de V_n et le lemme (2.3.2, (2.9)), (2.11) et (2.13), la preuve est compléte.

Chapitre 3

Estimation du mode par le modèle à troncature à gauche

Dans ce chapitre, nous étudions certaines propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau du mode lorsque la variable d'intérêt est soumise à une troncature aléatoire à gauche. La convergence uniforme presque sûre sur un compact de la densité ainsi sur le mode avec vitesse de convergence. En outre, démontrons que, sous des conditions de régularité, l'estimateur à noyau du mode convenablement normalisé est asymptotiquement normal. L'intérêt principal dans l'étude de l'estimation des mode est sa robustesse, la construction des intervalles de confiance et la prévision à partir des données. Nos résultats sont obtenus dans un cadre général pour des données i.i.d. et α-mélange.

3.1 Modèle

Soit Y et T deus variables aléatoires indépendantes avec des fonctions de distribution F et L respectivement, supposés être continus. Soit $(Y_1, T_1), \cdots, (Y_N, T_N)$ sont N-iid du couple (Y, T) où N est déterministe mais inconnue. Dans le modèle de troncature gauche aléatoire, la variable aléatoire Y d'intérêt est interféré par la troncature T, de telle sorte que les deux quantités Y et T ne sont observables que si $Y \geq T$ alors que rien n'est observé si $Y < T$. Une conséquence de la troncature, la taille de l'échantillon vraiment observé n est une variable aléatoire distribuée selon $\beta(N, \alpha)$ où $\alpha = \mathbb{P}(Y_1 \geq T_1) > 0$. Par la loi forte des grands nombres ([28], 1992) on a, lorsque N tend vers ∞

$$\alpha_n := \frac{n}{N} \to \alpha \quad \text{p.s.}$$

La fonction de répartition continue L (resp F) est inconnue et de densité f. La fonction de répartition conjointe de Y et T est comme suit :

$$\mathrm{H}(y,t) = \mathbb{P}(Y_1 \leq y, T_1 \leq t) = F(y)\mathrm{L}(t)$$

Conditionnellement à la valeur de n, les données observées (Y_n, T_n) sont encore i.i.d mais leur fonction de répartition jointe différente ce celle que celui définie précédemment

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^*(y,t) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq y, T_1 \leq t / Y_1 \geq T_1) \\ &= \alpha^{-1} \textstyle\int_{-\infty}^{y} \mathrm{L}(t \wedge \tau) dF(\tau) \end{aligned}$$

Nous notons par a_W et b_W respectivement, les bornes inférieure et supérieure du support de W définies respectivement par

$$a_W = \inf\{y : W(y) > 0\} \quad \text{et} \quad b_W = \sup\{y : W(y) < 1\}$$

Pour $y \leq a_F$

$$\begin{aligned} C(y) &= \mathbb{P}(T_1 \leq y \leq Y_1 / Y_1 \geq T_1) \\ &= \alpha^{-1}\mathrm{L}(y)(1 - F(y^-)) \end{aligned}$$

et son estimateur est comme suit :

$$C_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{T_i \leq y \leq Y_i\}$$

Lynden-Bell (1971, [41]) introduit les estimateurs de maximum de vraisemblance non paramétriques de F et L données par les estimateurs produit-limite suivants :

$$1 - F_n(y) = \prod_{\{i : Y_i \leq t\}} \left(1 - \frac{1}{nC_n(Y_i)}\right)$$

et

$$L_n(y) = \prod_{\{i : T_i > t\}} \left(1 - \frac{1}{nC_n(T_i)}\right)$$

Woodroofe (1985, [68]) établit la convergence presque sûre des estimateurs de Lynden- Bell([41], 1971) et ainsi que les conditions qui à été remarqué que F et L peuvent être estimés complétement seulement si $a_L \leq a_F$ et que $b_L \leq b_F$ et

$$\int_{a_F}^{+\infty} \frac{1}{L} dF < \infty$$

Soit R(.) une fonction définie par :

$$R(y) = L^*(y) - F^*(y) = \mu^{-1}L(y)[1 - F(y)] \tag{3.1}$$

Avec son estimation empirique

$$R_n(y) = L_n^*(y) - F_n^*(y^-) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{T_i \leq y \leq Y_i\}}, \quad a_F \leq y < +\infty \tag{3.2}$$

De manière analogue aux données complètes, la fonction mode d'une densité est donnée par la relation suivante :

$$\theta = \arg\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t)$$

Un estimateur à noyau du mode θ est définie comme la variable aléatoire $\hat{\theta}_n$ qui maximise l'estimateur à noyau de la densité $\widehat{f}_n$ de f, c'est à dire

$$\widehat{f}_n(\theta_n) = \sup_{t \geq a_F} \widehat{f}_n(t)$$

dans le cas de troncature à gauche. L'estimateur $\hat{f}_n$ est définit comme suit :

$$\widehat{f}_n(t) = \frac{\alpha_n}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_n(y_i)}K\left(\frac{t - Y_i}{h_n}\right) \tag{3.3}$$

K est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, (h_n) est une suite de réels positifs tend vers zéro quand $n \to +\infty$ et L_n est un estimateur de Lyndel-Bell ([41], 1971). Dans cette partie, nous allons reprendre les résultats et les propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau du mode simple pour un modèle tronqué à gauche avec des données indépendants et identiquements distribuées.

3.2 Cas i.i.d.

On suppose que les observations sont indépendants et identiquements distribuées.

Hypothèses

Soit Ω un sous ensemble compact de $\Omega \subset \Omega_0 = \{y : y \geq a_F\}$

- H1) Le paramètre de lissage h_n est satisfait si $\frac{nh_n}{\log n} \to \infty$, lorsque $n \to \infty$.
- H2) Le noyau K est bornée, à support compact et trois fois défférentiables telle que K, $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$ sont bornées.
- H3) K est un noyau d'ordre deux.
- H4) La densité f est bornée et trois fois continûment différentiable tel que $\theta \in \Omega^\circ$ où Ω° est l'interieur de Ω.

- H5) Le mode θ est vérifie la condition suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y : |\theta - y| \geq \epsilon \Rightarrow |f(\theta) - f(y)| \geq \eta$$

- H6) Le paramètre h_n est vérifié si $h_n \to 0$, $\frac{nh_n^6}{\log n} \to \infty$ et $nh_n^7 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$

Remarque

- L'hypothèse $H1$ est nécéssaire pour la convergence de $f_n(.)$ et $\hat{f}_n^2(.)$
- H2-H4 sont des hypothèses communs de l'estimation non paramétrique.
- H5 pour l'unicité uniforme du mode.
- H6 est utilisé pour prouver la normalité asymptotique ainsi que la convergence de $\hat{f}_n^2(.)$.

Le théorème suivant donne le résultat de la convergence de l'estimateur du mode simple

3.2.1 Convergence presque sûre

Théorème 3.2.1. *Sous les hypothèses H1-H5, on a*

$$\left|\widehat{\theta_n} - \theta\right| \longrightarrow 0, \qquad p.s. \qquad lorsque \quad n \to \infty$$

Corollaire 3.2.1. *En plus, si H4 est vérifiée pour n assez grand, on a*

$$\widehat{\theta_n} - \theta = 0\Bigg(\max\left(\left(\frac{\log n}{nh_n}\right)^{1/4}, h_n\right)\Bigg), \qquad p.s. \qquad lorsque \quad n \to \infty$$

Preuve :

on a

$$\begin{aligned} |f(\widehat{\theta}_n) - f(\theta)| &\leq |f(\widehat{\theta}_n) - \widehat{f}_n(\widehat{\theta}_n)| + |\widehat{f}_n(\widehat{\theta}_n) - f(\theta)| \\ &\leq \sup_{y \in \mathcal{D}} |\widehat{f}_n(y) - f(y)| + |\widehat{f}_n(\widehat{\theta}_n) - f(\theta)| \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_n(\widehat{\theta}_n) - f(\theta)| &= |\sup_{y \in \mathcal{D}} \widehat{f}_n(y) - \sup_{y \in \mathcal{D}} f(y)| \\ &\leq \sup_{y \in \mathcal{D}} |\widehat{f}_n(y) - f(y)| \end{aligned}$$

Donc

$$|f(\widehat{\theta}_n) - f(\theta)| \leq 2 \sup_{y \in \mathcal{D}} |\widehat{f}_n(y) - f(y)| \tag{3.4}$$

L'utilisation de développement de Taylor de $f(.)$ au voissinage de θ, donne

$$f(\widehat{\theta}_n) - f(\theta) = \frac{1}{2}(\widehat{\theta}_n - \theta)^2 f^{(2)}(\theta^*)$$

Où θ^* est entre $\widehat{\theta}_n$ et θ.

Proposition 3.2.1. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, on a*

$$\sup_{y\epsilon\Omega}|\widehat{f}_n(y)-f(y)| = 0\left\{\max\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}, h_n^2\right)\right\}, \qquad p.s.$$

Preuve :

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\sup_{y\epsilon\Omega}|\widehat{f}_n(y)-f(y)| &\leq \sup_{y\epsilon\Omega}|\widehat{f}_n(y)-\widetilde{f}_n(y)| + \sup_{y\epsilon\Omega}|\widetilde{f}_n(y)-\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(y)]| + \sup_{y\epsilon\Omega}|\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(y)]-f(y)| \\ &= S_1+S_2+S_3\end{aligned}$$

Où

$$\widetilde{f}_n(t) = \frac{\alpha}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha}{L(Y_i)}K\left(\frac{t-Y_i}{h_n}\right)$$

La démonstration du théorème 3.2.1 se repose sur les lemmes suivants :

Lemme 3.2.1. *Sous l'hypothèse H4, on a*

$$S_1 = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Preuve :

On pose

$$K_i = K\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right).$$

Ensuite, nous avons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}|\widehat{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t)| &\leq \frac{|\widehat{\alpha}_n-\alpha|}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_n(Y_i)}K_i + \frac{\alpha}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{L_n(Y_i)}-\frac{1}{L(Y_i)}\right|K_i \\ &\leq \left\{\underbrace{|\widehat{\alpha}_n-\alpha|}_{V_{1n}}\frac{1}{L_n(a_F)} + \frac{\alpha(L(a_F))^{-1}}{L_n(a_F)}\underbrace{\sup_{y\in\mathcal{D}}|L_n(y)-L(y)|}_{V_{2n}}\right\}|f_n^*(y)|\end{aligned}$$

D'aprés (He et Yang [([30], 1998), théorème 3.2]),

$$|\alpha_n-\alpha| = 0_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$$

et

$$L_n(a_F)\xrightarrow{p.s} L(a_F)>0,$$

on obtient

$$V_{1n} = 0_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$$

De la même manière, par Woodroofe (([68], 1985), remarque 6), on obtient

$$V_{2n} = 0_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$$

Finalement, nous utilisons le fait que $f_n^*(y)$ tends vers $f^*(y) = \dfrac{L(y)}{\alpha} f(y)$, qui est bornée par l'hypothèse (H4)

Lemme 3.2.2. *Sous les hypothèses H1, H2 et H4, on a*

$$S_2 = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right)$$

Preuve : Sous (H2), la fonction

$$\mathcal{F}_n = \left\{\psi_y(.) = \frac{\alpha}{nh_n} K\left(\frac{y-.}{h_n}\right); y \in \mathbb{R}\right\}$$

est une classe bornée de fonctions mesurables qui sont uniformément bornée avec $\Delta_1 = \frac{\|K\|_\infty}{nh_n}$. En plus, par le lemme (2.6.18, (vi)) de vander Vaart et Wellner ([62], 1996) avec $g(y) = 1/L(y)$, la fonction

$$\mathcal{H}_n = \left\{\Xi_y(u) = \frac{\alpha}{nh_n L(y)} K\left(\frac{y-u}{h_n}\right); \quad y \geq a_F\right\}$$

est une classe de fonction mesurable bornée par rapport à $\Delta_1 = \frac{\|K\|_\infty}{nh_n L(a_F)}$. En plus

$$\mathbb{E}[\Xi_y(Y)] \leq \frac{\|f\|_\infty}{n} = U_n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\Xi_y^2(Y)] \leq \frac{\|f\|_\infty}{n^2 h_n L(a_F)} = \sigma_n^2$$

Par l'inégalité de Talagrand ([60], 1996) avec $t = D\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}$, où D est une constante positive, il existe deux constantes positives c_1 et c_2 tel que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{\Xi_y \in \mathcal{H}_n} \left|\sum_{i=1}^n \{\Xi_y(Y_i) - \mathbb{E}[\Xi_y(Y)]\}\right| \geq D\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1 \exp\left\{-\frac{D\sqrt{\frac{n\log n}{nh_n}}}{c_1\|f\|_\infty} \log\left[1 + \frac{\frac{D\|f\|_\infty}{n}\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}}{c_1\left(\sqrt{\frac{\|f\|_\infty}{nh_n L(a_F)}} + \frac{\|f\|_\infty}{n}\sqrt{\log(c_2\sqrt{\|f\|_\infty h_n(a_F)})}\right)^2}\right]\right\} \\
&\leq c_1 \exp\left\{-\frac{D\sqrt{\frac{n\log n}{nh_n}}}{c_1\|f\|_\infty} \log\left[1 + \frac{\frac{nh_n L(a_F)}{c_1}\frac{D}{n}\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{1}{n}\|f\|_\infty L(a_F)h_n \log(c_2\sqrt{\|f\|_\infty L(a_F)h_n})}\right)^2}\right]\right\} \\
&\leq c_1 \exp\left\{-\frac{D}{c_1\|f\|_\infty}\sqrt{\frac{n\log n}{h_n}}\frac{L(a_F)}{c_1} D\sqrt{\frac{h_n \log n}{n}}\right\} \\
&\leq c_1 n^{-\frac{D^2 L(a_F)}{c_1^2\|f\|_\infty}}
\end{aligned}$$

Pour n soit large et le choix de D, on obtient $0(n^{-3/2})$. Par le lemme Borel-Cantelli ([52], 2000) et (H1), on a

$$S_2 = 0\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right), \quad \text{p.s}$$

Lemme 3.2.3. *Sous les hypothèses H2, H4, on a*

$$S_3 = O\left(h_n^2\right), \quad p.s.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\widetilde{f}_n(t) - f(t) &= \mathbb{E}\left(\frac{\alpha}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L(Y_i)}K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right)\right) - f(t) \\
&= \frac{1}{h}\mathbb{E}\left(K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right)\right) - f(t) \\
&= \frac{1}{h}\int K\left(\frac{t-u}{h}\right)f(u)du - f(t) \\
&= \int K(z)f(t-zh)dz - f(t) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Par le dévelopement de Taylor on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\tilde{f}_n(t) - f(t) &= \int K(z)\left(f(\tilde{t}) - zhf'(\tilde{t}) + \frac{(zh)^2}{2}f''(\tilde{t})\right)dz - f(t) \\
&= \int h^2K(z)z^2f''(\tilde{t})dz
\end{aligned}$$

où $\tilde{t} \in [t-zh, t]$. Alors on obtient

$$S_3 = 0(h^2), \qquad \text{p.s. quand} \quad n \to \infty$$

3.2.2 Normalité asymptotique

Le théorème suivant est nécessaire pour établir la normalité asymptotique de l'estimateur du mode.

Théorème 3.2.2. *Sous l'hypothèse H1, H4 et H6, on a*

$$\sqrt{\frac{nh_n^3 f^{(2)}(\theta)}{\sigma^2}}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{l} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où $\xrightarrow{l}$ *désigne la convergence en loi, telle que*

$$\sigma^2 = \frac{\alpha f(\theta)}{L(\theta)}\int_{\mathbb{R}}[K^{(1)}(\theta)]^2 d\theta$$

Preuve : Maintenant, on suppose que la densité $f(.)$ a un mode unique au θ, sous hypothèse H4, on a

$$f_n^1(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad f_n^2(\theta) < 0$$

et le même, par l'hypothèse H2 avec la probabilitée un , on a

$$\hat{f}_n^1(\hat{\theta}_n) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{f}_n^2(\hat{\theta}_n) < 0.$$

D'aprés le developpement de Taylor de la fonction f au voisinage de θ, on a

$$0 = \hat{f}_n^1(\hat{\theta}_n) = \hat{f}(\theta) + (\hat{\theta}_n - \theta) f^{(2)}(\theta^*)$$

Où θ_n^* est située entre $\hat{\theta}_n$ et θ. Ensuite

$$\widehat{\theta}_n - \theta = \frac{\hat{f}_n^1(\widehat{\theta})}{\hat{f}_n^1(\widehat{\theta}_n)}$$

La preuve du théorème est basée sur la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
\sqrt{nh_n^3}\frac{\widehat{f}_n^{(1)}(\theta)}{\widehat{f}_n^{(2)}(\theta_n^*)} &= \sqrt{nh_n^3}\frac{\widehat{f}_n^{(1)}(\theta) - \widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)}{\widehat{f}_n^{(2)}(\theta_n^*)} \\
&+ \sqrt{nh_n^3}\frac{\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta) - \mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)]}{\widehat{f}_n^{(2)}(\theta_n^*)} \\
&+ \sqrt{nh_n^3}\frac{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)]}{\widehat{f}_n^{(2)}(\theta_n^*)} \\
&= \frac{A_1 + A_2 + A_3}{\widehat{f}_n^{(2)}(\overline{\theta_n})}
\end{aligned}$$

La démonstration du Théorème (3.2.2), repose sur les résultats suivants :

- $A_i \to 0, \quad i = (1,3)$
- $A_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- $\widehat{f}_n^{(2)}(\theta_n^*)$ converge en probabilité vers $f^{(2)}(\theta)$

Pour le premier terme A_1, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{nh_n^3}\left(\widehat{f}_n^{(1)}(\theta) - \widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)\right) &\leq \Bigg\{|\alpha_n - \alpha|\sqrt{nh_n^3} \times \frac{\sup_{y\geq a_F}|L_n(y) - L(y)|}{L(a_F)L_n(a_F)} \\
&+ \alpha\sqrt{nh_n^3} \times \frac{\sup_{y\geq a_F}|L_n(y) - L(y)|}{L(a_F)L_n(a_F)} + \sqrt{nh_n^3} \times \frac{|\alpha_n - \alpha|}{L(a_F)}\Bigg\} \\
&\times \frac{1}{nh_n^2}\left|\sum_{i=1}^n K^{(1)}\left(\frac{\theta - Y_i}{h_n}\right)\right| \\
&= U_1 + U_2 + U_3
\end{aligned}$$

Par (He et Yang [([30], 1998), théorème 3.2]), $|\alpha_n - \alpha| = 0_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$ et le fait $\sup_{y \geq a_F} |L_n(y) - L(y)| = 0_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$ tel que $L_n(a_F) \xrightarrow{p.s.} L(a_F) > 0$ et puisque

$$\frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n} K^{(1)}\left(\frac{\theta - Y_i}{h_n}\right) = (f_n^*)^{(1)}(\theta), \quad \text{tends vers} \quad (f^*)^{(1)}(\theta),$$

qui n'est pas nécessairement égale à zéro au point θ, on obtient

$$U_1 = 0_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\frac{h_n^3}{n}}\right) = 0_{\mathbb{P}}\left(h_n\right).$$

De la même manière, nous obtenons $U_2 = 0_{\mathbb{P}}(\sqrt{h_n^3})$ et $U_3 = 0_{\mathbb{P}}(\sqrt{h_n^3})$, ce qui nous permet de conclure que A_1 est négligeable.

Maintenant, Pour le troisième terme A_3

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)] &= \frac{\alpha}{h_n^2} \int \frac{K^{(1)}(\frac{\theta - u}{h_n})}{L(u)} dF^*(u) \\ &= \frac{1}{h_n^2} \int K^{(1)}(\frac{\theta - u}{h_n}) f(u) du \\ &= \frac{1}{h_n} \int K(v) f^{(1)}(\theta - vh_n) dv \end{aligned}$$

Par le développement de Taylor de $f^{(1)}(.)$ autour de θ, les hypothèses $(H2)-(H3)$ et la définition du mode, nous obtenons

$$\sqrt{nh_n^3}\mathbb{E}[f_n^{(1)}(\theta)] = \sqrt{nh_n^7} \int v^2 K(v) f^{(3)}(\theta^*) dv$$

Où θ^* est entre θ et $\theta - vh_n$. Par les hypothèses (H2), (H4) et (H6, ii), on obtient le résultat, pour établir la normalité asymptotique de A_2, on a besoin le lemme suivante :

Lemme 3.2.4. *Sous les hypothèses (H2), (H4) et (H6, ii), nous avons*

$$\sqrt{nh_n^3} Var[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)] \to \frac{\alpha f(\theta)}{L(\theta)} \int (K^{(1)}(v))^2 dv, \qquad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
Var(\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)) &= Var\left(\frac{\alpha}{nh_n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L(Y_i)}K^{(1)}\left(\frac{\theta-Y_i}{h_n}\right)\right)\\
&= \frac{\alpha^2}{nh_n^4}\left\{\mathbb{E}\left[\frac{1}{L(Y_i)}K^{(1)}\left(\frac{\theta-Y_i}{h_n}\right)\right]^2-\mathbb{E}^2\left[\frac{1}{L(Y_i)}K^{(1)}\left(\frac{\theta-Y_i}{h_n}\right)\right]\right\}\\
&= \frac{\alpha^2}{nh_n^4}\int\frac{L(v)}{\alpha}\left[\frac{1}{L(v)}K^{(1)}\left(\frac{\theta-v}{h_n}\right)\right]^2 f(v)dv-\frac{1}{nh_n^4}\left[\int K^{(1)}\left(\frac{\theta-v}{h_n}\right)f(v)dv\right]^2\\
&= \frac{\alpha}{nh_n^3}\int\frac{1}{L(\theta-vh_n)}\left(K^{(1)}(u)\right)^2 f(\theta-uh_n)du\\
&- \left[\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}\int K^{(1)}(u)f(\theta-uh_n)du\right]^2 =: V_1-V_2
\end{aligned}
$$

D'une manière analogue, nous obtenons $nh_n^3V_2 \to 0$ sous (H1) - (H4). Encore une fois, le développement de Taylor donne

$$
V_1=\frac{\alpha f(\theta)}{nh_n^3}\int_{a_F}^{\frac{\theta-a_F}{h_n}}\frac{1}{L(\theta-uh_n)}\left(K^{(1)}(u)\right)^2du+0\left(\frac{1}{nh_n^2}\right)
$$

Depuis $\theta > a_F$, il n'existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ fixé,

$$
\int_{a_F}^{\frac{\theta-a_F}{h_n}}\frac{1}{L(\theta-uh_n)}\left(K^{(1)}(u)\right)^2du\leq\frac{1}{L(a_F)}\int_{a_F}^{+\infty}\left(K^{(1)}(u)\right)^2du
$$

D'où, par le théorème de la convergence dominé, comme $n\to\infty$,

$$
\int\frac{1}{L(\theta-uh_n)}\left(K^{(1)}(u)\right)^2du\to\frac{1}{L(\theta)}\int\left(K^{(1)}(u)\right)^2du
$$

Qui est fini par (H2) . Enfin, nous obtenons

$$
nh_n^3Var(f_n^{(1)}(\theta))\to\frac{\alpha f(\theta)}{L(\theta)}\int\left(K^{(1)}(u)\right)^2du
$$

Maintenant, tout ce qui reste à montrer est que le numérateur de A_2 est une somme de i.i.d. qui répond au théorème de Lindeberg ([37], 1922). À cette fin, Considérons

$$
Z_{in}(y)=\frac{\alpha}{\sqrt{nh_n}}\left(\frac{1}{L(Y_i)}K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)-\mathbb{E}\left(\frac{1}{L(Y_i)}K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right)\right)
$$

Puis

$$
\sum_{i=1}^{n}Z_{in}(y)=\sqrt{nh_n^3}\left(\tilde{f}_n^{(1)}(y)-\mathbb{E}\left[\tilde{f}_n^{(1)}(y)\right]\right)
$$

Par conséquent

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_{in}(y)\right) = nh_n^3 Var\left(\tilde{f}_n^{(1)}(y)\right)$$

Ensuite nous avons

Lemme 3.2.5. *Sous les hypothèses (H2), (H4), (H6, i), on a* $\forall \epsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\left\{Z_{in}^2(y) > \epsilon^2 Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_{in}(y)\right)\right\}} Z_{in}^2(y) dF^*(y) \to 0 \qquad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

Preuve. D'une part, on a

$$\begin{aligned} Z_{in}^2(y) &\leq \frac{2\alpha^2}{nh_n}\left\{\frac{1}{L^2(Y_i)}\left(K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right)^2 + \mathbb{E}^2\left[\frac{1}{L(Y_i)}\left(K^{(1)}(\frac{y-Y_i}{h_n})\right)\right]\right\} \\ &= \frac{2\alpha^2}{nh_n}\frac{1}{L^2(Y_i)}\left(K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right)^2 + \frac{2\alpha^2}{nh_n}\mathbb{E}^2\left[\frac{1}{L(Y_i)}\left(K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Notons que

$$\frac{2\alpha^2}{nh_n}\mathbb{E}^2\left[\frac{1}{L(Y_i)}\left(K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right)\right] = \frac{2h_n}{n}\mathbb{E}^2\left[\frac{\alpha}{h_n L(Y_i)}K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right]$$

Qui donne

$$\frac{2\alpha^2}{nh_n}\mathbb{E}^2\left[\frac{1}{L(Y_i)}\left(K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right)\right] \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{3.7}$$

Par le lemme (3.2.7), on a

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_{in}(y)\right) \to \frac{\alpha f(\theta)}{L(\theta)} \int (K^{(1)}(u))^2 du$$

Puis pour $\epsilon = \dfrac{\alpha f(\theta)}{2L(\theta)} \displaystyle\int (K^{(1)}(u))^2 du > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_{in}(y)\right) \geq \frac{\alpha f(\theta)}{2L(\theta)} \int \left(K^{(1)}(u)\right)^2 du$$

Maintenant, on pose

$$V(Y_i) = \frac{1}{L^2(Y_i)}\left(K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right)^2 + \mathbb{E}^2\left[\frac{1}{L(Y_i)}\left(K^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)\right)\right]$$

De (3.6) nous avons

$$Z_{in}^2(y) \leq \frac{2\alpha^2 V(Y_i)}{nh_n}$$

Par (3.7), pour $n \geq n_0$ on a

$$\left\{Z_{in}^2(y) > \epsilon^2 Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_{in}(y)\right)\right\} \subset \left\{Z_{in}^2(y) > \epsilon^2 \frac{\alpha f(\theta)}{2L(\theta)} \int \left(K^{(1)}(u)\right)^2 du\right\}$$

Maintenant, soit $\epsilon' = \epsilon^2 \dfrac{\alpha f(\theta)}{4L(\theta)} \displaystyle\int \Big(K^{(1)}(u)\Big)^2 du$ on a

$$\begin{aligned}
\left\{Z_{in}^2(y) > \epsilon^2 Var\Big(\sum_{i=1}^n Z_{in}(y)\Big)\right\} &\subset \left\{Z_{in}^2(y) > 2\epsilon'\right\} \\
&= \left\{\frac{nh_n}{2\alpha^2} Z_{in}^2(y) > \epsilon' nh_n\right\} \subset \left\{V(Y_i) > \epsilon' nh_n\right\} \\
&\subset \left\{\frac{1}{L^2(Y_i)}\bigg(K^{(1)}\Big(\frac{y-Y_i}{h_n}\Big)\bigg)^2 > \frac{\epsilon' nh_n}{2}\right\} \\
&\cup \left\{\mathbb{E}^2\bigg[\frac{1}{L(Y_i)}\bigg(K^{(1)}\Big(\frac{y-Y_i}{h_n}\Big)\bigg)\bigg] > \frac{\epsilon' nh_n}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Par (3.7) et pour n assez grand, on a

$$\left\{\mathbb{E}^2\bigg[\frac{1}{L(Y_i)}\bigg(K^{(1)}\Big(\frac{y-Y_i}{h_n}\Big)\bigg)\bigg] > \frac{\epsilon' nh_n}{2}\right\} = \emptyset \tag{3.8}$$

De plus, puisque L est borné et que $K^{(1)}$ est borné, par (A6, i) pour n assez large

$$\left\{\frac{1}{L^2(Y_i)}\bigg(K^{(1)}\Big(\frac{y-Y_i}{h_n}\Big)\bigg)^2 > \frac{\epsilon' nh_n}{2}\right\} = \emptyset \tag{3.9}$$

Par conséquent, d'aprés (3.8) , (3.9) et pour n assez grand on obtient

$$\left\{Z_{in}^2(y) > \epsilon^2 Var\Big(\sum_{i=1}^n Z_{in}(y)\Big)\right\} = \emptyset$$

qui compléter la preuve.

Maintenant, il suffit de prouver que

$\widehat{f}_n^{(2)}(\theta_n^*) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_n^{(2)}(\theta)$. On observe que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in\Omega} |\widehat{f}_n^{(2)}(y) - \widehat{f}^{(2)}(y)| &\leq \sup_{y\in\Omega} \frac{1}{h_n^3}\left|\int K^{(2)}\Big(\frac{y-v}{h_n}\Big)\{d\widehat{F}_n(v) - dF(v)\}\right| \\
&+ \sup_{y\in\Omega}\left|\frac{1}{h_n^3}\int K^{(2)}\Big(\frac{y-v}{h_n}\Big) f(v)dv - \frac{1}{h_n}\int K\Big(\frac{y-v}{h_n}\Big) f^{(2)}(y)dv\right| \\
&= S1 + S2
\end{aligned}$$

Maintenant, S1 et S2 tends vers zero uniformément lorsque n tends vers à l'infini. En effet, d'une part, par développement de Taylor et l'intégration par partie et les hypothèses (A1), (A2), (A4) et (A6, i)

$$\begin{aligned}
S1 &\leq \sup_{y\in\Omega} \frac{1}{h_n^3}\int |K^{(3)}(v)||\widehat{F}_n(y - vh_n) - F(y - vh_n)|dv \\
&\leq \sup_{y\in\Omega} |\widehat{F}_n(y) - F(y)| \frac{1}{h_n^3}\int |K^{(3)}(v)|dv
\end{aligned}$$

Alors, par le lemme (3.2.7), on obtient

$$S1 = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^6}}\right), \quad \text{p.s.}$$

Sous les hypothèses (A2), (A4) et par l'intégration par partie on a

$$S2 = \sup_{y\in\Omega}\left|\frac{1}{h_n}\left\{\int K\left(\frac{y-v}{h_n}\right)f^{(2)}(v)dv - \int K\left(\frac{y-v}{h_n}\right)f^{(2)}(y)dv\right\}\right|$$

Ensuite, par un changement de variable et de développement de Taylor

$$\begin{aligned} S2 &\leq \sup_{y\in\Omega}\int K(v)|f^{(2)}(y-vh_n) - f^{(2)}(y)|dv \\ &\leq h_n\int |v|K(v)|f^{(3)}(v^*)|dv = 0(h_n) \end{aligned}$$

Où v^* est entre $y - vh_n$ et y. Maintenant, pour n assez grand, nous avons

$$\widehat{f}_n^{(2)}(\theta^*{}_n) - f^{(2)}(\theta) \leq \sup_{y\in\Omega}|\widehat{f}_n^{(2)}(y) - f^{(2)}(y)| + |f^{(2)}(\theta_n^*) - f^{(2)}(\theta)|$$

Comme θ_n^* est située entre θ et $\widehat{\theta}_n$, le corollaire (3.2.1) implique la convergence presque sûre de θ_n^* vers θ. La continuité de $f^{(2)}(.)$ assure donc la convergence presque sûre de $f^{(2)}(\theta_n^*)$ vers $f^{(2)}(\theta)$. De plus, en raison de la convergence presque sûre de $\widehat{f}^{(2)}(.)$ à $f^{(2)}(.)$ uniformément sur Ω, on conclut que $\widehat{f}^{(2)}(\theta_n^*)$ converge en probabilité vers $f^{(2)}(\theta) \neq 0$.

Lemme 3.2.6. *Sous l'hypothèse (H1), nous avons*

$$\sup_{y\in\Omega}|\widetilde{F}_n(y) - F(y)| = 0\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right), \quad p.s. \quad quand \quad n \to +\infty$$

Preuve : Considérons la suite $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ indépendants et identiquement distribuées et la classe des fonctions

$$\mathcal{L}_n = \left\{\Psi_y : \Omega \to \mathbb{R}^+ / \Psi_y(z) = \frac{\alpha.\mathbb{1}_{(z<y)}}{nL(z)}, y \in \Omega\right\}$$

Selon (Giné et Guillou [([24], 1999), Lemme 3 (b)]), $\mathcal{L}_n$ est une fonction mésurable non négative par un Vapnik- Ćervonenkis qui est uniformément bornée avec $\Delta = [nG_{(aF)}]^{-1}$. En outre

$$\mathbb{E}[\Psi_y(Y)] \leq \frac{1}{nL(a_F)} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\Psi_y^2(Y)] \leq \frac{1}{n^2L^2(a_F)}$$

Par l'inégalité de Talagrand ([60], 1996), avec $t = D\sqrt{\frac{\log n}{n}}$, on obtient le résultat

Lemme 3.2.7. *Comme $n \to +\infty$, on a*

$$\sup_{y\in\Omega}|\widehat{F}_n(y) - F(y)| = 0\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right), \qquad .p.s.$$

Preuve :

$$
\begin{aligned}
|\hat{F}_n(y) - F(y)| &\leq \underbrace{|\hat{F}_n(y) - \tilde{F}_n(y)|}_{T_1} + \underbrace{|\tilde{F}_n(y) - F(y)|}_{T_2} \\
&\leq \frac{|\alpha_n - \alpha|}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}}}{L_n(Y_i)} + \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{L_n(Y_i)} - \frac{1}{L(Y_i)} \right| \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}} + T_2 \\
&\leq \frac{|\alpha_n - \alpha|}{L_n(a_F)} + \frac{\alpha}{L_n(a_F) L(a_F)} \sup_{y \geq a_F} |L_n(y) - L(y)| + T_2 \\
&=: I + II + T_2
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Par (He et Yang [([30], 1998), théorème 3.2]), $|\alpha_n - \alpha| = 0_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$ et le fait que $L_n(a_F) \xrightarrow{p.s.} L(a_F) > 0$, on obtient

$$I = 0_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$$

uniformément sur y. De la même manière, l'utilisation de (Woodroofe ([68], 1985), remarque 6]), nous obtenons

$$II = 0_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$$

Finallement, par le lemme (3.2.2) et la condition sur h, on obtient le résultat.

3.3 Cas de α-mélange

Afin de généraliser les résultats obtenus dans le section précédente à des observations dépendantes nous renforçons les hypothèses précédentes, en ajoutants des hypothèses sur le coefficient de mélange ainsi sur le paramètre de lissage.

3.3.1 Propriétés asymptotiques

Pour d'établir la convergence presque sûre de l'estimateur θ_n vers θ on introduit les hypothèses suivantes, cependant, pour cela là, on a besoin

- (H1) K est une densité de probabilité bornée, continue au sens de Hölder d'exposant $\beta > 0$, satisfaisant $|u|K(u) \to 0$ quand $|u| \to \infty$
- (H2) K est une noyau de second ordre
- (K3) Le noyau K est différentiable.
- (H3) $\{Y_i, i \geq 1\}$ est une suite de variable aléatoire réelle et α-mélangeantes de coefficient $\alpha(n) = 0(n^{-v})$ telle que $v > 5 + 1/\beta$

- (H4) $\{T_i, i \geq \infty\}$ est une suite de variable aléatoire de troncature i.i.d. et indépendante de$\{Y_i, i \geq \infty\}$.
- (H5) L'unique mode θ vérifie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y : |\theta - y| \geq \epsilon \Rightarrow |f(\theta) - f(y)| \geq \eta$$

- (H6) La densité conditionnelle jointe f_{ij}^* de (Y_i, Y_j) existe et satisfait pour toute constante c indépendante de (i ,j) :

$$\sup_{u,v} |f_{ij}^*(u, v) - f^*(u)f^*(v)| \leq c < \infty$$

- (D2) La densité de probabilité f(.) est deux fois continuées différentiable sur $\mathcal{D}$ avec la deuxième dérivée $f^{(2)}(\theta) \neq 0$. De plus, on suppose que $\theta \in \mathcal{D}^\circ$, où $\mathcal{D}^\circ$ dénote l'intèrieur de $\mathcal{D}$
- (H7) La fenêtre h_n satisfait :
  - i)$\frac{nh_n^2}{\log \log n} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$
  - ii) $cn^{\frac{(3-v)\beta}{\beta(v+1)+2\beta+1}+\eta} < h < c'n^{\frac{1}{1-v}}$ou η satisfait :

$$\frac{1}{\beta(v+1) + 2\beta + 1} < \eta < \frac{(v-3)\beta}{\beta(v+1) + 2\beta + 1} + \frac{1}{1-v}$$

Théorème 3.3.1. *: Sous les hypothèses* $(H1 - H6)$*, (K3) et (D2) on a*

$$\widehat{\theta}_n - \theta = 0\left(\max \left(\left(\frac{\log n}{nh_n} \right)^{1/4}, h_n \right) \right) \quad p.s. \quad lorsque \qquad n \to \infty$$

si $h = 0\left(\frac{\log n}{nh_n}\right)^{1/5}$ par l'hypothèse (H7, ii), on a

$$\widehat{\theta}_n - \theta = 0\left(\left(\frac{\log n}{nh_n} \right)^{1/5} \right), \qquad \text{p.s.}$$

La preuve du théorème suit les mêmes étapes du cas précédents au lemme suivant :

Lemme 3.3.1. *Sous les hypothèses du théorème, on a*

$$\sup_{y \in \mathcal{D}} |\widehat{f}_n(y) - f(y)| = 0\left(\max \left(\left(\frac{\log n}{nh_n} \right)^{1/2}, h_n^2 \right) \right), \qquad p.s.$$

Le choix de $h = 0\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/5}$ permet d'écrire

$$\sup_{y \in \mathcal{D}} |\widehat{f}_n(y) - f(y)| = 0\left(\frac{\log n}{n}\right)^{2/5}, \qquad \text{p.s.}$$

Démonstration : La démonstration est basée sur les mêmes augements analytique utilisées dans la démonstration du cas précédant à savoir le développement de Taylor de l'estimateur, on peut dire que la propriété de l'independance des observations d'aucune influence sur la partié biais de la vitesse. Autrement dit, la partié dispersion se trouve dans la décomposition suivantes :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_n(y) - f(y)| &\leq |\widehat{f}_n(y) - \widetilde{f}_n(y)| + |\widetilde{f}_n(y) - \mathbb{E}\widetilde{f}_n(y)| + |\mathbb{E}\widetilde{f}_n(y) - f(y)| \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pour le terme I_1

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{|\widehat{\mu} - \mu|}{nh} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_n(Y_i)} K\left(\frac{y - Y_i}{h}\right) + \frac{\mu}{nh} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{L_n(Y_i)} - \frac{1}{L(Y_i)} \right| K\left(\frac{y - Y_i}{h}\right) \\ &\leq \left\{ \frac{|\widehat{\mu} - \mu|}{L_n(a_F)} + \frac{\mu}{L_n(a_F)L(a_F)} \sup_{y \in \mathcal{D}} |L_n(y) - L(y)| f_n^*(y) \right\} \end{aligned}$$

On a

Lemme 3.3.2. *Sous les hypothèses $(H3 - H4)$, on a*

$$|\widehat{\mu} - \mu| = 0_{\mathbb{P}}\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2} \tag{3.12}$$

Car

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} - \mu &= \frac{L_n(y)(1 - F_n(y^-))}{R_n(y)} - \frac{L(y)(1 - F(y))}{R(y)} \\ &= \frac{1}{R_n(y)R(y)} \left\{ R(y) \underbrace{(L_n(y) - L(y))}_{I_{1n}} (1 - F_n(y^-)) + R(y)L(y) \underbrace{(F(y) - F_n(y^-))}_{I_{2n}} \right. \\ &+ \left. L(y) \underbrace{(R_n(y) - R(y))}_{I_{3n}} (F(y) - 1) \right\} \end{aligned}$$

Par (3.1) et (3.2), on a

$$\begin{aligned} |I_{3n}| &\leq |F_n^*(y) - F^*(y)| + |L_n^*(y) - L^*(y)| \\ &= I_{3n1} + I_{3n2} \end{aligned}$$

Dans l'autre cas, par le théorème (3.2) de Cai et Roussas de ([9], 1992), (H4) et la loi lalgoritme itérée ([28], 1992) de la loi classique, on a

$$I_{3n1} = 0_{\mathbb{P}}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad I_{3n2} = 0_{\mathbb{P}}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2} \tag{3.13}$$

Ensuite

$$\sup_{y\in\mathcal{D}}|I_{3n}| = 0_{\mathbb{P}}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2} \tag{3.14}$$

Dans l'autre cas, par la remarque 6 de Woodroofe ([18], 1985), on a

$$\sup_{y\in\mathcal{D}}|I_{1n}| = 0_{\mathbb{P}}\left(n^{-1/2}\right) \tag{3.15}$$

Pour terminer le résultat, il suffit d'appliqué le resultat (A-13) de Sun et Zhou ([59], (2001)), qui donne

$$\sup_{y\in\mathcal{D}}|I_{2n}| = 0_{\mathbb{P}}\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2} \tag{3.16}$$

Donc par la continuité de F et (3.14 – 3.16), on obtient

$$|\widehat{\mu}-\mu| = 0_{\mathbb{P}}\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2} \tag{3.17}$$

On a $L_n(a_F) \xrightarrow{p.s} L(a_F) > 0$ et par (3.15) et (3.17), on a

$$f_n^*(y) = 0_{\mathbb{P}}(1)$$

Car par intégration par partie et les conditions (H1, H2, H3) impliquent que $K^{(1)}$ est intégrable et par le changement de variable

$$\begin{aligned}
|f_n^*(y)| &\le |f_n^*(y) - \mathbb{E}[f_n^*(y)]| + |f_n^*(y)| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int K\left(\frac{y-u}{h}\right)\{dF_n^*(y) - dF^*(y)\}\right| + \frac{1}{h}\int K\left(\frac{y-u}{h}\right)f^*(u)du \\
&\le \frac{1}{h}\sup_{y\in\mathcal{D}}|F_n^*(y)-F^*(y)|\int|K^{(1)}(u)|du + \frac{1}{\mu h}\int K\left(\frac{y-u}{h}\right)f(u)L(u)du \\
&\le \frac{C}{h}\sup_{y\in\mathcal{D}}|F_n^*(y)-F^*(y)| + C'\int K(u)f(y-uh)du
\end{aligned}$$

Pour le terme I_2

Soit $\mathcal{D}$ un compact, par le nombre finié q_n de l'intervale $\omega_n(n^{-1}h^{1+2\beta})^{1/2\beta}$ où β est de Hölder Soit $I_k = I(y_k, \omega_k)$ tel que $1 \le k \le q_n$ et $\mathcal{D}$ est bornée, soit $M > 0$ tel que $\omega_n q_n \ge M$. Pour tout $y \in \mathcal{D}$, il existe un intervalle I_k qui contient y tel que

$$|y - y_k| \ge \omega_n \tag{3.18}$$

On pose

$$\Delta_i(y) = \frac{\mu}{nh}\left\{\frac{1}{L(Y_i)}K\left(\frac{y-Y_i}{h}\right) - \mathbb{E}\left[\frac{1}{L(Y_i)}K\left(\frac{y-Y_i}{h}\right)\right]\right\}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y) &= \{(\widetilde{f}_n(y)-\widetilde{f}_n(y_k))-(\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(y)]-\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(y_k)])\}+\{\widetilde{f}_n(y_k)-\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(y_k)]\}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\Delta}_i(y)+\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y_k)\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_{y\in\mathcal{D}}|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y)|\leq \max_{1\leq k\leq q_n}\sup_{y\in I(y_k,\omega_i)}\underbrace{|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\Delta}_i(y)|}_{\rho_1}+\max_{1\leq k\leq q_n}\underbrace{|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y_k)|}_{\rho_2}$$

On a

$$\begin{aligned}\rho_1 &\leq \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu}{L(Y_i)}\left|K\left(\frac{y-Y_i}{h}\right)-K\left(\frac{y_k-Y_i}{h}\right)\right|\\ &+ \mathbb{E}\left[\frac{\mu}{L(Y_i)}\frac{1}{h}\left|K\left(\frac{y-Y_i}{h}\right)-K\left(\frac{y_k-Y_i}{h}\right)\right|\right]\\ &= I_{1n}+I_{2n}\end{aligned}$$

L'hypothèse (H1) et (3.18) implique que

$$\begin{aligned}I_{1n} &\leq \frac{\mu|y-y_k|^{\beta}}{L(a_F)h^{\beta+1}}\\ &\leq C\omega_n^{\beta}h^{-(\beta+1)}\\ &= 0((nh)^{-1/2})\end{aligned}$$

On utilise la même démonstration pour démontrer que

$$\rho_1 = 0_{\mathbb{P}}(1)$$

Pour n supposer large et par (H7, i), on détermine la preuve .

Pour ρ_2. Soit $\xi_i = nh\Delta_i(y_k)$, pour (k1) on obtient

$$|\xi_i|\leq \frac{2\mu\|K\|_\infty}{L(a_F)}<\infty$$

Par l'inégalité de Fuk-Nagaev([21], 2004)

$$\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y_k)\right|>\epsilon\right\}\leq C\left\{\left(1+\frac{\epsilon^2n^2h^2}{rs_n}\right)^{-r/2}+nr^{-1}\left(\frac{r}{\epsilon nh}\right)^{r+1}\right\} \tag{3.19}$$

Avec

$$s_n=\sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n}|cov(\xi_i,\xi_j)|$$

Tel que

$$s_n = \underbrace{\sum_{1\leq i\neq j} |cov(\xi_i,\xi_j)|}_{S^{cov}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} Var(\xi_i)}_{S^{Var}}$$

Pour calculer le terme de variance, on a

$$\begin{aligned} S^{var} &= nVar(\xi_i) \\ &= n\Big\{\mathbb{E}\Big[\frac{\mu^2}{L^2(Y_1)}K^2\Big(\frac{y_k - Y_1}{h}\Big)\Big] - \Big[\frac{\mu}{L(Y_1)}K\Big(\frac{y_k - Y_1}{h}\Big)\Big]\Big\} \\ &= 0(nh) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Par le covariance, on a

$$\begin{aligned} |cov(\xi_i,\xi_j)| &= |\mathbb{E}[\xi_i,\xi_j]| \\ &\leq \frac{\mu^2}{L^2(a_F)}\int\int K\Big(\frac{y_k - u}{h}\Big)K\Big(\frac{y_k - v}{h}\Big)|f^*_{i,j}(u,v) - f^*(u)f^{*(v)}|dudv \\ &= o(h^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Par l'inégalité Davydov ([52], 2000), on a

$$|cov(\xi_i,\xi_j| \leq C\alpha|i-j| \quad (3.22)$$

On utilise le technique de Masry (1986 ,[42]), soit

$$\varphi_n = \lceil\frac{1}{h\log n}\rceil \quad (3.23)$$

On peut écrire

$$S^{cov} = \sum_{0<|i-j|\leq\varphi_n} |cov(\xi_i,\xi_j)| + \sum_{|i-j|>\varphi_n} |cov(\xi_i,\xi_j)| \quad (3.24)$$

Par (3.21), on obtient

$$\sum_{0<|i-j|\leq\varphi_n} |cov(\xi_i,\xi_j)| \leq Cnh^2\varphi_n \quad (3.25)$$

A partir de l'hypothèse (H3) et (3.22), on a

$$\begin{aligned} \sum_{|i-j|>\varphi_n} |cov(\xi_i,\xi_j)| &\leq C\sum_{|i-j|>\varphi_n} \alpha(|i-j|) \\ &\leq Cn^2\alpha(\varphi_n) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Il existe $\epsilon > 0$, tel que $\log n = 0(n^\epsilon)$ et

$$h^{v-1} = 0(n^{1-\epsilon}) \quad (3.27)$$

D'aprés (H3) et (3.25) − (3.27), on a

$$S^{cov} = 0(nh) \tag{3.28}$$

D'aprés (3.20) et (3.28), on obtient

$$s_n = 0(nh) \tag{3.29}$$

Pour $\epsilon = \epsilon_0\sqrt{\dfrac{\log n}{nh}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y_k)\right| > \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{nh}}\right\} &\leq C\left\{\left(1+\frac{c'\epsilon_0^2\log n}{r}\right)^{-r/2} + nr^{-1}\left(\frac{r}{\epsilon_0\sqrt{nh\log n}}\right)^{(v+1)}\right\}\\
&\leq C\exp\left[-\frac{r}{2}\log\left(1+\frac{c'\epsilon_0^2\log n}{r}\right)\right] + nr^{-1}\left(\frac{r}{\epsilon_0}\right)^{v+1}\left(nh\log n\right)^{\frac{v+3}{2}}
\end{aligned}$$

En prenant $r = (\log n)^{\delta}$, $\delta > 0$ et en utilisant l'extention du Taylor au $\log(1+x)$

$$\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y_k)\right| > \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{nh}}\right\} \leq Cn^{-c'\epsilon_0^2} + C\epsilon_0^{+(v+1)}(\log n)^{(1+\delta)}n^{1-\frac{v+1}{2}h^{\frac{v+1}{2}}}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\max_{i\leq k\leq q_n}\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y_k)\right| > \epsilon\right\} &\leq \sum_{i=1}^{q_n}\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(y_k)\right| > \epsilon\right\}\\
&\leq M\omega_n^{-1}\left(Cn^{-c'\epsilon_0^2}(\log n)^{(1+\delta)}n^{1-\frac{v+1}{2}}h^{-\frac{v+1}{2}}\right)\\
&\leq C\left\{\underbrace{\frac{n^{\frac{1}{2\beta}-c'\epsilon_0^2}}{h^{(1+\frac{1}{2\beta})}}}_{\mathfrak{F}_1} + \underbrace{\frac{n^{1-\frac{v+1}{2}+\frac{1}{2\beta}}(\log n)^{(1+\delta)}}{\epsilon_0^{(v+1)}h^{1+\frac{v+1}{2}+\frac{1}{2\beta}}}}_{\mathfrak{F}_2}\right\}
\end{aligned}$$

D'une autre côté, il en résulte d'aprés (H7, ii)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_2 &\leq c(\log n)^{1+\delta}n^{1-\frac{v+1}{2}+\frac{1}{2\beta}}n^{-\frac{3-v}{2}\eta\frac{\beta(v+1)+2\beta+1}{2\beta}}\\
&\leq c(\log n)^{1+\delta}n^{-1-\frac{\eta}{2\beta}(\beta(v+1)+2\beta+1+\frac{1}{\eta})}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout η comme dans (H7, ii), $\mathfrak{F}_2$ n'est pas borné par le terme d'une série à somme infinie.

Dans la même pour $\mathfrak{F}_1$.

Par conséquent, $\sum_{n\leq 1}(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) < \infty$ et par le lemme Borel-Cantelli([52], 2000) la preuve est compléte .

3.4 Exemple

Durée de vie aprés la retraite : on étudie la durée de vie aprés la retraite de sujets qui entrent dans l'enquète à la suite d'un tirage au sort dans une caisse de retraite. Un sujet n'est donc observé que si sa durée de vie aprés la retraite excède le délai entre sa prise de retraite et l'instant de l'enquète. La durée de vie aprés la retraite est donc tronquée à gauche par ce délai.

Chapitre 4

Estimation du mode par le modèle de Censure à droite

Ce chapitre est consacrée à la version uniforme. Plus précisèment, notre objectif est d'établir la convergence uniforme presque sûre de la densité sur un ensemble compact pour obtenir la convergence sûre du mode. Ensuite, nous obtenons sous un nouveau modèle censuré à droite et sous des conditions générales la vitesse de convergence et sa normalité asymptotique dans le cas indépendant et identiquement distribuée et dépendant.

4.1 Modèle

Soit $Y_1, \cdots, Y_n$ une suite de variable aléatoire indépendants et identiquements distribuées de fonction de répartition continue F et de densité f. Dans certaines situations, la variable aléatoire d'intérêt Y ne peut être observée complètement, c'est le cas dans les études médicales où le patient est perdu de vie. Cependant on observe une autre variable aléatoire appelée censure, positive de fonction de répartition G. Les variable aléatoire C_i sont supposées indépendantes des Y_i , Soit$\{(Z_1, \delta_1), ..., (Z_n, \delta_n)\}$ l'échantillon réellement observé où $Z_i = Y_i \wedge C_i$ et $\delta_i = I\{Y_i \leq C_i\}$, Pour toute fonction de répartition W, nous noterons par $\tau_W = \sup\{t : W(t) < 1\}$, Les Z_i sont de fonction de répartition H donnée par $1 - H(t) = \overline{F}(t)\overline{G}(t), \forall t \geq 0$ et le cas non censure est un cas particulier du modèle de censure avec G $= 0$, Il est bien connu que l'estimateur non paramétrique $\widehat{F}_n$ de F est l'estimateur de Kaplan-Meier (1958 , [32]) défini par

$$1 - \widehat{F}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{\delta_i}{n-i+1})^{I\{Z_i \leq t\}} & \text{si} \quad t < Z_{(n)} \\ 0 & \text{si} \quad t \geq Z_{(n)} \end{cases} \tag{4.1}$$

Où $Z_{(1)} \leq Z_{(2)}, \leq \cdots, \leq Z_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre de Z_i et pour chacune des valeurs $Z_{(i)}$ la valeur δ_i est l'indicatrice correspondante. L'estimateur de Kaplan-Meier G_n de G est comme suit :

$$1 - \widehat{G}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1-\delta_i}{n-i+1})^{I\{Z_i \leq t\}} & \text{si} \quad t < Z_{(n)} \\ 0 & \text{si} \quad t \geq Z_{(n)} \end{cases}$$

Un estimateur à noyau du mode θ est défini comme la variable aléatoire θ_n maximisant l'estimateur à noyau da la densité f_n de f, c'est à dire

$$f_n(\theta_n) = \sup_{t \in \mathbb{R}} f_n(t)$$

Et son estimateur

$$f_n(t) = \frac{1}{h_n} \int_0^{\infty} K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) dF_n(s) \tag{4.2}$$

K est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, $(h_n)_{n \leq 0}$ est une suite réels positifs tend vers zéro quand $n \to \infty$, $1 - F_n$ est une estimateur de Kaplan-Meier de fonction de survie.

4.2 Cas i.i.d.

4.2.1 Convergence presque sûre

Théorème 4.2.1. *Sous des hypothèses classiques sur la densité f et le noyau $K(.)$ et si* $\frac{\log n}{nh_n^2} \to 0$ *alors*

$$\sup_{t \in \mathscr{C}} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \qquad p.s$$

où $\mathscr{C}$ est un compact inclus dans $[0, \tau_H[$.

Corollaire 4.2.1. *Si $\theta \in \mathscr{C}$*

$$|\theta_n - \theta| \to 0 \qquad p.s.$$

Preuve du corollaire 4.2.1 : L'hypothèse (i) du théorème du chapitre un implique que f est uniformément continu sur $\mathscr{C}$. Egalement, f a un mode θ à unique (par hypothèse). Ainsi, par Parzen ([50], 1962), on a, la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathscr{C}, |\theta - x| \geq \epsilon \Rightarrow |f(\theta) - f(x)| \geq \eta \tag{4.3}$$

Par la définition de θ et θ_n, on a

$$|f(\theta_n) - f(\theta)| \leq 2 \sup_{x \in \mathscr{C}} |f_n(x) - f(x)|.$$

Le résultat (4.3) donne que, $\forall\epsilon > 0$, il $\exists\beta > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(|\theta_n - \theta|) \leq \mathbb{P}\bigg(\sup_{x\in\mathscr{C}} |f_n(x) - f(x)| > \beta\bigg) \tag{4.4}$$

Preuve du théorème 4.2.1 La preuve de ce théorème est basée sur l'inégalité de Wang ([66], 2000). Soit la fonction de distribution $\nu = 1 - v$ et α_0 une constante. Pour $\epsilon > 0$ et $0 < t < \tau_H$, on a

$$\mathbb{P}(|f_n(t) - f(t)| > \epsilon) \leq \alpha_0 \exp\left\{ - \alpha_0 \overline{G}^4(t)\overline{H}^2(t)\left[\min\left(1, \frac{\epsilon\overline{G}(t)}{24f(t)}\right)\right]^2 nh_n^2\right\} \tag{4.5}$$

pour n assez grand. Soit $\mathscr{C}$ un ensemble compact est couvert par un nombre fini I_n d'intervalle h_n^β où β est une constante positive et centrée sur des points $t_j = 1, \cdots, l_n$.

Notons chaque intervalle par $I(t_j, h_n^\beta)$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$l_n = \frac{\delta}{h_n^\beta} \tag{4.6}$$

Pour tout $t \in \mathscr{C}$, il existe un intervalle $I(t_j, h_n^\beta)$ qui contient t. Donc,

$$|t - t_j| \leq h_n^\beta$$

Par conséquent,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t) - f_n(t_j)| + |f_n(t_j) - f(t_j)| + |f(t_j) - f(t)|.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathscr{C}} |f_n(t) - f(t)| &\leq \max_{1\leq j\leq l_n} \sup_{t\in I(t_j,h_n^\beta)} |f_n(t) - f_n(t_j)| + \max_{1\leq j\leq l_n} |f_n(t_j) - f(t_j)| \\ &+ \max_{1\leq j\leq l_n} \sup_{t\in I(t_j,h_n^\beta)} |f(t_j) - f(t)| \end{aligned} \tag{4.7}$$

Nous étudions d'abord les deux termes $|f_n(t) - f_n(t_j)|$ et $|f(t_j) - f(t)|$. Puisque K est de type Hölder et f est Lipshitzien par hypothèse, il en résulte que, pour $1 \leq j \leq l_n$ et $t \in I(t_j, h_n^\beta)$

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_n(t_j)| &= \frac{1}{h_n}\bigg| \int \bigg[K\bigg(\frac{t-s}{h_n}\bigg) - K\bigg(\frac{t_j - s}{h_n}\bigg)\bigg] dF_n(s)\bigg| \\ &\leq \frac{1}{h_n} G \bigg|\frac{t - t_j}{h_n}\bigg|^\alpha \qquad (4.8) \\ &\leq Gh_n^{\alpha\beta-\alpha-1} \qquad (4.9) \end{aligned}$$

Et

$$|f(t_j) - f_n(t)| \leq B|t_j - t| \leq Bh_n^\beta$$

Si β est choisit tel que $\alpha\beta - \alpha > 1$, puis pour $\epsilon > 0$, on choisit $n = n(\epsilon)$ tel que

$$Gh_n^{\alpha\beta-\alpha-1} < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{et} \quad Bh_n^{\beta} < \frac{\epsilon}{3} \tag{4.10}$$

De (4.7) à (4.10) et l'inégalité précédente (4.5), on obtient pour $n \geq n(\epsilon)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathscr{C}}|f_n(t) - f(t)| > \epsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq l_n}|f_n(t_j) - f(t_j)| > \epsilon/3\right)\\
&\leq \sum_{j=1}^{l_n}\mathbb{P}\left(|f_n(t_j) - f(t_j)| > \epsilon/3\right)\\
&\leq \sum_{j=1}^{l_n}\alpha_0\exp\{-\alpha_0 T(t_j)nh_n^2\} \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Où

$$T(t_j) = \overline{G}^4(t_j)\overline{H}^2(t_j)\left[\min\left(1, \frac{\epsilon\overline{G}(t_j)}{72f(t_j)}\right)\right]^2$$

Soit maintenant t_m tel que

$$T(t_m) := \min_{1\leq j\leq l_n} T(t_j) \tag{4.12}$$

Selon de (4.11) et (4.12), on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathscr{C}}|f_n(t) - f(t)| > \epsilon\right) \leq \alpha_0 l_n\exp\{-\alpha_0 T(t_m)nh_n^2\}$$

Soit $b_n = \alpha_0 l_n\exp\{-\alpha_0 T(t_m)nh_n^2\}$. Pour que $nh_n^2 \to \infty$, on peut trouver pour $\eta > 0$ tel que

$$(nh_n^2)^{-1} < \eta, \qquad \text{pour n suffisamment grand} \tag{4.13}$$

De (4.6) et (4.13), on obtient

$$\begin{aligned}
b_n &= \alpha_0\left(\frac{\delta}{h_n^{\beta}}\right)n^{-\alpha_0 T(t_m)nh_n^2/\log(n)}\\
&\leq \alpha_0\delta\eta^{\beta/2}n^{\beta/2-\alpha_0 T(t_m)nh_n^2/\log(n)}
\end{aligned}$$

Comme $nh_n^2/\log(n) \to \infty$, on obtient

$$n^{\beta/2-\alpha_0 T(t_m)nh_n^2/\log(n)} \sim n^{-\gamma}$$

avec $\gamma > 2$, pour n assez grand, donc $\sum_{n\geq 1} b_n < \infty$ et par le lemme Borel-Cantelli([52], 2000) on obtient le résultat. En combinant avec (4.4), la preuve du Corollaire est terminé.

4.2.2 Normalité asymptotique

Théorème 4.2.2. *(Louani ([39], 1998)) : Sous les hypothèses sur les dérivées $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$ et si $nh_n^5 \to +\infty$, $nh_n^7 \to 0$, alors on a*

$$\sqrt{nh_n^3}(\theta_n - \theta) \xrightarrow{l} \mathcal{N}(0, B(x))$$

où $\xrightarrow{l}$ désigne la convergence en loi,

$$B(x) = \frac{f(\theta)}{\overline{G}(\theta)[f^{(2)}(\theta)]^2} \int [K^{(1)}(x)]^2 dx$$

4.3 Cas α-mélange

On suppose que les observations sont dépendants.

4.3.1 Modèle

On considère des temps de survie $T_1, \ldots, T_n$, strictement stationnaires, non négatifs, satisfaisant la propriété de α-mélange, de fonction de répartition F et de densité f inconnues et des temps de censure $C_1, \ldots, C_n$, indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) et indépendants des $(T_i)_{\overline{1,n}}$, de fonction de répartition G inconnue. Dans le modèle de censure à droite on observe les couples$\{(Y_1, \delta_1), \ldots, (Y_n, \delta_n)\}$ l'échantillon réellement observé où $Y_i = T_i \wedge C_i$ et $\delta_i = I\{T_i \leq C_i\}$, Pour toute fonction de répartition F, nous noterons par $\tau_F = \inf\{t; F(t) = 1\} \leq \infty$, Les Z_i sont de fonctions de répartition H donnée par

$$1 - H(y) = \overline{F}(y)\overline{G}(y), y \in \mathbb{R},$$

On définit un pseudo-estimateur de f par :

$$\widetilde{f}_n(t) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t - Y_i}{h}\right) \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}$$

où $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq ... \leq Y_{(n)}$ représentent les statistiques d'ordre associées à Y_i, Ainsi K est un noyau positif d'intégrale 1 et h = h(n) une suite de nombres réels positifs, telle que $h \to 0$ quand $n \to \infty$. Le coefficient $\dfrac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}$ a été introduit par Koul, Susarla et Van Ryzin ([34], 1981) dans le cadre d'un nouvel estimateur des paramètres du modèle de régression linéaire. Lorsque G est connue, $\widetilde{f}_n$ estime la densité commune des durées de vie. Mais dans la pratique, G est en général inconnu. L'estimateur de Kaplan-Meier ([32], 1985) qui lui est associé a pour expression

$$1-\widehat{G}_n(t)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(1-\dfrac{1-\delta_i}{n-i+1})^{\mathbb{1}_{\{Y_i\leq t\}}} & \text{si} \quad t<Y_{(n)}\\ 0 & \text{si} \quad t\geq Y_{(n)}\end{cases}$$

On définit l'estimateur de f par :

$$\widehat{f}_n(t)=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right)\frac{\delta_i}{\overline{G}_n(Y_i)}$$

4.3.2 Convergence presque sûre

Hypothéses

On considère un compact $[0,\tau]$ où $\tau<\tau_F$ les hypothéses suivantes :

- D1. $\{T_i, i\geq 1\}$ est une suite strictement stationnaire de variable aléatoire alpha-mélangeantes, de fonction de répartition F admettant une densité f et des moments d'ordre deux finis.
- M1. Les variables de censure $\{C_i, i\geq 1\}$ sont i.i.d., de fonction de répartition G, et indépendantes des $\{Ti, i\geq 1\}$,
- M2. K est une densité lipschitzienne à support compact, vérifiant $\int uK(u)du=0$,
- M3. La densité $f(.)$ est deux fois continement différentiable sur $[0,\tau]$,
- D2. La densité jointe $f_{1,j}(.,.)$ de (T_1,T_{j+1}) vérifiée : $\sup_{j>1}\sup_{u,v\in[0,\tau]}|f_{1,j}(u,v)-f(u)f(v)|<c.$
- D3. Le coefficient d'alpha-mélange des T_i vérifie $\alpha(n)=O(n^{-v})$ pour tout $v>4$.
- D4. Le paramêtre de lissage h = h(n) est telle que $h\to 0$, $nh\to\infty$ et

$$\frac{nh^{\frac{v+4}{v-4}}}{(\log n)^{\frac{v+4}{v-4}}[\log(\log n)]^{\frac{6}{v-4}}}\to+\infty \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty, pour \quad tout \quad v>4.$$

Théorème 4.3.1. *Sous les hypothèses M1, M2, M3, D1, D2 et D3, on a*

$$|\widehat{\theta}_n(t)-\theta(t)|=0\left\{\max\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh}},h^2\right)\right\} \quad p.s. \quad quand \quad n\to\infty$$

Preuve : La démonstration est basé sur la proposition suivante :

Proposition 4.3.1. *Sous les hypothèses M1, M2, M3, D1, D2 et D3, on a*

$$\sup_{t\in[0,\tau]}|\widehat{f}_n(t)-f(t)|=0\left\{\max\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh}},h^2\right)\right\} \quad p.s. \quad n\to\infty$$

La preuve de ce théorème est basée sur la décomposition suivante :

$$\sup_{t\in[0,\tau]}|\widehat{f}_n(t)-f(t)|\leq\sup_{t\in[0,\tau]}|\widehat{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t)|+\sup_{t\in[0,\tau]}|\widetilde{f}_n(t)-\mathbb{E}\widetilde{f}_n(t)|+\sup_{t\in[0,\tau]}|\mathbb{E}\widetilde{f}_n(t)-f(t)|$$

Lemme 4.3.1. *.Sous les hypothèses M2, M3, D1, D2, D3, on a*

$$\sup_{t\in[0,\tau]} |\widetilde{f}_n(t) - \mathbb{E}\widetilde{f}_n(t)| = 0\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh}}\right) \quad p.s \quad lorsque \quad n \to \infty.$$

Preuve L'intervalle $[0,\tau]$ étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini q_n d'intervalles I_j de centres t_j^*, $1 \leq j \leq q_n$ et de demi-longueur $a_n = \sqrt{\frac{h^3}{n}}$. $[0,\tau]$ étant borné, il existe une constante c1 > 0 telle que $q_n \leq c1\sqrt{\frac{n}{h^3}}$. En effet, $l([0,\tau]) = 2q_n a_n = 2q_n\sqrt{\frac{h^3}{n}} \leq 2c_1\sqrt{\frac{n}{h^3}\frac{h^3}{n}} = 2c_1$. Pour tout $t \in [0,\tau]$ on pose

$$Z_i(t) = Z(t,Y_i) = \frac{1}{nh}\left[\frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right)\right)\right].$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Z_i(t) &= \widetilde{f}_n(t) - \mathbb{E}\widetilde{f}_n(t) \\
&= \left\{\left(\widetilde{f}_n(t) - \widetilde{f}_n(t_j^*)\right) - \left(\mathbb{E}\widetilde{f}_n(t) - \mathbb{E}\widetilde{f}_n(t_j^*)\right)\right\} + \left(\widetilde{f}_n(t_j^*) - \mathbb{E}\widetilde{f}_n(t_j^*)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Z}_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Z}_i(t_j^*)
\end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,\tau]}\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i(t)\right| &\leq \max_{1\leq j\leq q_n}\sup_{t\in I_j}\left|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Z}_i(t)\right| + \max_{1\leq j\leq q_n}\left|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Z}_i(t_j^*)\right| \\
&= S_1 + S_2
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Z}_i(t)\right| &= \left|\widetilde{f}_n(t) - \widetilde{f}_n(t_j^*) - \mathbb{E}\left[\widetilde{f}_n(t) - \widetilde{f}_n(t_j^*)\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}\left|K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right) - K\left(\frac{t_j^*-Y_i}{h}\right)\right| \\
&+ \frac{1}{h}\mathbb{E}\left[\frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}\left|K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right) - K\left(\frac{t_j^*-Y_i}{h}\right)\right|\right] \\
&= \Phi_1(t) + \Phi_2(t)
\end{aligned}$$

Pour le terme $\Phi_1(t)$

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in I_j}\Phi_1(t) &= \sup_{t\in I_j}|\widetilde{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t_j^*)| \\
&\le \frac{1}{h\overline{G}(\tau)}\sup_{t\in I_j}\left|K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right)-K\left(\frac{t_j^*-Y_i}{h}\right)\right| \\
&\le \frac{1}{h\overline{G}(\tau)}\frac{\mu|t-t_j|}{2h}\le\frac{\mu a_n}{h^2\overline{G}(\tau)}, \\
&= \frac{\mu}{h^2\overline{G}(\tau)}\sqrt{\frac{h^3}{n}}=\frac{\mu}{\overline{G}(\tau)\sqrt{nh}} \\
&= O\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right)
\end{aligned}$$

μ étant la constante de Lipschitz. De la même manière, on conclut que

$$\sup_{t\in I_j}\Phi_2(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right)$$

Ce qui signifie que

$$S_1=\max_{1\le j\le q_n}\sup_{t\in I_j}\left|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Z}_i(t)\right|=0\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right)$$

Pour l'étude de S_2, on applique l'inégalité de Nagaev ([21], 2004). Par le lemme 1 de Cai(1998, [10]) les variables $Y_1,\ldots,Y_n$ sont alpha-mélangeantes de coefficient égal à $4\alpha(n)$. Soit

$$U_i=U_{i,k}:=nhZ_i(t_k^*)=\frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}K\left(\frac{t_k^*-Y_i}{h}\right)-\mathbb{E}\left(\frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)}K\left(\frac{t_j^*-Y_1}{h}\right)\right)$$

On calcule d'abord

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \sum_{1\le i,j\le n}|cov(U_i,U_j| \\
&= \sum_{i\ne j}|cov(U_i,U_j|+nVar(U_1) \qquad (4.14)\\
&= \mathcal{V}+nVar(U_1).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
Var(U_1) &= Var\left[\frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)}K\left(\frac{t_k^*-Y_1}{h}\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)}K\left(\frac{t_k^*-Y_1}{h}\right)\right]^2-\mathbb{E}^2\left[\frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)}K\left(\frac{t_k^*-Y_1}{h}\right)\right]\\
&\leq \mathbb{E}\left[\frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)}K\left(\frac{t_k^*-Y_1}{h}\right)\right]^2\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(K\left(\frac{t_k^*-Y_1}{h}\right)\frac{\mathbb{1}_{\{T_1\leq C_1\}}}{\overline{G}(Y_1)}\right)^2|T_1\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(K\left(\frac{t_k^*-Y_1}{h}\right)\frac{1}{\overline{G}(T_1)}\right)^2\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_1\leq C_1\}}|T_1]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(K\left(\frac{t_k^*-Y_1}{h}\right)\frac{1}{\overline{G}(T_1)}\right)^2\mathbb{P}(T_1\leq C_1)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\overline{G}(T_1)}K\left(\frac{t_k^*-T_1}{h}\right)\right]\\
&\leq \frac{1}{\overline{G}(\tau)}\int K^2\left(\frac{t_k^*-y}{h}\right)f(y)dy\\
&= \frac{1}{\overline{G}(\tau)}\int K^2(u)f(t_k^*-hu)du\\
&= O(h)
\end{aligned}$$

Donc

$$nVar(U_1)=O(nh). \tag{4.15}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|cov(U_i,U_j)| &= |\mathbb{E}(U_i,U_j)|\\
&= \left|\mathbb{E}\left(\frac{\delta_i\delta_j}{\overline{G}(Y_i)\overline{G}(Y_j)}K\left(\frac{t_k^*-Y_i}{h}\right)K\left(\frac{t_k^*-Y_j}{h}\right)\right)-\mathbb{E}^2\left[\frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)}K\left(\frac{t_k^*-Y_1}{h}\right)\right]\right|\\
&= A_1-A_2
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
A_1 &= \mathbb{E}\left(\frac{\delta_i\delta_j}{\overline{G}(Y_i)\overline{G}(Y_j)}K\left(\frac{t_k^*-Y_i}{h}\right)K\left(\frac{t_k^*-Y_j}{h}\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\left(K\left(\frac{t_k^*-Y_i}{h}\right)K\left(\frac{t_k^*-Y_j}{h}\right)\frac{\delta_i\delta_j}{\overline{G}(Y_i)\overline{G}(Y_j)}\right)|T_i,T_j\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[K\left(\frac{t_k^*-Y_i}{h}\right)K\left(\frac{t_k^*-Y_j}{h}\right)\left(\frac{\mathbb{E}(\delta_i\delta_j|T_i,T_j)}{\overline{G}(T_i)\overline{G}(T_j)}\right)\right]
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\delta_i\delta_j|T_i,T_j) &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T_i\le C_i\}}\mathbb{1}_{\{T_j\le C_j\}}|T_i,T_j\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T_i\le C_i\}\cap\{T_j\le C_j\}}|T_i,T_j\Big] \\
&= \mathbb{P}\Big(\{T_i\le C_i\}\cap\{T_j\le C_j\}|T_i,T_j\Big) = \mathbb{P}\Big(\{T_i\le C_i\}\cap\{T_j\le C_j\}\Big) \\
&= \mathbb{P}(T_i\le C_i)\mathbb{P}(\{T_j\le C_j\}|\{T_i\le C_i\}) = \overline{G}(T_i)\mathbb{P}(\{T_j\le C_j\}|\{T_i\le C_i\}) \\
&\le \overline{G}(T_i)\mathbb{P}(T_j\le C_j) = \overline{G}(T_i)\overline{G}(T_j),
\end{aligned}$$

Sous les hypothèses M2 et D1, on a

$$\begin{aligned}
|cov(U_i,U_j)| &= \left|\mathbb{E}\left[K\left(\frac{t_k^*-Y_i}{h}\right)K\left(\frac{t_k^*-Y_j}{h}\right)\frac{\mathbb{P}(\{T_j\le c_j\}|\{T_i\le c_i\})}{\overline{G}(T_j)}\right] - \mathbb{E}^2\left[K\left(\frac{t_k^*-T_1}{h}\right)\right]\right| \\
&\le \left|\mathbb{E}\left[K\left(\frac{t_k^*-Y_i}{h}\right)K\left(\frac{t_k^*-Y_j}{h}\right)\right] - \mathbb{E}^2\left[K\left(\frac{t_k^*-T_1}{h}\right)\right]\right| \\
&= \left|\int\int K\left(\frac{t_k^*-z_1}{h}\right)K\left(\frac{t_k^*-z_2}{h}\right)f_{i,j}(z_1,z_2)dz_1dz_2\right. \\
&- \left.\int\int K\left(\frac{t_k^*-z_1}{h}\right)K\left(\frac{t_k^*-z_2}{h}\right)f(z_1)f(z_2)dz_1dz_2\right| \\
&= h^2\int\int K(t_1)K(t_2)|f_{i,j}(t_k^*-t_1h,t_k^*-t_2h)-f(t_k^*-t_1h)f(t_k^*-t_2h)|dt_1dt_2 \\
&\le h^2\sup_{j>1}\|f_{1,j}-f\otimes f\|_\infty \\
&= O(h^2) \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

De plus, d'après Masry ([42], 1986), nous définissons les ensembles

$$E_1 = \{(i,j)\ ;\ 1\le|i-j|\le\mathcal{B}_n\}$$

et

$$E_2 = \{(i,j)\ ;\ \mathcal{B}_n+1\le|i-j|\le n-1\},$$

Où $\mathcal{B}_n = O(n)$. On décompose $\mathcal{V}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{E_1}|cov(U_i,U_j| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{E_2}|cov(U_i,U_j| \\
&= \mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2,
\end{aligned}$$

D'aprés (4.16), on a

$$\mathcal{V}_1 = O(nh\mathcal{B}_n) \qquad (4.17)$$

Pour $\mathcal{V}_2$, on applique l'inégalité de Davydov (voir Rio ([52], 2000)). Aussi, pour $i\ne j$,

$$|cov(U_i,U_j)|\le c\alpha(|i-j|),$$

Par l'hypothéses (D3), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= c\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mathcal{B}_n+1<|i-j|\leq n-1}\alpha(|i-j|) \\ &\leq cn\int_{\mathcal{B}_n}^{n-1} s^{-v}ds \\ &= 0(n\mathcal{B}_n^{1-v}) \end{aligned} \tag{4.18}$$

En choisissant $\mathcal{B}_n = h^{-2/v}$ avec $v > 4$, à partir de (4.17) et (4.18)

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = O(nh^2)$$

Finallement, on obtient

$$S_n^2 = 0(nh) \tag{4.19}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on applique l'inégalité de Nagaev ([21], 2004), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i(t_k^*)\right| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} U_i\right| > \epsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} U_i\right| > nh\epsilon\right) \\ &\leq c\left(1+\frac{n^2h^2\epsilon^2}{16rS_n^2}\right)^{-r/2} + ncr^{-1}\left(\frac{2r}{nh\epsilon}\right)^{-v+1} \\ &= c(\xi_1+\xi_2) \end{aligned}$$

Pour

$$\epsilon = \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{nh}} \quad \text{et} \quad r = c\log n[\log(\log n)]^{1/v} \tag{4.20}$$

Donc

$$\xi_1 \leq c\exp\left(-\epsilon_0^2\frac{\log n}{2}\right) = cn^{-\epsilon_0^2/2}$$

et

$$\xi_2 \leq c\epsilon_0^{-(v+1)} n^{\frac{1-v}{2}} h^{-\frac{1+v}{2}} (\log n)^{\frac{v-1}{2}} \log(\log n)$$

On peut écrire que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq q_n}\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i(t_k^*)\right| > \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{nh}}\right) &\leq \sum_{k=1}^{q_n}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i(t_k^*)\right| > \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{nh}}\right) \\ &\leq kcq_n\left(n^{-\epsilon_0^2/2} + \epsilon_0^{-(v+1)} n^{\frac{1-v}{2}} h^{-\frac{1+v}{2}} (\log n)^{\frac{v-1}{2}}\log(\log n)\right) \\ &\leq kc\left\{n^{\frac{1-\epsilon_0^2}{2}} h^{-3/2} + \epsilon_0^{-(v+4)} n^{\frac{2-v}{2}} h^{-\frac{1+v}{2}} (\log n)^{\frac{v-1}{2}}\log(\log n)\right\} \\ &= kc(\omega_1+\omega_2) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Maintenant, d'aprés l'hypothèse D3 on a

$$h^{-(v+4)/2} = O(n^{(v-4)/2}(logn)^{-(v+1)/2}(log(logn))^{-3}$$

qui donne

$$\omega_2 = 0(n^{-1}(\log n)^{-1}(\log(\log n))^{-2}$$

qui est le terme général d'un série convergente de Bertrand . De la même manière, nous pouvons choisir ϵ_0 tel que ω_1 soit le terme général des série convergentes. Enfin, on applique le lemme de Borel-Cantelli ([52], 2000) à (4.21) qui donne le résultat.

Lemme 4.3.2. *Sous les hypothèses M2, M3, D2, D3 et D4, on a*

$$\sup_{t\in[0,\tau]}\left|\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{t-T_i}{h}\right)-f(t)\right| = 0\left\{\max\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh}},h^2\right)\right\} \quad p.s.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{t-T_i}{h}\right)-f(t) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{nh}K\left(\frac{t-T_i}{h}\right)-\mathbb{E}\left(\frac{1}{nh}K\left(\frac{t-T_1}{h}\right)\right)\right]\\ &+ \left[\mathbb{E}\left(\frac{1}{h}K\left(\frac{t-T_1}{h}\right)\right)-f(t)\right]\\ &= S'+S" \end{aligned} \tag{4.22}$$

D'où

$$\begin{aligned} S" &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{h}K\left(\frac{t-T_1}{h}\right)\right)-f(t) = \int\frac{1}{h}K\left(\frac{t-t_1}{h}\right)f(t_1)dt_1-f(t)\\ &= \int K(u)f(t-hu)du-f(t)\\ &= O(h^2)\end{aligned} \tag{4.23}$$

Pour S', on suit les mêmes étapes ainsi les mêmes arguments pour prouver le lemme (4.3.1). Pour cela, on pose

$$Z_i(t) = \frac{1}{nh}\left(K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right)-\mathbb{E}\left[K\left(\frac{t-Y_1}{h}\right)\right]\right)$$

Et $r_n = a_n\overline{G}(\tau)$. On a

$$S' = 0\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh}}\right) \qquad \text{p.s} \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty$$

Donc, avec (4.22) et (4.23), on trouve le résultat.

Lemme 4.3.3. *Sous les hypothèses M2, M3, D3 et D4, on obtient*

$$\sup_{t\in[0,\tau]}|\widehat{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t)| = 0\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right) \quad p.s.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}|\widehat{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t)| &\leq \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right)\left(\frac{1}{\overline{G}_n(Y_i)}-\frac{1}{\overline{G}(Y_i)}\right)\right| \\ &\leq \frac{\sup_{y\leq\tau_y}\left|\overline{G}(y)-\overline{G}_n(y)\right|}{\overline{G}(\tau)\overline{G}_n(\tau)}\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{t-Y_i}{h}\right).\end{aligned}$$

Puisque $\overline{G}(\tau_y)>0$ avec la Loi Forte des Grands Nombres ([28], 1992) et la Loi du Logarithme Itéré ([20], 1943) sur la loi de censure (établir par Cai et Roussas ([9], 1992) à la distribution de censure), le résultat est une conséquence immédiate du lemme (4.3.3)

4.4 Exemple

Un exemple classique de censure droite est celui où l'étude porte sur la durée de survie X de patients atteints d'une certaine maladie. Pour les patients perdus de vue au bout du temps C alors qu'ils étaient encore vivants, C censure X à droite puisque, pour eux, X est inconnue mais supérieure à C : X $>$ C.

Chapitre 5

Estimation du mode par le modèle tronquée à gauche et censuré à droite

Dans ce chapitre, nous établissons les propriétées asymptotique de la convergence presque sûre et la normalité asymptotique de notre estimateur dans le cas où les observations sont indépendants et identiquements distribuées et le cas dépendant pour le modèle tronquée à gauche censuré à droite. Ce chapite est divisé en trois sections, on trouve le modèle et les hypothèses dans les deux sections. La dernière est consacré au résultat principal et la démontration détaillée

5.1 Modèle

Considérons un vecteur aléatoire (Y, T, C) où Y est la variable aléatoire d'intérêt de fonction de répartition continue F et de densité f. T la variable aléatoire de troncature à gauche de fonction de répartition L et C la variable aléatoire de censure à droite de fonction de répartition G. Les variables aléatoires effectivement observées sont (Z, T, δ) si $Z \geq T$, ou Z = min (Y,C) et $\delta = \mathbb{1}_{\{Y \leq C\}}$. Soit H la fonction de répartition de Z et $\mu = \mathbb{P}[Z \geq T]$. L'indépendance nous donne $H = 1-(1-F)(1-G)$. Soit N la taille de l'échantillon i.i.d. (Z_i, δ_i, T_i) et $n = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{T_i \leq Z_i\}}$ la taille de l'échantillon effectivement observe (c'est à dire que $T_i \leq Z_i$). Notons que n est une variable aléatoire de loi Binomial $B(N, \mu)$ et μ peut être estimé par $\frac{n}{N}$. Maintenant conditionnellement à la valeur de n, (Z_i, δ_i, T_i) est encore i.i.d., mais Z et T ne sont pas indépendantes puisque $Z \geq T$. Ainsi, nous noterons $\mathbb{P}_0$ la loi de probabilité absolue (de l'échantillon de taille N) tandis que $\mathbb{P}$ sera la loi de probabilité conditionnelle (de l'échantillon effectivement observée). Soit la fonction C (.) définie par :

$$C(x) = \mathbb{P}[T \leq x \leq Z | Z \geq T] = \mu^{-1} L(x)(1 - H(x))$$

et considérons son estimateur

$$C_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{T_i \leq x \leq Z_i\}}$$

Soit

$$H_1(x) = \mathbb{P}[Z \leq x, \delta = 1 | Z \geq T]$$

et son estimateur empirique

$$H_{1n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_i \leq x, \delta_i = 1\}}$$

L'estimateur produit-limite de F, noté $\widehat{F}_n$ est défini dans Tsai et al. (1987, [61]) par

$$\widehat{F}_n(t) = 1 - \prod_{\{i: Z_i \leq t\}} \left(1 - \frac{1}{nC_n(Z_i)}\right)^{\delta_i} \tag{5.1}$$

Pour toute fonctin de répartition S, soit $a_S = \inf\{t : S(t) > 0\}$ et $b_S = \sup\{t : S(t) < 1\}$ les points extrêmes gauche et droit du support de S, par respectivement.
A la base de ce modèle, on souhaite estimer la fonction de mode

$$f(\theta) = \max_{t \in \mathbb{R}} f(t)$$

un estimateur naturel de f(t) est donnée par

$$\widehat{f}_n(t) = \frac{\mu_n}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{L_n(Z_i)\overline{G}_n(Z_i)} K\left(\frac{t - Z_i}{h_n}\right)$$

5.2 Cas i.i.d.

Dans ce qui suit, nous supposons que $a_L \leq a_H$, $b_L \leq b_H$ et D = [a, b] est un compact tel que $D \subset D_0 = \{t : t \in [a_H, b_H]\}$.

- R1 Le paramètre de lissage (h_n) est satisfait si :
  - (i) $\frac{nh_n^6}{\log n} \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty$
  - (ii) $nh_n^7 \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$
- R2 La fonction de densité K est satisfait :
  - (i) K est positif avec un support compact D et il existe une constante M telle que $\sup_{t \in D} K(t) < M$

  - (ii) K et $K^{(2)}$ sont de type hölder d'ordre β pour certains $\beta > 0$.
  - (iii) $\int_{\mathbb{R}} tK(t)dt = 0\,; \int_{\mathbb{R}} t^{(2)}K(t)dt < \infty$
- R3 La densité de probabilité f (.) est différentiable d'ordre 3
- R4 Le mode θ vérifié la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$ et t, il existe $\eta > 0$ tel que $|\theta - t| \geq \epsilon$ implique que $|f(\theta) - f(t)| \geq \eta$.

5.2.1 Convergence presque sûre

Proposition 5.2.1. *Sous les hypothèses (R1, i) et R2-R3, on a*

$$\sup_{t\in D} |\widehat{f}_n(t) - f(t)| = 0\left(\max\left(\left(\frac{\log n}{nh_n}\right)^{1/2}, h_n^2 \right)\right) \quad p.s \quad quad \quad n \to \infty$$

Théorème 5.2.1. *Sous les hypothèses de la proposition (5.2.1) et (R4), on a*

$$\widehat{\theta}_n - \theta = 0\left(\max\left(\left(\frac{\log n}{nh_n}\right)^{1/4}, h_n \right)\right) \quad p.s. \quad quand \quad n \to \infty$$

Preuves

La démonstration est basée sur les lemmes suivantes :

Lemme 5.2.1. *Sous les hypothèses (R2) et (R3), on a*

$$\sup_{t\in D} \left| E[\widetilde{f}_n(t)] - f(t) \right| = O(h_n^2)$$

Démostration de Lemme (5.2.1) :

On pose

$$\widetilde{f}_n(t) = \frac{\mu}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{L(Z_i)\overline{G}(Z_i)} K\left(\frac{t - Z_i}{h_n}\right) \tag{5.2}$$

Par l'utilisation de développement du taylor et par un changement de variable, on a

$$\begin{aligned} E[\widetilde{f}_n(t)] - f(t) &= \frac{1}{h_n}\mathbb{E}\left[\frac{\mu\delta_1}{L(Z_1)\overline{G}(Z_1)} K\left(\frac{t - Z_1}{h_n}\right)\right] - f(t) \\ &= \frac{1}{h_n}\int \frac{\mu}{L(y)\overline{G}(y)} K\left(\frac{t-y}{h_n}\right) dH_1^*(y) - f(t) \\ &= \frac{1}{h_n}\int K\left(\frac{t-y}{h_n}\right) f(y)dy - f(t) \\ &= \int K(s)\frac{(hs)^2}{2} f^{(2)}(\varsigma)ds \end{aligned}$$

Avec ς est entre t-sh et t. Donc

$$\left| E[\widetilde{f}_n(t)] - f(t) \right| \leq \frac{(h)^2}{2} \sup_{t\in D} \left| f^{(2)}(t) \right| \int K(s)(s)^2 ds \tag{5.3}$$

Sous la condition donnée (R2, iii), on obtient le résultat.

Lemme 5.2.2. *Sous les hypothèses (R1, i) et R2-R3, on a*

$$\sup_{t\in D}\left|\widehat{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t)\right| = O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{nh_n^2}}\right)$$

Démonstration de Lemme (5.2.2) :

On observe que l'on peut avoir la décomposition suivante

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t)\right| &= \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i K\left(\frac{t-Z_i}{h_n}\right)\right|\left|\frac{(1-\widehat{F}_n(Z_i))}{C_n(Z_i)}-\frac{(1-F(Z_i))}{C(Z_i)}\right| \\ &= \frac{M}{h_n}\underbrace{\sup_{t\in D}\left|\frac{(1-\widehat{F}_n(t))}{C_n(t)}-\frac{(1-F(t))}{C(t)}\right|}_{T}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\end{aligned}$$

Piusque $T = O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right)$ (voir lemme 3 dans Sun et Zhou ([58], 1998)) avec l'utilisation du la loi de grand nombre sur la loi de censuré (voir la formule 4.28 dans Deheuvels et Einmahl (2000)), on a

$$\sup_{t\in D}\left|\widehat{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t)\right| \leq \frac{c}{h_n}\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right)$$

On conclut la preuve.

Lemme 5.2.3. *Sous les hypothèses (R1, i) et R2-R3, on a*

$$\sup_{t\in D}\left|\widetilde{f}_n(t)-E[\widetilde{f}_n(t)]\right| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right)$$

Démonstration de Lemme (5.2.3) :

Soit D est compact par le nombre finie d_n de l'intervalle cenrté de $t_1, ..t_{d_n}$ de longueur λ_n telle que $\lambda_n = h_n^{\gamma}$ où $\gamma > \frac{\beta+1}{\beta}$, et β est de Hölder. Comme D est borné, il existe une constant A tel que $d_n\lambda_n \leq A$. Maintenant, on pose $J(t) = \arg\min_{j=1,\dots,d_n}|t-t_j|$. Ainsi, nous avons la décomposition suivant :

$$\begin{aligned}\sup_{t\in D}\left|\widetilde{f}_n(t)-E[\widetilde{f}_n(t)]\right| &\leq \max_{j=1,\dots,d_n}\sup_{t\in D}\left|\widetilde{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t_{J(t)})\right| \\ &+ \max_{j=1,\dots,d_n}\left|\widetilde{f}_n(t_{J(t)})-E[\widetilde{f}_n(t_{J(t)})]\right| \\ &+ \max_{j=1,\dots,d_n}\sup_{t\in D}\left|E[\widetilde{f}_n(t_{J(t)})]-E[\widetilde{f}_n(t)]\right| \\ &= T'+T''+T''' \qquad (5.4)\end{aligned}$$

Concernant les deux termes T' et T"', avec l'hypothèse (R2), on a

$$T' \leq \frac{c}{L(a)\overline{G(b)}}\lambda_n^{\beta}h_n^{-1-\beta}$$

Sous la condition sur λ_n, on obtient

$$T' = 0(1) \qquad p.s. \qquad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{5.5}$$

Pour le T”, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left[\max_{j=1,\dots,d_n}\left|\widetilde{f}_n(t_{J(t)}) - E[\widetilde{f}_n(t_{j(t)})]\right| > \epsilon\right] \leq d_n\mathbb{P}\left[\left|\widetilde{f}_n(t_{J(t)}) - E[\widetilde{f}_n(t_{j(t)})]\right| > \epsilon\right] \tag{5.6}$$

Pour tout $i \geq 1$, on pose

$$\Delta_i(t) = \frac{\mu}{h_n}\left[\frac{\delta_i}{L(Z_i)\overline{G}(Z_i)}K\left(\frac{t - Z_i}{h_n}\right) - \mathbb{E}\left[\frac{\delta_1}{L(Z_1)\overline{G}(Z_1)}K\left(\frac{t - Z_1}{h_n}\right)\right]\right] \tag{5.7}$$

Sous l'hypothèse (R2), la variable aléatoire $\Psi_i(t_{J(t)}) = nh_n\Delta_i(t_{J(t)})$ sont centrés et bornées par $\dfrac{2\mu}{L(a)\overline{G}(b)}M < \infty$. Ensuite, on applique l'inégalité de Höeffding (voir Shorack et Wellner, (([57], 1986), p. 855)), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\max_{j=1,\dots,d_n}\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(t_{J(t)})\right| > \epsilon\right] &= \mathbb{P}\left[\max_{j=1,\dots,d_n}\left|\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(t_{J(t)})\right| > nh_n\epsilon\right] \\ &\leq \exp(-\epsilon^2 n^2 h_n^2 c)\end{aligned}$$

Où c est une constante positive dépendant uniquement sur M, μ , L (a) et $\overline{G}(b)$, alors (5.6) devient

$$\mathbb{P}\left[\max_{j=1,\dots,d_n}\left|\widetilde{f}_n(t_{J(t)}) - E[\widetilde{f}_n(t_{J(t)})]\right| > \epsilon\right] \leq A(nh_n)^{-\gamma}n^{\gamma - c\epsilon^2 n^2 h_n^2/\log n} \tag{5.8}$$

Avec (R1, i), ce qui donne que (5.8) est le terme général d'un série convergente. Ensuite, par le lemme Borel-Cantelli([52], 2000), le premier terme de (5.8) tend vers zéro presque sûrement. Si non, si on remplace ϵ par $\epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}$, pour quelque $\epsilon_0 > 0$ dans toutes les étapes du lemme, on a

$$\sqrt{\frac{nh_n}{\log n}}T'' = O(1) \qquad p.s. \tag{5.9}$$

En combinant avec (5.5), la preuve du lemme est compléte.

5.2.2 Normalité asymptotique

Théorème 5.2.2. *Supposons que les hypothèses R1 à R3 sont vérifiées, alors on a*

$$\sqrt{nh_n^3}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \tag{5.10}$$

où $\xrightarrow{D}$ *dénote la convergence dans la distribution et*

$$\sigma^2 = \frac{\mu f(\theta)}{\overline{G}(\theta)L(\theta)[f^{(2)}(\theta)]^2}\int_{\mathbb{R}}[K^{(1)}(r)]^2 dr$$

Démonstration :

Supposons maintenant que la fonction de densité $f(.)$ est unimodale à θ. Sous l'hypothèse (R4), on a

$$f^{(1)}(.) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(2)}(.) < 0$$

De même, on a

$$\widehat{f}_n^{(1)}(\widehat{\theta}_n) = 0 \quad \text{et} \quad \widehat{f}_n^{(2)}(\widehat{\theta}_n) < 0$$

Par le développement de Taylor, on obtient

$$0 = \widehat{f}_n^{(1)}(\widehat{\theta}_n) = \widehat{f}_n^{(1)}(\theta) + (\widehat{\theta}_n - \theta)\widehat{f}_n^{(2)}(\overline{\theta}_n)$$

Où $\overline{\theta}_n$ est compris entre $\widehat{\theta}_n$ et θ ce qui donne que

$$\widehat{\theta}_n - \theta = -\frac{\widehat{f}_n^{(1)}(\theta)}{\widehat{f}_n^{(2)}(\overline{\theta}_n)} \tag{5.11}$$

Nous avons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
\sqrt{nh_n^3}(\widehat{\theta}_n - \theta) &= \sqrt{nh_n^3}\frac{\widehat{f}_n^{(1)}(\theta) - \widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)}{\widehat{f}^{(2)}(\overline{\theta}_n)} \\
&+ \sqrt{nh_n^3}\frac{\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta) - \mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)]}{\widehat{f}^{(2)}(\overline{\theta}_n)} \\
&+ \sqrt{nh_n^3}\frac{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)]}{\widehat{f}^{(2)}(\overline{\theta}_n)} \\
&= \frac{A_1 + A_2 + A_3}{\widehat{f}^{(2)}(\overline{\theta}_n)}
\end{aligned}$$

Donc, il suffit de montrer que $A_i \to 0$ pour $(i = 1, 3)$, $\quad A_2$ est normalement asymptotique et $\widehat{f}_n^{(2)}(\overline{\theta}_n)$ converge en probabilité vers $f^{(2)}(\theta)$.

Lemme 5.2.4. *Sous les hypothèses R1 à R3, on a*

$$A_1 \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

Preuve :

On a

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \sqrt{nh_n^3}\left|\frac{1}{nh_n^2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_i}{h_n}\right)\left(\frac{(1-\widehat{F}_n(Z_i))}{C_n(Z_i)} - \frac{(1-F(Z_i))}{C(Z_i)}\right)\right| \\
&= \underbrace{\sqrt{nh_n}\sup_{t\in D}\left|\frac{(1-\widehat{F}_n(t))}{C_n(t)} - \frac{(1-F(t))}{C(t)}\right|}_{I}\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\left|K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_i}{h_n}\right)\right|
\end{aligned}$$

Pour tout $\epsilon > 0$ et sous (R2), on a

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\left|K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_i}{h_n}\right)\right| > \epsilon\right] \leq \frac{1}{nh_n\epsilon}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left|K\left(\frac{\theta - Z_i}{h_n}\right)\right|\right) \to \frac{f(\theta)}{\epsilon\mu}\int_{\mathbb{R}}\left|K^{(1)}(r)\right|dr < \infty$$

Puisque $C(a) > 0$, $I = O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right)$ (voir lemme 3 dans Sun et Zhou ([58], 1998)), on a $|A_1| = 0\left(\sqrt{h_n \log\log n}\right)$, qui tend vers zéro sous (R1, (i,ii))

Lemme 5.2.5. *Sous les hypothèses (R1, ii) et R2-R3, nous avons*

$$A_3 \to 0 \qquad quand \qquad n \to \infty$$

Preuves : On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)] &= \frac{1}{h_n^2}\mathbb{E}\left[\frac{\mu\delta_1}{L(Z_1)\overline{G}(Z_1)}K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_1}{h_n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{h_n^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu}{L(v)\overline{G}(v)}K^{(1)}\left(\frac{\theta - v}{h_n}\right)dH_1^*(y) \\
&= \frac{1}{h_n^2}\int_{\mathbb{R}}K^{(1)}\left(\frac{\theta - v}{h_n}\right)f(v)dv
\end{aligned}$$

Sous les hypothèses (R2) à (R3) et l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)] &= \frac{1}{h_n}\int_{\mathbb{R}}K\left(\frac{\theta - v}{h_n}\right)f^{(1)}(v)dv \\
&= \int_{\mathbb{R}}K(r)f^{(1)}(\theta - rh_n)dr
\end{aligned}$$

Par le développement de Taylor de $f^{(1)}(.)$ au voisinage de θ et d'aprés l'hypothèse (R2), on obtient

$$\sqrt{nh_n^3}\mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)] = \sqrt{nh_n^7}\int_{\mathbb{R}}r^2K(r)f^{(3)}(\theta^*)dr$$

Où θ^* est située entre $\theta - rh_n$ et θ, avec les hypothèeses (R1,(ii)) et (R2)-(R3), on conclut

$$A_3 \to 0 \qquad p.s. \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

Lemme 5.2.6. *Sous les hypothèses (R1, ii) et R2-R3, on a*

$$Var[A_2] \to \frac{\mu f(\theta)}{\overline{G}(\theta)L(\theta)}\int_{\mathbb{R}}[K^{(1)}(r)]^2dr \quad quand \quad n \to \infty$$

Preuves on a

$$\begin{aligned}
Var[A_2] &= nh_n^3 Var[\widetilde{f}_n^{(1)}(\theta)] \\
&= \frac{1}{h_n}\mathbb{E}\left[\frac{\mu^2\delta_1}{L^2(Z_1)\overline{G}^2(Z_1)}(K^{(1)})^2\left(\frac{\theta - Z_1}{h_n}\right)\right] \\
&- \frac{1}{h_n}\left\{\mathbb{E}\left[\frac{\mu\delta_1}{L(Z_1)\overline{G}(Z_1)}K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_1}{h_n}\right)\right]\right\}^2 \\
&= \Theta_1 - \Theta_2
\end{aligned}$$

Le premier terme

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{1}{h_n}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2}{L^2(y)\overline{G}^2(y)}(K^{(1)})^2\left(\frac{\theta-y}{h_n}\right)dH_n^*(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu}{L(\theta-rh_n)\overline{G}(\theta-rh_n)}(K^{(1)})^2(r)f(\theta-rh_n)dr
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Encore, d'aprés la formule de Taylor on a

$$\Theta_1 = \mu f(\theta)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{L(\theta-rh_n)\overline{G}(\theta-rh_n)}(K^{(1)})^2(r)dr + 0(1)$$

Ensuite, puisque G (.) et L (.) sont continus, sous (R2)-(R3), on a

$$\Theta_1 = \frac{\mu f(\theta)}{\overline{G}(\theta)L(\theta)}\int_{\mathbb{R}}[K^{(1)}(r)]^2dr + 0(1)$$

D'autre part, par le lemme (5.2.5), on obtient

$$\Theta_2 = \frac{A_3^2}{n} \to 0 \quad \text{quand} \quad n\to\infty$$

Finallement,

$$Var[A_2] \to \frac{\mu f(\theta)}{\overline{G}(\theta)L(\theta)}\int_{\mathbb{R}}[K^{(1)}(r)]^2dr \quad \text{quand} \quad n\to\infty$$

Lemme 5.2.7. *Sous les hypothèses (R1, i) et (R2)-(R3), on a*

$$\sup_{t\in D}\left|\widehat{f}_n^{(2)}(t) - f^{(2)}(t)\right| \to 0 \quad \textit{quand} \quad n\to\infty$$

Preuves : On a

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}_n^{(2)}(t) - f^{(2)}(t)\right| &= \left|\widehat{f}_n^{(2)}(t) - \widetilde{f}_n^{(2)}(t)\right| + \left|\widetilde{f}_n^{(2)}(t) - \mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(2)}(t)]\right| + \left|\mathbb{E}[\widetilde{f}_n^{(2)}(t)] - f^{(2)}(t)\right| \\
&= \gamma_{1,n}(t) + \gamma_{2,n}(t) + \gamma_{3,n}(t)
\end{aligned}$$

Lemme 5.2.8. *Sous les hypothèses (R1, i) et (R2)-(R3), on a le lemme suivant :*

$$\sup_{t\in D}\gamma_{1,n}(t) \to 0 \quad \textit{quand} \quad n\to\infty$$

Preuves

On a

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in D}\gamma_{1,n}(t) &\le \frac{1}{nh_n^3}\sum_{i=1}^n\left|\delta_i K^{(2)}\left(\frac{t-Z_i}{h_n}\right)\left(\frac{(1-\widehat{F}_n(Z_i))}{C_n(Z_i)} - \frac{(1-F(Z_i))}{C(Z_i)}\right)\right| \\
&\le \frac{1}{h_n^2}\underbrace{\sup_{t\in D}\left|\frac{(1-\widehat{F}_n(t))}{C_n(t)} - \frac{(1-F(t))}{C(t)}\right|}_{W}\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^n K^{(2)}\left(\frac{t-Z_i}{h_n}\right)
\end{aligned}$$

Sous le lemme (5.2.5), l'hypothèse (R2), pour tout $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\left|K^{(2)}\left(\frac{\theta - Z_i}{h_n}\right)\right| > \epsilon\right] \leq \frac{1}{nh_n\epsilon}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left|K^{(2)}\left(\frac{\theta - Z_i}{h_n}\right)\right|\right) \to \frac{f(\theta)}{\epsilon\mu}\int_{\mathbb{R}}\left|K^{(2)}(r)\right|dr < \infty$$

De la même manière avec (R1, i) on obtient le résultat.

Lemme 5.2.9. *Sous les hypothèses (R2) et (R3), on a*

$$\sup_{t\in D}\gamma_{2,n}(t) \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

Preuves

Par le double intégration par parties et par le changement de variable, on résulte comme le lemme (5.2.1), on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{t\in D}\gamma_{2,n}(t) &= \sup_{t\in D}\left|\int_{\mathbb{R}} K(r)f^{(2)}(t - rh_n)(t) - f^{(2)}(t)\right| \\ &= 0(h_n^2)\end{aligned}$$

Lemme 5.2.10. *Sous les hypothèses (R1, i),(R2) et (R3), on a*

$$\sup_{t\in D}\gamma_{3,n}(t) \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

Preuve

On suit les mêmes étapes et les mêmes arguments du lemme (5.2.3), par le compact D et le changement de variable de $\Delta_i(t)$. On pose

$$\begin{aligned}\Lambda_i(t) &= \frac{\mu}{nh_n^3}\left[\frac{1}{L(Z_i)\overline{G}(Z_i)}K^{(2)}\left(\frac{t - Z_i}{h_n}\right) - \mathbb{E}\left[\frac{1}{L(Z_i)\overline{G}(Z_i)}K^{(2)}\left(\frac{t - Z_i}{h_n}\right)\right]\right] \\ &= (nh_n^3)^{-1}V_i(t)\end{aligned}$$

Ceci est compléter la preuve du lemme.

Afin de réaliser la preuve, on observe quand a lorsque n assez grand

$$\left|\widehat{f}_n^{(2)}(\overline{\theta}_n) - f^{(2)}(\theta)\right| \leq \sup_{t\in\mathcal{D}}\left|\widehat{f}_n^{(2)}(\overline{t}_n) - f^{(2)}(t)\right| + \left|\widehat{f}^{(2)}(\overline{\theta}_n) - f^{(2)}(\theta)\right|$$

Avec le lemme (5.2.7) et l'hypothèse (R3), on obtient le résultat

Maintenant, la dernière étape du théorème (5.2.1) qui a été montrer par la condition Berry-Esséen pour A_2 (voir Chow et Teicher (1997 ; p. 322). Pour cela, on pose

$$A_2 = \sum_{i=1}^{n}\Upsilon_{in}(\theta)$$

Où

$$\Upsilon_{in}(\theta) = \frac{\mu}{\sqrt{nh_n}}\left\{\frac{\delta_i}{L(Z_i)\overline{G}(Z_i)}K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_i}{h_n}\right) - \mathbb{E}\left[\frac{\delta_1}{L(Z_1)\overline{G}(Z_1)}K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_1}{h_n}\right)\right]\right\}$$

Ensuite, nous avons

Lemme 5.2.11. *Sous les hypothèses (R2) et (R3), on a*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|\Upsilon_{i,n}(\theta)|^3] < \infty$$

Preuves

En appliquant l'inégalité C_r (voir Loève (([38], 1963), p.155), donc

$$\mathbb{E}[|\Upsilon_{i,n}|^3] \leq 4(nh_n)^{-\frac{3}{2}} \left\{ \mathbb{E}\left[\left| \frac{\mu\delta_1}{L(Z_1)\overline{G}(Z_1)} K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_1}{h_n}\right) \right|^3 \right] + \left| \mathbb{E}\left[\frac{\mu\delta_1}{L(Z_1)\overline{G}(Z_1)} K^{(1)}\left(\frac{\theta - Z_1}{h_n}\right) \right] \right| \right\} \tag{5.13}$$

Les deux termes de (5.13) sont finis sous (R1)-(R3), en suite

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|\Upsilon_{i,n}|^3] = O(nh_n^3)^{-\frac{1}{2}} = O(1)$$

Ceci termine la preuve du lemme (5.2.11) et celle du théorème (5.2.2).

5.3 Cas de mélange

On généralise les résultats du cas précédent à des observations dépendants. Pour cela, on garde les mêmes notations que celles dans la section précédente. Cependant, pour ce cas là, on a besoin les hypothèses suivantes :

Hypothèses

Dans ce qui suit, on suppose que $a_L \leq a_H$, $b_L \leq b_H$ et $D = [a, b]$ est un compact tels que $D \subset D_0 = \{t : t \in [a_H, b_H]\}$.

- A1 Sur le paramètre de lissage h_n
  - (i). $\sqrt{\frac{\log \log n}{n}} = O(h_n^3)$
  - (ii).lim $\frac{nh_n^{(\nu+4)/(\nu-4)}}{(\log n)^{\frac{\nu+1}{\nu-4}} (\log \log n)^{\frac{6}{\nu-4}}} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ et ν est comme A3.
- A2. La fonction de la densité K est satisfait si :
  - (i) K est trois fois différentiable avec un support compact sur $\mathbb{R}$;
  - (ii) K et $K^{(2)}$ sont des fonctions Lipschitzienne continues
  - (iii) $\int_{\mathbb{R}} tK(t)dt = 0$, $\int_{\mathbb{R}} t^2K(t)dt < \infty$
- A3.$(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de α-mélange de variable aléatoire, avec le coefficient $\alpha(n) = O(n^{-\nu})$ pour $\nu > 4$
- A4. La densité de probabilité f (.) est différentiable jusqu'à l'ordre 3 et $f^{(2)}(.)$ ne disparaître
- A5. La densité conjointe $f_{1j}(.,.)$ de (Y_1, Y_j) existe pour tout $M > 0$

$$\sup_{r,t} |f_{1j}(r, t) - f(r)f(t)| \leq M < \infty$$

– A6. Le mode vérifié la propriété suivante :

pour tout $\epsilon > 0$ et t, il existe $\eta > 0$ tel que $|\theta - t| \geq \epsilon$ implique $|f(\theta) - f(t)| \geq \eta$.

5.3.1 Convergence presque sûre

Proposition 5.3.1. *Sous les hypothèses (A1) à (A5), on a*

$$\sup_{t\in D} |\widehat{f}_n(t) - f(t)| = O\Bigg(\max \left(\left(\frac{\log n}{nh_n} \right)^{1/2}, h_n^2 \right) \Bigg) \quad p.s. \quad quand \quad n \to \infty$$

Théorème 5.3.1. *Sous les hypothèses de la proposition (5.3.1) et A6, on a*

$$\widehat{\theta}_n - \theta = O\Bigg(\max \left(\left(\frac{\log n}{nh_n} \right)^{1/4}, h_n \right) \Bigg) \quad p.s. \quad quand \quad n \to \infty$$

Preuve de la Proposition (5.3.1).

La preuve est basée sur les lemmes suivants :

Lemme 5.3.1. *Sous les hypothèses (A1, i), (A2) et (A4), on a*

$$\sup_{t\in D} \left| \widehat{f}_n(t) - \widetilde{f}_n(t) \right| = O(h_n^2)$$

Démonstration du lemme (5.3.1)

On observe que l'on peut avoir la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
\left| \widehat{f}_n(t) - \widetilde{f}_n(t) \right| &= \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} \left| \delta_i K\left(\frac{t - Z_i}{h_n} \right) \right| \left| \frac{(1 - \widehat{F}_n(Z_i))}{C_n(Z_i)} - \frac{(1 - F(Z_i))}{C(Z_i)} \right| \\
&\leq \frac{M}{h_n} \underbrace{\sup_{t\in D} \left| \frac{(1 - \widehat{F}_n(t))}{C_n(t)} - \frac{(1 - F(t))}{C(t)} \right|}_{T} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \\
&\leq \frac{M}{h_n} \left[\sup_{t\in D} \left| \frac{\widehat{F}_n(t) - F(t)}{C_n(t)} \right| + \sup_{t\in D} \left| \frac{1 - F(t)}{C(t)C_n(t)} (C_n(t) - C(t)) \right| \right] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \\
&\leq \frac{M}{h_n} \left[\frac{1}{C_n(a)} \underbrace{\sup_{t\in D} \left| \widehat{F}_n(t) - F(t) \right|}_{I} + \frac{1 - F(a)}{C(a)C_n(a)} \underbrace{\sup_{t\in D} |(C_n(t) - C(t))|}_{J} \right] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i
\end{aligned}$$

Puisque $C(a) > 0$, $I = O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}} \right)$ (voir le lemme 3 dans Chen and Dai ([12], 2003)) et $J = O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}} \right)$, avec la loi forte des grand nombres ([28], 1992) sur la loi de censure (voir la formule 4.28 de Cai and Roussas ([9], 1992)), on a

$$\sup_{t\in D} \left| \widehat{f}_n(t) - \widetilde{f}_n(t) \right| \leq \frac{c}{h_n} \left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}} \right)$$

Où c est une constante positive. Avec l'hypothèse (A1, i), on conclut la preuve.

Lemme 5.3.2. *Sous les hypothèses (A1)-(A5),on a*

$$\sup_{t\in D}\left|\widetilde{f}_n(t)-E[\widetilde{f}_n(t)]\right| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right)$$

Démonstration

Soit D est un compact par le nombre finie d_n dans l'intervalle centré de $t_1, ..t_{d_n}$ de longueur λ_n telle que $\lambda_n = (n^{-1}h_n^3)^{1/2}$. Comme D est borné, il existe une constante A tel que $d_n\lambda_n \leq A$. Maintenant, on pose $J(t) = \arg\min_{j=1,\dots,d_n}|t-t_j|$. Ainsi, nous avons la décomposition suivant :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in D}\left|\widetilde{f}_n(t)-E[\widetilde{f}_n(t)]\right| &\leq \max_{j=1,\dots,d_n}\sup_{t\in D}\left|\widetilde{f}_n(t)-\widetilde{f}_n(t_{J(t)})\right| \\
&+ \max_{j=1,\dots,d_n}\left|\widetilde{f}_n(t_{J(t)})-E[\widetilde{f}_n(t_{J(t)})]\right| \\
&+ \max_{j=1,\dots,d_n}\sup_{t\in D}\left|E[\widetilde{f}_n(t_{J(t)})]-E[\widetilde{f}_n(t)]\right| \\
&= I1+I2+I3 \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

D'aprés l'hypothèse (A2), on a

$$I1 \leq \frac{cM}{L(a)\overline{G}(b)}\lambda_n h_n^{-2}$$

Sur le choix de λ_n, on obtient

$$I1 = 0\left(\frac{1}{\sqrt{nh_n}}\right) \quad \text{p.s.} \quad \text{quand} \quad n\to\infty \qquad (5.15)$$

Pour I2, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left[\max_{j=1,\dots,d_n}\left|\widetilde{f}_n(t_{J(t)})-E[\widetilde{f}_n(t_{j(t)})]\right| > \epsilon\right] \leq d_n\mathbb{P}\left[\left|\widetilde{f}_n(t_{J(t)})-E[\widetilde{f}_n(t_{j(t)})]\right| > \epsilon\right] \qquad (5.16)$$

Pour tout $i \geq 1$, on pose

$$\Delta_i(t) = \frac{\mu}{h_n}\left[\frac{\delta_i}{L(Z_i)\overline{G}(Z_i)}K\left(\frac{t-Z_i}{h_n}\right)-\mathbb{E}\left[\frac{\delta_1}{L(Z_1)\overline{G}(Z_1)}K\left(\frac{t-Z_1}{h_n}\right)\right]\right] \qquad (5.17)$$

Sous l'hypothèse (A2), les variables aléatoires $V_i(t_{J(t)}) = nh_n\Delta_i(t_{J(t)})$ sont centrées et bornées avec $\dfrac{2\mu}{L(a)\overline{G}(b)}M < \infty$. Ensuite, on applique l'inégalité de Fuk-Nagaev's (see Rio ([52], 2000), p. 87, 6.19b), $\forall\epsilon > 0$ et $r > 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\max_{j=1,\dots,d_n}\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_i(t_{J(t)})\right| > \epsilon\right] &= \mathbb{P}\left[\max_{j=1,\dots,d_n}\left|\sum_{i=1}^{n}V_i(t_{J(t)})\right| > nh_n\epsilon\right] \\
&\leq A\lambda_n^{-1}\left[\frac{r}{n}\left(\frac{2r}{nh_n\epsilon}\right)^{\nu+1}+\left(1+\frac{\epsilon^2n^2h_n^2}{rS_n}\right)^{-r/2}\right] \\
&= \Upsilon_1+\Upsilon_2
\end{aligned}$$

Où

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |cov(V_i, Vj)| \tag{5.18}$$

Tout d'abord, on a

$$S_n = \sum_{i \neq j} |cov(V_i, Vj)| + nVar(V_1) = S_n^* + nVar(V_1) \tag{5.19}$$

En utilisant l'hypothèse (A2) et par un changement de variables, on obtient

$$\begin{aligned} nVar(V_1) &\leq n\mathbb{E}\left[\frac{\mu^2\delta_1}{L^2(Z_1)\overline{G}^2(Z_1)} K^2\left(\frac{t_{J(t)} - Z_1}{h_n}\right)\right] \\ &\leq \frac{nh_n\mu}{L(a)\overline{G}(b)} \int_{\mathbb{R}} K^{(2)}(s) f(t_{J(t)} - sh_n) ds \\ &= O(nh_n) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Sous (A3), on obtient

$$\begin{aligned} |cov(V_i, Vj)| &= |\mathbb{E}(V_i V_j)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{t_{J(t)} - r}{h_n}\right) K\left(\frac{t_{J(t)} - s}{h_n}\right) \times f_{1j}(r,s) dr ds \right. \\ &- \left. \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{t_{J(t)} - r}{h_n}\right) f(r) dr \times \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{t_{J(t)} - s}{h_n}\right) f(s) ds \right| \\ &\leq h_n^2 \int_{\mathbb{R}} K(m)K(m') \times |f(t_{J(t)} - mh_n, t_{J(t)} - m'h_n) \\ &- f(t_{J(t)} - mh_n) f(t_{J(t)} - m'h_n)| dm dm' \end{aligned}$$

D'aprés l'hypothèse (A5),

$$|cov(V_i, Vj)| = O(h_n^2) \tag{5.21}$$

D'après Masry ([42], 1986), on définit

$E_1 = \{(i,j)$ tel que $1 \leq |i-j| \leq \varphi_n\}$ et $E_2 = \{(i,j)$ tel que $\varphi_n + 1 \leq |i-j| \leq n-1\}$

où $\varphi_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on peut écrire

$$S_n^* = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

où ϑ_1 et ϑ_2 sont les sommes des covariances sur E_1 et E_2 respectivement. Donc on a d'aprés (5.21)

$$\vartheta_1 = O(nh_n^2\varphi_n)$$

Pour le seconde terme, on utilise l'inégalité de covariance de Davydov pour le processus de mélange (voir Rio, ([52], 2000), formule 1.12a, page 10),

$$\forall i \neq j, \qquad |cov(V_i, Vj)| \leq c\alpha(|i-j|) \tag{5.22}$$

Ensuite, on obtient par l'hypothèse (A3)

$$\vartheta_2 = O(n\varphi_n^{1-\nu})$$

Le choix de $\varphi_n = (h_n^{-2/\nu})$ permet d'écrire

$$S_n^* = O(nh_n^{(\nu-1)2/\nu}) \tag{5.23}$$

Enfin, d'aprés (A3) avec (5.20) et (5.23)

$$S_n = O(nh_n) \tag{5.24}$$

Par

$$\epsilon = \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{n}}, \quad \text{et} \quad r = c\log n(\log\log n)^{1/\nu} \tag{5.25}$$

On a

$$\Upsilon_1 = O\biggl(\lambda_n^{-1}n^{(1-\nu)/2}h_n^{-(\nu+1)/2}(\log n)^{(\nu-1)/2}(\log\log n)\epsilon_0^{-(\nu+1)}\biggr)$$

Sous (A1, ii),

$$\Upsilon_1 = 0\biggl(n^{-1}\log^{-1} n(\log\log^{-2} n)\biggr)$$

qui est le terme général d'une série convergente de Bertrand. En utilisant le développement de Taylor de $\log(x+1)$ et (5.25), on a

$$\begin{aligned} \Upsilon_2 &= A_2 n^{1/2}h_n^{-3/2}\exp\left[-\frac{r}{2}\log\left(1+\frac{nh_n\epsilon_0^2\log n}{rS_n}\right)\right] \\ &\leq ch_n^{-3/2}n^{\frac{1-\epsilon_0^2}{2}} \end{aligned} \tag{5.26}$$

De la même manière, on peut choisir ϵ_0 tel que Υ_2 soit le terme général des séries convergentes. Ainsi, $\sum_{n\geq 1}(\Upsilon_1 + \Upsilon_2) < \infty$, et on applique le lemme Borel-Cantelli([52], 2000).D'où le résultat.

5.4 Exemple

Au cours d'une étude sur les fumeurs il est intéressant de savoir comment le temps de survie (la variable d'intérêt) est influencé par l'âge auquel la personne a commencé à fumer. Les personnes sont suivies pendant une certaine période de temps. Un fumeur qui décédé avant le début de l'étude est systématiquement exlu de l'échantillon et donne lieu a ce qu'on appelle une observation tronquée à gauche. En revanche, un fumeur non décédé avant la fin de l'étude donne lieu a ce qu'on appelle une observation censurée à droite.

Conclusion

L'apport de notre étude concerne les deux cas indépendant et dépendant qui donne une expression explicite des termes de biais et de la variance qui caractérise par les covariances de l'estimateur construit.

Dans un premier, nous nous intéréssons à l'estimation du mode par la méthode du noyau, lorsque la variable explicative est réelle. On a utilisé une idée trés différente de l'estimation de noyau locale est celle de la densité lorsque la largeur du paramêtre de lissage unique h est remplacée par n largeurs différents dépend de i tel que $i = \overline{i, n}$. L'intérêt est de construire de nouveaux noyaux placés aux points des données obserées mais permet que le lissage du noyau d'un point à un autre. De plus, le bon la perfornonce de l'estimateur proposé est testée via une étude de simulation et il est montré que l'estimateur proposé est plus efficace que l'estimateur de Parzen 1962 et il est amélioré à mesure que la taille de l'échantillon augmente, l'avantage variée de ce mémoire est qu'on a spécifique à des données manquantes ou incomplèles est trés vaste et suscité beaucoup d'intêt que parmi les staticiens ces derniees années l'attitude vis-àvis de ce type de données a longtemps été soit de les éliminier, soit de minimiser le mauvais impact qu'elles pour aient avoir sur des procédurs statistique adaptées à des données complètes.

Dans le domaine des durées de survie, les données sont souvent incompléts à cause de deux phénomènes destrincts : la censure et la troncateure.

Dans leur acception la plus générale, ces deux notions ont la signification suivante. Premièrement, c'est la troncature, on observe X que si elle appartient à un sous ensemble B de ses valeurs possible. On dit que X est tronquée par B. Deuxièment, il s'agit là de la censure même dans le cas où X appartient à B, on observe pas X complètement, on sait seulement de cette variable qu'elle appartient à un sous ensemble A de B,on dit qu'elle est censurée par A.

Les vitesses des conversences obtenues sont invensibles aux corrélations des observations. Cependant, certains hypothèses supplémentaires ont été introduite a fin de prendre en compte la dépendante des observations

Bibliographie

[1] Abraham, C. G. Biau and B. Cadre, Simple estimation of the mode of a multivariate density. Canad. J. Statist. 31 (2003), 23-34.

[2] Abraham, C., Biau, G. et Cadre, B. (2004). On the asymptotic properties of a simple estimate of the mode. ESAIM, Probab. Statist., 8 : 1-11.

[3] Abramson,Ian S. (1982). On Bandwidth Variation in Kernel Estimates-A Square Root Law. *Volume* 10, *Number* 4 (1982), 1217-1223.

[4] Alexandre Lyapunov, The general problem of the stability of motion, CRC Press, 1992

[5] Anderson PK, Borgan, Gill RD et Keiding N (1993) .Statistical model based on counting procecesses. New-York : Springer-Velrag.

[6] Bickel, D.R. (2002). Robust estimators of the mode and skewness of continuous data. Computational Statistics and Data Analysis 39 : 153-163.

[7] Bickel, D.R. (2003). Robust and efficient estimation of the mode of continuous data : The mode is a viable measure of central tendency. Journal of Statistical Computation and Simulation 73 : 899-912.

[8] Bickel, D.R. et Frühwirth, R. (2006). On a fast robust estimator of the mode : Comparaisons on to other robust estimators with applications. Computat. Statist. Data Anal., 50 : 3500-3530.

[9] Cai, Z. et Roussas, G. G. (1992). Uniform strong estimation under α-mixing, with rates, Statist. Probab. Lett., 15 : 47-55.

[10] Cai, Z., Roussas, G. G. (1998). Kaplan-Meier estimator under association. J. Multivariate Anal. 67 : 318-34

[11] K. Chen, M.T. Chao and S.W. Lo, On strong uniform consistency of the Lynden- Bell estimator for truncated data. Ann. Statist. 23 (1995), 440-449.

[12] Chen, Q., Dai, Y.(2003). Kernel estimation of higher derivatives of density and hazard rate function for truncated and censored dependent data. J. Acta. Math. Scientia 23B, 477-486.

[13] Chernoff, H., (1964). Estimation of the mode. Ann. Instit. Statist. Math., 16 : 31-41.

[14] Dabo-Niang,S. F. Ferraty and P. Vieu, Estimation du mode dans un espace vectoriel semi-normé. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (2004), 659-662.

[15] Dalenues, T. (1965). The mode of a neglected statistical parameter. J. Roy. Statist. Soc. Ser. A., 128 : 110-117.

[16] Eddy, W.F. (1980). Optimum kernel estimators of the mode.Ann. Statist., 8 :870-882.

[17] Eddy, W.F. (1982). The asymptotic distributions of kernel estimators of the mode.Z. Wahrsch. Verw. Gebi ete, 59 :279-290.

[18] Ezzahrioui .M. and E. Ould-Saïd, Asymptotic normality of a nonparametric estimator of the conditional mode function for functional data. J. Nonparametr. Statist. J. 20 (2008), 3-18.

[19] M. Ezzahrioui and E. Ould-Saïd, Some asymptotic results of a nonparametric conditional mode estimator for functional time series data. (Under revision in Statistica Neerlandica).

[20] Feller.W.The general form of the so-called law of the iterated logarithme . Trans.Amer.Math.Soc.,54 :373-402,1943.

[21] Ferraty, F et Vieu, Ph. (2004). Modèle de régression pour variables aléatoires uni, multi et $\infty-$dimensionnées. Cours de DEA.

[22] Gannoun, A. et Saracco, J. (2002). A new proof of strong consistency of kernel estimation of density function and mode under random censorship. Statist. Probab. Lett., 59 : 61-66.

[23] Grenander, U. (1965). Some direct estimates of the mode. Ann. Math. Statist., 131- 138.

[24] Giné .E. and A. Guillou, Laws of iterated logarithm for censored data. Ann. Probab. 27 (1999), 2042-2067

[25] Giné .E. and A. Guillou, On consistency of kernel density estimators for randomly censored data : rates holding over adaptive intervals. Ann. Inst. H. Poincarée Probab. Statist. 37 (2001), 503-522.

[26] Giné .E. and A. Guillou, Rates of strong uniform consistency for multivariate ker- nelden-sity estimators. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 38 (2002), 907-921.

[27] Grund, B., Hall, P. (1995). On the minimization of L^p error in mode estimation. Ann. Statist. 9 : 2264-2284.

[28] G. R. Grimmett et D. R. Stirzaker, Probability and Random Processes, Oxford, Clarendon Press, 1992, 2e éd. (ISBN 0-19-853665-8), p. 271-285

[29] Gu M.G., Lai T.L. (1990) Functional laws of the iterated logarithm for the product- limit estimator of a distribution function under random censorship or truncation. Ann Probab 18 :160.189

[30] He .S. and G.L. Yang, Estimation of the truncation probability in the random trunca- tion model. Ann. Statist. 26 (1998), 1011-1028.

[31] Hermann, E., Ziegler, K. (2004). Rates of consistency for nonparametric estimation of the mode in absence of smoothness asumptions. Statist. probab. Lett. 68 : 359-368.

[32] Kaplan, E.L. et Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete obser- vations. J. Amer. Statist. Assoc., 53 : 457-481.

[33] Konakov, V.D. (1973). On the asymptotic normality of the mode of multidimensional distributions.Theory. Probab. Appl.,19 :794-799

[34] Koul, H., Susarla, V., Van Ryzin, J. (1981). Regression Analysis with randomly rightcensored data. Ann. Statist. 9 : 1276-1288.

[35] Lai TL, Ying Z. (1991) Estimating a distribution with truncated and censored data. Ann Stat 19 :417.442.

[36] Leclerc, J. et Pierre-Loti-Viau, D. (2000). Vitesse de convergence presque sûre de l'estimateur à noyau du mode.C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 331 :637-640.

[37] Lindeberg. J. W., Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung [archive], Mathematische Zeitschrift, 15 (1922) 211-225.

[38] Loève, M. (1963).. Probability theory. Springer-Verlag. New York.

[39] Louani, D. (1998). On the asymptotic normality of the kernel estimators of the density function and its derivatives under random censoring. Comm. Statist. Theory and Meth., 27 : 2909-2924.

[40] Louani .D. and E. Ould-Said, Asymptotic normality of kernel estimators of the conditional mode under strong mixing hypothesis. J. Nonparametr. Statist. 11 (1999), 413-442.

[41] Lynden-Bell, D. (1971). A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3CR quasars. Monthly Notices Roy. Astronom Soc., 155, 95.118.

[42] Masry, E. (1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent process. IEEE. Trans. Inform. Theory, 32 : 254-267.

[43] Mehra, K.L. Y.S. Ramakrishnaiah and P. Sashikala, Laws of iterated logarithm and related asymptotics for estimators of conditional density and mode. Ann. Inst. Statist. Math. 52 (2000), 630-645.

[44] Mokkadem, A., Pelletier, M. (2003). The law of iterated logarithm for the multivariate kernel mode estimator. ESAIM : Probab. Statist 7 : 1-21.

[45] Mokkaddem .A. and M. Pelletier, Moderate deviations for the kernel mode estimator and some applications. J. Statist. Plann. Inference 135 (2005), 276-299.

[46] Mokkaddem,A. M. Pelletier and J. Worms, A large deviations upper bound for the kernel mode estimator. Theory Probab. Appl. 50 (2006), 153-165.

[47] Nadaraja, E.A. (1965). On nonparametric estimation of density function and regression. Theory of Probability and its applications 10 : 186-190.

[48] Ould Saïd, E. et Cai, Z. (2005). Strong uniform consistency of non parametric estimation of the conditional mode function.J. Nonparametric. Statist., 17 :797-806.

[49] Ould-Said .E.and M. Lemdani, Asymptotic properties of the kernel estimators of the regression under random left truncation. Ann. Inst. Statist. Math. 58 (2006), 357-378

[50] Parzen,E. On estimation of a probability density function and mode. Ann. Math. Statist. 33 (1962), 1065-1076.

[51] Pranab, K.Sen and Julio, M. Singer., (1993). Large sample methods in statistics. Champion and Hall. Inc.

[52] Rio, E. (2000). Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépen- dants, Mathématiques et applications. Springer. New-York.

[53] Romano, J. (1988). On weak convergence and optimality of kernel density estimates of the mode. Ann. Statist. 16 : 629-647.

[54] Rosenblatt, M., (1956). Remarks on some non-parametric estimates of a density function. Annals of Mathematics and Statistics. 27. 832-837.

[55] Samanta, M. (1973). Nonparametric estimation of the mode of a multivariate density.South Africain Statist. J.,7 :109-117.

[56] Shi, X., Wu, Y., Miao, B. (2009). A note on the convergence rate of the kernel density estimator. Statist. probab. Lett. 79 : 1866-1871.

[57] Shorack, G.R. and Wellner, J.A. (1986). Empirical processes with applications to statistics. Wiley, New-York.

[58] Sun, L., Zhou, Y. (1998). Sequential con.dence bands for densities under truncated and censored data. Statist. Probab. Lett., 40, 31-41.

[59] Sun, L., Zhou, X. (2001). Survival function and density estimation for truncated dependent data. Statist. Probab. Lett. 52 :47-57.

[60] Talagrand,M.,(1996).New concentration inequalities in prodct spases.*Invent.Math,*.126 :50-563.

[61] Tsai, W.Y., Jewell, N.P., Wang, M.C. (1987). A note on the product limit estimator under right censoring and left truncation. J. Biometrika, 74, 883-886.

[62] vander Vaart .A.W. and J.A. Wellner, Weak Convergence and Empirical Processes. Springer, New York, 1996.

[63] Van Ryzin J. (1969) , On strong consistency of density estimates, Ann. Math. Statis. 40 1765.1772.

[64] Venter, J. (1967). On estimation of the mode. Ann. Math. Stat., 38 : 1446-1455.

[65] Vieu, P. (1996). A note on density mode function. Statist. Probab. Lett., 26 : 297- 307.

[66] Wang.Q.H.(2000).Sous inequalities for the kernal density estimation under rondom censuration p.J Non parametric.,12 :737-751

[67] Wang, M.C. N.P. Jewell and W.Y. Tsai, Asymptotic properties of the limit-product estimate under random truncation. Ann. Statist. 14 (1986), 1597-1805.

[68] Woodroofe, M. (1985). Estimating a distribution function with truncated data. Ann. Statist., 13 : 163-177.

[69] Yamato, H. (1971). Sequential estimation of a continuous probability density function and mode.Bull. Math. Statist. Jap.,14 :1-12.