République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Équations Différentielles Stochastiques de Volterra

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : ASSPA

par

Merzoug **A**rar [1]

Sous la direction de

Pr.A.Kandouci

Soutenu le 13/07/2018 devant le jury composé de

Dr.S. Rahmani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Pr.A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr.A. Bouaka	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr.L. Bousmaha	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : merzougarar5@gmail.com

Remerciement

Je souhaite avant tout remercier notre Dieu le clément et le miséricordieux de m'avoir donné le courage et la volonté de réaliser mon objectif.

Mes deuxièmes remerciements, et surtout les plus vifs, vont naturellement à mon encadreur Monsieur *KANDOUCI Abdeldjebbar* qui, par ses paroles, ses écrits, sa disponibilité, ses conseils et ses critiques, ont guidé mes réflexions et m'ont accompagnée pas à pas dans mon travail.

Je remercie Docteur **Saadia Rahmani** pour l'attention qu'il a manifesté à l'égard de ce mémoire, en s'engageant à en être la présidente de jury. De même, je suis grandement reconnaissante à Docteur **Aicha Bouaka** et Docteur **Lamia Bousmaha** de l'intérêt et du temps qu'ils ont bien voulu accorder à l'expertise de ce mémoire, en acceptant d'en être les examinatrices. Soutenir ce travail devant vous, qui m'avez tant appris tout au long de mon parcours universitaire est, pour moi, un privilège certain.

Je remercie également tous mes enseignants de département de Mathématiques sans oublier tous les responsables du LMSSA de m'avoir accueilli dans ce laboratoire dans lequel on a passé notre 4ième semestre.

Je suis particulièrement reconnaissante à mes trés chers parents pour leur soutien indéfectible au quotidien.

À tous ceux qui ont, de prés ou de loin, participé à l'élaboration de ce mémoire, et que je ne pourrai nommer ici, je vous remercie de votre sollicitude aussi minime qu'elle ait pu être.
À tous, merci !

Dédicace

Je dédie ce travail :

À celui ou celle qui m'a donné son affection et ses conseils durant toutes mes années d'études , en particuliers

A mes trés chèrs parents

Vous représentez pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

A la grande dame qui a tant sacrifié pour nous, *ma grande mère*. Ton prière et ton bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.

A mes très chers *frères* et mes très chères *soeurs* qui m'ont encouragé sur le long de mon parcour universitaire.

A tous les membres de ma famille , petits et grands, veuillez trouvez dans ce modeste travail l'expression de mon affection.

A tous mes collègues de Master 2 ASSPA. Et enfin, à tous ceux qui me *sont chers*.

Table des matières

Introduction générale

Les équations différentielles stochastiques de Volterra se posent dans de nombreuses applications telles que la finance mathématique, la biologie, etc. et au cours des 30 dernières années, la théorie des équations différentielles stochastiques de Volterra (ESV) a été développée dans diverses directions.
Nous étudions l'intégrale stochastique de l'équation de type Volterra

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) + \int_0^t b(t,s)X_s(\omega)ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s(\omega)\delta B_s(\omega) \tag{1}$$

avec Y , b et σ sont des fonntions données , b et σ sont déterministes , bornées et Y_t est stochastique n'est pas nécéssairement adapté. L'intégrale stochastique δB a le sens de Skorokhod. En général, il n'est pas nécessaire qu'un processus stochastique classique $X_t(\omega)$ vérifie cette équation.
Des techniques bien connues telles que la localisation, la perturbation et la transformation de coordonnées permettent de transférer les résultats de tels problèmes vers des équations intégrodifférentielles paraboliques sur des domaines lisses, (voir [[48], Chapitre I, Section 5]). La fonction b devrait être considérée comme un noyau $b(t) = e^{-\eta t}t^{\beta-1}/\Gamma(\beta); \eta \geq 0, \beta \in (0,2)$. L'équation(1) est une version stochastique abstraite des modèles déterministes mentionnés. L'approche stochastique des équations intégrales a récemment été utilisée en raison du fait que dans les applications, le niveau de précision d'un modèle déterministe donné ne semble pas toujours être modifié d'une manière significative lorsque la complexité du modèle augmente. Au lieu de cela, l'approche stochastique fournit de meilleurs résultats. Un exemple typique est l'utilisation des équations intégrales stochas-

tiques dans les modèles pluie-débit, (voir [22]).

Au cours des dernières années, il y a eu un intérêt considérable pour étudier le mouvement brownien fractionnaire (fBm) en raison de ses propriétés compactes telles que l'auto-similitude,incréments stationnaires, continuité Holderienne et dépendance à longue portée (quand $H > 1/2$), et aussi en raison de ses applications dans divers domaines scientifiques, y compris les télécommunications, la turbulence,traitement de l'image, finance et autres domaines. C'est un convenable généralisation du processus standard de Wiener. Certaines enquêtes et littératures complètes pourraient être trouvées dans Biagini et al [5], Hu [23], Mishura [31], Nualart [32] et Zahle [57]. Puisque B^H n'est ni un processus semimartingale ni un processus de Markov, sauf si $H = 1/2$, la théorie classique d'Itô n'est pas disponible quand on la traite. Il existe plusieurs approches pour définir une intégrale par rapport à fBm. Une possibilité d'utiliser l'intégrale de Skorokhod ou une intégrale de divergence introduite dans le paramétrage brownien fractionnaire dans Decreusefond et Ustunel [11].

Notre travail est divisé en trois chapitres ;

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons principalement au cas où Y_t n'est pas adapté. Dans ce cas, nous ne pouvons évidemment pas attendre à ce que X_t soit adapté et l'intégrale d'Itô dans l'équation n'est pas donc défini. Cependant, nous montrons qu'une solution unique existe dans les sens suivants :

- En tant que processus fonctionnel.
- En tant que bruit blanc généralisé fonctionnel (distribution Hida).

De plus, dans les deux cas, nous trouvons des formules des solutions explicites. Les formules sont similaires à celles du cas déterministe ($\sigma \equiv 0$), mais avec les produits Wick au lieu des produits ordinaires (point par point).

L'équation a encore un sens si nous remplaçons l'intégrale d'Itô par l'intégrale plus générale de Skorokhod :

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) + \int_0^t b(t,s)X_s(\omega)ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s(\omega)\delta B_s(\omega).$$

Dans le deuxième chapitre, nous nous étudions l'existence, l'unicité et la continuité de la solution des équations stochastiques différentielles de Volterra avec les noyaux singuliers et les coefficients non-Lipschitziens. Comme application, nous étudions ensuite les EDSs avec des intégrales fractionnaires.
On présente une syntaxe des traveaux de Protter [46] qui a étudié l'ESV régie par une semimartingale générale (pas nécessairement continue) et a résolu une conjecture de Berger et Mizel [4]. Ainsi que les traveaux de Pardoux et Protter [45] qui ont examiné l'anticipation des équations différentielles stochastiques de Volterra à l'aide du calcul de Malliavin.
Enfin, dans le troisième chapitre, nous allons fournir des exemples d'application sur les équations différentielles stochastiques de Volterra à la finance avec un exemple d'investissement optimal sur un marché financier modélisé par une équation de Volterra et un autre d'un investissement dans une production économique.

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles stochastiques de Volterra

1.1 Introduction

L'équation classique (déterministe) de Volterra du second type a la forme

$$X_t = Y_t + \int_0^t \gamma(t,s) X_s ds; \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

où Y_t, $\gamma(t,s)$ sont des fonctions, $T > 0$ est une constante donnée. Cette équation apparaît dans nombreuses applications, dont certaines sont décrites dans [16]. (Voir aussi [52] et l'exemple 1 ci-dessous). Supposons maintenant que le système est perturbé de manière aléatoire ou que les informations concernant la fonction $\gamma(t,s)$ sont insuffisantes / bruitées. Dans les deux cas, une formulation mathématique possible serait de mettre

$$\gamma(t,s) = b(t,s) + \sigma(t,s) \cdot W_s \tag{1.2}$$

où $b(t,s)$ et $\sigma(t,s)$ sont des fonctions déterministes et $W_s = W_s(\omega)\,;\, \omega \in \Omega$ (un espace de probabilité) indique un "bruit blanc" (voir les définitions ci-dessous). Nous permettons également à $Y_t = Y_t(\omega)$ d'être aléatoire. Cela donne - formellement - l'équation

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) + \int_0^t b(t,s) X_s(\omega) ds + \int_0^t \sigma(t,s) X_s(\omega) W_s(\omega) ds \tag{1.3}$$

où le dernier terme (en rouge) reste à définir.

Si Y_t est un processus stochastique adapté, il est naturel de supposer qu'une solution X_t de (1.3) doit également être adaptée, ce qui conduit à l'interprétation suivante de (1.3) :

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) + \int_0^t b(t,s)X_s(\omega)ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s(\omega)dB_s(\omega), \tag{1.4}$$

où le dernier terme désigne l'intégrale habituelle d'Itô et $B_t(\omega)$ le mouvement brownien dont la dérivée par rapport à t est $W_t(\omega)$ (au sens de la distribution). Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement au cas où Y_t n'est pas adapté. Dans ce cas, nous ne pouvons évidemment pas attendre à ce que X_t soit adapté et l'intégrale d'Itô dans (1.4) n'est pas donc définie.

Cependant, l'équation a encore un sens si nous remplaçons l'intégrale d'Itô par l'intégrale plus générale de Skorokhod :

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) + \int_0^t b(t,s)X_s(\omega)ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s(\omega)\delta B_s(\omega) \tag{1.5}$$

Remarque : L'intégrale de Skorokhod

$$\int_0^T Z_s(\omega)\delta B_s(\omega),$$

est définie pour tous les processus $Z_s(\omega)$ (adaptés ou non) tels que

$$\int_0^T \mathbb{E}[Z_s^2]ds + \sum_{m=1}^{\infty}(m+1)!\|\tilde{f}_m\|^2 < \infty. \tag{1.6}$$

Ici $\tilde{f}_m(t_1,...,t_m,t)$ est la symétrisation de $f_t^{(m)}(t_1,...,t_m)$ où $f_t^{(m)}$ est le terme de commande dans le développement du Chaos-Wiener-Itô de Z.

$$Z_t(\omega) = \sum_0^{\infty}\int_{R^m} f_t^{(m)}(t_1,...,t_m)dB_{t_1}...dB_{t_m}.$$

Si $Z_s(\omega)$ est adapté, l'intégrale de Skorokhod coïncide avec l'intégrale d'Itô [32]. Nous utiliserons (1.5) comme modèle mathématique pour une équation intégrale de Volterra perturbée de manière aléatoire, ou une équation intégrale de Volterra stochastique. Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution de (1.5). De plus, nous trouverons une formule de solution explicite. Il s'avère qu'en général (sans conditions fortes sur Y_t, b et σ) il n'existe pas de processus stochastique (classique) X_t satisfaisant (1.5). Cependant, nous allons prouver qu'une solution existe (et est unique) dans les sens suivants :

- En tant que processus fonctionnel .
- En tant que bruit blanc généralisé fonctionnel (ou distribution Hida).

Nous expliquons maintenant ces deux approches plus en détail :

1. L'approche processus fonctionnel ([27],[29],[18]) :

   Nous considérons ici la solution X comme un processus stochastique généralisé de la forme

   $$X = X_t^{\phi} = X(\phi, t, \omega),$$

   où $\phi \in \mathcal{S}$ (espace de Schwartz contenant des fonctions décroissantes rapidement sur $\mathbb{R}$). Heuristiquement,$X(\phi, t, \omega)$ peut être considéré comme le résultat de la mésure de X (à l'instant t et dans l'expérience ω) via la fonction de moyennage / test ou "fenêtre" ϕ.

   Le bruit blanc W peut être considéré comme un tel processus fonctionnel par la définition

   $$W(\phi, t, \omega) := W_{\phi_t}(\omega) := \int \phi_t(s) dB_s,$$

   où $\phi_t(s) = \phi(s-t)$ est la fenêtre ϕ décalée de la quantité t. Notez que pour chaque ϕ fixe, $X(\phi, \cdot, \cdot)$ et $W(\phi, \cdot, \cdot)$ sont des processus stochastiques continus. Il y a une formule exceptionnelle pour l'intégrale de Skorokhod en ce qui concerne le produit de Wick $\diamond$

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi * Y)_t \delta B_t = \int_{\mathbb{R}} Y_t \diamond W_{\phi_t} dt \qquad ; \forall \phi \in \mathcal{S},$$

où $*$ désigne une convolution par rapport à t, c'est-à-dire

$$(\phi * Y)_t(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s) Y_s(\omega) ds.$$

Par conséquent, nous disons qu'un processus fonctionnel $X_t = X_t^{\phi}(\omega) = X(\phi, t, \omega)$ est une solution de (1.5) si, pour tout $\phi \in \mathcal{S}$, il existe un processus stochastique $X_t = X_t^{\phi}$ tel que

$$X_t^{\phi} = Y_t^{\phi} + \int_0^t b(t,s) X_s^{\phi} ds + \int_0^t \sigma(t,s) X_s^{\phi} \diamond W_{\phi_s} ds \qquad ; 0 \leq t \leq T$$

où nous permettons à $Y_t = Y_t^{\phi}$ d'être également un processus fonctionnel. Dans la suite, nous montrons qu'une solution de processus fonctionnelle de (1.5) existe sous certaines conditions sur Y_t^{ϕ}, $b(t,s)$ et $\sigma(t,s)$. De plus, nous donnons une formule de solution explicite :

$$X_t = Y_t + \int_0^t H(t,s) \diamond Y_s ds \tag{1.7}$$

où $H(t,s) = H(t,s,\omega)$ est un noyau aléatoire construit à partir de $K(t,s,\omega) := b(t,s) + \sigma(t,s) W_{\phi_s}(\omega)$.

2. L'approche fonctionnelle généralisée du bruit blanc (distribution de Hida) [17]. Dans ce contexte, nous considérons X_t et les autres éléments de l'équation (1.5) comme des éléments de l'espace $(\mathcal{S})^*$ des distributions de Hida (ou des fonctions de bruit blanc généralisées). Le bruit blanc ponctuel W_t peut être considéré comme un élément de $(\mathcal{S})^*$. Par le corollaire 3.4 dans [28] nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} Z_t \delta B_t = \int_{\mathbb{R}} Z_t \diamond W_t dt \tag{1.8}$$

pour tous les processus stochastiques satisfaisant (1.6) (adapté ou non). C'est pourquoi l'interprétation naturelle de l'équation (1.5) dans le cadre de la distribution de Hida est

$$X_t = Y_t + \int_0^t b(t,s)X_s ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s \diamond W_s ds \tag{1.9}$$

où Y_t est considéré comme un élément de $(\mathcal{S})^*$. Notons que par (1.8) la relation entre le bruit blanc ponctuel W_t et le processus fonctionnel W_ψ est (choisissez $Z_t = \psi(t)$ dans (1.8)) :

$$W(\psi, 0, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) W_t dt$$

c'est-à-dire que $W(\psi)$ est le résultat d'un "étalement" du bruit singulier W_t par la fonction de test ψ .

Dans ce $(\mathcal{S})^*$, nous prouvons l'existence et l'unicité des résultats pour (1.9) et aussi, nous obtenons une formule de solution du type (1.7). De plus, nous montrons que la solution de (1.9) est en fait dans $\mathcal{L}^2(\mu)$ sous certaines conditions.

1.2 Quelques Notions préliminaires

Définition 1.2.1 *Soit $(\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$ l'espace de probabilité de bruit blanc, i.e : μ est la mésure de probabilité sur les sous-ensembles de Borel $\mathcal{B}$ de l'espace $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$, avec la propriété*

$$\int_{\mathcal{S}'} \exp(i < \omega, \phi >) d\mu(\omega) = \exp(-1/2\|\phi\|^2)$$

pour tous $\phi \in \mathcal{S}$, où $\|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2 dx$ et $< \omega, \phi >= \omega(\phi)$ est l'action de $\omega \in \mathcal{S}'$ (le dual de $\mathcal{S}$) sur $\phi \in \mathcal{S}$ (voir [17]).

Définition 1.2.2 *Rappelons que le processus de bruit blanc W est la carte*

$$W : \mathcal{S} \times \mathcal{S}' \to \mathbb{R}$$

donnée par

$$W(\phi,\omega) = W_\phi(\omega) = < \omega, \phi > \qquad ; \phi \in \mathcal{S}, \omega \in \mathcal{S}'$$

i.e :

$$W_\phi(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dB_t,$$

où le côté droit indique l'intégrale de Wiener-Itô par rapport au mouvement brownien B_t. Nous avons également décrit ci-dessous une version singulière W_t de bruit blanc ponctuelle. Heuristiquement, nous pouvons considérer que W_t est la limite de W_ϕ comme $\phi \to \delta_t$ la masse ponctuelle à t. Cette limite existe dans l'espace $(\mathcal{S}^*)$ des distributions Hida. Pour la définition et les propriétés de $(\mathcal{S})^*$ voir [17].

Définition 1.2.3 *Une description alternative de $(\mathcal{S})^*$ ([57]) peut être donnée comme suit :*
Soit la fonction Hermite d'ordre $n \geq 1$

$$e_n(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}((n-1)!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} h_{n-1}(\sqrt{2}x) \tag{1.10}$$

où

$$h_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

est le polynôme d'Hermite d'ordre $m \geq 0$.
Il est bien connu que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ forme une base orthonormale de $\mathcal{L}^2$. En outre, e_n est une fonction propre pour l'opérateur

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1,$$

avec valeur propre $2n$, i.e :

$$Ae_n = 2ne_n; n = 1, 2, \cdots \tag{1.11}$$

Posant $\theta_j = \int_{\mathbb{R}} e_j dB_t$ et on définit

$$H_\alpha(\omega) = \prod_{j=1}^{m} h_{\alpha_j}(\theta_j),$$

pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$.

Selon le théorème de Chaos-Wiener-Itô, nous avons que chaque $f \in \mathcal{L}^2$ *peut être représenté comme une somme*

$$f(\omega) = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha(\omega), \tag{1.12}$$

où

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mu)} = \sum_\alpha \alpha! c_\alpha^2 \qquad ; \alpha! = \prod_{i=1}^{m} \alpha_i!,$$

Définition 1.2.4 *On dit que* $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ *est une fonction de test de Hida ,*$f \in (\mathcal{S})$ *, si*

$$A_f(k) := \sup_\alpha c_\alpha^2 \alpha! (2N)^{\alpha k} < \infty \qquad ; \forall k < \infty, \tag{1.13}$$

où

$$(2N)^\alpha := \prod_{j=1}^{m} (2j)^{\alpha_j} \quad si\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m).$$

Définition 1.2.5 *Le dual de* $(\mathcal{S})$*, noté* $(\mathcal{S})^*$ *(l'espace des distributions de Hida) peut être représenté par l'ensemble des sommes formelles*

$$F = \sum_\alpha b_\alpha H_\alpha, \tag{1.14}$$

où

$$\sup_\alpha b_\alpha^2 \alpha! ((2N)^{-\alpha})^q < \infty \quad ; pour\ \ q < \infty.$$

Définition 1.2.6 *L'action de* $F \in (\mathcal{S})^*$ *(donnée par (1.14)) sur la fonction de test* $f \in (\mathcal{S})$ *(donnée par (1.12)) est*

$$< F, f >= \sum_\alpha \alpha! b_\alpha c_\alpha.$$

En général, on a

$$(\mathcal{S}) \subset \mathcal{L}^p(\mu) \subset (\mathcal{S})^* \quad ;\forall p \in (1,\infty).$$

Définition 1.2.7 *Nous pouvons maintenant définir le bruit blanc ponctuel W_t en $(\mathcal{S})^*$ par*

$$W_t(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(t)h(\theta_k),$$

($\sum b_n H_{\epsilon_n}$ avec $\epsilon_n = (0,0,\cdots,1)$ avec 1 sur la n ième place et $b_n = e_n(t)$)
puis

$$\sup_{\alpha} b_\alpha^2 \alpha!(2N)^{-\alpha q} = \sup_n e_n^2(t) \cdot 1 \cdot (2n)^{-q} < \infty,$$

pour $q > -\frac{1}{12}$ puisque $\|e_n\|_\infty = 0(n^{-\frac{1}{12}})$ quand $n \to \infty$ (voir[20];la formule(21.3.3)). Ce qui donne que $W_t \in (\mathcal{S})^*$.
Dans ce qui suit, nous utiliserons la convention selon laquelle W_t désigne le bruit blanc ponctuel (en $(\mathcal{S})^*$) si $t \in \mathbb{R}$ tant que W_ψ désigne le bruit blanc défini par (1.10) si $\psi \in \mathcal{S}$.
Si $F = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha$ et $G = \sum_\beta c_\beta H_\beta$ sont deux éléments de $(\mathcal{S})^*$, nous définissons leur produit de Wick $F \diamond G$ comme élément de $(\mathcal{S})^*$ donné par

$$F \diamond G = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta H_{\alpha+\beta} = \sum_\gamma (\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta) H_\gamma$$

En utilisant la caractérisation (1.13), on peut prouver que les deux espaces $(\mathcal{S})^*$ et $(\mathcal{S})$ sont fermés sous $\diamond$, i.e : $f, g \in (\mathcal{S})^* \Rightarrow f \diamond g \in (\mathcal{S})^*$ et de même pour $(\mathcal{S})$ (voir l'argument dans [57]). Il existe une alternative à la représentation (1.12) : si $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ il existe des fonctions $f_n \in \hat{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^n)$ tels que :

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(t_1,\cdots,t_n) dB_t^{\otimes n}$$

et

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ici $\hat{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}^n)$ *désigne l'espace des fonctions* $\mathcal{L}^2$*-symétriques sur* $\mathbb{R}$ *et* $dB_t^{\otimes n} = dB_{t_1} dB_{t_2} \cdots dB_{t_n}$ *désigne l'intégrale d' Itô itérée. En utilisant cette représentation, le produit de Wick de deux fonctions*

$$f = \sum_n \int f_n dB^{\otimes n} \qquad et \qquad g = \sum_m \int g_m dB^{\otimes m},$$

en $\mathcal{L}^2(\mu)$ *peut être exprimé par (si elles convergent)*

$$f \diamond g = \sum_{n,m} \int f_n \hat{\otimes} g_m dB^{\otimes(n+m)},$$

où $\hat{\otimes}$ *désigne le produit tensoriel symétrisé.*

Le produit de Wick joue un rôle crucial dans notre solution de l'équation différentielle stochastique de Volterra . Étant donné que $\mathcal{L}^1$ *n'est pas contenu dans* $(\mathcal{S})^*$*, une définition supplémentaire est nécessaire pour ce cas (voir [18]).*

Supposons qu'il existe $X_n, Y_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$ *tels que* $X_n \to X$ *dans* $\mathcal{L}^1(\mu), Y_n \to Y$ *dans* $\mathcal{L}^1(\mu), X_n \diamond Y_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *pour tout* n *et* $Z := lim\, X_n \diamond Y_n$ *existe dans* $\mathcal{L}^1(\mu)$*.*

On définit ainsi

$$X \diamond Y = Z.$$

Cette définition ne dépend pas du choix spécifique de $\{X_n\}, \{Y_n\}$*. En fait, nous avons*

$$F[X \diamond Y](\phi) = e^{\frac{1}{2}\|\phi\|^2} \mathcal{F}[X](\phi) \cdot \mathcal{F}[Y](\phi) \qquad ; \forall \phi \in \mathcal{S} \tag{1.15}$$

où

$$F[X](\phi) = \int_{\mathcal{S}'} e^{i<\omega,\phi>} X(\omega) d\mu(\omega) \qquad , \phi \in \mathcal{S}$$

est la transformation de Fourier de X*.*

Pour la preuve de (1.15), voir [[18], Lemme 9.2]). Une étude des propriétés du produit de Wick est donnée dans [14].

Rappelons maintenant deux transformations importantes sur $(\mathcal{S})^*$ *:*

Si $F \in (\mathcal{S})^*$ *la transformation* S *de* F *(introduite la première fois dans [25]),* $\mathcal{S}F$*, est une* *carte de S en $\mathbb{C}$ définie par*

$$\mathcal{S}F(\phi) = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2} < F, \exp < \cdot, \phi >> \tag{1.16}$$

(On peut prouver que la fonction $\omega \to \exp < \omega, \phi >$; $\omega \in \mathcal{S}'$ appartient à $(\mathcal{S})$, donc (1.16) est bien défini).
Notons $F \in \mathcal{L}^2(\mu)$ on a donc

$$\mathcal{S}F(\phi) = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2} \int_{\mathcal{S}'} \exp(< \omega, \phi >) F(\omega) d\mu(\omega)$$

La transformée Hermite de F, (introduite la première fois dans [27]) $\mathcal{H}F$, est une carte de l'espace $\mathbf{C}_0^N$ de toutes les suites finies de nombres complexes en $\mathbb{C}$ (l'ensemble des nombres complexes) définis par

$$\mathcal{H}F(z_1, z_2 \cdots) := \tilde{F}(z_1, z_2 \cdots) = \mathcal{S}F(z_1 e_1 + z_2 e_2 + \cdots)\ ; (z_1, z_2 \cdots) \in \mathbb{C}_0^N.$$

De manière équivalente si $F \in (\mathcal{S})^*$ a l'extension (voir [27], Th 5.7)

$$F(\omega) = \sum_{\alpha} c_\alpha H_\alpha(\omega),$$

alors, en utilisant la notation avec multi indices $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots$ si $z = (z_1, z_2 \cdots)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$,on obtient

$$\mathcal{H}F(z) = \sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha \qquad ; z \in \mathbb{C}_0^N.$$

On peut montrer que la série converge et représente une fonction analytique de $z \in \mathbb{C}_0^N$, pour tout $F \in (\mathcal{S})^*$ (voir [17]). Les caractérisations du produit de Wick en termes de transformation $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}$ sont les suivantes : si $F, G \in (\mathcal{S})^*$ alors

$$\mathcal{H}(F \diamond G)(z) = \mathcal{H}F(z) \cdot \mathcal{H}G(z) \qquad ; z \in \mathbb{C}_0^N$$

et

$$\mathcal{S}(F \diamond G)(\phi) = \mathcal{S}F(\phi) \cdot \mathcal{S}G(\phi) \qquad ; \phi \in \mathcal{S},$$

Enfin, rappelons qu'il existe un inverse explicite de la transformation d'Hermite (voir [27]).
Soit λ la mésure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y_1,\cdots,y_n)d\lambda(y) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\frac{1}{2}|y|^2}dy,$$

si f est une fonction mésurable bornée de $y=(y_1,y_2,\cdots)\in\mathbb{R}^n$ dépend uniquement des n premières coordonnées $y_1,\cdots,y_n$. Soit

$$X=\sum_{\alpha} c_\alpha H_\alpha(\omega)\in\mathcal{L}^2(\mu)$$

de sorte que X a la transformation Hermite

$$\tilde{X}(z)=\mathcal{H}X(z)=\sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha.$$

On récupère X de $\tilde{X}$ par

$$X(\omega):=\mathcal{H}^{-1}\tilde{X}:=\lim_{n,k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{X}^{(n,k)}(\theta+iy)d\lambda(y)$$

(la limite dans $\mathcal{L}^2(\mu)$) où $\theta+iy=(\theta_1+iy_1,\theta_2+iy_2,\cdots)$ avec $\theta_k=\int e_k dB$ et

$$\tilde{X}^{(n,k)}(z)=\sum_{\alpha\in J_{n,k}} c_\alpha z^\alpha;\qquad J_{n,k}=\{\alpha;|\alpha|\leq n\ \text{ et } \alpha_j=0,\ \text{ pour } j>k\}$$

est la série doublement tronquée pour $\tilde{X}$.
De plus, on a l'estimation suivante (voir [18], Th 4.2) :

$$\mathbb{E}[|X|^p]\leq\liminf_{n,k\to\infty}\int\int|\tilde{X}^{(n,k)}(\xi+i\eta)|^p d\lambda(\xi)d\lambda(\eta)$$

pour tout $p\in[1,\infty)$.

Définition 1.2.8 *Soit F une fonctionnelle à valeurs complexes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. F est une $U-$fonctionnelle si les conditions suivantes sont remplies :*

- *Pour tous les* $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *la cartographie* $\lambda \to F(\psi + \lambda\phi), \lambda \in \mathbb{R}$ *a une extension analytique complète, qui sera notée* $F(\psi + z\phi), z \in \mathbb{C}$.
- *Il existe un* $p \in \mathbf{N}_0$ *(l'ensemble des entiers non négatifs) et* $C_1, C_2 > 0$ *de sorte que pour tout* $z \in \mathbb{C}, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$|F(z\phi)| \leq C_1 \exp(C_2|z|^2\|\phi\|_{2,p}^2), \tag{1.17}$$

où $\|\phi\|_{2,p} = \|A^p\phi\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$.

On a donc les résultats suivants :

Théorème 1.1 *[44]*
Si $\Phi \in (\mathcal{S})^*$, *alors* $\mathcal{S}\Phi$ *est un* $U-$*fonctionnel. Inversement, si* F *est un* $U-$*fonctionnel, alors il existe un unique* Φ *dans* $(\mathcal{S})^*$, *de sorte que* $\mathcal{S}\Phi = F$.

Théorème 1.2 *[44]*
Supposons que $F_n, n \in \mathbb{N}$ *et* F *sont* $U-$*fonctionnels et soit* $\Phi_n, n \in \mathbb{N}$ *et* Φ *, respectivement, désignent les distributions de Hida associées dans* $(\mathcal{S})^*$. *Alors, les deux assertions suivantes sont équivalente :*
(a) La suite $(\Phi_n, n \in \mathbb{N})$ *converge fortement vers* Φ.
(b) La suite $(F_n, n \in \mathbb{N})$ *converge ponctuellement vers* F *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *assez grand, l'estimation (1.17) est valable pour chaque* F_n *uniformément dans* n.

1.3 L'approche processus fonctionnel

Les processus fonctionnels ont été introduits pour la première fois dans [27] lors d'une étude de certaines équations différentielles stochastiques impliquant des fonctions du bruit blanc. Une version multiparamétrique étendue a été utilisée dans [18]. Les processus fonctionnels peuvent être considérés comme une généralisation des processus valorisés par la distribution.

Définition 1.3.1 *Soit $p > 0$. Un processus fonctionnel $\mathcal{L}^p$ (à un paramètre) est une fonction de*

$$X : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \times \mathcal{S}' \to \mathbb{R}$$

tel que

- *La carte $t \to X(\phi, t, \omega)$ est mésurable pour chaque $\phi \in \mathcal{S}$ et $\omega \in \mathcal{S}'$.*
- *La carte $\omega \to X(\phi, t, \omega)$est dans $\mathcal{L}^p(\mu)$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

1.3.1 EXEMPLE

On peut considérer le processus de bruit blanc comme un processus fonctionnel $W(\phi, t, \omega)$ en définissant

$$W(\phi, t, \omega) = W_{\phi_t}(\omega) =< \omega, \phi_t >,$$

où

$$\phi_t(s) = \phi(s - t),$$

est le décalage t de la fonction de test ϕ.
Notons que si $F \in \mathcal{S}'$ et D désignent l'opérateur de différenciation, nous avons

$$< DF, \phi_x(\cdot) >= - < F, D\phi_x(\cdot) >= - < F, \frac{d}{dy}\phi(y - x) >=< F, \frac{d}{dx}\phi_x(y) > .$$

Ainsi, prendre les dérivés de distribution de F et appliquer le résultat à ϕ_x revient à appliquer F au dérivé de ϕ_x par rapport à x. Compte tenu de cela, il est naturel d'interpréter les équations différentielles de distribution vis-à-vis de ϕ impliquant des processus fonctionnels $X(\phi, x, \omega)$ comme des équations différentielles ordinaires en x pour chaque ϕ.
La deuxième observation pertinente pour l'interprétation de (1.5) est la suivante :

Lemme 1.3.1.1 *Soient $Y_t(\omega)$ un processus stochastique et $\phi \in \mathcal{S}$ tel que*

$$Z_t := (\phi * Y)_t$$

satisfait à la condition (1.6).Alors

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi * Y)_t \delta B_t = \int_{\mathbb{R}} Y_t \diamond W_{\phi_t} dt,$$

où $*$ *désigne la convolution, i.e :*

$$(\phi * Y)_t(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s) Y_s(\omega) ds.$$

Preuve Par le corollaire 3.4 dans [28] nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} Z_t \delta B_t = \int_{\mathbb{R}} Z_t \diamond W_t dt$$

pour tous les processus Z_t satisfaisant (1.6), où le côté droit est considéré comme un élément de $\mathcal{S}^*$. On applique cette égalité à $Z_t = (\phi * Y)_t$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (\phi * Y)_t \delta B_t &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \phi(t-s) Y_s(\omega) ds) \diamond W_t dt, \\
&= \int_{\mathbb{R}} Y_s(\omega) \diamond (\int_{\mathbb{R}} \phi(t-s) W_t dt) ds, \\
&= \int_{\mathbb{R}} Y_s(\omega) \diamond W_{\phi_s} ds.
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat cherché. Au vu des lemmes (1.2.1) et (1.3.1.1), l'interprétation suivante de (1.5) est naturelle :

Nous disons qu'un processus fonctionnel $X(\phi, t, \omega) = X_t^\phi$ est une solution de (1.5) si, pour tout $\phi \in \mathcal{S}$

$$X_t^\phi = Y_t^\phi + \int_0^t b(t,s) X_s^\phi ds + \int_0^t \sigma(t,s) X_s^\phi \diamond W_{\phi_s} ds \qquad ; 0 \leq t \tag{1.18}$$

où $Y_t^\phi = Y(\phi, t, \omega)$ est un processus fonctionnel donné.

Lemme 1.3.1.2 *Soient* $b(t,s)$ *et* $\sigma(t,s)$ *deux fonctions déterministes bornées satisfaisant*

$$b(t,s) = \sigma(t,s) = 0 \qquad ; si\ 0 \leq t < s$$

on fixe $\phi \in \mathcal{S}$ et on définit pour $(t,s) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$,

$$K_1(t,s) := K(t,s) := b(t,s) + \sigma(t,s)W_{\phi_s}(\omega),$$

et inductivement

$$K_{n+1}(t,s) = \int_0^t K_n(t,u) \diamond K(u,s)du = \int_s^t K_n(t,u) \diamond K(u,s)du \qquad ; n \geq 1. \tag{1.19}$$

On a donc pour tout (t,s)

$$\|K_n(t,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} \leq \frac{M^n(1+\|\phi\|)^n}{\sqrt{n!}}; \qquad n = 1, 2, ...$$

et donc la série

$$H(t,s,\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,s,\omega) \tag{1.20}$$

convege uniformément dans $\mathcal{L}^2$ pour tout $(t,s) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$.

Preuve : Tout d'abord, notons que si nous mettons

$$\gamma(t,s) = \gamma(t,s,\omega) = \sigma(t,s)W_{\phi_s}$$

alors

$$\begin{aligned} K_2(t,s) &= \int_s^t K(t,u) \diamond K(u,s)du \\ &= \int_s^t (b(t,u) + \gamma(t,u)) \diamond (b(u,s) + \gamma(u,s))du, \end{aligned}$$

et

$$K_3(t,s) = \int_s^t K_2(t,v) \diamond K(v,s)dv$$

$$= \int_{s \leq v \leq u \leq t} \int [(b(t,u) + \gamma(t,u)) \diamond (b(u,v) + \gamma(u,v)) \diamond (b(v,s) + \gamma(v,s))]dudv$$

Donc par induction

$$K_n(t,s) = \int_{s \leq u_{n-1} \leq \cdots} \cdots \int_{\leq u_1 \leq t} [\prod_{0 \leq k \leq n-1}^{\diamond} (b(u_k, u_{k+1})) + \gamma(u_k, u_{k+1})]du_1 \cdots du_{n-1}$$

où $u_0 = t$ et $u_n = s$ et $\overset{\diamond}{\prod}$ indique que le produit de Wick est utilisé. maintenant

$$\overset{\diamond}{\prod_{0\leq k\leq n-1}}(b(u_k,u_{k+1})+\gamma(u_k,u_{k+1})) = \sum_{\alpha,\beta} b_\alpha(u)\gamma_\beta(u)$$

la somme étant prise sur toutes les partitions $\{\alpha,\beta\}$ de $\{0,1,\cdot\cdot\cdot,n-1\}$(i.e :$\alpha\cap\beta=\emptyset$ et $\alpha\cup\beta=\{0,1,\cdot\cdot\cdot,n-1\}$) nous avons utilisé la notation

$$b_\alpha(u) = b(u_{\alpha_1},u_{\alpha_1+1})\cdots b(u_{\alpha_j},u_{\alpha_j+1}), \qquad si\ \alpha=\{\alpha_1,\cdot\cdot\cdot,\alpha_j\}$$

et

$$\gamma_\beta(u) = \gamma(u_{\beta_1},u_{\beta_1+1})\diamond\cdots\diamond\gamma(u_{\beta_k},u_{\beta_{k+1}}) \qquad si\ \beta=\{\beta_1,\cdot\cdot\cdot,\beta_k\}, \tag{1.21}$$

puisque

$$\mathbb{E}[|W_{\phi_{u_1}}\diamond...\diamond W_{\phi_{u_k}}|^2]^{1/2} = \sqrt{k!}\|\phi\|^k$$

on obtient de (1.21) que (avec $|\beta|$ = le cardinale de β)

$$\|K_n(t,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} \leq \int_{s\leq u_{n-1}\leq...}...\int_{\leq u_1\leq t}\sum_{\alpha,\beta}|b_\alpha(u)|\cdot|\sigma_\beta(u)|\sqrt{|\beta|!}\|\phi\|^{|\beta|}du_1\cdots du_{n-1}. \tag{1.22}$$

Choisissons $M<\infty$ tel que
$|b(t,s)|\leq M$ et $|\sigma(t,s)|\leq M$ pour tous t,s Alors de (1.22) nous obtenons (en mettant $|\beta|=k$)

$$\|K_n(t,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} \leq M^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{k!}\|\phi\|^k \leq \frac{M^n}{\sqrt{n!}}(1+\|\phi\|^n).$$

Lemme 1.3.1.3 *Considérons K, K_n comme dans le lemme (1.3.1.2) on a donc*

$$K_n(t,s) = \int_s^t K_{n-j}(t,u)\diamond K_j(u,s)du \quad ;\forall j=1,2,...,n-1. \tag{1.23}$$

Preuve : Nous procédons par induction. Par définition, (1.23) est valable pour $j = 1$ pour tout n. Supposons que (1.23) vaut pour $n = n_0$ et pour tout $j < n_0 - 1$ et aussi pour $n = n_0 + 1$ si $j = j_0 \leq n_0 - 1$. Alors

$$\begin{aligned}\int_s^t K_{n_0+1-(j_0+1)}(t,u) \diamond K_{j_0+1}(u,s)du &= \int_s^t K_{n_0-j_0}(t,u) \diamond (\int_s^u K_{j_0}(u,v) \diamond K(v,s)dv)du \\ &= \int_s^t K(v,s) \diamond (\int_v^t K_{n_0-j_0}(t,u) \diamond K_{j_0}(u,v)du)dv \\ &= \int_s^t K(v,s) \diamond K_{n_0}(t,v)dv = K_{n_0+1}(t,s).\end{aligned}$$

Lemme 1.3.1.4 *Considérons $K(t,s)$ et $H(t,s)$ comme dans le lemme (1.3.1.2), alors*

$$H(t,s) - K(t,s) = \int_s^t K(t,u) \diamond H(u,s)du.$$

Preuve : de (1.20) et (1.19) on obtient

$$\begin{aligned}\int_s^t K(t,u) \diamond H(u,s)du &= \lim_{N\to\infty} \int_s^t (\sum_{n=1}^N K(t,u) \diamond K_n(u,s))du \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_s^t (\sum_{n=1}^N K_{n+1}(t,s)) \\ &= H(t,s) - K(t,s).\end{aligned}$$

Théorème 1.3 *Soient $b(t,s)$ et $\sigma(t,s)$ deux fonctions déterministes bornées satisfaisant :*

$$b(t,s) = \sigma(t,s) = 0 \qquad ; si\ 0 \leq t < s.$$

Soit $Y_t = Y(\phi,t,\omega)$ un processus fonctionnel de $\mathcal{L}^1$ (pas nécessairement adapté) tel que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|K_m(s,u) \diamond Y_u \diamond K_n(t,s)\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} \leq C < \infty \quad ; \forall t,s,u,n \tag{1.24}$$

(avec C indépendant de t, s, u et n) où K_n est défini par (1.23). On définit

$$X_t := X(\phi, t, \omega) := Y_t + \int_0^t H(t,s) \diamond Y_s ds, \tag{1.25}$$

alors

$$X_s \diamond K_n(t,s) \in \mathcal{L}^1(ds \times d\mu); \forall t, n, \tag{1.26}$$

et X_t est le processus fonctionnel unique de $\mathcal{L}^1$ qui vérifie (1.26) et résout (1.18) l'interprétation de l'équation stochastique de Volterra

$$X_t = Y_t + \int_0^t b(t,s) X_s ds + \int_0^t \sigma(t,s) X_s \delta B_s.$$

Preuve : Nous vérifions d'abord que X_t donné par (1.25) satisfait à (1.26) : De (1.24) nous avons

$$\begin{aligned}
(\int_0^s H(s,u) \diamond Y_u du) \diamond K_n(t,s) &= (\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^S K_m(s,u) \diamond Y_u du) \diamond K_n(t,s) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^s K_m(s,u) \diamond Y_u \diamond K_n(t,s) du
\end{aligned}$$

qui converge absolument dans $\mathcal{L}^2(ds \times d\mu)$

Ensuite, nous vérifions que si X_t est défini par (1.25), alors X_t vérifie (1.18), c.-à-d.

$$X_t = Y_t + \int_0^t X_s \diamond K(t,s) ds \tag{1.27}$$

En remplaçant par X et en utilisant le lemme (1.3.1.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^t X_s \diamond K(t,s)ds &= \int_0^t Y_s \diamond K(t,s)ds + \int_0^t (\int_0^s H(s,u) \diamond Y_u du) \diamond K(t,s)ds \\ &= \int_0^t Y_s \diamond K(t,s)ds + \int_0^t (Y_u \diamond \int_u^t K(t,s) \diamond H(s,u)ds)du \\ &= \int_0^t Y_s \diamond K(t,s)ds + \int_0^t Y_u \diamond (H(t,u) - K(t,u))du \\ &= \int_0^t Y_u \diamond H(t,u)du \\ &= X_t - Y_t,\end{aligned}$$

ce qui prouve que X_t défini par (1.25) satisfait à (1.5).

On passe à l'unicité :

Supposons $X_t^{(1)}$ et $X_t^{(2)}$ deux processus fonctionnels de $\mathcal{L}^1$ tels que pour tout t

$$X_s^{(i)} \diamond K_n(t,s) \in \mathcal{L}^1(d\mu \times ds) \qquad ; i = 1, 2.$$

Alors, puisque les deux processus satisfaisant (1.27) nous obtenons par soustraction que

$$Z_s := X_s^{(1)} - X_s^{(2)},$$

vérifie l'équation

$$Z_t = \int_0^t K(t,s) \diamond Z_s ds.$$

Cela donne

$$Z_t = \int_0^t K(t,s) \diamond (\int_0^t K(s,u) \diamond Z_u du)ds = \int_0^t K_2(t,u) \diamond Z_u du.$$

En procédant par induction on voit que

$$Z_t = \int_0^t K_n(t,u) \diamond Z_u du \qquad ; \forall n. \tag{1.28}$$

En appliquant la transformation de Fourier sur les deux côtés, nous obtenons

$$\mathcal{F}Z_t(\phi) = \exp(\frac{1}{2}\|\phi\|^2)\int_0^t (\mathcal{F}K_n(t,u))(\phi)(\mathcal{F}Z_u)(\phi)du \quad ;\phi \in \mathcal{S}$$

puisque $K_n(t,u) \to 0$ uniformément dans $\mathcal{L}^2(\mu)$ quant $n \to \infty$ pour (t,u),
on voit que $(\mathcal{F}K_n(t,u))(\phi) \to 0$ (uniformément) quand $n \to \infty$ pour (t,u) et nous concluons de (1.28) que : $\mathcal{F}Z_t(\phi) = 0$ pour tout ϕ. Par conséquent, $Z_t = 0$, ce qui prouve l'unicité.

Théorème 1.4 *Considérons $b(t,s)$ et $\sigma(t,s)$ comme dans le théorème 1.3 Supposons que $Y_t = Y(\phi,t,\omega)$ vérifie (1.24) et que Y_t est indépendant de t, c-à-d.*

$$Y_t = Y_0 \qquad ;\forall t.$$

Alors, l'unique processus fonctionnel X_t qui satisfait (1.28) et résout l'équation de Volterra

$$X_t = Y_0 + \int_0^t b(t,s)X_s ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s \delta B_s,$$

est donné par

$$X_t := X(\phi,t,\omega) = Y_0 \diamond (1 + \int_0^t H(t,s)ds).$$

Remarque 1.3.1.1 *Notons que la solution unique $X_t(\omega)$ de l'équation non anticipée de Volterra*

$$x_t^{(a)} = a + \int_0^t b(t,s)x_s^{(a)}ds + \int_0^t \sigma(t,s)x_s^{(a)}dB_s \qquad (a \text{ constant}) \tag{1.29}$$

et par le théorème 1.4

$$x_t^{(a)} = a(1 + \int_0^t H(t,s)ds).$$

Le lien entre la solution $x_t^{(a)}$ de l'équation non anticipante (1.29) et la solution X_t de l'équation anticipante de Volterra dans ce théorème est donc

$$X_t = Y_0 \diamond x_t^{(1)}.$$

En particulier, notons que si Y_0 anticipe, alors X_t ne coïncide pas avec $x_t^{(a)}$ avec $a = Y_0$! La condition (1.24) peut être difficile à utiliser dans des cas spécifiques. Afin d'obtenir une condition plus facile à gérer, nous établissons le résultat d'intérêt indépendant suivant :

Lemme 1.3.1.5 *Considérons $b(t,s)$ et $\sigma(t,s)$ comme dans le théorème 1.3 et que $x_t = x_t^{(1)}$ soit la solution (non anticipante) de (1.29). Soit $\mathcal{H}x_t = \tilde{x}_t$ la transformation Hermite de x_t. Alors*

$$\int\int |\tilde{x}_t(x+iy)|^p d\lambda(x)d\lambda(y) < \infty,$$

(λ est une mésure de probabilité) pour $p < \infty$

Preuve : prenons la $\mathcal{H}-$transformée de (1.29) on obtient

$$\tilde{x}_t(z) = 1 + \int_0^t b(t,s)\tilde{x}_s(z)ds + \int_0^t \sigma(t,s)\tilde{x}_s(z)\tilde{W}_{\phi_s}(z)ds$$

avec $\tilde{W}_{\phi_s}(z) = \sum_n (\phi_s(\cdot), e_n)z_n$; $z = (z_1, \cdots, z_2, \cdots) \in \mathbb{C}_0^N$ où $(\psi, e_n) = \int_{\mathbb{R}} \psi e_n dx$ désigne le produit intérieur en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Si on choisit M de tel sorte $|b(t,s)| \leq M$ et $|\sigma(t,s)| \leq M$ pour tous t, s on a donc

$$|\tilde{x}_t(z)| \leq 1 + M\int_0^t |\tilde{x}_s|ds + M \cdot \int_0^t |\tilde{x}_s| \cdot |\tilde{W}_{\phi_s}|ds.$$

Avant de terminer la preuve du théorème on ait besoin de l'inégalité de Gronwall. Rappelons tout d'abord l'inégalité de Gronwall suivante :

Lemme :

Soit $T > 0$ et g une fonction positive, mésurable et bornée sur $[0,T]$, on suppose qu'il existe des constantes $a \geq 0$, et $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds,$$

alors on a

$$g(t) \leq a\exp(b(t)), \quad \forall t \in [0,T]$$

par l'inégalité de Gronwall (voir e.g [13],Appendice 5)

$$
\begin{aligned}
|\tilde{x}_t(z)| &\leq \exp(Mt + M\int_0^t |\tilde{W}_{\phi_s}|ds) \\
&\leq \exp(Mt + M\int_0^t (\sum_n |(\phi_s, e_n)||x_n| + \sum_n |(\phi_s, e_n)| \cdot |y_n|)ds) \\
&\leq \exp(Mt) \cdot \exp(M\sum_n (\int_0^t |(\phi_s, e_n)|ds) \cdot |x_n| + \sum_n (\int_0^t |(\phi_s, e_n)|ds) \cdot |y_n|)
\end{aligned}
$$

Donc, si on met $a_n = Mp \cdot \int_0^t |(\phi_s, e_n)|ds$, cela nous donne

$$
\begin{aligned}
&\int\int |\tilde{x}_t(z)|^p d\lambda(y) \leq \exp(pMt) \cdot [\int \exp(\sum_n a_n|x_n|)d\lambda(x)]^2 \\
&= \exp(pMt)\prod_n [\int_{\mathbb{R}} \exp(a_n|x_n|)\exp^{\frac{-|x_n|^2}{2}} \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}}]^2,
\end{aligned}
$$

et si $a > 0$ on a

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \exp(a|t| - \frac{1}{2}t^2)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} &= \exp(\frac{1}{2}a^2)[\int_{-\infty}^0 \exp(-\frac{1}{2}(t+a)^2)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} + \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(t+a)^2)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}] \\
&= \exp(\frac{1}{2}a^2)[\int_{-\infty}^a + \int_{-a}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}y^2)\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}] \\
&= \exp(\frac{1}{2}a^2)[1 + 2\int_0^a \exp(-\frac{1}{2}y^2)] \\
&\leq \exp(\frac{1}{2}a^2)[1 + 2a]
\end{aligned}
$$

Considérons ensuite avec l'opérateur A qui défini par (1.11)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= pM \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |(\phi_s, e_n)| ds \\
&= pM \int_0^t (\sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_s, e_n)|) ds \\
&= pM \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} |(A^{-2} e_n, A^2 \phi_s)| ds \\
&\leq pM \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \|A^{-2} e_n\|_{L^2} \|A^2 \phi_s\|_{L^2} ds \\
&\leq pM \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-2} \|A^2 \phi_s\|_{L^2} ds \\
&= pMt \|A^2 \phi_s\|_{L^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-2} < \infty.
\end{aligned}$$

puisque $\phi \in \mathcal{S}$ et $A^2\phi_s(x) = (A^2\phi)_s(x)$ en combinant les trois derniers résultats, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int\int |\tilde{x}_t(z)|^p d\lambda(x) d\lambda(y) &\leq \exp(pMt) \prod_{n=1}^{\infty} \exp(a_n^2)[1 + 2a_n]^2 \\
&= \exp(pMt) \cdot \exp(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2\ln[1 + 2a_n]) \\
&\leq \exp(pMt) \cdot \exp(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 4a_n) < \infty
\end{aligned}$$

Si nous appliquons le lemme 1.3.1.5 dans le théorème 1.4, nous obtenons ce qui suit :

Théorème 1.5 *Supposons $b(t,s)$, $\sigma(t,s)$ comme dans le théorème 1.3 et on suppose $Y_0 = Y_0(\phi, \omega)$ qui satisfait :*

$$\tilde{Y_0} \in \mathcal{L}^{1+\epsilon}(\lambda \times \lambda)$$

pour un certain $\epsilon = \epsilon(\phi) > 0; \forall \phi \in \mathcal{S}$, on a donc

$$X_t = Y_0 \diamond x_t^{(1)} = Y_0 \diamond (1 + \int_0^t H(t,s) ds) \tag{1.30}$$

est l'unique processus fonctionnel $\mathcal{L}^1$ qui satisfait (1.26) et résout l'équation de Volterra

$$X_t = Y_0 + \int_0^t b(t,s)X_s ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s \delta B_s.$$

1.4 L'approche fonctionnelle généralisée du bruit blanc

Dans cette section, nous considérons l'équation suivante dans le contexte de la distribution de Hida :

$$X_t = Y_t + \int_0^t b(t,s)X_s ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s \diamond W_s ds \tag{1.31}$$

où Y_t est considéré comme un processus dans $\mathcal{S}^*$

Tout au long de cette section, nous supposons que $b(t,s)$ et $\sigma(t,s)$ sont des fonctions déterministes bornées satisfaisant :

$$b(t,s) = \sigma(t,s) = 0 \quad ; si\ 0 \leq t < s.$$

Théorème 1.6 *Supposons qu'il existe des constantes $c_1, c_2 > O$, $p \in \mathbb{N}_0$, indépendantes de t, telles que l'estimation (1.17) s'applique à $F = SY_t$ pour tout t. Alors l'équation (1.31) a une solution unique X_t dans $\mathcal{S}^*$, donnée par*

$$X_t = Y_t + \int_0^t H(t,s) \diamond Y_s ds \tag{1.32}$$

où

$$H(t,s) = \sum_{v=1}^{\infty} K_v(t,s) \tag{1.33}$$

$$K_1(t,s) = b(t,s) + \sigma(t,s)W_s \tag{1.34}$$

$$K_{v+1}(t,s) = \int_0^t K_1(t,u) \diamond K_v(u,s)du; v = 1, 2, \cdots$$

La série (1.33) converge fortement dans $\mathcal{S}^*$.

Preuve : Il suffit de construire la solution sur un intervalle fixe $[0, T]$. Nous divisons la preuve en plusieurs étapes.

Lemme 1.4.1 *$K_v(t, s)$ est une fonction généralisée bien définie pour tous les v, s, t.*

Preuve : Par la proposition 2.6 dans [44] et le théorème 3.1 dans [43], au lieu de prouver que $\mathcal{S}K_v(t, s)$ peut être lié au sens de (1.33) de manière uniforme dans t, s. Nous voyons cela par induction :
Puisque $b(t, s)$ et $\sigma(t, s)$ sont liés, il est clair qu'il existe des constantes $c_1 > O$, $p_1 \in \mathbf{N}_0$, indépendantes de t, s , telles que pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$|\mathcal{S}K_1(t, s)(z\phi)| \leq c_1 \exp(c_1|z|\|\phi\|_{2,p_1}).$$

Supposons qu'il existe des constantes $c_v, p_v \in \mathbb{N}_0$ tel que :

$$|\mathcal{S}K_v(t, s)(z\phi)| \leq c_v \exp(c_v|z|\|\phi\|_{2,p_v})$$

pour tous $\phi \in \mathcal{S}$, $t, s \leq T$.
Par (1.34) on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}K_{v+1}(t, s)(z\phi)| &\leq \int_0^t |\mathcal{S}K_1(t, u)(z\phi)| \cdot |\mathcal{S}K_v(u, s)(z\phi)| du \\
&\leq \int_0^t c_1 \exp(c_1|z|\|\phi\|_{2,p_1}) \cdot c_v \exp(c_v|z|\|\phi\|_{2,p_v}) du \\
&\leq c_{v+1} \exp(c_{v+1}|z|\|\phi\|_{2,p_{v+1}}) \qquad ;\textit{pour } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

où $c_{v+1} = \max(Tc_1c_v, c_1 + c_v); p_{v+1} = p_1 \vee p_v$. La preuve du lemme est achevée.

Lemme 1.4.2 *La série*

$$H(t, s) = \sum_{v=1}^{\infty} K_v(t, s),$$

converge fortement dans $\mathcal{S}^*$.

Remarque 1.4.0.2 *Nous montrons d'abord que*

$$H(t,s)(\phi) := \sum_{v=1}^{\infty} \mathcal{S}K_v(t,s)(\phi)$$

est une U-fonction. Par définition, nous devons vérifier les deux assertions suivantes :

1. $\hat{H}(t,s)(\psi + z\phi)$ *est une fonction entière pour* $z \in \mathbb{C}$ *et* $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. *Il existe* $c_1, c_2 > 0$ *et* $p \in \mathbb{N}_0$ *tel que*

$$|\hat{H}(t,s)(z\phi)| \leq c_1 \exp(c_2 |z|^2 \|\phi\|_{2,p}^2) \tag{1.35}$$

pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $t, s \leq T$.

Preuve :

1) Puisque $\mathcal{S}K_v(t,s)(\psi + z\phi)$ est analytique ,il suffit de véréfie que

$$\sum_{v=1}^{\infty} \mathcal{S}K_v(t,s)(\psi + z\phi)$$

converge dans un compact de $\mathbb{C}$.

En fait, pour tout $M > 0$, posant $\hat{K}(t,s,z) = b(t,s) + \sigma(t,s)(\psi(s) + z\phi(s))$ et

$$\lambda(t,s) = \sup_{|z| \leq M} |\hat{K}(t,s,z)|$$

$$A^2(t) = \int_0^T \lambda^2(t,u)du \quad ; B^2(s) = \int_0^T \lambda^2(u,s)du$$

On trouve donc

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|\leq M} |\mathcal{S}K_2(t,s)(\psi + z\phi)|^2 &\leq \sup_{|z|\leq M} |\int_s^t \hat{K}(t,u,z)\hat{K}(u,s,z)du|^2 \\
&\leq \sup_{|z|\leq M} (\int_s^t |\hat{K}(t,u,z)|^2 du)(\int_s^t |\hat{K}(u,s,z)|^2 du) \\
&\leq \int_0^T \lambda^2(t,u)du \int_0^T \lambda^2(u,s)du \\
&= A^2(t)B^2(t)
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\sup_{|z|\leq M}|\mathcal{S}K_3(t,s)(\psi+z\phi)|^2 &\leq \sup_{|z|\leq M}|\int_s^t \hat{K}(t,u,z)\mathcal{S}K_2(u,s)(\psi+z\phi)du|^2\\ &\leq A^2(t)B^2(t)\int_s^t A^2(u)du\end{aligned}$$

par induction on a

$$\sup_{|z|\leq M}|\mathcal{S}K_{v+2}(t,s)(\psi+z\phi)|^2 \leq A^2(t)B^2(s)\frac{1}{v!}(\int_0^T A^2(u)du)^v \tag{1.36}$$

Ceci implique que la série

$$\sum_{v=1}^{\infty}\mathcal{S}K_{v+2}(t,s)(\psi+z\phi)|$$

converge uniformément sur $\{|z|\leq M\}$.

2) Soit

$$\lambda(t,s,z)=|b(t,s)+\sigma(t,s)z\phi(s)|$$

$$A^2(t,z)=\int_0^T \lambda^2(t,u,z)du$$

$$B^2(s,z)=\int_0^T \lambda^2(u,s,z)du$$

On refait le même raisonnement que celui de la preuve de (1.36) on obtient

$$|\mathcal{S}K_{v+2}(t,s)(z\phi)|\leq A(t,z)B(s,z)\frac{(\int_0^T A^2(u,z)du)^{v/2}}{\sqrt{v!}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}|\hat{H}(t,s)(z\phi)| &\leq \lambda(t,s,z)+\sum_{v=0}^{\infty}|\mathcal{S}K_{v+2}(t,s)(z\phi)|\\ &\leq \lambda(t,s,z)+A(t,z)B(s,z)\sum_{v=0}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{v!}}\int_0^T A^2(u,z)du)^{v/2}\\ &\leq \lambda(t,s,z)+A(t,z)B(s,z)\sqrt{2}\exp(2\int_0^T A^2(u,z)du)\end{aligned}$$

Par contre, il est facile de voir qu'il existe des constantes $c_3, c_4 > 0$ et $p_1 \in \mathbb{N}_0$ telles que

$$\int_0^T A^2(u,z)du \leq c_3 + c_4 \int_0^T \phi(u)^2 du$$

$$|A(t,z)| \leq c_3 + c_4|z|(\int_0^T \phi(u)^2 du)^{\frac{1}{2}}$$

$$|B(s,z)| \leq c_3 + c_4|z|\|\phi\|_{2,p_1}$$

$$|\lambda(t,s,z)| \leq c_3 + c_4|z|\|\phi\|_{2,p_1} \qquad ;\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad ,t,s \leq T.$$

On compare les deux derniers résultats on obtient (1.35).

Terminons maintenant la preuve du lemme .

Soit $H(t,s) \in (\mathcal{S})^*$ avec $\mathcal{S}(H(t,s))(\phi) = \hat{H}(t,s)(\phi)$. Posant $\Phi_n = \sum_{v=1}^n K_v(t,s)$. Puis on voit que

$$\mathcal{S}\Phi_n(\phi) \to \mathcal{S}(H(t,s))(\phi) \quad \textit{pour } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$|\Phi_n(z\phi)|$ est uniformément contrôlée par (1.35). En appliquant le théorème 1.2, nous obtenons le lemme 1.4.7.

Lemme 1.4.3 *X_t (donné par (1.32)) est bien défini et satisfait (1.31).*

Preuve : Par hypothèse, il y a un $p_1 \in \mathbb{N}_0$ de sorte que

$$|\mathcal{S}Y_t(z\phi)| \leq c\exp(c|z|^2\|\phi\|_{2,p_1}^2)$$

pour tous $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $t > 0$.

En comparant avec (1.35) , on obtient ça pour certains $p \in \mathbb{N}_0, c_1 > 0$

$$|\mathcal{S}Y_s(z\phi)\mathcal{S}H(t,s)(z\phi)| \leq c_1\exp(c_1|z|\|\phi\|_{2,p}^2)$$

Ici, la constante c_1 est indépendante de s, t, ϕ, z. En se servant de la proposition 2.6 dans [44] et théorème 3.1 dans [43] on voit que $X_t = Y_t + \int_0^t H(t,s) \diamond Y_s$ est aussi défini , avec

$$\mathcal{S}X_t(\phi) = \mathcal{S}Y_t(\phi) + \int_0^t \hat{H}(t,s)(\phi)\mathcal{S}Y_s(\phi)ds$$

De même

$$Z_t := Y_t + \int_0^t b(t,s)X_s ds + \int_0^t \sigma(t,s)X_s \diamond W_s ds$$

est un processus bien défini dans $(\mathcal{S})^*$. Compte tenu de notre construction et en consultant le théorème 1.5 dans [52] , nous savons que $\mathcal{S}X_t = \mathcal{S}Z_t$. Cela signifie que X_t satisfait (1.31). L'unicité découle de l'unicité de la solution de l'équation déterministe suivante :

$$\hat{Z}_t(\phi) = \mathcal{S}Y_t(\phi) + \int_0^t b(t,s)\hat{Z}_s(\phi)ds + \int_0^t \sigma(t,s)\hat{Z}_s(\phi)\phi(s)ds$$

Ceci complète la preuve du théorème .

1.4.1 Remarques :

1. En particulier, si $Y_t = Y_0 \in (\mathcal{S})^*$ dans le théorème 1.6, alors $X_t = Y_0 \diamond x_t^{(1)}$ où, comme avant $x_t^{(1)}$, est la solution de l'équation

$$x_t^{(1)} = 1 + \int_0^t b(t,s)x_s^{(1)}ds + \int_0^t \sigma(t,s)x_s^{(1)}dB_s$$

Cette formule est un prolongement naturel du cas non anticipant.

2. Il existe un lien étroit entre la solution de distribution Hida $X_t \in (\mathcal{S})^*$ de l'équation (1.31) et la solution de processus fonctionnelle X_t^{ϕ} de l'équation (1.18) trouvée dans la troisième partie de ce chapitre. Pour voir cela, on considère la fonction ϕ définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} c\exp(\frac{1}{|x|^2-1}), & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

avec c choisi tel que $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 1$.

Mettant $\phi^{(\epsilon)}(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi(\frac{x}{\epsilon})$ pour $\epsilon > 0$. Puis pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\phi^{(\epsilon)} * \psi \to \psi$. Soit $X_t^{(\epsilon)}$ la solution de l'équation (1.18) avec $\phi := \phi^{(\epsilon)}$ est choisie de telle sorte que $Y_t^{(\epsilon)} := Y_t^{\phi^{(\epsilon)}}$, alors $\mathcal{S}X_t^{(\epsilon)}(\psi)$ satisfait

$$\mathcal{S}X_t^{(\epsilon)}(\psi) = \mathcal{S}Y_t^{(\epsilon)}(\psi) + \int_0^t b(t,s)\mathcal{S}X_s^{(\epsilon)}(\psi)ds + \int_0^t \sigma(t,s)\mathcal{S}X_s^{(\epsilon)}(\psi)\phi^{(\epsilon)} * \psi(s)ds$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Ainsi, si $\mathcal{S}Y_t^{(\epsilon)} \to Y_t$ dans $(\mathcal{S})^*$, alors le théorème 1.2, nous permet de conclure que $X_t^{(\epsilon)} \to X_t$ dans $(\mathcal{S})^*$, où X_t est la solution de l'équation (1.31) .

Dans la suite de cette section, nous traitons un cas particulier

$$\sigma(t,s) = f(t)\sigma(s) \quad ; b(t,s) = f(t)b(s)$$

$$Y_t \equiv Y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(t_1 \cdots t_n) dB_t^{\otimes n} \in \mathcal{L}^2(\mu)$$

Nous allons prouver que dans cette situation la solution de l'équation (1.31) est en réalité dans $\mathcal{L}^2$.

Théorème 1.7 *1. Supposons $\delta \leq f \leq \frac{1}{\delta}$ (δ est une constante positive), $f' \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\|A\sigma f\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Soit $Y_t \equiv Y_0$ et supposons que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \|A^{\otimes n} F_n\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

alors la solution X_t de (1.31) est dans $\mathcal{L}^2(\mu)$.

$$X_t = -\int_0^t \frac{f(t)f'(s)}{f^2(s)} \left[Y_0 \diamond \exp(X_t^{(0)} - X_s^{(0)} - \frac{1}{2}(< X^{(0)} >_t - < X^{(0)} >_s)) \right] ds \quad (1.37)$$

$$+ \frac{f(t)}{f(0)} \left[Y_0 \diamond \exp(X_t^{(0)} - \frac{1}{2} < X^{(0)} >_t) \right]$$

où $X_t^{(0)} = \int_0^t \sigma(s)f(s)dB_s + \int_0^t b(s)f(s)ds$.

2. Supposons que $f' \in \mathcal{L}^4_{loc}(\mathbb{R}_+), \delta \leq f \leq \frac{1}{\delta}$. Soit $Y_t \equiv Y_0 \in \mathcal{L}^2(\mu)$ et

$$\int\int |\mathcal{H}Y_0(\xi + i\eta)|^4 d\lambda(\xi) d\lambda(\eta) < +\infty$$

où $d\lambda$ est la mésure définie .

Alors $X_t \in \mathcal{L}^2(\mu)$ et (1.37) est satisfaite.

Preuve :

1. La solution $X_t \in (\mathcal{S})^*$ trouvée dans le théorème 1.6 satisfait

$$\mathcal{S}X_t(\phi) = \mathcal{S}Y_0(\phi) + \int_0^t f(t)b(s)\mathcal{S}X_s(\phi)ds + \int_0^t f(t)\sigma(s)\phi(s)\mathcal{S}X_s(\phi)ds$$

Posons $\overline{g}_t(\phi) = \frac{\mathcal{S}X_t(\phi)}{f(t)}$, on a donc

$$\overline{g}_t(\phi) = \frac{\mathcal{S}Y_0(\phi)}{f(t)} + \int_0^t f(s)b(s)\overline{g}_s(\phi)ds + \int_0^t \sigma(s)f(s)\overline{g}_s(\phi)\phi(s)ds$$

Nous avons donc

$$\mathcal{S}X_t(\phi) = -\int_0^t \frac{f(t)f'(s)}{f^2(s)}\mathcal{S}Y_0(\phi)\exp(\int_s^t \sigma(u)f(u)\phi(u)du + \int_s^t b(u)f(u)du) \quad (1.38)$$

$$+\frac{f(t)}{f(0)}\mathcal{S}Y_0(\phi)\exp(\int_0^t \sigma(s)f(s)\phi(s)ds + \int_0^t b(s)f(s)ds)$$

Ceci donne la formule (1.37).

On note $X_t^{(1)}$ et $X_t^{(2)}$ les deux parties de (1.37). On a donc

$$\mathcal{S}X_t^{(1)}(\phi) = -\int_0^t \frac{f(t)f'(s)}{f^2(s)}\mathcal{S}Y_0(\phi)\exp(\int_s^t \sigma(u)f(u)\phi(u)du + \int_s^t b(u)f(u)du)ds \quad (1.39)$$

Supposons maintenant que $X_t^{(1)} \in (\mathcal{S})^*$ ait l'extension formelle

$$X_t^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} G_{n,t}(s_1, \cdots, s_n)dB_s^{\otimes n}$$

Puisque $\mathcal{S}X_t^{(1)}(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} < G_{n,t}, \phi^{\otimes n} >$ (voir [44]). (1.39) indique que

$$G_{n,t} = -\int_0^t \frac{f(t)f'(s)}{f^2(s)}\exp(\int_s^t b(u)f(u)du)\sum_{m=0}^{n} F_{n-m}\hat{\otimes}\frac{(\overline{\sigma}_{s,t})^{\otimes m}}{m!}ds$$

où $\overline{\sigma}_{s,t}(u) = \sigma(u)f(u)\mathbf{1}_{[s,t]}(u)$. Donc

$$\begin{aligned}
\|G_{n,t}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} &\leq (\int_0^t \frac{f^2(t)f'(s)^2}{f^4(s)} \exp(2\int_s^t b(u)f(u)du)ds) \int_0^t \| \sum_{m=0}^n F_{n-m} \hat{\otimes} \frac{(\overline{\sigma}_{s,t})^{\otimes m}}{m!} \|^2_{\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}^n}} ds \\
&\leq C_t \int_0^t (n+1) \sum_{m=0}^n \|F_{n-m}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n-m})} \frac{(\|\overline{\sigma}_{s,t}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})})^m}{(m!)^2} ds \\
&\leq C_t(n+1)t \sum_{m=0}^n \|F_{n-m}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n-m})} \frac{(\|\overline{\sigma}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})})^m}{(m!)^2}
\end{aligned}$$

où $\overline{\sigma}(u) = \sigma(u)f(u)$ et C_t est une constante.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n!\|G_{n,t}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} &\leq tC_t \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (n-m)!\|F_{n-m}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n-m})} \frac{(\|\overline{\sigma}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})})^m}{(m!)} \\
&\leq tC_t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (n+1)2^{-2n} \binom{n}{m} (n-m)!\|A^{\otimes n-m}F_{n-m}\|^2_{\mathcal{L}^2} \frac{(\|A\overline{\sigma}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})})^m}{(m!)} \\
&\leq tC_t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (n-m)!\|A^{\otimes n-m}F_{n-m}\|^2_{\mathcal{L}^2} \frac{(\|A\overline{\sigma}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})})^m}{(m!)} \\
&\leq tC_t (\sum_{n=0}^{\infty} n!\|A^{\otimes n}F_n\|^2_{\mathcal{L}^2}) \exp(\|A\overline{\sigma}\|^2_{\mathcal{L}^2}) < +\infty.
\end{aligned}$$

Cela montre que $X_t^{(1)} \in \mathcal{L}^2(\mu)$. De même, nous avons que $X_t^{(2)} \in \mathcal{L}^2(\mu)$

2. D'après l'estimation

$$\mathbb{E}[|X|^p] \leq \liminf_{n,k\to\infty} \int\int |\tilde{X}^{(n,k)}(\xi + i\eta)|^p d\lambda(\xi)d\lambda(\eta) \quad , pour\ p \in [1, \infty)$$

il suffit de prouver que

$$\int\int |\mathcal{S}X_t((\xi_1 + i\eta_1)e_1 + \cdots + (\xi_n + i\eta_n)e_n + \cdots)|^2 d\lambda(\xi)d\lambda(\eta) < +\infty \qquad (1.40)$$

En fait, de (1.38) nous savons que

$$\lim_{N\to\infty}\int\int|\mathcal{S}X_t((\xi_1+i\eta_1)e_1+\cdots+(\xi_N+i\eta_N)e_N)|^2d\lambda(\xi)d\lambda(\eta)$$

$$\leq C_0(\int\int|\mathcal{H}Y_0(\xi+i\eta)|^4d\lambda(\xi)d\lambda(\eta))\times$$

$$\lim_{N\to\infty}\int\int|\exp(\int_s^t\sigma(u)f(u)((\xi_1+i\eta_1)e_1+\cdots+(\xi_N+i\eta_N)e_N)|^4d\lambda(\xi)d\lambda(\eta)$$

$$\leq C_1(\lim_{N\to\infty}\int\exp(4\sum_{i=1}^n\xi_i\int_0^t\sigma(u)f(u)e_i(u)du)d\lambda(\xi))$$

$$\leq C_1\exp(8\int_0^t\sigma^2(u)f^2(u)du)<+\infty,$$

où C_0 et C_1 sont des constantes appropriées. Ceci termine la preuve du théorème.

Chapitre 2

Analyse stochastique des EDSs de Volterra

2.1 Existence et unicité des solutions des équations stochastiques de Volterra avec noyaux singuliers et coefficients non Lipschitziens

2.1.1 Introduction et principaux résultats

Dans cette partie, considérons l'équation différentielle stochastique de Volterra suivante, qui a été étudiée pour la première fois par Berger et Mizel [4] :

$$X_t = x + \int_0^t b(t,s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(t,s,X_s)dW_s; \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ sont des fonctions mésurables de Borel, et $\{W_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard m-dimensionnel défini sur l'espace de Wiener classique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à savoir $\Omega = C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ à $\mathbb{R}^m$ avec la valeur zéro à l'instant 0, qui est doté de la topologie de convergence uniforme sur des intervalles compacts, et P la mésure de Wiener sur le σ-algèbre de Borel F. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la σ-algèbre P-complète et naturelle associée à $\{W_t, t \geq 0\}$. Ici, l'intégrale stochastique est l'intégrale habituelle.

De telles équations se posent dans nombreuses applications telles que la finance mathématique, la biologie, etc. et au cours des 30 dernières années, la théorie des équations différentielles stochastiques de Volterra (ESV) a été développée dans diverses directions. La plupart des résultats connus concernent l'équation (2.1) avec des noyaux réguliers ; voir par exemple Berger et Mizel [4], Oksendal et Zhang [40], Protter [46], Pardoux et Protter [41] et Rodkina [48]. Lorsque les coefficients $\sigma(t,s,x)$ et $b(t,s,x)$ sont des courbes de Lipschitz continues dans x uniformément par rapport à t et s, l'existence et l'unicité d'une solution continue et adaptée à l'équation (2.1) peut tre prouvé directement en utilisant des approximations successives et l'inégalité de Gronwall. En particulier, Protter [46] a étudié l'ESV régie par une semimartale générale (pas nécessairement continue) et résolu une conjecture de Berger et Mizel [4]. Ensuite, Pardoux et Protter [41] ont examiné l'anticipation des équations différentielles stochastiques de Volterra à l'aide du calcul de Malliavin.

D'autre part, il y a aussi certains papiers qui considèrent l'équation (2.1) impliquant les noyaux avec des singularités ; voir Cochran et al. [7], Coutin et Decreusefond [8], Decreusefond [10] et leurs références. En particulier, en utilisant l'analyse du bruit blanc, Cochran et al.[7] ont obtenu les propriétés d'existence, d'unicité et de continuité des solutions d'ESV avec des noyaux intégraux singuliers et des termes anticipés. Cependant, à notre connaissance, peu de travaux ont été réalisés sur les ESVs avec des coefficients non Lipschitziens. Pour clarifier notre objectif principal dans ce chapitre, considérons l'EDS suivante avec des intégrales fractionnaires :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\alpha_1}} \tilde{b}(t,s,X_s)ds + \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\alpha_2}} \tilde{\sigma}(t,s,X_s)dW_s \tag{2.2}$$

Il est clair que la fonction du noyau $K(t,s) := \frac{\mathbf{1}_{[0<s<t]}}{(t-s)^{\alpha}}$ est singulière au point t. De plus, dans certaines situations, les coefficients $\tilde{b}$ et $\tilde{\sigma}$ sont des fonctions non-Lipschitziens et ont un certain module de continuité donné par une fonction concave (voir la condition

(H1) dans le théorème 2.1). Ces deux caractéristiques de cette équation nous apporteront quelques difficultés. Tout d'abord, la puissante inégalité de Gronwall−Bellman−Bihari ne peut être appliquée directement pour prouver l'existence et le caractère unique de solutions fortes. Deuxièmement, la formule d'Itô et l'inégalité maximale de Doob habituellement utilisée dans les études sur les équations différentielles stochastiques (EDSs) ne sont pas disponibles dans ce cas. Les discussions ci−dessus sont en fait notre principale motivation pour étudier l'ESV général (2.1) avec des noyaux singuliers et des coefficients non Lipschitziens.

Les principaux résultats de ce chapitre se trouvent dans ([15],[22],[23],[24])

Théorème 2.1 *Supposons que*

(**H1**) *:Pour certains $p > 2$ et pour tout $T > 0$, il existe $C_T > 0$, de sorte que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $s, t \in [0, T]$*

$$|b(t,s,x) - b(t,s,y)| \leq C_T \cdot K_1(t,s) \cdot \rho^{1/p}(|x-y|^p),$$

$$\|\sigma(t,s,x) - \sigma(t,s,y)\|^2 \leq C_T \cdot K_2(t,s) \cdot \rho^{2/p}(|x-y|^p)$$

et

$$\int_0^t (|b(t,s,0)| + \|\sigma(t,s,0)\|^2) ds \leq C_T$$

où K_i; $i = 1, 2$ sont deux fonctions positives sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$\int_0^t \left[K_1^{\frac{p}{p-1}}(t,s) + K_2^{\frac{p}{p-2}}(t,s)\right] \leq C_T, \qquad t \in [0,T]$$

et $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est concave et satisfait

$$\int_{0^+} \frac{1}{\rho(u)} du = +\infty \tag{2.3}$$

Il existe alors un processus unique progressivement mésurable $(X_t, t \geq 0)$ satisfaisant l'équation (2.1). Ce théorème sera prouvé par l'inégalité habituelle de Bihari [6] et la méthode d'itération de Picard.

Remarque : *Comparé au résultat bien connu de Yamada– Watanabe [53] concernant les EDSs ordinaires avec coefficients non-Lipschitziens [53], nos conditions sont plus fortes car nous travaillons avec des équations intégrales de type Volterra.*
Pour la régularité de la solution à l'équation (2.1), nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire (H1) définie ci-dessus.

Théorème 2.2 *En plus de (H1), nous supposons également que*
(**H2**) *Pour tout* $T > 0$*, il existe* $C_T > 0$*, de sorte que pour tout* $t, t', s \in [0, T]$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$

$$|b(t, s, x) - b(t', s, x)| \leq F_1(t', t, s) \cdot (1 + |x|),$$

$$\|\sigma(t, s, x) - \sigma(t', s, x)\|^2 \leq F_2(t', t, s) \cdot (1 + |x|^2)$$

et

$$\int_0^t (|b(t, s, 0)|^\theta + \|\sigma(t, s, 0)\|^{2\theta}) ds \leq C_T$$

où $\theta > 1$ *et* $F_i,\ i = 1, 2$ *sont deux fonctions positives sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *satisfaisantes pour certaines* $\gamma > 0$

$$\int_0^t (F_1(t', t, s) + F_2(t', t, s)) ds \leq C_T |t - t'|^\gamma$$

Donc, la solution unique $(X_t, t \geq 0)$ *a une version continue de Hölder d'ordre* $\delta \in (0, \frac{1}{p} \wedge \frac{\theta-1}{2\theta} \wedge \frac{\gamma}{2})$.
Les résultats ci-dessus seront prouvés dans la section 2 et étendus dans la section 3 au cas $p = 2$ *sous une autre condition sur le noyau. Enfin, la section 4 applique ces résultats à l'équation (2.2).*

2.2 Preuves des principaux résultats

Rappelons tout d'abord l'inégalité de Bihari suivante :

Lemme 2.2.1 *Soit $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et croissante telle que $\rho(x) > 0$ lorsque $x > 0$. Si z, q sont deux fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}_+$ telles que*

$$z(t) \leq z(0) + \int_0^t q(s)\rho(z(s))ds, \qquad t \geq 0$$

alors

$$z(t) \leq f^{-1}(f(z(s)) + \int_0^t q(s)ds)$$

où $f(x) := \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(y)}dy$ définie pour $x_0 > 0$.

Maintenant, nous prouvons le théorème 2.1

2.2.1 Preuve du théorème 2.1

Avant de prouver l'existence et l'unicité d'un processus progressivement mésurable (X_t) satisfaisant l'équation (2.1) nous prouvons l'existence des intervalles de temps $[0, T]$ avec $T > 0$. Soit $\mathcal{M}_T$ la famille des ensembles progressivement mésurables de $[0, T] \times \Omega$. Notons

$$\mathbb{L}_T^p := L^p([0, T] \times \Omega; \mathcal{M}_T; p \times dt; \mathbb{R}^d)$$

Nous construisons la suite itérée de Picard comme suit :

$$X^{(0)} \equiv x \in \mathbb{R}^d$$

$$X_t^{(n)} = x + \int_0^t b(t, s, X_s^{(n-1)})ds + \int_0^t \sigma(t, s, X_s^{(n-1)})dW_s, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

Puisque σ est concave, nous avons

$$\rho^{1/p}(u^p) \leq C(1 + u^p)^{1/p} \leq C(1 + u)$$

Par conséquent,

$$|b(t, s, x)| \leq |b(t, s, 0)| + CK_1(t, s)(1 + |x|),$$

$$\|\sigma(t, s, x)\|^2 \leq \|\sigma(t, s, 0)\|^2 + CK_2(t, s)(1 + |x|^2)$$

Ensuite, par un simple calcul standard, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t^{(n)}|^p \le C_p \cdot \big[|x|^p + (\int_0^t |b(t,s,0)|ds)^p + (\int_0^t \|\sigma(t,s,0)\|^2 ds)^{p/2}\big]\\
+ C_p \cdot \mathbb{E}[\int_0^t K_1(t,s)\cdot(1+|X_s^{(n-1)}|)ds]^p + C_p \cdot \mathbb{E}[\int_0^t K_2(t,s)\cdot(1+|X_s^{(n-1)}|^2)ds]^{p/2}\\
\le C_{p,T} + C_p \cdot (\int_0^t K_1^{\frac{p}{p-1}}(t,s)ds)^{p-1} \cdot \mathbb{E}\int_0^t (1+|X_s^{(n-1)}|^p)ds\\
+ C_p \cdot (\int_0^t K_2^{\frac{p}{p-2}}(t,s)ds)^{\frac{p-2}{2}} \cdot \mathbb{E}\int_0^t (1+|X_s^{(n-1)}|^p)ds\\
= C_{p,T} + C_{p,T} \cdot \int_0^t \mathbb{E}|X_s^{(n-1)}|^p ds\end{aligned}$$

Par induction on obtient

$$\mathbb{E}|X_t^{(n)}|^p \le C_{p,T} \cdot e^{C_{p,T}} + |X|^p \cdot \frac{(C_{p,T}\cdot t)^n}{n!}$$

On a donc

$$\sup_n \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^{(n)}|^p < +\infty \tag{2.5}$$

et par conséquent, nous savons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $X^{(n)} \in \mathbb{L}_T^p$. Avant de terminer la preuve du théorème on ait besoin de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gandy.

Rappelons tout d'abord l'inégalité de BDG suivante :

Lemme :

soit $p > 0$ un réel, il existe deux constantes C_p et C_N, pour toute martingale locale continue X ,nulle en 0 telle que

$$C_p\mathbb{E}[< X, X >_\infty^{\frac{p}{2}}] \le \mathbb{E}[\sup_{t\ge 0}|X|^p] \le C_N[\mathbb{E}(< X, X >)_\infty^{\frac{p}{2}}]$$

En particulier, si $T > 0$,

$$C_p\mathbb{E}[< X, X >_T^{\frac{p}{2}}] \le \mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}|X|^p] \le C_N[\mathbb{E}(< X, X >)_T^{\frac{p}{2}}]$$

Soit $Z_t^{n,m} := X_t^{(n)} - X_t^{(m)}$.

En appliquant l'inégalité de BDG, l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Jensen, par (**H1**) nous avons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Z_t^{n+1,m+1}|^p \\
&\le 2^{p-1}\mathbb{E}|\int_0^t (b(t,s,X_s^{(n)}) - b(t,s,X_s^{(m)}))ds|^p + 2^{p-1}\mathbb{E}|\int_0^t (\sigma(t,s,X_s^{(n)}) - \sigma(t,s,X_s^{(m)}))dW_s|^p \\
&\le C_{p,T}\mathbb{E}|\int_0^t K_1(t,s)\cdot \rho^{1/p}(|Z_s^{n,m}|^p)ds|^p + C_{p,T}\mathbb{E}|\int_0^t K_2(t,s)\cdot \rho^{2/p}(|Z_s^{n,m}|^p)ds|^{p/2} \\
&\le C_{p,T}(\int_0^t K_1^{\frac{p}{p-1}}(t,s)ds)^{p-1}\mathbb{E}\int_0^t \rho(|Z_s^{n,m}|^p)ds + C_{p,T}(\int_0^t K_2^{\frac{p}{p-2}}(t,s)ds)^{\frac{p-2}{2}}\mathbb{E}\int_0^t \rho(|Z_s^{n,m}|^p)ds \\
&\le C_{p,T}\int_0^t \mathbb{E}(\rho(|Z_s^{n,m}|^p))ds \\
&\le C_{p,T}\int_0^t \rho(\mathbb{E}|Z_s^{n,m}|^p)ds
\end{aligned}
$$

En intégrant les deux côtés et en appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{E}|Z_s^{n+1,m+1}|^p ds &\le \int_0^t C_{p,T}\int_0^t \rho(\mathbb{E}|Z_r^{n,m}|^p)drds \\
&\le C_{p,T}\int_0^t s\cdot[\int_0^s \rho(\mathbb{E}|Z_r^{n,m}|^p)\cdot\frac{1}{s}dr]ds \\
&\le C_{p,T}\cdot t\int_0^t \rho(\int_0^s \mathbb{E}|Z_r^{n,m}|^p)\cdot\frac{1}{s}dr]ds
\end{aligned}
$$

Notons

$$h_{n+1,m+1}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}|Z_r^{n+1,m+1}|^p ds$$

Donc

$$h_{n+1,m+1}(t) \le C_{p,T}\int_0^t \rho(h_{n,m}(s))ds$$

En se servant de (2.5), il est facile de voir que

$$\sup_{n,m}\sup_{t\in[0,T]} h_{n,m}(t) < +\infty$$

Si on considère $h(t) := \limsup_{n,m\to\infty} h_{n,m}(t)$ et par le lemme de Fatou, on obtient

$$h(t) \leq C_{p,T} \int_0^t \rho(h(s))ds$$

D'après le lemme 2.2.1, nous obtenons $h(t) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Cela signifie que $\{X^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}_T^p$. Donc, il y a un $X \in \mathbb{L}_T^p$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T |X_t^{(n)} - X_t|^p dt = 0$$

De plus, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \int_0^T \Big| \int_0^t \Big(b(t,s,X_s^{(n)}) - b(t,s,X_s) \Big) ds \Big|^p dt \\
&\leq \mathbb{E} \int_0^T C_{p,T} \Big[\Big(\int_0^t K_1^{\frac{p}{p-1}}(t,s)ds \Big)^{p-1} \cdot \int_0^t \rho(|X_s^{(n)} - X_s|^p) ds \Big] dt \\
&\leq C_{p,T} \int_0^T \int_0^t \rho\Big(\mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s|^p \Big) ds dt \\
&\leq C_{p,T} \cdot T^2 \int_0^T \rho\Big(\mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s|^p \Big) \cdot \frac{1}{T} ds \\
&\leq C_{p,T} \cdot \rho\Big(\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s|^p ds \Big) \to 0
\end{aligned}$$

et de même,

$$\mathbb{E} \int_0^T \Big| \int_0^t \Big(\sigma(t,s,X_s^{(n)}) - \sigma(t,s,X_s) \Big) dW_s \Big|^p dt \to 0$$

En passant à la limite dans (2.4) cela achève la preuve de l'existence. L'unicité découle d'un calcul similaire.

Pour étudier la régularité de la solution , nous prouvons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.2.2 *Supposons que* (**H1**) *est satisfaite.Nous avons donc pour tout $q \geq 2$ et tout $T > 0$,*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t|^q < \infty$$

Preuve : On a

$$\mathbb{E}|X_t|^q \leq C_T \cdot \{|x|^q + \Big|\int_0^t b(t,s,0)ds\Big|^q + [\int_0^t \|\sigma(t,s,0)\|^2 ds]^{q/2} + \mathbb{E}\Big|\int_0^t [b(t,s,X_s) - b(t,s,0)]ds\Big|^q$$
$$+ \mathbb{E}\Big|\int_0^t [\sigma(t,s,X_s) - \sigma(t,s,0)]dW_s\Big|^q\}$$

Sous (**H1**) et en supposant $q > p$, nous avons donc par l'inégalité de BDG et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t|^q &\leq C_{q,T} + C_{q,T} \cdot \mathbb{E}\Big|\int_0^t K_1(t,s)\rho^{1/p}(|X_s|^p)ds\Big|^q + C_{q,T} \cdot \mathbb{E}\Big|\int_0^t K_2(t,s)\rho^{2/p}(|X_s|^p)ds\Big|^{q/2}\\
&\leq C_{q,T} + C_{q,T}\Big(\int_0^t K_1^{\frac{q}{q-1}}(t,s)ds\Big)^{q-1} \cdot \mathbb{E}\int_0^t \rho^{q/p}(|X_s|^p)ds\\
&\quad + C_{q,T}\Big(\int_0^t K_2^{\frac{q}{q-2}}(t,s)ds\Big)^{\frac{q-2}{2}} \cdot \mathbb{E}\int_0^t \rho^{q/p}(|X_s|^p)ds\\
&\leq C_{q,T} + C_{q,T}\int_0^t \mathbb{E}|X_s|^q ds\end{aligned}$$

Donc, l'inégalité de Gronwall donne l'estimation souhaitée.

Nous prouvons maintenant le théorème 2.2

2.2.2 Preuve du théorème 2.2

Notons

$$M_t := \int_0^t \sigma(t,s,X_s)dW_s$$

Supposons que $t' > t$. On a

$$\begin{aligned}M_{t'} - M_t &= \int_t^{t'} \sigma(t',s,X_s)dW_s + \int_0^t [\sigma(t',s,X_s) - \sigma(t,s,X_s)]dW_s\\
&= I_1(t,t') + I_2(t,t')\end{aligned}$$

Pour $I_1(t,t')$, par le lemme précédent, on a pour $q > \max(p, \frac{2}{\gamma})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|I_1(t,t')|^q &\leq \mathbb{E}\Big(\int_t^{t'} \|\sigma(t',s,X_s\|^2 ds\Big)^{q/2} \\
&\leq \mathbb{E}\Big(\int_t^{t'} [2\|\sigma(t',s,0)\|^2 + 2CK_2(t',s)(1+|X_s|^2)]ds\Big)^{q/2} \\
&\leq C\Big(\int_t^{t'} |\sigma(t',s,0)|^2 ds\Big)^{q/2} + C\Big(\int_t^{t'} K_2(t',s)(1+(\mathbb{E}|X_s|^q)^{2/q})ds\Big)^{q/2} \\
&\leq C\Big(\int_t^{t'} |\sigma(t',s,0)|^{2\theta} ds\Big)^{q/2\theta}(t'-t)^{(\theta-1)q/2\theta} \\
&\qquad + C\Big(\int_0^{t'} K_2^{\frac{p}{p-2}}(t',s)ds\Big)^{q(p-2)/2p}(t'-t)^{q/p} \\
&\leq C\big((t'-t)^{q/p}\big) + (t',t)^{(\theta-1)q/2\theta}
\end{aligned}$$

dans la troisième étape, nous avons utilisé l'inégalité étendue de Minkowski [24] pour obtenir

$$\Big[\mathbb{E}\Big(\int_t^{t'} K_2(t',s)(1+|X_s|^2)ds\Big)^{q/2}\Big]^{2/q} \leq \int_t^{t'} \Big[\mathbb{E}\Big(1+|X_s|^2\Big)^{q/2}\Big]^{2/q} \cdot K_2(t',s)ds$$

De même, pour $I_2(t,t')$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|I_2(t,t')|^q &\leq \mathbb{E}\Big(\int_0^t |\sigma(t',s,X_s) - \sigma(t,s,X_s)|^2 ds\Big)^{q/2} \\
&\leq C\mathbb{E}\Big(\int_0^t F_2(t',t,s)(1+|X_s|^2)ds\Big)^{q/2} \\
&\leq \Big(\int_0^t F_2(t',t,s)(1+(\mathbb{E}|X_s|^q)^{2/q} ds\Big)^{q/2} \\
&\leq C|t-t'|^{q\gamma/2}
\end{aligned}$$

Le critère de Kolmogorov donne la continuité Hölderienne de $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$

Nous pouvons également traiter avec

$$t \mapsto N_t := \int_0^t b(t,s,Xs)ds$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

2.3 Extension au cas p=2

Dans le cas de noyaux entiers fractionnaires spéciaux, en utilisant une inégalité de type intégrale de Bihari (voir le lemme 2.3.2 ci-dessous), nous pouvons affaiblir les hypothèses du théorème 2.1 et avoir

Théorème 2.3 *Supposons que*

($\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{1}$) *pour tout* $T > 0$ *, il existe* $C_T > 0$ *tel que pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *et* $0 \leq s < t \leq T$

$$|b(t,s,x) - b(t,s,y)| \leq C_T \cdot [(t-s)^\alpha s^\beta]^{-1/2} \cdot \rho^{1/2}(|x-y|^2)$$

$$\|\sigma(t,s,x) - \sigma(t,s,y)\| \leq C_T \cdot [(t-s)s^\beta]^{-1/4} \cdot \rho^{1/2}(|x-y|^2)$$

et

$$\int_0^t (|b(t,s,0)| + \|\sigma(t,s,0)\|^2) ds \leq C_T$$

où $\alpha, \beta \in [0,1)$ *et* $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction concave et strictement croissante satisfaisant*

$$\int_{0+} \frac{1}{\rho \circ \rho(u)} du = +\infty \tag{2.6}$$

Il existe alors un processus unique progressivement mésurable $\{X_t, t \geq 0\}$ *satisfaisant l'équation (2.1). De plus, si* (**H2**) *est satisfaite, alors la solution unique* $\{X_t, t \geq 0\}$ *a une version continue de Hölder d'ordre* $\delta \in (0, \frac{1}{p} \wedge \frac{\theta-1}{2\theta} \wedge \frac{\gamma}{2})$.

Un exemple typique satisfaisant (2.6) est

$$\rho(u) := \begin{cases} u[-\log u]^{1/2}, & u \leq \eta \\ \left([-\log \eta]^{1/2} - \frac{1}{2}[-\log \eta]^{(1/2)-1}\right) u + \frac{1}{2}[-\log \eta]^{(1/2)-1}, & u > \eta. \end{cases}$$

Le lemme suivant est une légère extension du lemme 2.3 dans Zhang (2006)[58].

Lemme 2.3.1 *Soit $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction concave continue et strictement croissante satisfaisant (2.6) pour certains $\varepsilon > 0$.*
Étant donné une fonction $z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, supposons que pour quelque $\alpha \in [0,1)$ nous avons

$$z(t) \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-s)s^\alpha}} \rho(z(s))ds$$

pour tous $t \geq 0$.
Donc $z(t) = 0$ pour tous $t > 0$.

Preuve
Soit $A_\alpha := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u)u^\alpha}} du$.On a alors $0 < A_\alpha < +\infty$.

Sans aucune perte de généralité, il suffit de prouver que $z(t) = 0$ pour tout $t \in [0, A_\alpha^{\frac{-2}{1-\alpha}}]$.
Puisque ρ est concave et $\rho(0) = 0$, on a

$$\alpha\rho(u) \leq \rho(\alpha u), \quad \forall \alpha \in [0,1], u \geq 0.$$

Par $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t-s)s^\alpha}} ds = A_\alpha t^{\frac{1-\alpha}{2}} \leq 1$ et l'inégalité de Jensen, nous avons

$$\begin{aligned}
z(t) &\leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-s)s^\alpha}} \rho\Big(\int_0^s \frac{1}{\sqrt{(s-r)r^\alpha}} \rho(z(r))dr\Big)ds \\
&\leq A_\alpha t^{\frac{1-\alpha}{2}} \Big(\int_0^t \frac{1}{A_\alpha t^{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{(t-s)s^\alpha}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{(s-r)r^\alpha}} \rho(z(r))drds\Big) \\
&\leq \rho\Big(\int_0^t \big(\int_r^t \frac{1}{\sqrt{(t-s)s^\alpha}} \frac{1}{\sqrt{(s-r)r^\alpha}} ds\big) \rho(z(r))dr\Big) \\
&\leq \rho\Big(\int_0^t 4r^{-\alpha} \rho(z(r))dr\Big)
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que $\int_r^t \frac{1}{\sqrt{(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{(s-r)}} ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du \leq 4$.

Notons

$$f(t) := \int_0^t 4r^{-\alpha} \rho(z(r))dr.$$

Puisque ρ est croissant, on a alors

$$f'(t) \leq 4t^{-\alpha}\rho \circ \rho(f(t))$$

i.e :

$$f(t) \leq 4s^{-\alpha}\rho \circ \rho(f(s))ds.$$

Par (2.6) et le lemme 2.2.1, nous obtenons que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, A_\alpha^{\frac{-2}{1-\alpha}}]$ et donc $z(t) = 0$ pour tout $t \in [0, A_\alpha^{\frac{-2}{1-\alpha}}]$.
Ce qui achève la preuve du lemme.

2.3.1 Preuve du théorème 2.3

Existence et unicité : suite à la démonstration du théorème 2.1, nous avons par l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|Z_t^{n+1,m+1}|^2 &\leq C_T\mathbb{E}\Big|\int_0^t [(t-s)^\alpha s^\beta]^{-1/2} \cdot \rho^{1/2}(|Z_s^{n,m}|^2)ds\Big|^2 + C_T\int_0^t ((t-s)s^\beta)^{-1/2} \cdot \mathbb{E}_\rho(|Z_s^{n,m}|^2)ds \\
&\leq C_T(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-\beta}ds)\int_0^t \mathbb{E}_\rho(|Z_s^{n,m}|^2)ds + C_T\int_0^t ((t-s)s^\beta)^{-1/2} \cdot \rho(\mathbb{E}|Z_s^{n,m}|^2)ds \\
&\leq C_T\int_0^t ((t-s)s^\beta)^{-1/2} \cdot \rho(\mathbb{E}|Z_s^{n,m}|^2)ds
\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé l'inégalité suivante :

$$\int_0^t ((t-s)^{-\alpha}s^{-\beta}ds = Ct^{1-\alpha-\beta} \leq Ct^{1-\alpha+(1-\beta)/2}((t-s)s^\beta)^{-1/2}$$

On note

$$Q(t) := \int_0^t ((t-s)s^\beta)^{-1/2}ds = Ct^{(1-\beta)/2}$$

En multipliant les deux côtés par $((t-s)s^\beta)^{-1/2}$ et en intégrant, on obtient par l'inégalité de Jensen

$$\int_0^t ((t-s)s^{\beta})^{-1/2}\mathbb{E}|Z_t^{n+1,m+1}|^2 ds \le C_T((t-s)s^{\beta})^{-1/2}\cdot Q(s)\int_0^s \rho\Big(\mathbb{E}|Z_r^{n,m}|^2\Big)\frac{((s-r)r^{\beta})^{-1/2}}{Q(s)}drds$$

$$\le C_T\cdot Q(t)\int_0^t ((t-s)s^{\beta})^{-1/2}\cdot\rho\Big(\frac{1}{Q(s)}\int_0^t \mathbb{E}|Z_r^{n,m}|^2\cdot((s-r)r^{\beta})^{-1/2}dr\Big)ds$$

Le reste de la preuve est similaire à la preuve du théorème 2.1 et du lemme 2.3.1.
Régularité : Sous (**H1**), nous avons cela pour tout $q>2$,

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}|X_t|^q \le C_{q,T}<\infty$$

En vertu de la preuve du lemme 2.2.2 et en prenant $q>\frac{4}{1-\beta}$, nous avons

$$\mathbb{E}|X_t|^q \le C_q\cdot\Bigg[|x|^q+\Big|\int_0^t b(t,s,0)ds\Big|^q+\big[\int_0^t\|\sigma(t,s,0)\|^2ds\big]^{q/2}$$

$$+\mathbb{E}\Big|\int_0^t[b(t,s,X)-b(t,s,0)]ds\Big|^q+\mathbb{E}\Big|\int_0^t[\sigma(t,s,X)-\sigma(t,s,0)]dW_s\Big|^q\Bigg]$$

$$\le C_{q,T}+C_{q,T}\cdot\mathbb{E}\Big|\int_0^t((t-s)^{\alpha}s^{\beta})^{-1/2}\cdot\rho^{1/2}(|X_s|^2)ds\Big|^q$$

$$C_{q,T}\cdot\mathbb{E}\Big|\int_0^t((t-s)s^{\beta})^{-1/2}\cdot\rho(|X_s|^2)ds\Big|^{q/2}$$

$$\le C_{q,T}+C_{q,T}\cdot\mathbb{E}\Big|\int_0^t((t-s)s^{\beta})^{-1/2}\cdot\rho(|X_s|^2)ds\Big|^{q/2}$$

$$\le C_{q,T}+C_{q,T}\cdot\Big(\int_0^t[(t-s)s^{\beta}]^{-\frac{q}{2(q-2)}}ds\Big)^{\frac{q-2}{2}}\mathbb{E}\Big[\int_0^t\rho^{q/2}(|X_s|^2)ds\Big]$$

$$\le C_{q,T}+C_{q,T}\cdot\int_0^t\mathbf{E}|X_t|^q ds$$

Donc, l'inégalité de Gronwall donne l'estimation souhaitée. Le reste de la preuve est similaire à la preuve du théorème 2.3.

2.4 EDS avec intégrale fractionnaire

Dans cette section, nous considérons l'équation. (2.2). Notons que pour $0 < \delta < 1$, il est vrai que pour tout $0 \leq t < t' \leq T$

$$0 \leq \int_0^t \Big(\frac{1}{(t-s)^\delta} - \Big(\frac{1}{(t'-s)^\delta}\Big) ds = \frac{1}{1-\delta}\big[t^{1-\delta} - t'^{1-\delta} + (t'-t)^{1-\delta}\big]$$
$$\leq \frac{(t'-t)^{1-\delta}}{1-\delta}$$

Nous avons ensuite le résultat suivant qui peut être consulté sur ([54]).

Théorème 2.4 *Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée*

1. – *(i) Il y a un* $\beta > 0$ *et* $C_T > 0$ *tels que pour tous* $x \in \mathbb{R}^d$ *et* $s, t, t' \in [0, T]$

$$|\tilde{b}(t,s,x) - \tilde{b}(t',s,x)| + \|\tilde{\sigma}(t,s,x) - \tilde{\sigma}(t',s,x)\| \leq C_T|t-t'|^\beta(1+|x|)$$

   – *(ii) pour* $\alpha_1 \in (0,1)$ *et* $\alpha_2 \in (0,1/2)$ *Il existe certain* $p > \max(\frac{1}{1-\alpha_1}, \frac{2}{1-2\alpha_2})$, *tel que pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *et* $s, t, t' \in [0, T]$

$$|\tilde{b}(t,s,x) - \tilde{b}(t,s,y)| \leq C_T \cdot \rho^{1/p}(|x-y|^p),$$

$$\|\tilde{\sigma}(t,s,x) - \tilde{\sigma}(t,s,y)\|^2 \leq C_T \cdot \rho^{2/p}(|x-y|^p)$$

   où $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est concave et satisfait (2.3).*

2. – *(i) même que (ii) de 1.*

   – *(ii) pour* $\alpha_1 \in (0,1/2)$ *et* $\alpha_2 \in (0,1/4)$ *et pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *et* $s, t \in [0, T]$

$$|\tilde{b}(t,s,x) - \tilde{b}(t',s,x)| + \|\tilde{\sigma}(t,s,x) - \tilde{\sigma}(t',s,x)\| \leq C_T \cdot \rho^{1/2}(|x-y|^2)$$

   où $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est concave et en augmentation satisfait (2.6).*

Donc, il existe une solution unique et continue adaptée à l'équation(2.2).

Chapitre 3

Etude de quelques exemples d'applications

3.1 EXEMPLE

Un certain nombre d'applications des équations de Volterra peuvent être trouvées dans [[16], p. 4-13]. Nous présentons ici un exemple économique, avec une structure liée à l'exemple de la dynamique de population présenté dans l'Ex. 2.2 dans [16]. Notre exemple conduit à une équation différentielle stochastique de Volterra de la forme considérée dans la première partie du premier chapitre.

Un investissement dans une production économique, par exemple l'achat de nouveaux équipements de production, aura généralement des effets sur une longue période . Soit $X(t,u)$ la répartition du capital au temps t résultant des investissements qui ont l'âge u (c'est-à-dire qui ont été faits il y a u unités de temps). Plus précisément, soit

$$\int_U X(t,s)du$$

l'intégrale qui représente le capital total gagné au moment t de tous les investissements avec l'âge $u \in U$. Supposons que

$$\frac{\partial X(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial X(t,u)}{\partial u} = -m(u)X(t,s) \tag{3.1}$$

où $m(u) \geq 0$ représente le taux de "décès" des personnes travaillant dans la production. De plus, supposons que le montant du nouveau capital $X(t,0)$ au temps t soit décrit par l'équation

$$X(t,0) = \int_0^\infty X(t,u)p(u)du \tag{3.2}$$

où $p(u)$ est la productivité de l'équipement avec l'âge u, i.e : $p(u)$ est la production à l'âge u par unité de capital. (Dans ce modèle, nous ne considérons que la partie $X(t,u)$ du capital produit qui est réinvesti dans le processus de production).
Nous supposons que la distribution du capital initial $X(0,u) = \phi(u)$ est connue. Alors la solution $X(t,u)$ de (3.1) est donnée par

$$X(t,u) = \begin{cases} \phi(u-t) \cdot \exp(-\int_0^t m(s+u-t)ds), & \text{si } 0 \leq t < u \\ X(t-u,0) \cdot \exp(-\int_0^u m(s)ds), & \text{si } t \geq u. \end{cases} \tag{3.3}$$

En substituant ceci dans (3.2) nous obtenons l'équation de Volterra

$$X(t,0) = Y_t + \int_0^t K(t-s)X(s,0)ds \tag{3.4}$$

où

$$Y(t) = \int_0^\infty \phi(s)\exp(-\int_0^t m(s+r)dr)p(t+s)ds \tag{3.5}$$

et

$$K(t) = p(t)\exp(-\int_0^t m(s)ds) \tag{3.6}$$

Si la fonction de productivité $p(u)$ est soumise à des fluctuations aléatoires, nous pourrions modéliser $p(u)$ par

$$p(u) = p_0(u) + \epsilon W_u \tag{3.7}$$

où $\epsilon > 0$ et W_u dénote le bruit blanc comme avant. Ceci conduit à une équation différentielle stochastique de Volterra de la forme (1.4) avec $X_t = X(t,0)$,

$$b(t,s) = p_0(t,s)\exp(-\int_0^{t-s} m(r)dr); 0 \leq s \leq t \tag{3.8}$$

$$\sigma(t,s) = \epsilon \exp(-\int_0^{t-s} m(r)dr); 0 \leq s \leq t \tag{3.9}$$

et

$$Y_t = \int_0^{\infty} \phi(s)\exp(-\int_0^t m(s+r)dr)p_0(t+s)ds + \epsilon \int_t^{\infty} \phi(v-t)\exp(-\int_0^t m(v-t+r)dr)dB_v \tag{3.10}$$

Notons bien que Y_t n'est pas adapté dans ce cas.

3.2 Investissement optimal sur un marché financier modélisé par une équation de Volterra

Avant d'introduire l'exemple, nous avons besoin des définitions suivantes :

Définition 3.2.1 *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_\zeta$ l'ensemble des processus stochastiques avec espace de paramètres $[0,T]$ et $[0,T]\times\mathbb{R}$, respectivement.*
On définit les fonctions hamiltoniens

$$H_0 : [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{U}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathcal{R} \mapsto \mathbb{R}$$

et

$$H_1 : [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{U}\times\mathbb{R}\times\mathcal{L}\times\mathcal{L}_\zeta \mapsto \mathbb{R}$$

Par

$$H_0(t,x,v,p,q,r) := f(t,x,v) + b(t,t,x,v)p + \sigma(t,t,x,v)q + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,t,x,v,\zeta)r(\zeta)v(d\zeta)$$

et

$$H_1(t,x,v,p,D_tp(\cdot),\zeta p(\cdot)) := \int_t^T \frac{\partial b}{\partial s}(s,t,x,v)p(s)ds + \int_t^T \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t,x,v)\mathbb{E}[D_tp(s)|\mathcal{F}_t]ds$$
$$+ \int_t^T \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s,t,x,v,\zeta)\mathbb{E}[D_{t,\zeta}p(s)|\mathcal{F}_t]v(d\zeta)ds$$

Ici, $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des fonctions $r(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que la dernière intégrale ci-dessus converge.
Nous pouvons considérer $x,p,q,r=r(\cdot)$ comme des valeurs génériques pour les processus $X(t),p(t),q(t),r(t,\cdot)$, respectivement (voir ci-dessous). On définit

$$H(t,x,v,p(\cdot),q(\cdot),r(\cdot)) := H_0(t,x,v,p,q,r) + H_1(t,x,v,p(\cdot),D_tp(\cdot),D_{t,\zeta}p(\cdot)) \tag{3.11}$$

Définition 3.2.2 *L'équation déffirentielle stochastique rétrograde (backward stochastic differential equation) pour les processus adjoints $p(t),q(t),r(t,\cdot)$ est définie par*

$$\begin{cases} dp(t) := \frac{\partial H}{\partial x}(t)dt + q(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} r(t,\zeta)\tilde{N}(dt,d\zeta); 0 \le t \le T \\ p(T) := g'(X(T)), \end{cases} \tag{3.12}$$

où nous avons utilisé la notation simplifiée.

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(t,X(t),u(t),p(\cdot),q(\cdot),r(\cdot))dt$$

Définition 3.2.3 *Soit $\mathbb{D}_{1,2}^{(B)}$ l'espace des fonctions $F\in\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T,p)$ tel que*

$$\|F\|^2_{\mathbb{D}_{1,2}^{(B)}} := \sum_{n=1}^{\infty} nn!\|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2(\lambda^n)} < \infty.$$

Pour $F\in\mathbb{D}_{1,2}^{(B)}$ et $t\in[0,T]$, nous définissons la dérivé de Malliavin (ou dérivé de Hida-Malliavin ou le gradient stochastique) de F en t (par rapport à $B(\cdot)$), D_tF, par

$$D_tF = \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(f_n(\cdot),t) \tag{3.13}$$

où la notation $nI_{n-1}(f_n(\cdot),t)$ signifie que nous appliquons l'intégrale $(n-1)$ fois itérée à la première $n-1$ variables $t_1,\cdots,t_{n-1}$ de $f_n(t_1,\cdots,t_{n-1})$ et garder la dernière variable $t_n = t$ comme un paramètre.
On peut facilement vérifier que

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T (D_tF)^2 dt\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} nn!\|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2(\lambda^n)} < \infty = \|F\|^2_{\mathbb{D}^{(B)}_{1,2}}.$$

Donc $(t,\omega) \to D_tF(\omega)$ appartient à $\mathcal{L}^2(\lambda \times p)$.

Présentons maintenant l'exemple suivant :(dans un espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T},\mathbb{P})$)
Considérons un marché financier avec les deux possibilités d'investissement suivantes :
(i) Un actif sans risque avec un prix unitaire $S_0(t) = 1$; $t = 0$
(ii) Un actif risqué dans lequel les investissements ont des effets à long terme (mémoire), dans le sens suivant :
Si à l'instant $s = 0$ nous décidons d'investir la ou les fractions de la richesse totale actuelle $X(s)$ dans cet actif, alors nous supposons que la richesse $X(t) = X_\pi(t)$ à l'instant t est décrite par l'équation différentielle stochastique linéaire de Volterra

$$X(t) = x + \int_0^t b_0(t,s)\pi(s)X(s)ds + \int_0^t \sigma_0(t,s)\pi(s)X(s)dB(s); \quad t \ge 0. \tag{3.14}$$

Or, en forme différentielle,

$$\begin{cases} dX(t) = b_0(t,t)\pi(t)X(t)dt + \sigma_0(t,t)\pi(t)X(t)dB(t) \\ +[\int_0^t \frac{\partial b_0}{\partial t}(t,s)\pi(s)ds + \int_0^t \frac{\partial \sigma_0}{\partial t}(t,s)\pi(s)dB(s)] \qquad ;t \ge 0 \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{3.15}$$

Nous voyons donc que (3.15) diffère des équations de type classique de Black-Scholes par les deux derniers termes intégraux sur le côté droit. Ces termes représentent les effets à long terme (mémoire) de l'investissement de stratégie $\pi(\cdot)$.

Nous supposons que $b_0(t,s) = b_0(t,s,\omega)$ et $\sigma_0(t,s) = \sigma_0(t,s,\omega)$ sont des processus bornés, et que $b_0(t,s)$ et $\sigma_0(t,s)$ sont $\mathcal{F}_s$-mésurables pour tous s,t et p.s différenciables avec des dérivés liées par rapport à t pour tout s.

Nous supposons également que

$$p.s\ \sigma_0(t,s) \geq c_0; \forall t,s \in [0,T] \ \ pour\ certain\ c_0 > 0. \tag{3.16}$$

Dans cet exemple, on dit que π est admissible et on écrit $\pi \in \mathcal{A}$ si π est $\mathbb{F}$-adaptée , $\pi \in \mathcal{L}^2(d\lambda \times dp)$ et l'équation (3.14) a une solution unique avec $\pi X \in \mathcal{L}^2(d\lambda \times dp)$.

Nous supposons que $x > 0$. Si $\pi \in \mathcal{A}$, il s'ensuit que $X_\pi(t) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Pour voir cela, notons que de (3.15) nous obtenons

$$X_\pi(t) = x \exp\Big(\int_0^t \sigma_0(s,s)\pi(s)dB(s) + [\int_0^t b_0(s,s)\pi(s) - \frac{1}{2}\sigma_0^2(s,s)\pi^2(s) + \alpha(s)]ds\Big) > 0$$

où

$$\alpha(s) := \int_0^s \frac{\partial b_0}{\partial s}(s,r)\pi(r)X(r)dr + \int_0^s \frac{\partial \sigma_0}{\partial s}(s,r)\pi(r)X(r)dB(r).$$

Nous étudions maintenant le problème d'investissement optimal suivant :

Cherchons $\hat{\pi} \in \mathcal{A}$ tel que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_\pi(T))] = \mathbb{E}[U(X_{\hat{\pi}}(T))] \tag{3.17}$$

où $U : [0,\infty) \to [-\infty,+\infty)$ est une fonction d'utilité donnée, supposée strictement croissante, concave et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(0,\infty)$. C'est un problème de contrôle , et nous en appliquons les résultats :

Le Hamiltonien H donné par la définition(3.11) s'écrit donc sous la forme

$$H(t,s,\pi,p,q) = b_0(t,t)\pi x p + \sigma_0(t,t)\pi x q + \int_t^T \frac{\partial b_0}{\partial s}(s,t)\pi x p(s)ds + \int_t^T \frac{\partial \sigma_0}{\partial s}(s,t)\pi x \mathbb{E}[D_t p(s)/\mathcal{F}_t]ds$$

Supposons qu'il existe un contrôle optimal $\hat{\pi} \in \mathcal{A}$ pour (3.17) avec les valeurs correspondantes $\hat{X}, \hat{p}, \hat{q}$. Donc

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial \pi} H(t,\hat{X}(t),\pi,\hat{p},\hat{q})\Big|\mathcal{F}_t\Big]_{\pi=\hat{\pi}(t)} = 0$$

i.e :

$$\mathbb{E}\Big[b_0(t,t)\hat{X}(t)\hat{p}(t)+\sigma_0(t,t)\hat{X}(t)\hat{q}(t)+\int_t^T \frac{\partial b_0}{\partial s}(s,t)\hat{X}(t)\hat{p}(t)ds+\int_t^T \frac{\partial \sigma_0}{\partial s}(s,t)\hat{X}(t)\mathbb{E}[D_t\hat{p}(s)|\mathcal{F}_t]ds\Big|\mathcal{F}_t\Big]=0$$

Puisque $\hat{X}>0$, cela équivaut à

$$b_0(t,t)\hat{p}(t)+\sigma_0(t,t)\hat{q}(t)+\mathbb{E}\Big[\int_t^T\Big(\frac{\partial b_0}{\partial s}(s,t)\hat{p}(t)ds+\int_t^T \frac{\partial \sigma_0}{\partial s}(s,t)\mathbb{E}[D_t\hat{p}(s)|\mathcal{F}_t]\Big)ds\Big|\mathcal{F}_t\Big]=0. \tag{3.18}$$

On en déduit que l'équation différentielle stochastique rétrograde correspondante (3.12) se réduit à

$$\begin{cases} d\hat{p}(t)=\hat{q}(t)dB(t) & ;0\le t\le T \\ \hat{p}(T)=U'(\hat{X}(T)) & . \end{cases}$$

qui a la solution unique

$$\hat{p}(t)=\mathbb{E}\big[U'(\hat{X}(T))\big|\mathcal{F}_t\big];\qquad \hat{q}(t)=D_t\hat{p}(t).$$

Remplacé par (3.18), cela donne l'équation

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[b_0(t,t)U'(\hat{X}(T))+\sigma_0(t,t)D_tU'(\hat{X}(T))+\int_t^T \frac{\partial b_0}{\partial s}(s,t)\mathbb{E}\big[U'(\hat{X}(T))\big|\mathcal{F}_s\big]ds \\ +\int_t^T \frac{\partial \sigma_0}{\partial s}(s,t)\mathbb{E}\Big[D_tU'(\hat{X}(T))\big|\mathcal{F}_s\Big]ds\Big|\mathcal{F}_t\Big]=0\end{aligned} \tag{3.19}$$

dans le dernier passage, nous avons utilisé le fait que :

$$D_t\mathbb{E}\big[U'(\hat{X}(T))\big|\mathcal{F}_t\big]=\mathbb{E}\big[D_tU'(\hat{X}(T))\big|\mathcal{F}_t\big],$$

qui est une identité qui découle facilement de la définition (3.13) de la dérivée de Malliavin. A cet effet, l'équation (3.19) peut être simplifiée à

$$\begin{aligned}b_0(t,t)\mathbb{E}\Big[U'(\hat{X}(T))\Big|\mathcal{F}_t\Big]+\sigma_0(t,t)\mathbb{E}\Big[D_tU'(\hat{X}(T))\Big|\mathcal{F}_t\Big]+\mathbb{E}\Big[\int_t^T \frac{\partial b_0}{\partial s}(s,t)U'(\hat{X}(T))ds\big|\mathcal{F}_t\Big] \\ +\mathbb{E}\Big[\int_t^T \frac{\partial \sigma_0}{\partial s}(s,t)D_tU'(\hat{X}(T))ds\big|\mathcal{F}_t\Big]=0\end{aligned}$$

or,

$$\sigma_0(T,t)D_t\mathbb{E}\Big[U'(\hat{X}(T))\Big|\mathcal{F}_t\Big] + b_0(T,t)\mathbb{E}\Big[U'(\hat{X}(T))\Big|\mathcal{F}_t\Big] = 0 \tag{3.20}$$

Par (3.16) nous voyons que (3.20) peut être écrite comme

$$\frac{D_tY(t)}{Y(t)} = -\frac{b_0(T,t)}{\sigma_0(T,t)}$$

où

$$Y(t) = \mathbb{E}\Big[U'(\hat{X}(T))\Big|\mathcal{F}_t\Big]. \tag{3.21}$$

Selon la règle de la chaîne pour les dérivés de Malliavin, on déduit de (3.21) que

$$D_t(\ln Y(t)) = -\frac{b_0(T,t)}{\sigma_0(T,t)}. \tag{3.22}$$

D'autre part, $Y(t)$ étant une martingale positive, il existe un processus adapté $\theta_0(t)$ tel que

$$dY(t) = \theta_0(t)Y(t)dB(t)$$

i.e :

$$Y(t) = Y(0)\exp\Big(\int_0^t \theta_0(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_0^2(s)ds\Big). \tag{3.23}$$

De (3.23) nous obtenons

$$D_t(\ln Y(t)) = D_t\Big(\int_0^t \theta_0(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_0^2(s)ds\Big) = \theta_0(t), \tag{3.24}$$

puisque

$$D_t\theta_0(t) = D_t\theta_0^2(t),$$

pour tout $s < t$ (parce que θ_0 est adaptée).

En comparant (3.22) et (3.24) nous concluons que

$$\theta_0(t) = -\frac{b_0(T,t)}{\sigma_0(T,t)}$$

et donc par (3.21),

$$\mathbb{E}\Big[U'(\hat{X}(T))\Big|\mathcal{F}_t\Big] = Y(t) = \mathbb{E}\Big[U'(\hat{X}(T))\Big|\mathcal{F}_t\Big]\exp(\int_0^t \theta_0(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_0^2(s)ds). \quad (3.25)$$

Reste à trouver la constante

$$c := \mathbb{E}\Big[U'(\hat{X}(T))\Big].$$

À partir de (3.25) avec $t = T$ on obtient

$$\hat{X}(T) = (U')^{-1}(c\exp(\int_0^t \theta_0(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_0^2(s)ds)) =: F(c). \quad (3.26)$$

Par contre, si on définit

$$\hat{Z}_c(t,s) := \sigma_0(t,s)\hat{\pi}(s)\hat{X}(s) \quad (3.27)$$

puis par (3.14), le couple $(\hat{X}, \hat{Z}_c)$ résout l'équation intégrale stochastique rétrograde de Volterra suivante (type de Yong)(BSVIE)

$$\hat{X}(t) = F(c) - \int_t^T \frac{b_0(t,s)\hat{Z}_c(t,s)}{\sigma_0(t,s)}ds - \int_t^T \hat{Z}_c(t,s)dB(s); \quad 0 \leq s \leq T. \quad (3.28)$$

D'après le théorème (3.2) dans [54], la solution de cette équation est unique. Mettons $t = 0$ et prenons en compte (3.28), on obtient

$$x = \mathbb{E}[F(c)] - \int_0^T \mathbb{E}\Big[\frac{b_0(t,s)}{\sigma_0(t,s)}\hat{Z}_c(t,s)\Big]ds \quad (3.29)$$

Cette équation détermine implicitement la valeur de c.

Nous avons donc trouvé la richesse finale optimale $\hat{X}$ de (3.26). Enfin, nous obtenons le portefeuille optimal $\hat{\pi}$ par (3.27).

Théorème 3.2.0.1 *Supposons que $\sigma_0(t,s) > 0$ soit bornée par 0 pour $s, t \in [0,T]$. Alors, le portefeuille optimal $\hat{\pi}$ pour le problème (3.17) est*

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{Z}_c(t,s)}{\sigma_0(t,s)\hat{X}(s)}; \ s \in [0,T]$$

où $(\hat{X}, \hat{Z})$ est la solution unique de BSVIE (3.28) avec F défini par (3.26), et la constante c est la solution de (3.29).

Conclusion

On a vu dans ce mémoire comment résoudre les équations différentielles stochastiques de Volterra au cas où Y_t n'est pas adapté et nous avons montré qu'une solution unique existe dans les sens suivants :

– En tant que processus fonctionnel.

– En tant que bruit blanc généralisé fonctionnel (distribution Hida).

De plus, dans les deux cas, nous avons trouvé des formules des solutions explicites.
On a vu aussi comment avoir l'existence, l'unicité et la continuité des solutions des ESVs avec noyaux singuliers et coefficients non-lipschitziens en utilisant la méthode d'itération de Picard et les inégalités de Bihari, Jensen, Minkowski, BDG et Holder.
Enfin,on a présenté des exemples d'applications sur les équations différentielles stochastiques de Volterra à la finance avec un exemple d'investissement optimal sur un marché financier modélisé par une équation de Volterra et un autre exemple d'un investissement dans une production économique.

Bibliographie

[1] Aase. K, Oksendal. B, Privault.N and Uboe.J : White noise generalizations of the Clark-Haussmann- Ocone theorem with application to mathematical finance. Finance Stochast. 4 (2000),pages 465-496.

[2] Belbas.S.A : A new method for optimal control of Volterra integral equations. Appl. Math. Comput. 189 (2007), 1902-1915.

[3] Berger.M.A and Mizel.V.J : An extension of the stochastic integral. The Annals of Probability 10,1980.pages 435-450.

[4] Berger.M, Mizel.V ; 1980. Volterra equations with Itô integrals, I and II.J. Int. Equation 2, pages 187-245.pages 319-337.

[5] Biagini.F, Hu.Y,Oksendal.B, and Zhang.T, Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications, Springer, London, UK, 2006.

[6] Bihari.I ; 1956. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problem of differential equations. Acta. Math. Acad.Sci. Hungar. 7,pages 71-94.

[7] Cochran.W.G, Lee.J-S, Potthoff.J ; 1995. Stochastic volterra equations with singular kernels. Stochastic Process. Appl. 56 (2),pages 337-349.

[8] Coutin.L, Decreusefond.L ; 2001. Stochastic Volterra equations with singular kernels. In : Stochastic Analysis and Mathematical Physics. In : Progr.Probab, vol. 50. Birkhauser Boston, Boston, MA, pages 39-50.

[9] Dahl.K.R, Mohammed.A, Oksendal.B and Rose.E.R ; Optimal control with noisy memory and BSDEs with Malliavin derivatives. arXiv : 1403.4034 (2014).

[10] Decreusefond.L ; 2002. Regularity properties of some stochastic Volterra integrals with sigular kernel. Potential Anal. 16,pp 139-149.

[11] Decreusefond.L and Ustunel.U.A.S : Fractional Brownian motion : theory and applications ; ESAIMProceedings, vol. 5, pp.75-86, 1998.

[12] Di Nunno.G, Meyer-Brandis.T, Oksendal.B and Proske.F : Malliavin calculus and anticipative Itô formulae for Lévy processes. Infinite Dimens. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics, 8 (2005),pp. 235-258.

[13] Di Nunno.G, Oksendal.B and Proske.F : Malliavin Calculus for Lévy processes with Applications to Finance. Springer 2009.

[14] Ethier.S and Kurtz.T.G : Markov Processes. Characterization and Convergence. J. Wiley and Sons.1986

[15] Gjessing.G, Holden.H, Lindstrom.T, Oksendal.B, Uboe.J and Zhang.T.S : The Wick product. Preprint University of Oslo .1992

[16] Gripenberg.G, Londen.S.O and Staffans.O : Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge University Press .1990

[17] Gripenberg.G, Londen.S.O and Staffans.O : Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge University Press 1990.

[18] Hida.T, Kuo.H.H, Potthoff.J and Streit.L : White Noise. (Forthcoming book).July 1989

[19] Holden.H, Lindstrom.T, Oksendal.B, Uboe.J and Zhang.T.S : Stochastic boundary value problems : A white noise functional approach. Preprint University of Oslo.1991

[20] Holden.H, Oksendal.B, Uboe.J and Zhang.T : Stochastic Partial Differential Equations. Second Edition, Springer 2010.

[21] Hille.E and Phillips.R.S : Functional Analysis and Semigroups. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ31. 1957

[22] Hromadka.T.V II, Whitley.R.J, Stochastic Integral Equations in Rainfall-Runoff Modeling, Springer-Verlag, 1989.

[23] Hu.Y : Integral transformations and anticipative calculus for fractional Brownian motions ; Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 175, no. 825, 2005.

[24] Ishikawa.Y : Stochastic Calculus of Variations for Jump Processes. De Greuter 2013.

[25] Kallenberg.O : 2002. Foundations of Modern Probability, 2nd ed. Springer, Berlin

[26] Kubo.I and Takenaka.S : Calculus on Gaussian white noise I. Proc. Japan Acad. 56. (1980),pages 376-380

[27] Lin.J : Adapted solution of backward stochastic nonlinear Volterra integral equation. Stoch. Anal. Appl. 20 (2002),pp 165-183.

[28] Lindstrom.T, Oksendal.B and Uboe.J : Stochastic differential equations involving positive noise : In M. Barlow and N. Bingham (editors) : Stochastic Analysis.Cambridge Univ. Press 1991, 261-303.

[29] Lindstrom.T, Oksendal.B and Uboe.J : Wick multiplication and Itô-Skorohod stochastic differential equations. To appear in S. Albeverio et al (editors) : Ideas and Methods in Mathematics Analysis. Cambridge Univ. Press 1992

[30] Lindstrom.T, Oksendal.B and Uboe.J :Stochastic modelling of fluid flow in porous media. Preprint, University of Oslo.1991.

[31] Mishura.Y.S : Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes, vol. 1929, Springer, Berlin, Germany, 2008.

[32] Nualart.D : The Malliavin Calculus and Related Topics. Second Edition, Springer 2006.

[33] Nualart.D and Zakai.M : Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus. Probab. Th. Rel. Fields 73 (1986),pp 255-280.

[34] Ogawa.S : On the stochastic integral equation of Fredholm type. Studies in Mathematics and its Applications 18 (1986) ; Patterns and Waves-Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations, pp. 597-605.

[35] Oksendal.B : Stochastic Differential Equations. Sixth Edition, Springer 2013.

[36] Oksendal.B and Sulem.A : Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Second Edition, Springer 2007.

[37] Oksendal.B and Sulem.A : Risk minimization in financial markets modeled by Itô-Lévy processes. arXiv : 1402.3131, Afrika Matematika (2014), DOI 10.1007/s 13370-014-0248-9.

[38] Oksendal.B and Zhang.T : The stochastic Volterra equation. In D. Nulart, M. Sanz-Solé (eds) : Barcelona Seminar on Stochastic Analysis. Birkhauser 1993, pp.168-202.

[39] Oksendal.B and Zhang.T : The general linear stochastic Volterra equation with anticipating coefficients. In Davis, Truman and Elworthy (eds) : Stochastic Analysis and Applications. World Scientific 1996, pp.343-366.

[40] Oksendal.B and Zhang.T : Optimal control with partial information for stochastic Volterra equations. Intern. J. Stoch. Anal. 2010, doi :10.1115/2010/329185.

[41] Oksendal.B, Zhang.T : 1993. The stochastic Volterra equations. In : Nualart, D., Sanz-Solé, M. (Eds), The Barcelona Seminar on Stochastic Analysis. Birkhäuser, Basel.

[42] Pardoux.E : Applications of anticipating stochastic calculus to stochastic differential equations. In H. Korezlioglu and A.S. Ustunel (eds) : Stochastic Analysis and Related Topics 2. Springer LNM 1444 (1990),pages 63-105 .

[43] Pardoux.E and Protter.P : Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients. The Annals of Probability 18 (1990),pp 1635-1655.

[44] Potthoff.P : White noise methods for stochastic partial differential equations. Manuscript 1991.3rd ed

[45] Potthoff.J and Streit.L : A characterization of Hida distributions. J. Funct. Anal. 101 (1991),pp. 212-229.

[46] Pardoux.E, Protter.P : 1990. Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients. Ann. Probability 18,pp. 1635-1655.

[47] Protter.P : 1985. Volterra equations driven by semimartingales. Ann. Probability 13,pages 519-530.

[48] Pruss.J : Evolutionary Integral Equations and Applications, Birkhauser, Basel, 1993.

[49] Rodkina.A.E ; 1992. Stochastic Volterra integral equations. Izv. Akad. Nauk Respub. Moldova Mat. 93 (3), pp. 9-15.

[50] Sanz-Solé.M : Malliavin Calculus with Applications to Stochastic Partial Differential Equations. EPFL Press/CRC Press 2005.

[51] Shi.Y, Wang.T and Yong.J : Mean-field backward stochastic Volterra integral equations. arXiv :1104.4725v2 (2011). Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B 18 (2013), 1929-1967.

[52] Tianxiao.W, Qingfeng.Z and Yufeng.S : Necessary and sufficient conditions of optimality for stochastic integral systems with partial information. Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. July 22-24,2011, Yantai,China.

[53] Tricomi.F.G : Integral Equations. Dover 1985.Publications,inc.New York

[54] Yamada.T, Watanabe.S : 1971. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations and its applications. J. Math. Kyoto. Univ. 11 ; pp. 155-167.

[55] Yong.J : Backward stochastic Volterra integral equations and some related problems. Stochastic Proc. Appl. 116 (2006),pages 779-795.

[56] Yong.J : Well-posedness and regularity of backward stochastic Volterra integral equation. Probab. Theory Relat. Fields 142 (2008),pages 21-77.

[57] Zahle.M : Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I ; Probability Theory and Related Fields, vol. 111, no. 3, pp. 333-374, 1998.

[58] Zhang.T.S : Characterizations of white noise test functions and Hida distributions. Preprint University of Oslo 1991 (To appear in Stochastics).

[59] Zhang.X : 2006. Existence and uniqueness of solutions for a class of semilinear parabolic PDEs with non Lipschitz coefficients. J. Math. Anal.Appl. 314,pp. 579-589.