République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Estimation de la fonction de régression d'un processus stationnaire ergodique à temps continu

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Tabti **I**kram [1]

Sous la direction de

Dr. R. Rouane

Soutenue le 14/07/2019 devant le jury composé de

Dr. M. Kadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. R. Rouane	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr. F. Mokhtari	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Dr. N. Hachemi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : ikram_tabti@yahoo.com

Remerciement

- ⋆ *A l'écheance de ce projet de fin d'étude. Je doit en premier lieu l'énorme remerciement à notre* ***DIEU*** *de m'avoir donné le courage et la force de bien mener mon travail.*
- ⋆ *J'exprime ma profonde gratitude à* ***Dr.Rouane Rachida*** *pour son soutien constant tout au long de la préparation de ce travail. Je la remercie pour son appui scientifique, qui m'a été indispensable et aussi pour ses encouragements aux initiatives personnelles, ses orientations, ses conseils et sa disponibilité tous le temps.*
- ⋆ *Tous les membres de jury d'avoir participé à la commission des examinateurs en vue dune évaluation prompte et à sa juste valeur.*
- ⋆ *Mes sentiments de reconnaissance et mes remerciements vont également à mes deux chers professeurs* ***Dr.Ghouti Djellouli*** *et* ***Dr.Madani Fethi*** *qui m'ont indiqué le bon chemin à entreprendre et qui m'ont encouragé et soutenue tout au long de mon parcours quotidien.*
- ⋆ *Mes remerciements vont aussi a toute personnes et tous mes professeurs d'une manière ou d'une autre qui ont contribue, a l'accomplissement de ce travail.*
- ⋆ *A tous mes collègues et amies pour leur encouragement et leur aide.*

dédicace

Je dédie mon mémoire : a mon grand pére rabi yerhmou. à mes très chers parents qui m'ont permis de réussir dans mes études.

A Mes soeurs et mon frère,

A ma petite famille Tabti,

A tous mes chèrs amis sans exeption.

Table des matières

Introduction générale

L'estimation est une notion très importante et essentielle dans le domaine statistique mathématique qui accroit des techniques pour décrire certaines caractéristiques d'ensembles d'observations. Cette étude est fractionnée en deux composantes principales, à savoir : l'estimation paramétrique et l'estimation non paramétrique.

L'approche non paramétrique, permet de surmonter les restrictions imposées par les méthodes paramétriques sur le modèle, est fréquemment adoptée par les statisticiens pour estimer certaines fonctionnelles liées aux données a temps discret et continus. Contrairement à l'estimation paramétrique, l'estimation non paramétrique consiste à estimer à partir des observations.

Les premiers travaux relatifs à l'estimation non paramétrique remontent à Rosenblatt (1956)[52] et Parzen(1962)[46] où la méthode du noyau de convolution est utilisée pour estimer la fonction de densité de probabilité. De nombreuses contributions ont alors été consacrées à l'estimation dans le cadre de données à temps discret des fonctionnelles telles que la régression, la fonction taux de hasard. Nous citons pour cela des travaux de Nadaraya (1964)[42] et Watson (1964)[59], Rosenblatt (1971), Prasaka Rao (1983), Silverman (1986)[55]. Le cadre de données indépendantes est loin de couvrir toute la réalité du terrain.

En modélisation, il est souvent peu réaliste de supposer l'indépendance. C'est pourquoi depuis plusieurs années déjà, s'est développée une spacieuse littérature sur les processus dépendants. Les différentes classes de mélange font sans aucun doute partie des conditions de dépendance faible les plus étudiées. Respectivement les trois principaux types de mélange sont le mélange fort (α-mélange), le β-mélange et le mélange uniforme (ϕ-mélange) introduits par Rosenblatt [53], Rozanov et Volkonskii [54]. Malheureusement, les conditions de mélange sont des conditions compliquées. Aussi on sait que certains processus bien classiques ne sont pas mélangeants. Cependant, la structure de dépendance de multiple processus utiles restent un problème ouvert. À titre d'exemple, Ibragimov et Linnik (1971)[28], Chernick (1981)[13] et Andrews (1984)[1] ont montré que dans certains cas le processus autorégressif linéaire du premier ordre en temps discret n'est pas fortement mélangeant.

En particulier, le processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant le modèle $AR(1)$ défini par $X_t = \theta X_{t-1} + \epsilon_t$, où les ϵ_t est une suite d'innovation de Bernoulli i.i.d, n'est pas fortement mélangeant. Cependant, l'ergodicité est consèrvée en prenant des fonctions mesurables d'un processus ergodique. Si $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus strictement stationnaire et ergodique, $Y_t = \mathcal{V}((..., \epsilon_{t-1}, \epsilon_t), (\epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+2}, ...))$ pour une certaine fonction borélienne $\mathcal{V}(.)$, alors $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est également ergodique. Comme le processus autorégressif, ci-dessus, peut être représenté comme une fonction linéaire des ϵ_t, il s'ensuit alors qu'il est aussi ergodique. Nous construisons maintenant un autre exemple de processus ergodique non mélangeant et cette fois-ci en temps continu. Il est bien connu que le mouvement brownien fractionnaire $(W_t^H; t \geq 0)$ de paramètre de Hurst $H \in (0,1)$ admet des incréments strictement stationnaires. Par ailleurs, le bruit gaussien fractionnaire, défini pour tout $s > 0$ par $(G_t^H)_{t\geq 0} = (W_{t+s}^H - W_t^H)_{t\geq 0}$, est un processus centré strictement stationnaire à longue mémoire lorsque $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ (voir, par exemple, Beran (1994)[6] p. 55, Lu (2009)[38] p. 17). De ce fait, il contrevient alors à la condition de mélange fort. Pour un processus réel gaussien strictement stationnaire et centré $(G_t^H)_{t\geq 0}$, considèrons la fonction de corrélation $R(t) = \mathbb{E}[G_0 G_t]$. En se reportant au travail de Maslowski et Pospìs̃il (2008)[41], il en ressort que le processus $(G_t)_{t\geq 0}$ est ergodique lorsque $\lim_{t\to\infty} R(t) = 0$. Un calcul facile permet alors de voir que le processus $(G_t^H)_{t\geq 0}$ vérifie bien cette condition.

Par ailleurs, les conditions de mélange sont difficiles à vérifier en pratique. Il est donc préférable de définir un cadre de travail général en considérant des processus satisfaisant des conditions d'ergodicité qui incluent à la fois des processus mélangeants et non-mélangeants. L'ergodicité est satisfaite par les processus mélangeants et elle est, en outre, plus facile à vérifier en pratique (Krengel (1985)[33], p. 24, Ash et Gardner (1975)[3], p. 120). La difficulté principale de l'ergodicité est qu'elle ne nous permet pas, sans conditions supplémentaires, d'obtenir des vitesses de convergence (Krengel (1985)[33]). Donc on considère dans ce mémoire le cadre ergodique qui est plus général et large que le cadre de dépendances faibles.

L'estimation non paramétrique relative à des processus à temps continu a reçu un intérêt particulier ces dernières décennies. Beaucoup des résultats traitant de la convergence, des vitesses de convergence et de la normalité asymptotique ont été établis. Pour un large panorama sur la question, nous renvoyons à Bosq (1998) et les références qui y sont citées. Nous discuterons en particulier de cette étude de l'estimation non paramétrique par la méthode du noyau de la fonction de régression lorsque les données sont stationnaires et ergodiques qui motivent plusieurs auteurs nous les mentionnons Delecroix et Rosa (1996) [20], Laib (1999, 2005), Morvai et Al (1996) et Yakowitz et Al (1999)[57] relative à des processus ergodiques a temps discret et Rosenblatt (1956)[52], Parzen (1962) qui établit la normalité asymptotique, Nadaraya (1965)[43], Watson (1964)[59], Banon (1978)[5] ainsi que celui de Castellana- Leadbetter (1986)[12], présentant une condition portant sur les densités jointes et marginales d'un processus strictement stationnaire et utilisée pour atteindre des vitesses suroptimal dans le cas d'un processus à temps continu. L'estimation non paramétrique des fonctions de la régression constitue un sujet qui a résulté une grande activité de recherche et permis l'introduction de nombreux outils et méthodes considérant des contextes multiples et variés. D'autres propriétés de l'estimateur à noyau de la régression sont étudiées sous des hypothèses suffisantes au cas des processus stationnaires ergodiques ce qui est notre objectif dans ce travail, dont il est le détail de l'article de Djamal Louani et Sultana Didi (2014)[56].

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de l'estimateur à noyau de la fonction de régression d'un processus stationnaire qui consiste deux cas (discret et continue), ensuite nous parlons de différentes définitions qui nous aide dans les prochains chapitres, aussi nous rappelons d'autres outils qui sont : les modes de convergence et des inégalités trés importantes sans oublier l'axe principal de ce chapitre qui est la théorie ergodique notamment le cadre stationnaire ergodique en temps continu.

Le deuxieme chapitre a pour objectif d'étudier la consistance ponctuelle presque sûre dont elle se réalise sous spéciales hypothèses dans le contexte stationnaire ergodique aux temps continus avec le vitesse de convergence de cet estimateur d'une part et d'autre part nous abordons la consistance uniforme presque sûre où se résulte sous des hypothèses adéquates plus le vitesse de convergence de notre estimateur.

Dans le troisième et dernier chapitre nous présontons la normalité asymptotique presque sûrement d'un estimateur a noyau pour la fonction de régression relatif aux chapitres précédents pour construire les intervalles de confiance et de faire des tests et des prévisions.

Chapitre 1

Présentation

1.1 Historique de l'estimation non-paramétrique de la fonction de régression

Nous sommes actuellement intéressés à étudier le problème de trouver la relation entre une variable réelle dite variable réponse Y dans $\mathbb{R}$ et une autre variable explicative X dans $\mathbb{R}^d$, on utilise des modèles dits de régression. Ayant observé X, la valeur moyenne de Y est accordée par une fonction de régression : c'est cette fonction qui nous informe sur le type de dépendance qu'il y a entre ces deux variables. Cette fonction est l'espérence de la variable Y conditionnée par X :

$$m(\mathrm{x}) = \mathbb{E}[l(Y)/\mathrm{X} = \mathrm{x}], \quad \text{pour tout} \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dans un espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$ on défini $((\mathrm{X}_t,\ Y_t),\ t \in \mathcal{J})$ un processus stationnaire ergodique mesurable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ avec l'ensemble des indices $\mathcal{J}$ peut être discret $\mathbb{N}$ ou continu $\mathbb{R}^+$, où l est une fonction borélienne telle que $\mathbb{E}[|l(Y_0)|] < \infty$. Soient $K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un noyau (*ie* $K > 0$ et $\int K = 1$), h_n une suite de réels positifs. On dispose d'un échantillon composé de variables aléatoires $(\mathrm{X}_1,\ Y_1),\ \cdots,\ (\mathrm{X}_n,\ Y_n)$ et on dénote par $(X,\ Y)$ un élément générique de cet échantillon, l'estimateur le plus célèbre celui de Nadaraja-Watson de la régression est donné par :

$$\hat{m}_n(\mathrm{x}) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} l(Y_i) K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_i}{h_n}\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_i}{h_n}\right)}.$$

La méthode du noyau introduite par Rozenblatt (1956)[52] pour estimer la fonction de densité a été reprise par Nadaraja (1965)[43] et Watson (1964)[59] pour estimer la fonction de régression. En raison de la forme de l'estimateur à noyau de la fonction de régression, qui est un rapport, les propriétés de convergence sont obtenues sous des conditions plus restrictives que pour l'estimateur de la densité. Notamment, la convergence uniforme n'est obtenue que sur des ensembles bornés. Cet estimateur a été largement étudié par plusieurs auteurs, nous citons entre autres, Collomb (1985)[18] qui a donné une condition nécessaire et suffisante pour la convergence, uniforme presque sûre, sur un ensemble borné, généralisant ainsi les résultats antérieurs de Nadaraja (1964,1965) [42], [43], Devroye (1978)[21], Mack et Silverman (1982)[40], Gasser et Müller (1984) [25].

L'étude de l'estimation de la régression non paramétrique dans le cadre des données ergodiques en temps discret a motivé quelque nombres de travaux. Nous nous référons, entre autres, aux travaux de Delecroix et Rosa (1996)[20], Laib (1999,2005), Morvai et Al (1996) et Yakowitz et Al (1999)[57] où certaines propriétés asymptotiques sont obtenues. Notons également que la consistance avec vitesse ainsi que la normalité asymptotique ont été obtenues par Laib et Louani (2010,2011)[34], [35] pour l'estimateur de régression à partir des données fonctionnelles en temps discret.
L'adaptation de l'estimateur de Nadaraja-Watson [43]-[59] en temps continu a fait sa première apparition en 1978, Banon [5] :

$$\hat{m}_T(\mathrm{x}) = \frac{\displaystyle\int_0^T l(Y_t) K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right) dt}{\displaystyle\int_0^T K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)},$$

avec la fenêtre h est le paramètre d'intérêt du modèle satisfaire les conditions suivantes :

$$\lim_{T\to\infty} h_T = 0, \qquad \lim_{T\to\infty} Th_T^d = +\infty, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{\log T}{Th_T^d} = 0.$$

Les vitesses de convergence de l'estimateur à noyau de la fonction de régression relative aux processus à temps continu ont été relativement peu étudiées. Pour les travaux qui ont été l'objet de cette problématique, on se réfère ici à Cheze-Payaud (1994)[14] ainsi que Bosq (1998)[8] dans les cas dits optimaux et suroptimaux. Récemment, Lejeune (2007)[37] a présenté des vitesses de convergence de l'erreur quadratique moyenne du régressogramme (analogue à l'histogramme pour l'estimation de la régression) en temps continu, citons aussi Bosq et Blanke (2007, 2008)[10], [11]. Plus récemment encore, Didi et Louani (2014)[56] ont obtenu des vitesses non paramétriques pour les processus stationnaires ergodiques et ont donné une application à la prévision.

Par ailleurs, les applications pour le modèle de la régression ont pris une place importante dans la prévision des séries chronologiques issues de différentes disciplines telles que la communication, les systèmes de contrôle, la climatologie, les études biomédicales ainsi que l'économétrie. Donc il s'agit des domaines de prévision sur lesquels les premiers résultats furent établis. On peut nommer, Collomb (1983, 1984) [16], [17] et Robinson (1983) [51]. Ces domaines ont connu des développements continus, mentionnons par exemple, les livres généraux de Devroye et Al (1986) [22], Györfi et Al (1989) [26], Yoshihara (1994) [58]. Les travaux de Ramsay et Silverman (2002, 2005) [49], [50] constituent une collection essentielle de méthodes statistiques, en particulier pour la régression. Le livre de Bosq (2000) [9], aborde le traitement des modèles fonctionnels linéaires, en particulier le processus autorégressif, nous citons aussi Bosq et Blanke (2008) [11].

1.2 Définitions de base

Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.

Définition 1.2.1. *(Filtration) Une filtration est une suite croissante de tribus* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, c'est-à-dire* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+s}$ *pour tout* $t,\ s \geq 0$.

Définition 1.2.2. *(Processus en temps continu) Soit* $X = (X_t,\ t \geq 0)$ *un processus défini sur* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P})$*. Le processus* X *est dit mesurable si l'application :*

$$X : [0,\ \infty[\times\Omega \ \rightarrow \ (E,\ \mathcal{E})$$

$$(t,\ \omega) \ \mapsto \ X_t(\omega)$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}\left([0,\infty[\right)\otimes\mathcal{F}_t$*. Le processus* X *est dit adapté si* $\forall t \geq 0,\ X_t$ *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable.*

Définition 1.2.3. *(Processus stationnaire) Un processus* $(X_t)_{t\in \mathrm{U}},\ \mathrm{U} = \{\mathbb{Z},\ \mathbb{R}^+\}$ *est dit strictement stationnaire ou stationnaire au sens strict si les lois jointes de* $(X_{t_1},\ \cdots,\ X_{t_k})$ *et de* $(X_{t_1+h},\ \cdots,\ X_{t_k+h})$ *sont identiques pour tout entier positif* k *et pour tous* $t_1,\ \ldots,\ t_k,\ h \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.2.4. *(Ensemble invariant) Soit* $(X_t)_{t\in \mathrm{U}},\ \mathrm{U} = \{\mathbb{Z},\ \mathbb{R}^+\}$*, défini sur un espace de probabilité* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$*, L'ensemble* $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ *est appelé invariant s'il existe un ensemble* $\mathcal{A}$*, tel que* $\mathcal{B} = \{(X_n,\ X_{n+1},\ \ldots)\ \in \mathcal{A}\}$ *est vrai pour tout* $n \geq 1$.

Définition 1.2.5. *(Ensemble* δ*-invariant) Dans un espace mesurable et pour* $\delta > 0$*,* T^δ *une transformation* δ *;* ie $(\mathrm{T}^\delta(x))_s = x_{s+\delta}$*, un ensemble mesurable* $\mathbf{A}$ *est dit* δ*-invariant si :* $(\mathrm{T}^\delta(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$.

Définition 1.2.6. *(Martingale) Soit* M *un processus adapté avec* $\forall t \geq 0,\ M_t \in L^1$*. On dit que* M *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *martingale si :* $M_t = \mathbb{E}[M_{t+s}|\mathcal{F}_t]$ *pour tout* $t,\ s \geq 0$.

Définition 1.2.7. *(Différence de martingale en temps continu) La variable aléatoire* $M = (M_t; t \geq 0)$ *est une différence de martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ *si :*

1. M_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
2. $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_{t-s}] = 0,\ t \geq 0,\ s \geq 0.$

1.3 Convergences

1.3.1 Convergence en loi

Définition 1.3.1.1. *La suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de fonction de répartition* F_n *converge en Loi vers* Y *de fonction de répartition* F*, si pour tout* x *où* F *est continue, on a :*

$$\mathrm{F}_n(x) \to \mathrm{F}(x).$$

1.3.2 Convergence en probabilité

Définition 1.3.2.1. *Une suite* $(X_n)_n$ *de variables aléatoires converge en probabilité vers la variable aléatoire* X *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X - X_n| \geq \epsilon) = 0.$$

On note la convergence en proba : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Lemme 1.3.2.1. *[48] **(Premier lemme de Borel-Cantelli)***

Soit $(A_n)_n$ *une suite d'évènements. On suppose que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$*. Alors :*

$$\mathbb{P}(\overline{\lim_n} A_n) = 0.$$

C'est-à-dire presque sûrement, seuls un nombre fini d'évènements A_n *sont réalisés.*

Lemme 1.3.2.2. *[31] **(Second lemme de Borel-Cantelli)***

Soit $(A_n)_n$ *une suite d'évènements indépendants. On suppose que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$*.*

Alors :

$$\mathbb{P}(\overline{\lim_n} A_n) = 1.$$

C'est-à-dire presque sûrement, une infinité d'évènements A_n sont réalisés.

1.3.3 Convergence uniforme

Définition 1.3.3.1. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*, Soit* (X_n) *une suite de fonctions définies sur* I*, et* X *définie sur* I*. On dit que* (X_n) *converge uniformément vers* X *sur* I *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \omega \in \mathrm{I}, \forall n = n_0, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon.$$

1.3.4 Convergence presque sûre

Définition 1.3.4.1. *Une suite* $(X_n)_n$ *de variables aléatoires converge presque sûrement vers* X *si la convergence est vraie avec une probabilité 1 :*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega | \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

On note la convergence presque sûre : $X_n \to X$ *p.s.*

Remarque 1.3.1. *La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité qui entraîne la convergence en loi.*

1.4 Théorie ergodique pour des processus stationnaires

L'hypothèse ergodique est née avec la théorie cinétique des gaz et la physique statistique dans la seconde moitie du XIXe siècle. Elle fût formulée initialement par Ludwig Boltzmann en 1871 [39], spécialement dans la théorie de Maxwell [30] et dans la théorie de Gibbs. Le nom "hypothèse ergodique" ne fût introduite qu'en 1911 par les époux Ehrenfest dans leur célèbre article de revue sur les fondements de la physique statistique. Il est construit à partir des tèrmes grecs $\varepsilon\rho\gamma o\varsigma$ qui signifie "travail Ou énergie" et $o\sigma o\varsigma$ pour "chemin". Boltzmann utilisait pour sa part des

1884 un mot voisin « ergoden » mais il donnait a ce mot un sens assez différent. Il est nécessaire de faire une sorte de transition logique entre le comportement moyen de l'ensemble des systèmes dynamiques et la moyenne temporelle des comportements d'un système dynamique unique, elle découle d'une hypothèse ingénieuse dont on s'est servi pendant une longue durée sans la justifier. Le premier résultat rigoureux pour le mathématicien est le célèbre théorème de récurrence de Poincaré datant de l'année 1890 (Peskir (2000)[47]) mais l'essor de la théorie date de 1931 avec les théorèmes de Neumann et de Birkhoff, elle entre alors définitivement dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Les théorèmes fondamentaux sont dus à Koopman, Von Neumann et Carlman et à Birkhoff, nous nous référons au Peskir (2000)[47] pour le théorème ergodique ponctuelle de Birkhoff. La question qui se pose est : Est-ce que les moyennes statistiques sont égaux aux moyennes temporelles ?
Maintenant, pour une bonne compréhension, nous proposons quelques définitions et informations concernants la propriété ergodique des processus au temps continu, notamment la relation entre le mélange fort et l'ergodcité :

Définition 1.4.1. *(Processus ergodique) Un processus* $(X_t)_{t\in \mathrm{U}}$, $\mathrm{U} = \{\mathbb{Z},\ \mathbb{R}^+\}$ *est dit ergodique si pour tout ensemble invariant* $\mathcal{B}$ *on a* $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 1$ *ou* 0.

Définition 1.4.2. *(δ-ergodicité) Un processus en temps continu* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *est dit δ-ergodique, si chaque ensemble mesurable δ-invariant lié au processus X a une probabilité soit 1 ou* 0.
Autrement dit, pour tout ensemble δ-invariant $\mathcal{A}$, $\mu(\mathcal{A}) = (\mu(\mathcal{A}))^2$.
Cette définition signifie que si nous discrétisons le processus X en blocs de temps de longueur δ, le processus discrétisé $(X_0^{\delta},\ X_{\delta}^{2\delta},\ X_{2\delta}^{3\delta},\ X_{3\delta}^{4\delta},\ \ldots)$ *obtenu est ergodique.*

Définition 1.4.3. *(Ergodicité) Un processus en temps continu* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *est ergodique s'il est δ-ergodique pour tout* $\delta > 0$.

Définition 1.4.4. *Soit* $\{Z_i, i \in \mathbb{Z}\}$ *une famille des variables aléatoires a valeurs dans un même espace probabilisable* $(E, \mathcal{E})$. *Pour tout couples (i, j) dans* $\mathbb{Z} \cup [-\infty, +\infty]$, *on note σ_i^j la tribu engendrée par $\{Z_k, i < k < j\}$. On appelle coefficients de mélange fort, les réels :*

$$\alpha(n) = \sup_{k\in\mathbb{Z}, A\in\sigma_{-\infty}^{k}, B\in\sigma_{n+k}^{+\infty}} |\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|$$

Remarque 1.4.1. *Un mélange fort implique l'ergodicité mais l'inverse n'est pas vrai : il existe des séquences ergodiques qui ne sont pas fortement mélangées.*

Nous énonçons le théorème ponctuel ergodique de Birkhoff lié aux processus stationnaires à temps discret et continu, (voir Krengel (1985)[33], théorème 4.4 p.26).

Théorème 1.4.1. *[33](Théorème ergodique en temps discret) : Soit $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ergodique stationnaire et si Y_0 est intégrable, nous avons :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} Y_t = \mathbb{E}[Y_0], \text{ p.s.}$$

Théorème 1.4.2. *[33](Théorème de Birkhoff en temps continu) : Si $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus ergodique stationnaire et si Y_0 est intégrable, on a :*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Y_t dt = \mathbb{E}[Y_0], \text{ p.s.}$$

Les domaines d'application de la théorie ergodique :

La variété des phénomènes modélisés par des processus ergodiques motive notre travail et montre son importance. Les processus ergodiques sont largement utilisés dans la modélisation de problématiques appliqués. Sans être exhaustif, nous citons à titre d'exemples :

-Sciences biomédicales, voir Banks (1975)[4].

-Économie, voir Bergstrom (1990)[7], Hale et Verduyn Lunel (1993)[27].

-Analyse génétique, voir Lange (2002)[36].

-Mécaniques, voir Arnold (1973)[2].

-Physiques, voir Papanicolaou (1995)[45].

-Mathématiques financières, voir Karatzas et Shreve (1991)[32].

-Démographie, voir Cohen (1979)[15].

1.5 Inégalités importantes

Lemme 1.5.1. *[29](Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Dans l'espace $E = C^0([\alpha,\ b],\ \mathbb{R})$ *des fonctions continues de* $[\alpha,\ b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni du produit scalaire* $(f,\ g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$*, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :*

$$\forall (f,\ g) \in E^p,\ \left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right).$$

Lemme 1.5.2. *[44](Inégalité de Minkowski)*
Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$*,* $p \in [1, +\infty]$*,* f *et* $g \in \mathrm{L}^p(X)$*. Alors :*

$$\left(\int |f(t)+g(t)|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f(t)|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g(t)|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Lemme 1.5.3. *[44](Inégalité de Jensen)*
On suppose que f *une fonction réelle* μ*-intégrable sur* Ω *et* φ *une fonction convexe sur* $\mathbb{R}$*. On a :*

$$\varphi\left(\int_\omega f(\omega)d\mu(\omega)\right) \leq \int_\omega \varphi(f(\omega))d\mu(\omega).$$

Lemme 1.5.4. *[19](Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)*
Soit Y *une variable aléatoire positive défnie sur un espace probabilisé* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P})$*. On note* $\mathbb{E}(Y)$ *l'espérance de* Y*. Alors, pour tout* $a > 0$ *:*

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (voir D.Foata and A Fuchs (1996)[19] page 90) donne une majoration de la probabilité que l'écart soit grand.

Lemme 1.5.5. *(Inégalité Exponentielle)*
Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ *est une suite des différences de martingales réelles par rapport à la tribu engendrée par* σ*-algèbre* $(\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1,\ \cdots,\ Z_n))_{n\geq 1}$*, où* $\sigma(Z_1,\ \cdots,\ Z_n)$ *c'est la tribu engendrée par les variables aléatoires* $Z_1,\ \cdots,\ Z_n$*. on suppose que* $S_n = \Sigma_{i=1}^n Z_i$*. Pour*

tout $p \geq 2$ *et* $n \geq 1$*, on suppose qu'il existe des constantes non negatif* C *et* d_n *tels que :*

$$\mathbb{E}(Z_n^p|\mathcal{F}_{n-1}) \leq C^{p-2}p!d_n^2, \qquad \textit{presque sûrement.}$$

donc, pour tout $\epsilon > 0$*, on a :*

$$\mathbb{P}(|S_n| > \epsilon) \leq 2\exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2(D_n + C\epsilon)}\right\},$$

avec $D_n = \Sigma_{i=1}^n d_i^2$.

Preuve La preuve suit comme un cas particulier du théorème 8.2.2 due à de la Peña and Giné (1999). $\square$

Chapitre 2

Estimation de la fonction de régression d'un processus stationnaire à temps continu : Consistance ponctuelle et uniforme presque sûre

Ce chapitre a pour objectif l'étude de l'estimateur à noyau de la fonction de régression lorsque le processus est supposé strictement stationnaire et ergodique. Ce chapitre comprend deux sections : Dans la première, on étudie la convergence ponctuelle presque sûre. On traite la convergence uniforme presque sûre de notre estimateur dans la deuxième section.

2.1 Notations

Introduisons tout d'abord les notations nécessaires avant de poser les hypothèses requises pour établir nos résultats. Pour δ un nombre réel positif tel que : $n = \dfrac{T}{\delta} \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N} \cap [1,\ n]$, considérons la partition $(T_j)_{1 \le j \le n}$ de l'intervalle $[0,\ T]$. De plus, pour $t > 0,\ \delta > 0$ et $1 \le j \le n$, considérons les σ-algèbres : $\mathcal{F}_{t-\delta} = \sigma((\mathrm{X}_s,\ Y_s) : 0 \le s < t-$

δ), $\mathcal{F}_j = \sigma((\mathrm{X}_s,\ Y_s),\ 0 \leq s < T_j)$ et $\mathcal{S}_{t,\delta} = \sigma((\mathrm{X}_s,\ Y_s); (\mathrm{X}_r) : 0 \leq s < t,\ t \leq r \leq t+\delta)$. Quand $s < 0$, $\mathcal{F}_s$ est égal à la σ-algèbre trivial. Dans la suite, pour toute fonction q, q' est la notation générique de sa dérivée. Pour $i = 1, 2$, notant :

$$\hat{m}_{T,i}(\mathrm{x}) = \frac{1}{n\mathbb{E}[Z_1(x)]} \int_0^T (l(\mathrm{Y}_t))^{i-1} K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) dt,$$

et

$$\tilde{m}_{T,i}(x) = \frac{1}{n\mathbb{E}[Z_1(x)]} \int_0^T \mathbb{E}\left[(l(\mathrm{Y}_t))^{i-1} K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) dt | \mathcal{F}_{t-\delta}\right] dt,$$

où

$$Z_1(x) = \int_0^\delta K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) dt.$$

2.2 Convergence ponctuelle presque sûre

2.2.1 Hypothèses

(H.0) **(i)** K est un noyau symetrique borné non négatif à support compact sur $[-\lambda,\ \lambda]^d$, et $\int K(z)dz = 1$, il existe une fonction intégrable non negative différentiable k sur $[0,\ \lambda c_1]$ telle que : $K(z) = k(\|z\|)$ et $\int_0^{\lambda c_1} k'(u)du < \infty$, où $\|.\|$ et une norme sur $\mathbb{R}^d$ et c_1 est une constante positive.

(ii) Le noyau K est une fonction lipschitzienne.

(H.1) **(i)** Pour tout $0 \leq s < t$, il existe une constante positive c_0 et une fonction $f_{t,s}$ des variables non negative bornée continue definit sur $\mathbb{R}^d$ telle que :

$$\mathbb{P}^{\mathcal{F}_s}(X_t \in \mathcal{S}_{r,x}) = \mathbb{P}(\|X_t - x\| \leq r \mid \mathcal{F}_s) = c_0\, r^d\, f_{t,s}(x) + o\,(r^d), \quad \text{quand} \quad r \to 0.$$

(ii) Pour tout $0 \leq s < t \leq T$ telle que : $t - s \leq \alpha$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $f_{t,s}(x)$ est bornée presque sûrement (p.s) par une fonction déterministe $b_{s,\alpha}(x)$.

(iii) $T^{-1}\displaystyle\int_0^T b_{t,\alpha}(x)\,dt \to D_\alpha(x) \neq 0 \qquad$ quand $T \to \infty$.

(H.2) **(i)** Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ pour tout $\delta > 0$, il existe une fonction déterministe f telle que :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_{t,t-\delta}(x)\,dt \;=\; f(x),\;\; p.s$$

(H.3) Pour tout t et r telle que $t \in [0,\ T]$ et $t \leq r \leq t+\delta$ on a :

(i) $\mathbb{E}[\,l(Y_r)|\mathcal{S}_{t,\delta}] = \mathbb{E}[\,l(Y_r)|X_r] \;=\; m(X_r) \qquad$ p.s.

(ii) Il existe deux constantes positives $\beta > 0$ et $c_3 > 0$ telles que, pour tout $(u,\ v) \in \mathbb{R}^{2d}$,

$$|m(u) - m(v)| \leq c_3\|u-v\|^\beta.$$

(iii) Pour tout $k \geq 2$ et pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{E}[\,|\,l(Y_r)|^k|\mathcal{S}_{t,\delta}] = \mathbb{E}[\,|\,l(Y_r)|^k|\,X_r\,]$ et la fonction $h_k(x) = \mathbb{E}[\,|\,l(Y)|^k|\,X = x]$ est continue au voisinage de x.

Remarque 2.2.1. *Pour $s \leq 0$, $\mathcal{F}_s$ est la σ-algèbre trivial. Donc, la condition* ***(H.1)(i)*** *prend la forme :*

$$\mathbb{P}(\|X_t - x\| \leq r\,|\,\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(\|X_t - x\| \leq r) = c_0\, r^d\, f(x) + o\,(r^d), \qquad \textit{quand} \quad r \to 0.$$

avec f est une fonction déterministe positive.

Commentaires sur les hypothèses

Les conditions de l'hypothèse **(H.0)** sont trés standards et communes dans l'estimation non parametrique. L'hypothèse **(H.1)(i)** est suppose que la probabilité conditionnelle de la sphère $\mathcal{S}_{r,x}$ donnée la σ-algèbre est asymptotiquement gouverné par une dimension locale quand le rayon r tend vers zéro sans supposer l'existence de densités marginales et conditionnelles pour atteindre les taux de convergence indiqués ci-dessous. On remarque que la condition **(H.1)(i)** reste vraie tandis que la distribution conditionnelle $\mathbb{P}_{X_t}^{\mathcal{F}_s}$ a une fonction de densité continue $f_{X_t}^{\mathcal{F}_s}$ dans $\mathbb{R}^d$. La condition **(H.2)** implique la nature ergodique des données, (voir Györfi et Al (1989)).

Notez que, en **(H.1)(ii)** les fonctions aléatoires $f_{t,t-\delta}(x)$ appartiennent à l'espace C^0 des fonctions continues, qui est un espace de Banach séparable. De plus, approcher l'intégrale $\int_0^T f_{t,t-\delta}(x)dt$ par une somme de Riemann, cela veut dire que :

$$T^{-1}\int_0^T f_{t,t-\delta}(x)dt \simeq n^{-1}\sum_{i=1}^n f_{T_i,T_i-\delta}(x) = n^{-1}\sum_{j=1}^n f_{j\delta,(j-1)\,\delta}(x).$$

Puisque le processus $(X_{T_j})_{j\geq 1}$ est stationnaire et ergodique, à la suite de Delecroix (1987), on peut démontrer que la suite $(f_{j\delta,(j-1)\delta}(x))_{j\geq 1}$ des fonctions aléatoires est stationnaire et ergodique, en effet, il suffit de remplacer dans le travail de Delecroix les densités conditionnelles par $f_{j\delta,(j-1)\delta}$ et la densité par la fonction f. De plus, on utilise le théorème de Beck (Györfi et Al (1989), Théorème 2.1.1), il s'ensuit que :

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{T}\int_0^T f_{t,t-\delta}(x)dt - \mathbb{E}(f_{\delta,0}(x))\right| = \lim_{T\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{T}\int_0^T f_{t,t-\delta}(x)dt - f(x)\right| = 0,\ p.s$$

Il est alors clair que les deux conditions **(H.2)(i)** et **(H.4)(vi)**, données ci-dessous, sont satisfaites. Notez que la transformation du processus ergodique stationnaire $(X_t,\ Y_t)_{t\geq 0}$ en processus $(l^2(Y_t))_{t\geq 0}$ est une fonction mesurable. Donc, on utilise la proposition de Krengel (1985), puis le théorème ergodique :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (l(Y_t))^2dt = \mathbb{E}((l^2(Y_0))) \qquad p.s \tag{2.1}$$

Un résultat nécessaire comme condition dans Lemme 2.3.1 ci-dessous. La condition **(H.3)(iii)** est habituelle dans l'étude de littérature des processus ergodiques. L'hypothèse **(H.3)(ii)** est une condition de régularité sur la fonction de régression. Maintenant, Nous donnons quelques exemples pour lesquels la condition **(H.3)(i)** est satisfaite.

Exemple 2.2.1.1. *Considèrons le modèle de régression $Y_t = m(X_t) + \epsilon_t$, où les variables aléatoires ϵ_t sont des différences de martingale par rapport la σ-algèbre $\mathcal{S}_{r,\delta}$, $r\leq t\leq r+\delta$, généré par $\{(X_s,\ \epsilon_s),\ (X_t) : 0\leq s< r,\ r\leq t\leq r+\delta\}$. Clairement, on a $\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{S}_{r,\delta}] = m(X_t)$ presque sûrement.*

Exemple 2.2.1.2. *Considèrons le modèle de régression* $Y_t = m(X_t) + \sigma(X_t)\epsilon_t$, *où* ϵ_t *sont des variables aléatoires centrées et indépendantes du processus* $(X_t)_{t\geq 0}$, *En prenant* $\mathcal{S}_{r,\delta}$ *est la* σ*-algèbre, généré par* $\{(X_s) : 0 \leq s \leq r\}$, *il est suit, pour* $t \leq r$, *on a :* $\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{S}_{r,\delta}] = \mathbb{E}[m(X_t) + \sigma(X_t)\epsilon_t|\mathcal{S}_{r,\delta}] = m(X_t) + \sigma(X_t)\mathbb{E}[\epsilon_t] = m(X_t)$ *presque sûrement.*

Le premier résultat donne la convergence ponctuelle avec le résultat du vitesse de convergence pour l'estimation de la fonction de régression.
Nous prenons depuis maintenant, pour $1 \leq j \leq n$:

$$Z_j(x) = \int_{T_{j-1}}^{T_j} K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) dt.$$

2.2.2 Résultat ponctuelle

Le théorème suivant traite la consistance ponctuelle presque sûre de $\hat{m}_T$.

Théorème 2.2.1. *Sous les hypothèses* ***(H.0)-(H.3)****, pour tous* $x \in \mathbb{R}^d$ *telle que :* $f(x) \neq 0$, *nous avons :*

$$\hat{m}_T(x) - m(x) = O_{p.s}(h_T^\beta) + O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{Th_T^d}\right)^{1/2}\right), \quad quand \quad T \to \infty.$$

Preuve

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on considère la décomposition suivante :

$$Q_T(x) = (\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x)) - m(x)\left(\hat{m}_{T,1}(x) - \tilde{m}_{T,1}(x)\right) \tag{2.2}$$

$$R_T(x) = -B_T(x)(\hat{m}_{T,1}(x) - \tilde{m}_{T,1}(x)) \tag{2.3}$$

$$\hat{m}_T(x) - m(x) = \hat{m}_T(x) - C_T(x) + B_T(x) = B_T(x) + \frac{Q_T(x) + R_T(x)}{\hat{m}_{T,1}(x)} \tag{2.4}$$

où :

$$B_T(x) = C_T(x) - m(x) \ = \frac{\tilde{m}_{T,2}(x)}{\tilde{m}_{T,1}(x)} - m(x).$$

Pour établir des résultats ponctuels et uniformes presque sûre, nous avons besoin d'une inégalité exponentielle pour des sommes partielles de différences de martingale non bornées. Cette inégalité est donnée dans le Lemme 1.5.5

Dans la suite, nous donnons une suite des lemmes car la preuve est répartie en plusieurs lemmes pour faciliter sa compréhension.

Lemme 2.2.1. *Sous les hypothèses* ***(H.0)(i)****,* ***(H.1)(ii)-(iii)*** *et* ***(H.3)(iii)****, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x) = O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{T h_T^d}\right)^{1/2}\right).$$

Preuve

Sous les hypothèses **(H.0)(i)** et **(H.1)(i)**, comme $\mathbb{P}(\|x - X_t\| \leq 0) = 0$ et par intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_T^d}\mathbb{E}[Z_1(x)] &= \frac{1}{h_T^d}\mathbb{E}\left[\int_0^\delta K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) dt\right] \\
&= \frac{1}{h_T^d}\int_0^\delta \mathbb{E}\left[k\left(\left\|\frac{x - X_t}{h_T}\right\|\right)\right] dt \\
&= \frac{1}{h_T^d}\int_0^\delta \int_0^\lambda k\,(u)\, d\,\mathbb{P}\,(\|x - X_t\| \leq h_T\, u\,) dt \\
&= \frac{1}{h_T^d}\int_0^\delta \left([\,k(u)\,\mathbb{P}\,(\|x - X_t\| \leq h_T\, u)]_0^\lambda - \int_0^\lambda k'\,(u)\,\mathbb{P}\,(\|x - X_t\| \leq h_T\, u\,)\, du \right) dt \\
&= c_0\,\delta\, f(x) \left(k(\lambda)\,\lambda^d - \int_0^\lambda u^d\, k'(u)\, du \right) + o(1) \\
&= d\, c_0\,\delta\, f(x) \left(\int_0^\lambda u^{d-1}\, k\,(u)\, du \right) + o\,(1). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Observez maintenant que :

$$\begin{aligned}
\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x) &= \frac{1}{n\,\mathbb{E}[\,Z_1(x)\,]}\int_0^T \left(l\,(Y_t)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right. \\
&\quad \left. -\mathbb{E}\left[l\,(Y_t)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) \mid \mathcal{F}_{t-\delta}\right]\right) dt \\
&= \frac{1}{n\,\mathbb{E}[\,Z_1(x)\,]}\sum_{j=1}^{n}\int_{T_{j-1}}^{T_j} \left(l\,(Y_t)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right. \\
&\quad \left. -\mathbb{E}\left[l\,(Y_t)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) \mid \mathcal{F}_{t-\delta}\right]\right) dt \\
&= \frac{1}{n\,\mathbb{E}[\,Z_1(x)\,]}\sum_{j=1}^{n} L_{T,j}(x),
\end{aligned}$$

où $(L_{T,j}(x))_{j\geq 1}$ est une séquence du différence martingale par rapport à la σ-algèbre $(\mathcal{F}_j)_{j\geq 1}$. Alors il suffit de vérifier les conditions du Lemme 1.5.5 pour obtenir une limite supérieure exponentielle permettant d'étudier le comportement asymptotique de la quantité $\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x)$. Comme première étape, par l'utilisation de l'inegalité de Jensen et Minkowski, pour tout $p \geq 2$, remarquons que :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[L^p_{T,j}(x)|\mathcal{F}_{j-2}]| &\leq \int_{T_{j-1}}^{T_j} \left(\mathbb{E}\left[\left| l\,(Y_t\,)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right|^p \mid \mathcal{F}_{j-2}\right]^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\quad \left. +\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left| l\,(Y_t)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right|^p |\mathcal{F}_{t-\delta}\right] |\mathcal{F}_{j-2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^p dt \\
&\leq \int_{T_{j-1}}^{T_j} \left(\mathbb{E}\left[\left| l(Y_t\,)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right|^p |\mathcal{F}_{j-2}\right]^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\quad \left. +\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left| l\,(Y_t\,)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right|^p |\mathcal{F}_{t-\delta}\right] |\mathcal{F}_{j-2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^p dt \\
&= 2^p\int_{T_{j-1}}^{T_j} \mathbb{E}\left[\left| l(\,Y_t\,)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right|^p |\mathcal{F}_{j-2}\right] dt.
\end{aligned}$$

Par l'utilisation de condition **(H.3)(iii)**, il s'ensuit que, pour tout $T_{j-1} \leq t \leq T_j$

pour tout $p \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left| l\left(Y_t\right) K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right|^p |\mathcal{F}_{j-2}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left| l\left(Y_t\right) K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right|^p |\mathcal{S}_{t,\delta}\right] |\mathcal{F}_{j-2}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\mathbb{E}[|\, l\left(Y_t\right)|^p|\mathcal{S}_{t,\delta}]|\mathcal{F}_{j-2}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)|h_p\left(X_t\right)||\mathcal{F}_{j-2}\right],
\end{aligned}$$

en outre, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)|h_p(X_t)||\mathcal{F}_{j-2}\right] &\leq \mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)|h_p\left(X_t\right)-h_p\left(x\right)||\mathcal{F}_{j-2}\right]\\
&\quad +|h_p\left(x\right)|\mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{j-2}\right]\\
&\leq \mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{j-2}\right]\\
&\quad \left(\sup_{\|u-x\|\leq\lambda h_T}|h_p\left(u\right)-h_p\left(x\right)|+|\, h_p\left(x\right)|\right)\\
&\leq C_2\left(x\right)\mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{j-2}\right],
\end{aligned}$$

où $C_2(x)$ est une constante positive. Par l'intégration par parties et l'utilisation du condition **(H.0)(i)** en même temps avec la condition **(H.1)(ii)**, nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{j-2}\right] &= \mathbb{E}\left[k^p\left(\left\|\frac{x-X_t}{h_T}\right\|\right)|\mathcal{F}_{j-2}\right]\\
&= \int_0^\lambda k^p(u)d\mathbb{P}(\|x-X_t\|\leq h_T\, u\,|\mathcal{F}_{j-2})\\
&= [k^p(u)\mathbb{P}(\|x-X_t\|\leq h_T u|\mathcal{F}_{j-2})]_0^\lambda\\
&\quad \int_0^\lambda (k^p)'(u)\mathbb{P}(\|x-X_t\|\leq h_T u|\mathcal{F}_{j-2})du\\
&= c_0 h_T^d\, f_{t,T_{j-2}}\left(x\right)\left(k^p(\lambda)\lambda^d-\int_0^\lambda u^d\,(\,k^p)'(u)\,du\right)+o\left(h_T^d\right)\\
&= d\,c_0\,h_T^d\, f_{t,T_{j-2}}\left(x\right)\left(\int_0^\lambda u^{d-1}\,k^p\left(u\right)du\right)+o(h_T^d). \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Supposons que le noyau k tel que $\int_0^{\lambda} z^{d-1}\, k\,(z)\, dz \;\leq\; \infty$ et on prend B comme $\int_0^{\lambda} z^{d-1}\, k^p\,(z)\, dz \leq\; B^{p-1}$, pour tout $T_{j-1} \leq t \leq T_j$, nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left[K^p\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) |\mathcal{F}_{j-2}\right] \;=\; d\, c_0\, B^{p-1}\, h_T^d\, f_{t,T_{j-2}}\,(x) + o\,(h_T^d).$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[\left| l\,(Y_t)\, K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)\right|^p |\mathcal{F}_{j-2}\right] = C_2\,(x)\, d\, c_0\, B^{p-1} h_T^d\, f_{t,T_{j-2}}\,(x) + o\,(h_T^d),$$

donnant :

$$|\mathbb{E}[L_{T,j}^p(x)|\mathcal{F}_{j-2}]| = 2^p\, \delta C_2\,(x)\, d\, c_0\, B^{p-1}\, h_T^d\, f_{t,T_{j-2}}\,(x)\; + 2^p\, \delta o\,(h_T^d).$$

Donc :

$$|\mathbb{E}[\, L_{T,j}^p(x)|\mathcal{F}_{j-2}]| \;=\; p\,!\, C_3^{p-2}\, \delta h_T^d\, [\, d\, c_0\, C_3\, C_2\,(x)\, f_{t,T_{j-2}}\,(x) + o\,(1)],$$

où $C_3 \,=\, 2B$. On considère la condition **(H.1)(iii)** et on pose la fonction $f_{t,T_{j-2}}(x)$ sera bornée par une quantité déterministe $b_{T_{j-2},2\delta}(x)$ telle que : $T_{j-1} \,\leq\, t \,\leq\, T_j$, on peut prendre $d_{j-2}^2 = \delta h_T^d[dc_0 C_3 C_2(x) b_{T_{j-2},2\delta}(x) + o_{p.s}\,(1)]$. En outre, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} D_n \;&=\; \frac{1}{n}\sum_2^n d_{j-2}^2 \\
&=\; \delta\, h_T^d \left[d\, c_0 C_2\,(x)\, C_3 \frac{1}{n}\sum_2^n b_{T_{j-2},2\delta}\,(x) + o\,(1)\right],
\end{aligned}$$

par l'utilisation de la somme de Riemann, on voit bien que :

$$\delta \sum_{j=2}^n b_{T_{j-2},2\delta}(x) \leq \int_0^T b_{t,2\delta}(x) dt.$$

D'aprés la condition **(H.1)(iv)**, il s'ensuit, comme $T \to \infty$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{D_n}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} d_{j-2}^2 \\
&\leq \delta h_T^d \left[d\, c_0 C_2(x)\, C_3 \frac{1}{T}\int_0^T b_{t,2\delta}(x)\, dt + o\,(1) \right] \\
&= \delta h_T^d [d\, c_0\, C_2\,(x)\, C_3\, D_{2\delta}\,(x) + o\,(1)].
\end{aligned}$$

Donc, nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
D_n &= \delta\, n\, h_T^d\, [\, d\, c_0\, C_2\,(x)\, C_3\, D_{2\delta}\,(x) + o\,(1)\,] \\
&= O\,(T h_T^d).
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(Z_1(x)) = d\, c_0\, \delta h_T^d\, f(x) \left(\int_0^{\lambda} u^{d-1}\, k\,(u)\, du \right) + o\,(h_T^d)$, notons que : $T_n = T = \delta n$ et $h_{T_n} = h_T$. Par l'utilisation de Lemme 1.5.5, pour tout $\epsilon_0 > 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x)| > \epsilon_0 \left(\frac{\log T}{T\, h_T^d} \right)^{\frac{1}{2}} \right) &= \mathbb{P}\left(\left| \sum_{j=1}^{n} L_{T,j}(x) \right| > n\, \mathbb{E}(\, Z_1\,(x)\,)\, \epsilon_0 \left(\frac{\log T_n}{T_n h_{T_n}^d} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq 2\exp\left\{ - \frac{(n\mathbb{E}\,(Z_1\,(x)\,)\,)^2 \epsilon_0^2 (\log T_n / T_n h_{T_n}^d)}{2\, D_n + 2\, C_3\, n\, \mathbb{E}(\, Z_1\,(x)\,)\, \epsilon_0 \sqrt{\dfrac{\log T_n}{T_n h_{T_n}^d}}} \right\} \\
&\leq 2\exp\left\{ - \frac{\epsilon_0^2 (\, O\,(T_n\, h_{T_n}^d))^2 (\log T_n / T_n h_{T_n}^d)}{O\,(T_n\, h_{T_n}^d) \left(1 + \sqrt{\dfrac{\log T_n}{T_n\, h_{T_n}^d}} \right)} \right\} \\
&\leq 2\exp\{ -\, C_4\, \epsilon_0^2\, \log T_n \} \\
&= \frac{2}{T_n^{C_4 \epsilon_0^2}}, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

où C_4 est une constante positive. En prenant ϵ_0 convenable et nous utilisons le Lemme de Borel-Cantelli :

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} L_{T,j}(x)\right| > n\,\mathbb{E}(\,Z_1\,(x)\,)\,\epsilon_0 \left(\frac{\log T_n}{T_n\, h_{T_n}^d}\right)^{1/2}\right) < \infty.$$

Alors, on a :

$$\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x) = O\left(\left(\frac{\log T_n}{T_n h_{T_n}^d}\right)^{1/2}\right), \qquad p.s,$$

ce qui implique :

$$\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x) = O\left(\left(\frac{\log T}{T h_T^d}\right)^{1/2}\right), \quad p.s. \ \square$$

Lemme 2.2.2. *Sous les hypothèses de Lemme 2.2.1, avec la fonction l prise pour être identique à 1, combinées avec les conditions **(H.1)(ii)** et **(H.2)(i)**, nous avons :*

$$\hat{m}_{T,1}(x) - 1 = O_{p.s}(h_T) + O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{T h_T^d}\right)^{1/2}\right).$$

Preuve

Remarquons que :

$$\hat{m}_{T,1}(x) - 1 = (\hat{m}_{T,1}(x) - \tilde{m}_{T,1}(x)) + (\tilde{m}_{T,1}(x) - 1) = M_{T,1}(x) + M_{T,2}(x),$$

les mêmes procédures comme dans le Lemme 2.2.1 avec la fonction l prise pour être identique à 1, il s'ensuit, selon les hypothèses de Lemme 2.2.1, que :

$$M_{T,1}(x) = O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{T h_T^d}\right)^{1/2}\right). \tag{2.8}$$

De plus, sous les conditions **(H.0)(i)**, **(H.1)(ii)** et **(H.2)(i)** et par l'utilisation des formules (2.5) et (2.6) pour $p=1$ on a :

$$\begin{aligned}
M_{T,2}(x)+1 &= \frac{1}{n\mathbb{E}[Z_1(x)]}\int_0^T \mathbb{E}\left(K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{t-\delta}\right)dt\\
&= \frac{1}{n\,d\,c_0\,\delta h_T^d\,f(x)\left(\int_0^\lambda u^{d-1}\,k\,(u)\,du\right)}\\
&\quad\times\left(d\,c_0\,h_T^d\left(\int_0^\lambda u^{d-1}\,k\,(u)\,du\right)\int_0^T f_{t,t-\delta}(x)\,dt+O\left(T\,h_T^d\right)\right)\\
&= \frac{1}{n\,\delta\,f(x)}\int_0^T f_{t,t-\delta}(x)\,dt+o\,(1)\\
&= \frac{1}{f(x)}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f_{t,t-\delta}(x)\,dt\right)+o\,(1)\\
&= 1+o(1),
\end{aligned}$$

ainsi :

$$M_{T,2}(x)=o(1),\ \ p.s. \tag{2.9}$$

Combinons avec la formule (2.8) et (2.9), on obtient le résultat ce qui achève la démonstration. □

Lemme 2.2.3. *Sous les hypothèses* ***(H.0)(i), (H.1)-(H.3)(ii)****, soit $x\in\mathbb{R}$, nous avons :*

$$B_T(x)=O_{p.s}(h_T^\beta),$$

$$R_T(x)=O_{p.s}\left(h_T^\beta\left(\frac{\log T}{Th_T^d}\right)^{1/2}\right).$$

Preuve On remarque qu'on peut écrire :

$$B_T(x)=\frac{\tilde{m}_{T,2}(x)-m(x)\tilde{m}_{T,1}(x)}{\tilde{m}_{T,1}(x)}=\frac{\tilde{B}_T(x)}{\tilde{m}_{T,1}(x)}, \tag{2.10}$$

d'aprés la formule (2.9), on a $\tilde{m}_{T,1}(x)-1=o_{p.s}(1)$, donc il suffit d'établir que $\tilde{B}_T(x)=O_{p.s}(h_T^\beta)$. En effet, sous les hypothèses **(H.0)(i), (H.2)(i)** et **(H.3)(i)- (ii)**, pour tout

x tel que : $f(x) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
|\tilde{B}_T(x)| &= |\tilde{m}_{T,2}(x) - m(x)\tilde{m}_{T,1}(x)| \\
&= \left| \frac{1}{n\,\mathbb{E}[\,Z_1\,(x)\,]} \int_0^T \left(\mathbb{E}\left[l\,(Y_t)\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) |\mathcal{F}_{t-\delta}\right] \right.\right. \\
&\quad \left.\left. -m(x)\mathbb{E}\left[K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) |\mathcal{F}_{t-\delta}\right]\right) dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{n\,\mathbb{E}[Z_1\,(x)\,]} \int_0^T \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(\,l\,(Y_t) - m(x))\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) |\mathcal{S}_{t-\delta,\delta}\right] |\mathcal{F}_{t-\delta}\right] dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{n\,\mathbb{E}[Z_1\,(x)\,]} \int_0^T \mathbb{E}\left[(m\,(\,X_t) - m\,(\,x\,))\,K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) |\mathcal{F}_{t-\delta}\right] dt \right| \\
&\leq \sup_{\|u-x\|\leq \lambda h_T} |m\,(\,u\,) - m\,(\,x\,)| \times \left| \frac{1}{n\,\mathbb{E}[Z_1\,(x)\,]} \int_0^T \mathbb{E}\left[K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) |\mathcal{F}_{t-\delta}\right] dt \right| \\
&\leq \sup_{\|u-x\|\leq \lambda h_T} |m\,(\,u\,) - \,m\,(\,x\,)| \left| \frac{dc_0 h_T^d \left(\int_0^\lambda \,u^{d-1}\,k\,(\,u\,)\,du\right)}{n\,d\,c_0\,\delta h_T^d\,f(x)(\int_0^\lambda\,u^{d-1}\,k\,(\,u\,)\,du)} \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^T \,f_{t,t-\delta}\,(\,x)\,dt + o\,(1) \right| \\
&\leq h_T^\beta \lambda^\beta \left| \frac{1}{f(x)} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \,f_{t,t-\delta}(x)\,dt \right) + o\,(1) \right| \\
&= O_{p.s}(h_T^\beta).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

La deuxieme partie du lemme suit en combinant la décomposition (2.3) avec les formules (2.8) et (2.11). □

Preuve du Théorème 2.2.1

En combinant la décomposition (2.2) et la formule (2.8) avec le Lemme 2.2.1, on trouve :

$$Q_T(x) = O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{Th_T^d}\right)^{1/2}\right), \tag{2.12}$$

par conséquent, notre résultats suit de la décomposition (2.4) combinée aux résultats du Lemme 2.2.3 et de la formule (2.12). □

2.3 Convergence uniforme presque sûre

2.3.1 Hypothèses

Notre résultat uniforme est indiqué et prouvé sous les hypothèses supplémentaires suivantes :
Pour $\dfrac{1}{2} < \gamma < 1$, considèrons l'ensemble compact suivant : $\mathcal{B}_T = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq T^\gamma\}$, où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$:

(H.4) **(i)** Il existe une suite (α_T) de nombres réels positifs telles que :

$$\inf_{x \in \mathcal{B}_T} f(x) \geq \alpha_T.$$

(ii) Pour tout $T > 0$ et tout $\alpha > 0$,

$$\sup_{x \in \mathcal{B}_T} |D_\alpha(x)| \leq D < \infty.$$

(iii) Pour tout $k \geq 2$, la fonction h_k est uniformément continue et bornée sur l'ensemble $\mathcal{B}_T$.

(iv) La fonction f est bornée par une constante $\mathrm{C} > 0$.

(v) Il existe deux constantes $s > 0$ et $u > 0$ telles que, pour T assez grand :

$$\frac{1}{\alpha_T^2 h_T^{2+d} T^\tau} \leq \frac{1}{T^{1+u}}.$$

(vi) Pour tout $\delta > 0$ assez petit, nous avons :

$$\lim_{T \to \infty} \sup_{x \in \mathcal{B}_T} \left| \frac{1}{f(x)T} \int_0^T f_{t,t-\delta}(x) dt - 1 \right| = 0, \qquad p.s.$$

Commentaires sur les hypothèses

La condition **(H.4)(i)** est satisfaite lorsque nous considèrons, par exemple, une variable aléatoire réelle gaussienne de moyenne nulle avec une densité f et une variance finie σ^2 et que nous prenons $|x| \leq O\left(\sigma\,(u\,\log T)^{1/2}\right)$ et $\alpha_T = O\left(T^{-v}/\sigma^2\,2\,\pi\,\right)$

avec $v \geq u$. Les conditions **(H.4)(ii)** et **(H.4)(iii)** sont des versions uniformes des conditions **(H.1)(iv)** et **(H.3)(iii)** respectivement. L'hypothèse **(H.4)(v)** impose la condition nécessaire pour utiliser le Lemme de Borel-Cantelli.

2.3.2 Résultat uniforme

Le théorème suivant donne la version uniforme de nos résultats.

Théorème 2.3.1. *Supposons que les hypothèses **(H.0)-(H.4)** restent vrai, de plus, on suppose que :*

$$\frac{T^{2\gamma-1} h_T^d \alpha_T^2}{\log T} = O(1), \qquad \textit{quand} \quad T \to \infty. \tag{2.13}$$

Alors, nous avons :

$$\sup_{x \in \mathcal{B}_T} |\hat{m}_T(x) - m(x)| = O_{p.s}(h_T^\beta) + O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{T\, h_T^d \alpha_T^2}\right)^{1/2}\right) \qquad \textit{quand} \quad T \to \infty.$$

Preuve

La preuve du ce théorème a besoin de quelques résultats intermédiaires, que nous donnons ci-dessous comme des lemmes.

Lemme 2.3.1. *Sous les hypothèses **(H.0)** et **(H.4)(i)-(v)** avec la condition* (2.13), *on a :*

$$\sup_{x \in \mathcal{B}_T} |\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x)| = O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{T\, h_T^d \alpha_T^2}\right)^{1/2}\right), \qquad \textit{quand} \quad T \to \infty.$$

Preuve Soit $x_1, \ldots, x_{\nu_T}$ être une partition de l'ensemble $\mathcal{B}_T$ de telle sorte que nous avons : $\mathcal{B}_T \subseteqq \bigcup_{i=1}^{\nu_T} \mathcal{B}_{T,i}$ avec $\mathcal{B}_{T,i} = \{x : \|x - x_i\| \leq T^\gamma \, \nu_T^{-1}\}$. On observe que :

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathcal{B}_T} |\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x)| &\leq \max_{1\leq k\leq \nu_T} \sup_{x\in\mathcal{B}_{T,k}} |\hat{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x)| \\
&\leq \max_{1\leq k\leq \nu_T} \sup_{x\in\mathcal{B}_{T,k}} |\hat{m}_{T,2}(x) - \hat{m}_{T,2}(x_k)| \\
&\quad + \max_{1\leq k\leq \nu_T} |\hat{m}_{T,2}(x_k) - \tilde{m}_{T,2}(x_k)| \\
&\quad + \max_{1\leq k\leq \nu_T} \sup_{x\in\mathcal{B}_{T,k}} |\tilde{m}_{T,2}(x) - \tilde{m}_{T,2}(x_k)| \\
&= H_{T,1} + H_{T,2} + H_{T,3}.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $1 \leq k \leq \nu_T$ et tous $x \in \mathcal{B}_{T,k}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\hat{m}_{T,2}(x) - \hat{m}_{T,2}(x_k) &= \frac{1}{n\mathbb{E}[Z_1(x)]} \int_0^T l(Y_t) \left(K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) - K\left(\frac{x_k - X_t}{h_T}\right)\right) dt \\
&\quad - \frac{1}{n\mathbb{E}[Z_1(x)]\mathbb{E}[Z_1(x_k)]} \int_0^T l(Y_t) K\left(\frac{x_k - X_t}{h_T}\right) \\
&\quad (\mathbb{E}[Z_1(x_k)] - \mathbb{E}[Z_1(x)])dt \\
&= I_1(x_k) + I_2(x_k).
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par la suite on considère les conditions **(H.0)(ii)** et la formule (2.1), ce qui signifie qu'il existe une constante positive C_K de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
|I_1(x_k)| &\leq \frac{1}{n\,\mathbb{E}[Z_1(x)]} \int_0^T |l(Y_t)| \left| K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) - K\left(\frac{x_k - X_t}{h_T}\right)\right| dt \\
&\leq \frac{\sqrt{T}}{n\,\mathbb{E}[Z_1(x)]} \left(\frac{1}{T}\int_0^T (l(Y_t))^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \left| K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) - K\left(\frac{x_k - X_t}{h_T}\right)\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\sqrt{T}}{n\,\mathbb{E}[Z_1(x)]} O_{p.s}\left(\mathbb{E}^{1/2}[(l(Y_0))^2]\right) \left(\int_0^T C_K^2 \left\|\frac{x - x_k}{h_T}\right\|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= \frac{\delta C_K T^\gamma \nu_T^{-1}}{h_T \mathbb{E}[Z_1(x)]} O_{p.s}\left(\mathbb{E}^{1/2}[(l(Y_0))^2]\right).
\end{aligned}$$

On considère l'hypothèse **(H.4)(i)** en même temps avec la formule (2.5), nous donne :

$$|I_1(x_k)| \ \leq \ \frac{C_K T^{\gamma}\nu_T^{-1}}{h_T^{d+1}\alpha_T} O_{p.s}(\mathbb{E}^{1/2}[(l(Y_0))^2]).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[Z_1(x_k)] - \mathbb{E}[Z_1(x)]| \ &\leq \ \mathbb{E}\left[\int_0^{\delta}\left|K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) - K\left(\frac{x_k-X_t}{h_T}\right)\right|dt\right] \\
&\leq \ \delta \int \left|K\left(\frac{x-y}{h_T}\right) - K\left(\frac{x_k-y}{h_T}\right)\right| f(y)dy \\
&\leq \ \delta\, C_K \left\|\frac{x-x_k}{h_T}\right\| \\
&\leq \ \frac{\delta\, C_K\, T^{\gamma}\,\nu_T^{-1}}{h_T},
\end{aligned}$$

ensuite, nous prenons K est un noyau borné par une constante a_1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|I_2(x_k)| \ &\leq \ \frac{1}{n\,\mathbb{E}[Z_1(x)]\mathbb{E}[Z_1(x_k)]}\int_0^T |l\,(Y_t)|K\left(\frac{x_k-X_t}{h_T}\right)|\mathbb{E}[Z_1\,(x_k)] - \mathbb{E}[Z_1\,(x)]|dt \\
&\leq \ \frac{a_1\delta}{\sqrt{T}\mathbb{E}[Z_1\,(x)]\mathbb{E}[Z_1\,(x_k)]}\left(\frac{1}{T}\int_0^T (l(Y_t))^2 dt\right)^{1/2} \\
&\quad \times\left(\int_0^T (\mathbb{E}[Z_1(x_k)] - \mathbb{E}[Z_1(x)])^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq \ \frac{a_1\delta}{\sqrt{T}\mathbb{E}[Z_1(x)]\mathbb{E}[Z_1\,(x_k)]}\, O_{p.s}(\mathbb{E}^{1/2}[(l\,(Y_0))^2])\left(T\left(\frac{\delta C_K T^{\gamma}\nu_T^{-1}}{h_T}\right)^2\right)^{1/2} \\
&= \ \frac{a_1 C_K T^{\gamma}\nu_T^{-1}}{h_T^{2d+1}\alpha_T^2}\, O_{p.s}(\mathbb{E}^{1/2}[(l\,(Y_0))^2]).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$I_1(x_k) + I_2(x_k) \leq \frac{C_K T^{\gamma}\nu_T^{-1}}{h_T^{2d+1}\alpha_T^2}(a_1 + h_T^d\alpha_T)\ O_{p.s}\left(\mathbb{E}^{1/2}[(l\,(Y_0))^2]\right). \tag{2.14}$$

Maintenant, nous prenons $\nu_T = \left[\frac{T}{h_T^{2d+1}\alpha_T^2}\right]$ et on considère le côté droit de l'énoncé (2.14) en même temps avec le fait que $\mathbb{E}[(l(Y_0))^2] < \infty$, nous obtenons :

$$H_{T,1} = \max_{1\leq k\leq \nu_T} \sup_{x\in\mathcal{B}_{T,k}} |\hat{m}_{T,2}(x) - \hat{m}_{T,2}(x)| = O_{p.s}(T^{\gamma-1}), \qquad \text{quand} \quad T\to\infty, \quad (2.15)$$

remarquons que :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{T,2}(x_k) - \tilde{m}_{T,2}(x) \;&=\; \frac{1}{n\mathbb{E}[Z_1(x)]}\int_0^T \mathbb{E}\left[l(Y_t)\left(K\left(\frac{x-X_t}{h_T}\right) - K\left(\frac{x_k-X_t}{h_T}\right)\right)|\mathcal{F}_{t-\delta}\right]dt\\ &\quad -\frac{1}{n\mathbb{E}[Z_1(x)]\mathbb{E}[Z_1(x_k)]}\int_0^T \mathbb{E}\left[l(Y_t)K\left(\frac{x_k-X_t}{h_T}\right)\right.\\ &\quad \times(\mathbb{E}[Z_1(x_k)] - \mathbb{E}[Z_1(x)])|\mathcal{F}_{t-\delta}]dt.\end{aligned}$$

De manière analogue à $H_{T,1}$, nous permet de trouver que :

$$H_{T,3} = \max_{1\leq k\leq \nu_T} \sup_{x\in\mathcal{B}_{T,k}} |\tilde{m}_{T,2}(x_k) - \tilde{m}_{T,2}(x)| = O_{p.s}(T^{\gamma-1}), \text{quand} \quad T\to\infty. \quad (2.16)$$

Pour traiter le terme $H_{T,2}$, nous procédons de la même manière que dans la formule (2.7). On considère les hypothèses **(H.4)(ii)-(iii)**, et notons $T = T_n = \delta n$, $h_T = h_{T_n}$, $\nu_T = \nu_{T_n}$ et $\alpha_T = \alpha_{T_n}$, c'est-à-dire que $D_n = O\left(T_n h_{T_n}^d\right)$ uniformément en $x \in \mathcal{B}_T$. En outre, en supposant les hypothèses **(H.4)(i)** et **(H.4)(iv)** sont vraies, pour tout $T \geq 0$, on a :

$$\inf_{x\in\mathcal{B}_T} \mathbb{E}[Z_1(x)] \geq \delta h_{T_n}^d \alpha_{T_n} + O\left(h_{T_n}^d\right) \;\text{ et }\; \sup_{x\in\mathcal{B}_T} \mathbb{E}[Z_1(x)] \leq C\delta h_{T_n}^d + O(h_{T_n}^d),$$

par conséquent, prenons $\nu_{T_n} = \left[\frac{T_n}{\alpha_{T_n}^2 h_{T_n}^{2d+1}}\right]$ et $\epsilon_{T_n} = \epsilon_0\left(\frac{\log T_n}{T_n h_{T_n}^d \alpha_{T_n}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq \nu_{T_n}} |\hat{m}_{T,2}(x_k)-\tilde{m}_{T,2}(x_k)|>\epsilon_T\right) &\leq \sum_{k=1}^{\nu_{T_n}} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} L_{T,j}(x_k)\right| > \epsilon_{T_n}(n\mathbb{E}[Z_1(x_k)])\right) \\
&\leq 2\nu_{T_n}\exp\left\{-\frac{(n\,\mathbb{E}[Z_1(x_k)])^2\,\epsilon_{T_n}^2}{O\left(T_n h_{T_n}\right)+C\,n\mathbb{E}[Z_1(x_k)]\epsilon_{T_n}}\right\} \\
&\leq 2\nu_{T_n}\exp\left\{-\frac{\delta^2\,n^2\,h_{T_n}^{2d}\,\alpha_{T_n}^2\,\epsilon_0^2(\log T_n/T_n h_{T_n}^d\alpha_{T_n}^2)}{O\left(T_n h_{T_n}^d\right)+C\,\delta n\,h_{T_n}\left(\frac{\log T_n}{T_n h_{T_n}^d\alpha_{T_n}^2}\right)^{1/2}}\right\} \\
&\leq 2\nu_{T_n}\exp\left\{-\frac{\epsilon_0^2 O\left((T_n h_{T_n}^d)^2\right)\log T_n/T_n h_{T_n}^d}{O(T_n h_{T_n}^d)\left(1+C\left(\frac{\log T_n}{T_n h_{T_n}^d\alpha_{T_n}^2}\right)^{1/2}\right)}\right\} \\
&\leq 2\nu_{T_n}\exp\left\{-\frac{\epsilon_0^2\log T_n}{\left(1+C\left(\frac{\log T_n}{T_n h_{T_n}^d\alpha_{T_n}^2}\right)^{1/2}\right)}\right\} \\
&\leq \frac{2(T_n/\alpha_{T_n}^2 h_{T_n}^{2d+1})}{T_n^{\epsilon_0^2\theta}} \\
&= \frac{2}{\alpha_{T_n}^2 h_{T_n}^{2d+1} T_n^{\epsilon_0^2\theta-1}},
\end{aligned}$$

pour θ sont des constantes positive. En vue de l'hypothèse **(H.4)(v)** combinée avec le Lemme de Borel-Cantelli, nous permet d'écrire :

$$\max_{1\leq k\leq \nu_T} |\hat{m}_{T,2}(x_k)-\tilde{m}_{T,2}(x_k)| = O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{T h_T^d \alpha_T^2}\right)^{1/2}\right), \tag{2.17}$$

en combinant les formules (2.14)-(2.17) avec la condition (2.13) pour obtenir la preuve de ce lemme. □

Lemme 2.3.2. *Sous les hypothèses de Lemme 2.3.1, avec la fonction l prise pour être identique à 1, combinées avec les conditions **(H.1)(ii)** et **(H.2)(i)**, on a :*

$$\sup_{x\in\mathcal{B}_T} |\hat{m}_{T,1}(x) - 1| = o_{p.s}(1), \qquad \textit{quand} \quad T \to \infty.$$

Preuve

Puisque :

$$\hat{m}_{T,1}(x) - 1 = (\hat{m}_{T,1}(x) - \tilde{m}_{T,1}(x)) + (\tilde{m}_{T,1}(x) - 1) = R_{T,1}(x) + R_{T,2}(x).$$

En procédant comme dans le Lemme 2.3.1, avec la fonction l prise pour être identique à 1, cela veut dire que, sous les hypothèses de Lemme 2.3.1, donc :

$$\sup_{x\in\mathcal{B}_T} |R_{T,1}(x)| = \sup_{x\in\mathcal{B}_T} |\hat{m}_{T,1}(x) - \tilde{m}_{T,1}(x)| = O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{Th_T^d\alpha_T^2}\right)^{1/2}\right). \tag{2.18}$$

De plus, sous les assomptions **(H.0)(i), (H.1)(ii)** et **(H.4)(vi)**, suivant des étapes similaires pour établir la formule (2.9), on trouve :

$$\sup_{x\in\mathcal{B}_T} |R_{T,2}(x)| \leq \sup_{x\in\mathcal{B}_T} \left|\frac{1}{Tf(x)} \int_0^T f_{t,t-\delta}(x)dt - 1\right| + o_{p.s}(1) = o_{p.s}(1), \tag{2.19}$$

en combinant la formule (2.18) et (2.19). nous obtenons la preuve. □

Lemme 2.3.3. *Sous les hypothèses **(H.0)(ii), (H.1)-(H.3)(ii)** et la condition* (2.13)*, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\sup_{x\in\mathcal{B}_T} |B_T(x)| = O_{p.s}(h_T^\beta), \tag{2.20}$$

$$\sup_{x\in\mathcal{B}_T} |R_T(x)| = O_{p.s}\left(h_T^\beta\left(\frac{\log T}{Th_T^d\alpha_T^2}\right)^{1/2}\right). \tag{2.21}$$

Preuve

À partir du Lemme 2.3.2, il est facile de voir que $\inf_{x\in\mathcal{B}_T} \hat{m}_{T,1}(x) = 1 + o_{p.s}(1)$. On conidère la formule (2.10), il suffit d'établir que : $\tilde{B}_T(x) = O_{p.s}(h_T^\beta)$. Sous les hypothèses

(H.0)(ii) et **(H.3)(i)-(ii)**, par les mêmes arguments que dans la preuve de Lemme 2.2.3, pour tout x, alors nous avons :

$$|\tilde{B}_T(x)| = |\tilde{m}_{T,2}(x) - m(x)\tilde{m}_{T,1}(x)| \leq h_T^\beta \lambda^\beta \left| \frac{1}{f(x)T} \int_0^T f_{t,t-\delta}(x)dt + o(1) \right|.$$

Par conséquent, en vue des hypothèses **(H.4)(i), (H.4)(vi)**, nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathcal{B}_T} |\tilde{B}_T(x)| &\leq h_T^\beta \left(\sup_{x\in\mathcal{B}_T} \left| \frac{1}{f(x)T} \int_0^T f_{t,t-\delta}(x)dt - 1 \right| + 1 + o(1) \right) \\ &= O_{p.s}\left(h_T^\beta\right). \end{aligned}$$

La deuxième partie du lemme suit en combinant la décomposition (2.3) ainsi que les formules (2.18) et (2.20). □

Preuve du Théorème 2.3.1 Utilisant la décomposition (2.2) avec le Lemme 2.3.1 et la formule (2.18), il s'ensuit que :

$$\sup_{x\in\mathcal{B}_T} |Q_T(x)| = O_{p.s}\left(\left(\frac{\log T}{T h_T^d \alpha_T^2} \right)^{1/2} \right) \tag{2.22}$$

par conséquent, la décomposition (2.4) combinée avec les résultats de Lemme 2.3.3 et de la formule (2.22) permettent d'aboutir au résultats recherché. □

Chapitre 3

Normalité asymptotique d'estimateur de la fonction de régression d'un processus stationnaire à temps continu

Après l'étude de la convergence presque sûre de notre estimateur, une autre question se pose alors, celle de la vitesse de convergence de ce estimateur. Le théorème central limite nous donne une normalisation en $\sqrt{n}$. Dans ce chapitre, nous allons donner un théorème permettant d'etablir cette normalite asymptotique dans le cadre des données ergodique. Ces résultats ont été proposés principalement par Sultana Didi et Djamal Louani (2014)[23]. Ce chapitre est divisé en deux sections, nous regroupons dans la première section l'ensemble des hypothèses utilisées pour établir la normalité asymptotique et le résultat principal de ce chapitre et dans la deuxième section on verra la démonstration détaillée de notre résultat.

3.1 Notations et hypothèses

Pour un nombre réel positif δ tel que : $n = \dfrac{T}{\delta} \in \mathbb{N}$, on considère la δ-partition $(T_j)_{1\leq j\leq n}$ sur l'intervalle $[0,\ T]$. De plus, pour tout $t > 0$ et $\delta > 0$, considèrons les σ-algèbres : $\mathcal{G}_t = \sigma((\mathrm{X}_s) : 0 \leq s \leq t)$, $\mathcal{F}_t = \sigma((\mathrm{X}_s,\ Y_s) : 0 \leq s < t)$, et $\mathcal{S}_{t,\delta} = \sigma((\mathrm{X}_s,\ Y_s); (\mathrm{X}_r) : 0 \leq s < t,\ t \leq r \leq t + \delta)$. Chaque fois que $s < 0$, $\mathcal{G}_s$ et $\mathcal{F}_s$ se présenter comme des σ-algèbres triviaux. Pour $j \in \mathbb{N}$, désignons $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}_{T_j}$ et $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{T_j}$. Pour ξ est une variable aléatoire réelle et tout $k \in \mathbb{N}$, nous définissons la projection $\mathcal{P}_k$ par $\mathcal{P}_k\xi = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}_k] - \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}_{k-1}]$, où $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}_k]$ signifie que l'espérance conditionnelle de ξ sachant le σ-algèbre $\mathcal{G}_k$.

Les hypothèses qui permettent d'établir la normalité sont les suivantes :

(A.0) **(i)** K est un noyau symetrique borné non négatif d'ordre 2 a support compact tel que : $\int K(z)dz = 1$, et satisfait $\int z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d} K(z)dz = 0$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{N}$; $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d = j,\ j = 1, 2$, et $\int \|z\|^2 K(z)dz < \infty$.

(ii) Il existe une fonction intégrable différentiable non negative k sur le support $[0,\ c_1\lambda]$ telle que : $K(u) = k(\|u\|)$, et $\int_{\mathbb{R}} u^{d-1}k^2(u)du < \infty$.

(A.1) **(i)** Pour tout $0 \leq s < t \leq T$, il existe c_0 une constante positive et une fonction aléatoire non negative continue et bornée $f_{t,s}$ defini sur $\mathbb{R}^d$ telle que, presque sûrment,

$$\mathbb{P}^{\mathcal{F}_s}(\mathrm{X}_t \in \mathcal{S}_{r,\mathrm{x}}) = \mathbb{P}(\|\mathrm{X}_t - \mathrm{x}\| \leq r|\mathcal{F}_s) = c_0 r^d f_{t,s}(\mathrm{x}) + o(r^d), \quad \text{quand} \quad r \to 0,$$

(A.2) Pour tout $\delta > 0$ et tout $s,\ t$ tel que $t \in [0,\ T]$ et $t \leq s \leq t + \delta$, on a :

(i) $\mathbb{E}[Y_r|\mathcal{S}_{t,\delta}] = \mathbb{E}[Y_r|X_r] = r(X_r) \quad$ p.s.

(ii) Il existe deux constantes $\beta > 0$ et $c_3 > 0$ telles que, pour tout $(u,\ v) \in \mathbb{R}^{2d}$,

$$|r(\mathrm{u}) - r(\mathrm{v})| \leq c_3||\mathrm{u} - \mathrm{v}||^{\beta}$$

(iii) $\mathbb{E}[(Y_s - r(\mathrm{x}))^2|\mathcal{S}_t] = \mathbb{E}[(Y_s - r(\mathrm{x}))^2|\mathrm{X}_s] = W_2(\mathrm{X}_s)$, de plus la fonction $W_2(\mathrm{x})$ est uniformément continue au voisinage de x *ie* :

$$\sup_{||\mathrm{u}-\mathrm{x}||\leq h_T} |W_2(\mathrm{u}) - W_2(\mathrm{x})| = o(1), \qquad \text{quand} \quad h_T \to 0.$$

(iv) Pour tout $\alpha > 0$ assez petit, $\mathbb{E}[|Y_s|^{2+\alpha}] < \infty$, et la fonction $\overline{W}_{2+\alpha}(\mathrm{u}) = \mathbb{E}[|Y_s - r(\mathrm{x})|^{2+\alpha}|\mathrm{X}_s = u]$ est continue au voisinage de x.

3.2 Normalité asymptotique

Le résultat principal de ce chapitre est donné dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Sous les hypothèses **(A.0)**, **(A.1)** et **(A.2)**, lorsque :*

$$\lim_{T\to\infty} h_T^{\beta}(Th_T^d)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $f(\mathrm{x}) \neq 0$*, on a :*

$$(Th_T^d)^{1/2}(\hat{r}_T(\mathrm{x}) - r(\mathrm{x})) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,\ \Sigma^2(\mathrm{x})), \quad \textit{lorsque} \quad T \to \infty.$$

Corollaire 3.2.1. *[24] Pour tout* $\delta > 0$ *et* $t > 0$ *sur l'intervalle* $[0, T]$*, considèrons la* σ*-algèbre* $\mathcal{G}_t = \sigma((\mathrm{X}_s) : 0 \leq s \ \leq t)$*, il existe une quantité* $g_i^{\mathcal{G}_{i-2}}$ *telle que :*

$$g_i^{\mathcal{G}_{i-2}}(\mathrm{x}) = \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\right)^2.$$

En utilisant la somme de Riemann, cette quantité peut être approchée, donc la somme $\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n g_i^{\mathcal{G}_{i-2}}(\mathrm{x})$ *a une limite finie, lequel est :*

$$\mathbb{E}[g_1^{\mathcal{G}_{-\delta}}(\mathrm{x})] = \left(\int_0^{\delta} f(\mathrm{x})dt\right)^2 = \delta^2 f^2(\mathrm{x}). \tag{3.1}$$

Corollaire 3.2.2. *[24] Pour δ un nombre réel positif tel que : $n = \dfrac{T}{\delta} \in \mathbb{N}$, Pour tout $\delta > 0$ et $t > 0$ sur l'intervalle $[0, T]$, ce qui signifie que :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{T_{j-1}}^{T_j} f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\right) &= \mathbb{E}\left(\int_{T_0}^{T_1} f_t(\mathrm{x})dt\right) + o(1) \\
&= \int_0^{\delta} \mathbb{E}(f_t(\mathrm{x}))dt + o(1) \\
&= \delta f(\mathrm{x}) + o(1). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 3.2.1 Pour prouver notre résultat, introduisons d'abord les deux notations suivantes :

$$Z_1(\mathrm{x}) = \int_0^{\delta} K\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{X}_t}{h_T}\right) dt.$$

Pour $j = 1, 2$, nous avons :

$$\tilde{r}_{T,j}(\mathrm{x}) = \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i} \mathbb{E}[Y_t^{j-1} K\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}]dt,$$

puisque $\mathbb{P}(\|\mathrm{x} - \mathrm{X}_t\| \leq 0) = 0$, on fait l'intégrale par parties et on considère les hypothèses **(A.0)(i)** et **(A.1)(i)**, permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_T^d}\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})] &= \frac{1}{h_T^d}\mathbb{E}\left[\int_0^{\delta} K\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{X}_t}{h_T}\right) dt\right] \\
&= \frac{1}{h_T^d}\int_0^{\delta} \mathbb{E}\left[k\left(\left\|\frac{\mathrm{x} - \mathrm{X}_t}{h_T}\right\|\right)\right] dt \\
&= \frac{1}{h_T^d}\int_0^{\delta}\int_0^{\lambda} k(u)d\mathbb{P}(\|\mathrm{x} - \mathrm{X}_t\| \leq h_T u)dt \\
&= \frac{1}{h_T^d}\int_0^{\delta}\left([k(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x} - \mathrm{X}_t\| \leq h_T u)]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} k'(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x} - \mathrm{X}_t\| \leq h_T u)du\right) dt \\
&= c_0\delta f(\mathrm{x})\left(k(\lambda)\lambda^d - \int_0^{\lambda} u^d k'(u)du\right) + o(1) \\
&= dc_0\delta f(\mathrm{x})\left(\int_0^{\lambda} u^{d-1}k(u)du\right) + o(1) \\
&= dc_0\delta f(\mathrm{x})\tau_0 + o(1), \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

où $\tau_0 = \left(\int_0^\lambda u^{d-1}k(u)du\right)$. Considérons maintenant la décomposition suivante :

$$Q_T(\mathrm{x}) = (\hat{r}_{T,2}(\mathrm{x}) - \tilde{r}_{T,2}(\mathrm{x})) - r(\mathrm{x})(\hat{r}_{T,1}(\mathrm{x}) - \tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})) \tag{3.4}$$

$$R_T(\mathrm{x}) = -B_T(\mathrm{x})(\hat{r}_{T,1}(\mathrm{x}) - \tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})) \tag{3.5}$$

$$\hat{r}_T(\mathrm{x}) - r(\mathrm{x}) = \hat{r}_T(\mathrm{x}) - C_T(\mathrm{x}) + B_T(\mathrm{x}) = B_T(\mathrm{x}) + \frac{Q_T(\mathrm{x}) + R_T(\mathrm{x})}{\hat{r}_{T,1}(\mathrm{x})}, \tag{3.6}$$

où

$$B_T(\mathrm{x}) = C_T(\mathrm{x}) - r(\mathrm{x}) \ = \frac{\tilde{r}_{T,2}(\mathrm{x})}{\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})} - r(\mathrm{x})$$

se présente comme le biais conditionnel. Observe que :

$$B_T(\mathrm{x}) \ = \ \frac{\tilde{r}_{T,2}(\mathrm{x}) - r(\mathrm{x})\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})}{\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})} = \frac{\tilde{B}_T(\mathrm{x})}{\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})},$$

les hypothèses **(A.2)(i)-(ii)** et la formule (3.2) permettez-nous d'écrire :

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_T(\mathrm{x}) &= \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[(Y_t - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(Y_t - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{S}_{t-\delta,\delta}\right]|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[(r(\mathrm{X}_t) - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&\leq \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sup_{\|\mathrm{u}-\mathrm{x}\|\leq h_T}|r(\mathrm{u}) - r(\mathrm{x})|\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[k\left(\left\|\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right\|\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&= \frac{1}{nd\delta c_0\tau_0 h_T^d f(\mathrm{x})}\sup_{\|\mathrm{u}-\mathrm{x}\|\leq h_T}|r(\mathrm{u}) - r(\mathrm{x})|\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}dc_0\tau_0 h_T^d f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt \\
&= \frac{h_T^\beta}{\delta f(\mathrm{x})}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\right) \\
&= O(h_T^\beta).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ensuite, nous devons montrer que :

$$\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x}) \stackrel{\mathbb{P}}{=} 1, \qquad \text{quand} \quad T \to \infty.$$

Remarquons, d'aprés la formule (3.2) que :

$$
\begin{aligned}
\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x}) &= \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt\\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[k\left(\left\|\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right\|\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt\\
&= \frac{1}{nd\delta c_0\tau_0 h_T^d f(\mathrm{x})}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}(dc_0\tau_0 h_T^d f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})+O(h_T^d))dt\\
&= \frac{1}{\delta f(\mathrm{x})}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\right)+O(h_T^d)\\
&= 1+o(1), \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

avec les formules (3.7) et (3.8), nous avons ainsi prouvé que :

$$
(Th_T^d)^{1/2}B_T(\mathrm{x}) = O\left(h_T^{\beta}(Th_T^d)^{1/2}\right). \qquad (3.9)
$$

Il nous reste à déterminer la limite de $R_T(\mathrm{x})$, selon la décomposition (3.5), le seul point restant concerne le comportement asymptotique du terme $(\hat{r}_{T,1}(\mathrm{x})-\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x}))$. Nous avons besoin la décomposition suivante :

$$
\begin{aligned}
\hat{r}_{T,1}(\mathrm{x})-\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x}) &= \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\left(K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)-\mathbb{E}\left[K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right)dt\\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))}\sum_{i=1}^{n}\chi_{T,i}(\mathrm{x}),
\end{aligned}
$$

où $\chi_{T,i}(\mathrm{x}) = \int_{T_{i-1}}^{T_i}\left(K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)-\mathbb{E}\left[K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right)dt$. Il est facile de vérifier que la suite des variables aléatoires $\{\chi_{T,i}(\mathrm{x})\}$ forment un tableau triangulaire des différences de martingales. Par les inégalités de Markov, Burkholder et Jensen avec le fait que : $(\alpha+b)^2 \leq 2\alpha^2+b^2$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_0 > 0$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\hat{r}_{T,1}(\mathrm{x})-\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})|>\epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\chi_{T,i}(\mathrm{x})\right|>\epsilon(n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x})))\right)\\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2\left(n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))\right)^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_{T,i}(\mathrm{x})\right)^2\right]\\
&\leq \frac{C_0}{\epsilon^2\left(n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\chi_{T,i}^2(\mathrm{x})\right]\\
&\leq \frac{C_0}{\epsilon^2(n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x})))^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[\left(K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\mathbb{E}\left[K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right)^2\right]dt\\
&\leq \frac{2C_0}{\epsilon^2(n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x})))^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\left(\mathbb{E}\left[K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.+\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right)^2\right]\right)dt\\
&\leq \frac{4C_0}{\epsilon^2\left(n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)\right]dt\\
&\leq \frac{4C_0}{\epsilon^2\left(n\mathbb{E}(Z_1(\mathrm{x}))\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[k^2\left(\left\|\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right\|\right)\right]dt.
\end{aligned}$$

Ensuite, de façon similaire à la formule (3.3) avec les hypothèses **(A.0)(ii)-(A.1)** sont vérifiers, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\hat{r}_{T,1}(\mathrm{x})-\tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})|>\epsilon\right) &\leq \frac{4C_0}{\epsilon^2\left(ndc_0\delta\tau_0h_T^df(\mathrm{x})\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}dc_0h_T^df(\mathrm{x})dt\\
&\quad\times\left(\int_0^{\lambda}v^{d-1}k^2(v)dv\right)\\
&= \frac{4C_0}{\epsilon^2Th_T^ddc_0\tau_0^2f(\mathrm{x})}\left(\int_0^{\lambda}v^{d-1}k^2(v)dv\right)\\
&= O\left(\frac{1}{Th_T^d}\right). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

En combinant maintenant la décomposition (3.5) les assertions (3.9) et (3.10), il s'ensuit que :

$$(Th_T^d)^{1/2} R_T(\mathrm{x}) = O\left(\frac{h_T^\beta}{(Th_T^d)^{1/2}}\right).$$

Par l'utilisation de la décomposition (3.6) et les conditions **(A.2)(iii)** et **(iv)**, il reste ensuite à établir le comportement limité du terme $Q_T(\mathrm{x})$, notons que :

$$\begin{aligned}
(Th_T^d)^{1/2} Q_T(\mathrm{x}) &= (Th_T^d)^{1/2}(\hat{r}_{T,2}(\mathrm{x}) - \tilde{r}_{T,2}(\mathrm{x})) + r(\mathrm{x})(\hat{r}_{T,1}(\mathrm{x}) - \tilde{r}_{T,1}(\mathrm{x})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(Th_T^d)^{1/2}}{n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})]} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \left[(Y_t - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{X}_t}{h_T}\right)\right. \\
&\quad \left. -\mathbb{E}\left[(Y_t - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right] dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_{T,i}(\mathrm{x}).
\end{aligned}$$

Observons d'abord que :

$$\xi_{T,i}(\mathrm{x}) = \eta_{T,i}(\mathrm{x}) - \mathbb{E}[\eta_{T,i}(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}], \text{ où } \eta_{T,i}(\mathrm{x}) = \frac{(Th_T^d)^{1/2}}{n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})]} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (Y_t - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{X}_t}{h_T}\right) dt.$$

De plus, on voit facilement que, $(\xi_{T,i}(\mathrm{x}))_{1\le i\le n}$ est une séquence de différences martingale par rapport à la suite de σ-algèbre $(\mathcal{F}_{i-1})_{1\le i\le n}$. Par conséquent, nous devons vérifier les deux assertions suivantes :

(a) $\Sigma_{i=1}^n \mathbb{E}[\xi_{T,i}^2(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \Sigma^2(\mathrm{x})$

(b) $n\mathbb{E}[\xi_{T,i}^2(\mathrm{x})\mathbb{I}_{\{|\xi_{T,i}(\mathrm{x})|>\epsilon\}}] = o(1)$, vérifier, pour tout $\epsilon > 0$,

qui sont nécessaires pour établir la normalité asymptotique des suites de différences de martingales à temps continu (voir, par exemple, Hall et Heyde (1980)). Tout d'abord, nous observons que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\eta_{T,i}^2(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}\right] - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_{T,i}^2(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[\eta_{T,i}(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right)^2\right|.$$

Notez que pour $T_{i-1} \le t \le T_i$, nous avons $\mathcal{F}_{i-2} \subset \mathcal{S}_{t-\delta,\delta}$.

Par conséquent, en utilisant les conditions **(A.2)(i)** et l'énoncé (3.3), nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[\eta_{T,i}(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}]| &= \left|\frac{(Th_T^d)^{1/2}}{n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})]}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[(Y_t-r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt\right| \\
&= \left|\frac{(Th_T^d)^{1/2}}{n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})]}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(Y_t-r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{S}_{t-\delta,\delta}\right]|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt\right| \\
&= \left|\frac{(Th_T^d)^{1/2}}{ndc_0\tau_0\delta f(\mathrm{x})h_T^d}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(r(\mathrm{X}_t)-r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{S}_{t-\delta,\delta}\right]|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt\right| \\
&\leq \left|\frac{(Th_T^d)^{1/2}}{ndc_0\tau_0\delta f(\mathrm{x})h_T^d}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\sup_{\|\mathrm{x}-\mathrm{v}\|\leq h_T}|r(\mathrm{v})-r(\mathrm{x})|\mathbb{E}\left[k\left(\left\|\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right\|\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt\right|,
\end{aligned}$$

d'aprés l'utilisation de la conditions **(A.2)(ii)** on peut obtenir :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\left[\eta_{T,i}(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}\right]| &\leq \left(\frac{1}{Th_T^d}\right)^{1/2}\frac{1}{dc_0\delta\tau_0 f(\mathrm{x})}\sup_{\|\mathrm{x}-\mathrm{v}\|\leq h_T}|r(\mathrm{v})-r(\mathrm{x})| \\
&\quad\times\int_{T_{i-1}}^{T_i}\left([k(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\|\leq h_T u|\mathcal{F}_{i-2})]_0^\lambda\right. \\
&\quad\left.-\int_0^\lambda k'(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\|\leq h_T u|\mathcal{F}_{i-2})du\right)dt \\
&= \left(\frac{h_T^d}{T}\right)^{1/2}\frac{h_T^\beta}{\delta\tau_0 f(\mathrm{x})}\left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\ +o(1)\right)\int_0^\lambda u^{d-1}k(u)dudt \\
&= \left(\frac{h_T^d}{T}\right)^{1/2}\frac{h_T^\beta}{\delta f(\mathrm{x})}\left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\ +o(1)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, par la formule (3.1), nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n\left(\mathbb{E}\left[\eta_{T,i}(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right)^2\right| &= \frac{h_T^{2\beta+d}}{\delta^3 f^2(\mathrm{x})}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\right)^2\right)+o\left(h_T^{d+2\beta}\right) \\
&= \frac{h_T^{2\beta+d}}{\delta\left(\delta f(\mathrm{x})\right)^2}\frac{1}{\delta n}\sum_{i=1}^n\left(g_i^{\mathcal{F}_{i-2}}(\mathrm{x})\right)^2+o\left(h_T^{d+2\beta}\right) \\
&= \frac{h_T^{2\beta+d}}{\delta\left(\delta f(\mathrm{x})\right)^2}\mathbb{E}\left[g_0^{\mathcal{F}_{-\delta}}(\mathrm{x})\right]+o\left(h_T^{d+2\beta}\right) \\
&= o\left(h_T^{d+2\beta}\right).
\end{aligned}$$

La formule **(a)** suit, à condition que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\eta_{T,i}^{2}(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}\right] \to \Sigma^{2}(\mathrm{x}).$$

Par l'utilisation d'inégalité de Jensen, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\eta_{T,i}^{2}(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}] &= \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\mathbb{E}\left[\left(\int_{T_{i-1}}^{T_i}(Y_t - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)dt\right)^2|\mathcal{F}_{i-2}\right] \\
&\leq \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\mathbb{E}\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}(Y_t - r(\mathrm{x}))^2K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)dt|\mathcal{F}_{i-2}\right],
\end{aligned}$$

d'aprés la condition **(A.2)(iii)** et en observant que, pour tout $1 \leq i \leq n$, pour tout $t \in [T_{i-1},\ T_i]$, on a $\mathcal{F}_{i-2} \subseteq \mathcal{S}_{t-\delta}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\eta_{T,i}^{2}(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}] &\leq \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[(Y_t - r(\mathrm{x}))^2K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&= \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(Y_t - r(\mathrm{x}))^2|\mathcal{S}_{t-\delta}\right]K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&= \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[W_2(\mathrm{X}_t)K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&= \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[(W_2(\mathrm{X}_t)-W_2(\mathrm{x}))K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&\quad + \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[W_2(\mathrm{x})K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt \\
&= I_{T,1,i}(\mathrm{x}) + I_{T,2,i}(\mathrm{x}),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

considèrant la condition **(A.0)(i)**, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\|I_{T,1,i}(\mathrm{x})\| &= \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[(W_2(\mathrm{X}_t)-W_2(\mathrm{x}))k^2\left(\left\|\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right\|\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt\\
&= \frac{Th_T^d}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^2}\sup_{\|\mathrm{v}-\mathrm{x}\|\le h_T}|W_2(\mathrm{v})-W_2(\mathrm{x})|\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\\
&\quad\times\int_{\mathbb{R}^d}k^2(\mathrm{y})d\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\|\le h_T\mathrm{y}|\mathcal{F}_{i-2})dt\\
&= \frac{Th_T^d}{\left(ndc_0\tau_0\delta h_T^d f(\mathrm{x})\right)^2}\sup_{\|\mathrm{v}-\mathrm{x}\|\le h_T}|W_2(\mathrm{v})-W_2(\mathrm{x})|\sum_{i=1}^{n}\\
&\quad\int_{T_{i-1}}^{T_i}([k^2(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\|\le h_Tu|\mathcal{F}_{i-2})]_0^\lambda\\
&\quad-\int_0^\lambda(k^2)'(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\|\le h_Tu|\mathcal{F}_{i-2})du)dt\\
&= \frac{o(1)}{\delta dc_0(\tau_0 f(\mathrm{x}))^2}\int_0^\lambda u^{d-1}k^2(u)du\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en procédant comme pour la formule (3.2), nous obtenons

$$I_{T,1,i}(\mathrm{x}) = o(1). \tag{3.12}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
I_{T,2,i}(\mathrm{x}) &= \frac{W_2(\mathrm{x})}{\delta\left(dc_0\tau_0 f(\mathrm{x})\right)^2}\frac{1}{nh_T^d}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[K^2\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]dt\\
&= \frac{W_2(\mathrm{x})}{\delta\left(dc_0\tau_0 f(\mathrm{x})\right)^2}\frac{1}{nh_T^d}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\int_0^\lambda k^2(u)d\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\|\le h_T|\mathcal{F}_{i-2})dt\\
&= \frac{W_2(\mathrm{x})}{\delta\left(dc_0\tau_0 f(\mathrm{x})\right)^2}\frac{1}{nh_T^d}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\left([k^2(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\|\le h_Tu|\mathcal{F}_{i-2})]_0^\lambda\right.\\
&\quad\left.-\int_0^\lambda(k^2)'(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\|\le h_Tu|\mathcal{F}_{i-2})du\right)dt\\
&= \frac{W_2(\mathrm{x})}{\delta dc_0\left(\tau_0 f(\mathrm{x})\right)^2}\int_0^\lambda u^{d-1}k^2(u)du\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}f_{t,T_{i-2}}(\mathrm{x})dt\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, procédons de même que pour la formule (3.2) avec un passage à la limite, il en résulte que :

$$I_{T,2,i}(\mathrm{x}) = \frac{W_2(\mathrm{x})}{dc_0\tau_0^2 f(\mathrm{x})}\int_0^\lambda u^{d-1}k^2(u)du \quad \text{quand} \quad T \to \infty. \tag{3.13}$$

Par conséquent, les assertions (3.12) et (3.13) donnent :

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\eta_{T,i}^2(\mathrm{x})|\mathcal{F}_{i-2}] \le \frac{W_2(\mathrm{x})}{dc_0\tau_0^2 f(\mathrm{x})}\int_0^\lambda u^{d-1}k^2(u)du, \quad p.s.$$

Concernant la preuve de (b) : En utilisant les inégalités de Hölder, Markov, Jensen et Minkowski, pour tout $\epsilon > 0$ et pour p et q tels que : $1/p + 1/q = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi_{T,i}^2(\mathrm{x})\mathbb{I}_{\{|\xi_{T,i}(\mathrm{x})|>\epsilon\}}] &\le \left(\mathbb{E}[\xi_{T,i}^{2q}(\mathrm{x})]\right)^{1/q}\left(\mathbb{P}\{|\xi_{T,i}(\mathrm{x})| > \epsilon\}\right)^{1/p} \\
&\le \epsilon^{-2q/p}\mathbb{E}\left[|\xi_{T,i}(\mathrm{x})|^{2q}\right] \\
&\le \frac{(Th_T^d)^q\epsilon^{-2q/p}}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^{2q}}\mathbb{E}\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}\left|(Y_t - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. -\mathbb{E}\left[(Y_t - r(\mathrm{x}))K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)|\mathcal{F}_{i-2}\right]\right|^{2q} dt\right] \\
&\le \frac{2^{2q}(Th_T^d)^q\epsilon^{-2q/p}}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^{2q}}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[|Y_t - r(\mathrm{x})|^{2q}K^{2q}\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)\right]dt \\
&= \frac{2^{2q}(Th_T^d)^q\epsilon^{-2q/p}}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^{2q}}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathbb{E}\left[K^{2q}\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right)\mathbb{E}\left[|Y_t - r(\mathrm{x})|^{2q}|\mathcal{S}_{t-\delta}\right]\right]dt \\
&= \frac{2^{2q}(Th_T^d)^q\epsilon^{-2q/p}}{(n\mathbb{E}[Z_1(\mathrm{x})])^{2q}}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\left(\sup_{|\mathrm{u}-\mathrm{x}|\le h_T}|\overline{W}_{2q}(\mathrm{u}) - \overline{W}_{2q}(\mathrm{x})| + \overline{W}_{2q}(\mathrm{x})\right) \\
&\quad \times\mathbb{E}\left[k^{2q}\left(\left\|\frac{\mathrm{x}-\mathrm{X}_t}{h_T}\right\|\right)\right]dt \\
&= \frac{2^{2q}(Th_T^d)^q\epsilon^{-2q/p}}{\left(dc_0 n\delta\tau_0 h_T^d f(\mathrm{x})\right)^{2q}}\int_{T_{i-1}}^{T_i}(\overline{W}_{2q}(\mathrm{x}) + o(1))([k^{2q}(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\| \le h_T u)]_0^\lambda \\
&\quad -\int_0^\lambda (k^{2q})'(u)\mathbb{P}(\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_t\| \le h_T u)du)dt \\
&\le \frac{2^{2q}\delta\epsilon^{-2q/p}}{(dc_0)^{2q-1}\tau_0^{2q}T^q h_T^{d(q-1)}f^{2q-1}(\mathrm{x})}\left(\overline{W}_{2q}(\mathrm{x}) + o(1)\right)\int_0^\lambda u^{d-1}k^{2q}(u)du.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les hypothèses **(A.1)(i)** et **(A.2)(iii)** impliquent que :

$$\begin{aligned} n\mathbb{E}[\xi^2_{T,i}(\mathrm{x})\mathbb{I}_{\{|\xi_{T,i}(\mathrm{x})|>\epsilon\}}] &= \frac{2^{2q}\epsilon^{-2q/p}}{(dc_0)^{2q-1}\tau_0^{2q}(Th_T^d)^{q-1}f(\mathrm{x})^{2q}}\left(\overline{W}_{2q}(\mathrm{x})+o(1)\right)\int_0^\lambda u^{d-1}k^{2q}(u)du \\ &= O\left((Th_T)^{-(q-1)}\right). \end{aligned}$$

Donc, Nous avons terminé la preuve de la partie (b). En fin, nous avons

$$(Th_T)^{1/2}Q_T(\mathrm{x}) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,\ \Sigma^2(\mathrm{x})) \tag{3.14}$$

qui complète la preuve du notre théorème. □

Conclusion

Au cours de notre mémoire de fin d'études. Nous avons traité un cadre de travail relatif a l'estimation non parametrique par la méthode du noyau notamment dans le contexte de la fonction de régression de processus stationnaire et de nature ergodique spécialement au temps continu.

Une section a été consacré a la présentation de cet estimateur a noyau liée a la théorie ergodique qui prend un grand rôle dans notre étude. Puis dans ce travail on s'intéresse aux comportements asymptotiques pour établir la propriéte forte : l'une de convergence ponctuelle et l'autre de convergence uniforme presque sûre avec des vitesses de convergence par l'utilisation d'une inégalité exponontielle basée sur une séquence de différences martingales en liaison avec des techniques de projection sur des tribus. Ainsi qu'analyser la normalité asymptotique de cet estimateur sous les conditions de l'ergodicité. Les résultats qui ont été obtenus sur l'estimation à noyau de régression en temps continu peuvent être généraliser au cas des données fonctionnelles.

Bibliographie

[1] Andrews, D.W.K. (1984). Non-strong mixing autoregressive processes. J. Appl. Probab., 21, 930-934.

[2] Arnold, L. (1973). Stochastic Differential Equations : Theory and Practice. New York : Wiley.

[3] Ash, R.B. and Gardner, M.F. (1975). Topics in stochastic processes, Academic Press.

[4] Banks, H.T. (1975). Modeling and Control in the Biological Sciences. Lect. Notes Biomath, 6, Berlin : Springer-Verlag.

[5] Banon, G. (1978). Nonparametric identification for diffusion processes. SIAM J. Control Optim. 16(3), p. 380-395.

[6] Beran, J. (1994). Statistics for long memory processes. Chapman and Hall, New York.

[7] Bergstrom, A.R. (1990). Continuous Time Eonometrie Modelling. Oxford : Oxford University Press.

[8] Bosq D. (1998). Nonparametric statistics for stochastic processes : Estimation and prediction. Springer New york.

[9] Bosq, D. (2000). Linear process in function spaces. Theory and application. Lectures notes in statistics.129 : Springer Verlag. Berlin.

[10] Bosq, D and Blanke, D. (2007). Inference and prediction in large dimensions. Wiley Series in Probability and Statistics, p. 316.

[11] Bosq, D and Blanke, D. (2008). Regression estimation and prediction in continuous time, Journal of the Japan Statistical Society (Nihon Tôkei Gakkai Kaihô), 38. p. 15-26.

[12] Castellana, J. V. and Leadbetter, M. R. (1986). On smoothed probability density estimation for stationary processes. Stochastic Process. Appl., 21, p. 179-193.

[13] Chernick, M.R. (1981). A limit theorem for the maximum of autoregressive processes with uniform marginal distributions. Ann. Probab, 9, 145-149.

[14] Chèze-Payaud, N. (1994). Nonparametric regression and prediction for continuous time process. Publ. Inst. Statistics Univ. Paris, 38, p. 37-58.

[15] Cohen, J. E. (1979). Ergodic theorems in demography. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1. p. 275-295.

[16] Collomb, G. (1983). Méthodes non paramétriques en régression, analyse des séries temporelles, prédiction et discrimination. Doctorat d'Etat, Toulouse 3.

[17] Collomb, G. (1984). Propriétés de convergence presque complète du prédicteur à noyau. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 66, p. 441-460.

[18] Collomb,G. (1985). Nonparametric regression : an up-to-date bibliography. Statistics. A Journal of Theoretical and Applied Statistics. 16, p. 309-324.

[19] D. Foata and A. Fuchs .(1996). Calcul des probabilités, Masson.

[20] Delecroix, M. and Rosa, A. C. (1996). Nonparametric estimation of a regression function and its derivatives under an ergodic hypothesis. J. Nonparametr. Statist, 6, p. 367-382.

[21] Devroye, L.P. (1978). The uniform convergence of the Nadaraya-Watson regression function estimate. Canad. J. Statist. 6, p. 179-191.

[22] Devroye, L., Györfi, L. et Lugossi, G. (1986). A probability Theory of Pattern Recognition. Springer New-York

[23] Djamal Louani, Sultana Didi. (2014). Quelques propriétés asymptotiques en estimation non paramétrique de fonctionnelles de processus stationnaires en temps continu. p 97-123.

[24] Djamal Louani, Sultana Didi. (2014). Consistency results for the kernel density estimate on continuous time stationary and dependent data. L.S.T.A., Université de Paris 6. 4, Place Jussieu, 75252 Paris, France.

[25] Gasser, T. and Müller, H. (1984). Estimating regression functions and their derxwivatives by the kernel method. Scand. J. Statist. 11, p. 171-185.

[26] Györfi,L, Härdle, W. Sarda, P. and Vieu, P. (1989). Nonparametric curve estimation from time series. Lecture Notes in Statistics, 60. Springer-Verlag, Berlin.

[27] Hale, J.K. Verduyn Lunel, S.M. (1993). lntroduction to Functional-differential Equations. New York : Springer-Verlag.

[28] Ibragimov, I.A., Linnik, Yu.V. (1971). Independent and Stationary Sequences of Random Variables. Wolters-Nordhoff, Groningen.

[29]] J.M. STEELE, The Cauchy-Schwarz master class ; an introduction to the art of mathematical inequalities. Cambridge University Press, 2004. Réimprimé plusieurs fois.

[30] James Clerk Maxwell ; Transaction of the Cambridge Philosophical Society 12 (1879) 547.

[31] Jean-Yves Ouvrard : Probabilités tome 2, Maîtrise-Agrégation. Cassini, 2004.

[32] Karatzas, I. Shreve, S.E. (1991). Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York : Springer-Verlag.

[33] Krengel, U. (1985). Ergodic Theorems, Walter de Gruyter et Co. Berlin.

[34] Laïb, N. and Louani D.(2010). Nonparametric kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : Asymptotic properties. Journal of Multivariate Analysis, 101, p. 2266-2281.

[35] Laïb, N. and Louani D. (2011). Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data. J. Statist. Plann. Inference, 141, p. 359-372.

[36] Lange, K. (2002). Mathematieal and Statistical Methods for Genetie Analysis. New York : Springer-Verlag.

[37] Lejeune, F. X. (2007). Histogramme, Régressogramme et Polygone de Fréquences en Temps Continu , PhDthesis, Université Paris 6.

[38] LU, Z. (2009). Analyse des Processus Longue Mémoire Stationnaires et Nonstationnaires : Estimations, Applications et Prévisions. PhD Thesis.

[39] Ludwig Boltzmann ; K. Akademie der Wissenschaften (Wien) 63 (1871). 679.

[40] Mack, Y. P. and Silverman, B. W. (1982). Weak and strong uniform consistency of kernel regression estimates. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 61,p. 405-415.

[41] Maslowski, B,and Pospíšil, J (2008). Ergodicity and parameter estimates for infinite-dimensional fractional Ornstein-Uhlenbeck process. Appl. Math. Optim. 3, p. 401-429.

[42] Nadaraya, E.N. (1964). On a regression estimate, Teor. Verojatnost. i Primenen. 9, p 157-159.

[43] Nadaraya, E.N. (1965). On nonparametric estimates of density functions and regression curves. Teor. Verojatnost. i Primenen, 10, p. 199-203.

[44] Olivier Gare et Aline Kurtzmann.(2011). De l'intégration aux probabilités. p .152,188 : éditions Ellipses.

[45] Papanicolaou, G. (1995). Diffusion in random media.In Surveys in Applied Mathematics, J.B. Keller, D. Mc Laughlin and G. Papanicolaou (Eds), Plenum Press, p. 205-255.

[46] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode, Ann. Math. Statist, p. 1065-1076,

[47] Peskir, G. (2000). From uniform laws of large numbers to uniform ergodic theorems, Lecture Notes Series (Aarhus), 66.

[48] Philippe Barbe et Michel Ledoux : Probabilité (L3M1). EDP Sciences, 2012.

[49] Ramsay, J.O. et Silverman, B.W. (2002). Applied function data analysis : Methods and Cases Studies.Springer, New-York.

[50] Ramsay, J.O. et Silverman, B.W. (2005). Function data analysis. 2nd Edition. Springer, New-York.

[51] Robinson, P. M. (1983). Nonparametric estimators for time series. J. Time Ser. Anal. 4, p. 185-207.

[52] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function, Ann. Math. Statist. 27, p. 832-837,

[53] Rosenblatt M. (1956). A central limit theorem and a strong mixing condition. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 42, p. 43-47.

[54] Rozanov Y.A. and Volkonskii V.A. (1959). Some limit theorems for random functions I. Theory Probab. Appl. 4, p. 178-197.

[55] Silverman, B.W. and Jones, MC. (1989). E. Fix and J. L. Hodges (1951). An important contribution to nonparametric discriminant analysis and density estimation. Int. Stat. Rev. 57(3) 233-247.

[56] Sultana DIDI. Djamal LOUANI (2014). Asymptotic results for the regression function estimate on continuous time stationary and ergodic data, Journal of Statistics and Risk Modelling, 2014, vol. 31, issue 2, 22.

[57] Yakowitz, S. Györfi, L. Kieffer, J. and Morvai, G. (1999). Strongly consistent nonparametric forecasting and regression for stationary ergodic sequences. J. Multivariate Anal. 71, p. 24-41.

[58] Yoshihara, K.I. (1994). Weakly dependent stochastic sequences and their application. IV : Curve estimation based on on weakly dependent data. Sanseido, Tokyo.

[59] Watson, G. S, (1964). Smooth regression analysis 26 of Sankhyā Ser. A, Sankhy a (Statistics). The Indian Journal of Statistics. Series A, p. 359-372.