République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Existence de Solutions Faibles pour des Équations Différentielles Semi-Linéaires à Retard Fini

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique

par

Mimouni Mohamed [1]

Sous la direction de

Dr. Omar **B**ennihi

Soutenu le 15/07/2019 devant le jury composé de :

Dr.H. Abbes	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Dr.O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Dr.A. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Pr.F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : mimounimohamed486@gmail.com

Dédicaces

Je dédie ce travail à

- ✓ Mes très chers parents.
- ✓ Mes très chères soeurs.
- ✓ Mes très chers frères.
- ✓ Tout ceux qui portent le nom : **MIMOUNI**.
- ✓ Mes très chers amis sans exception.

Remerciements

✓ Avant tout, il apparaît opportun de rendre grâce à **DIEU** de m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer ce travail.

✓ Je remercie mon encadreur **Dr.Bennihi Omar**, qui a dirigé ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

✓ je remercie **Dr.H.Abbes**, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir présider le jury de ce mémoire.

✓ Mes remerciements vont également à messieur **A.Halimi** et **Pr.F.Hathout** qui ont porté de l'intérêt à mon travail en acceptant de participer au jury.

✓ Enfin, je n'oublie pas de remercier tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin à réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction

Il est établi que dans l'évolution de certains systèmes physiques, économiques, biologiques, dynamiques des populations ou de contrôle optimal-utilisant des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles la réponse du système dépend généralement de son état présent, cependant dans plusieurs applications la réponse peut être retardée ou dépendante de son histoire passée. Dans ces deux derniers cas on parle d'équations différentielles fonctionnelles. Pour en savoir plus sur ce type d'équations le lecteur intéressé peut consulter le livre de Hale[15] et celui de Miller et Ross[18]. D'une manière générale les retards apparaissent à cause du temp nécessaire pour que le système réponde à une certaine évolution ou parcequ'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé. Dans ce mémoire on s'intéressera aux équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires perturbées et plus précisément aux résultats d'existence de solutions faibles et extrémales fables. Ces résultats sont basés sur la théorie des semi-groupes et sur l'argument du point fixe. Le mémoire est organisé de la facon suivante : Le chapitre 1 est consacré aux notations et définitions ainsi qu'à certaines notations préliminaires et théoèmes du poit fixe. Dans la section 1, il s'agira de notations concernant les espaces fonctionnels et de certaines définitions (fonction de Carathéodory, ensemble relativement compact, application complètement continue, fonction Bochner-intégrable). Dans la section 2, on parlera des semi-groupes : semi-groupe de classe C_0 et semi-groupe intégré. Dans la section 3, il s'agira de quelques théorèmes de poit fixe, on s'intéressera surtout au théorème de Burton et Kirk[31]. Dans la section 4, on citera trois modèles à retard. Dans la section 5, on citera deux exemples d'opérateurs à domaines denses. Le chapitre 2 est consacré aux équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires perturbées à retard fini, définies sur des intervalles compacts réels avec des opérateurs à domaines denses. Dans la section 2, il s'agira de la recharche des solutions faibles. Dans la section 3, il s'agira de la recharche de solutions extrémales faibles, on se basera sur le concept des sous et sur solutions. Dans la section 4, il s'agira d'appliquer les arguments utilisés dans les sections précédentes à la contrôlabilité des équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires perturbées. Dans la section 5, on donnera un exemple illustrant la théorie abstraite. Le chapitre 3 sera consacré aux équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires perturbées de type neutre à retard fini et où l'opérateur A est densément défini. Dans la section 2 il s'agira des l'existence de solutions faibles, on s'intéressera au cas où A génére un C_0-semi-groupe et on appliquera le théoème de Burton et Kirk[31]. La section 3 sera consacrée à un exemple d'application.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et Définitions

Soit $J := [0, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On note par $(E, |.|)$ un espace de Banach réel. $C(J, E)$ est l'espace des fonctions continues de J dans E muni de la norme infinie

$$\|y\|_\infty = sup\{|y(t)| : t \in J\}.$$

$B(E)$ est l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de E dans E muni de la norme

$$\|A\|_{B(E)} = sup\{|Ay| : |y| = 1\}.$$

soient E et F deux espaces de banach.

Définition 1.1.1. *Une application $f : J \times E \to E$ est dite L^1-carathéodory si :*

1. *$t \mapsto f(t, y)$ est mesurable pour tout $y \in E$.*
2. *$y \mapsto f(t, y)$ est continue p.p $t \in J$.*
3. *$\forall k > 0, \exists h_k \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que :*

$$|f(t, y)| \leq h_k(t),\ \forall t \in J,\ \forall y \in E \text{ et } |y| \leq k.$$

Remarquons que la condition 3 implique que $t \mapsto f(t, y(t))$ est $L^1 - intgrable$.

Théorème 1.1.1. *[14] un sous ensenmble $M \subset C(J, E)$ est relativement compact ssi :*

- *M est équicontinu i.e. $\forall \xi > 0, \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in J\ : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \xi\ \forall\ f \in M$.*
- *pour $x \in J$, l'ensemble $f(x) : f \in M$ est relativement compact dans E.*

– *M est uniformement borné i.e. $\exists b \geq 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq b \, \forall f \in M$.*

Définition 1.1.2. *Soient E et F deux espaces de Banach, $f : E \to F$ une application. f est dite complétement continue si :*

– *f est continue.*

– *L'image par f de tout borné B de E est relativement compact dans F.*

Définition 1.1.3. *Une fonction mesurable $y : J \to E$ est dite Bochner-intégrable ssi la fonction scalaire $t \to |y(t)|$ est Lebesgue intégrable. On note par $L^1(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \to E$ qui sont Bochner-intégrable normées par :*

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^b |y(t)|dt.$$

pour les propriétés des fonctions Bochner-intégrables voir par exemple [19]

1.2 Semi-groupes

On définit deux types de semi-groupe, les semi-groupes fortement continus, appelés aussi C_0-semi-groupes et les semi-groupes intégrés. Pour plus de détails sur la théorie des semi-groupes le lecteur intéréssé pourra consulter[29][11][7][1]

1.2.1 C_0-semi-groupes

Soit E un espace de Banach réel ou complexe muni d'une norme notée $\|.\|$, $B(E)$ est l'espace de Banach des applications lineaires continues de E dans E.

Définition 1.2.1. *[17] On appelle C_0-semi-groupe un opérateur sur E, une famille parametrée $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, verifiant les propiétés suivantes :*

(i) *$T(0) = I$ application idetité dans $B(E)$*

(ii) *$T(t + s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$*

(iii) *$\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ pour tout x dans E.*

Définition 1.2.2. *[17] On appelle générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini par :*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \qquad \textit{pour } x \in D(A)$$

où $D(A) = \{x \in E : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x-x}{t}$ existe dans E $\}$ appelé domaine de A.

Remarque : Il est clair que le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe est un opérateur linéaire.
Exemple : [17] L'espace
$C_{ub}([0,+\infty[,\mathbb{R}) = \{f : [0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}; f\ uniformement\ continue\ et$ bornée$\}$
muni de la norme

$$\|f\|_{C_{ub}} = \sup_{\alpha\in[0,+\infty[} |f(\alpha)|$$

est un espace de Banach.
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow C,\ t \geq 0$ et soit :

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \forall t \geq 0\ et\ \alpha \in [0,+\infty[.$$

Evidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et en plus on a :

1. $(T(0)f)(\alpha) = f(0+\alpha) = f(\alpha).\ Danc\ T(0) = I;$
2. $(T(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha) = (T(t)f)(s+\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha)$, $\forall f \in C_{ub}.\ Danc\ T(t+s) = T(t)T(s),\ \forall t,s \geq 0;$
3. $\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_{C_{ub}} = \lim_{t\to 0}\{\sup_{\alpha\in[0,\infty[} |f(t+\alpha) - f(\alpha)|\} = 0$, $\forall f \in C_{ub}.$

Par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-esmi-groupe d'opérateurs linéaires bornées sur C_{ub} nommé le C_0-semi-groupe de translations à droite de f par t.
On définit de même le semi-groupe de translation à gauche de f par t par :

$$(T(t)f)(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha - t) & \text{si} \quad (\alpha - t) \geq 0 \\ f(0) & \text{si} \quad (\alpha - t) < 0. \end{cases}$$

On note par $SG(M,\omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupes pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M > 1$ tels que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0$$

$SG(M,\omega)$ est appelé ensemble des semi-groupes exponentiellement bornés.
Si $\omega = 0$ on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est borné.
Si de plus $M = 1$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit semi-groupe de contraction.
Si $\|T(t)x\| = \|x\|$, $\forall t \geq 0$ et $x \in E$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit isométrique.
On note par :

$$\rho(A) = \{\lambda \in C : (\lambda I - A)^{-1}\ existe\ et\ continue\}$$

l'ensemble résolvant de A.

L'application :

$$R : \rho(A) \to L(E)$$
$$\lambda \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1},$$

est appelée application résolvante de A.
Lemme : Pour tout $x \in E$ *et* $t \geq 0$, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$$

Proposition 1.2.1. *Propriétés d'un semi-groupe de classe C_0 avec A son générateur infinitésimal*

(i) *Pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$, on a*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$$

et

$$A \int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$$

(ii) *[17]soit $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal, alors l'application :*

$$[0, +\infty[\to E$$
$$t \mapsto T(t)x$$

est dérivable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in D(A)$, et on a :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geq 0.$$

(iii) *Pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, $s \geq 0$,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau$$

Nous allons maintenant énoncer un théorème important reliant le semi-groupe à la résolvante de son générateur infinitésimal.

Théorème 1.2.1. *[17] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach E, A son générateur infinitésimal et soient $\omega \geq 0$ et $M > 1$ deux constantes telles que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

pour le générateur A on a les propriétés suivantes :

- *Si telle que :* $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds$ *existe pour chaque* $x \in E$*, alors :* $\lambda\rho(A)$ *et* $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.
- *si* $Re(\lambda) > \omega$*, alors :* $\lambda \in \rho(A)$ *et* $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x$.
- $\|R(\lambda, A\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}$*, pour tout* $Re(\lambda) > \omega$.

L'opérateur :

$$\begin{aligned} R : R_\omega &\to D(A) \\ \lambda &\mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds, x \in D(A) \end{aligned}$$

est appelé transformé de Laplace du semi-groupe

$$\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M, \omega) \text{ avec } R_\omega = \{\lambda \in C : Re(\lambda) > \omega\}.$$

Pour plus de détails voir [34]

1.2.2 Semi-groupes intégrés

Définition 1.2.3. *[7] On appelle semi-groupe intégré sur E une famille* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*, verifiant les conditions suivantes :*

(i) $S(0) = 0$

(ii) $t \mapsto S(t)$ *est fortement continue.*

(iii) $S(t)S(s) = \int_0^t [S(\tau + s) - S(\tau)]d\tau$ *pour tous* $t, s \geq 0$

Définition 1.2.4. *Un semi-groupe intégré* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est dit non dégénéré si :*

$$S(t)x = 0 \Rightarrow x = 0, \forall t \geq 0.$$

Définition 1.2.5. *[7] On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe intégré* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*, un opérateur linéaire* $A : D(a) \to E$ *défini par :* $x \in D(a)$ *et* $\forall t \geq 0$*, on a :*

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)Axdr$$

ou par dérivation

$$S'(t)x - x = S(t)Ax, \forall t \geq 0.$$

Définition 1.2.6. *[7] On dit qu'un opérateur linéaire A verifie la condition de Hille-yosida s'il existe deux constantes* $M \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *telle que :*$(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in (\omega, +\infty)$ *:*

$$|R(\lambda, A)^n| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Un cas spécial important est lorsque le semi-groupe intégré est continu localement lipschitzien.

Définition 1.2.7. *[7] Un semi-groupe est dit continu localement lipschitzien si : pour tout $\tau > 0$ il existe une constante positive K telle que :*

$$|S(t) - S(s)| \leq K|t - s|, \qquad \forall t, s \in [0, \tau].$$

Définition 1.2.8. *Un opérateur A est dit générateur d'un semi-groupe intégré, s'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et il existe une famille fortement continue, exponentiellement bornée $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés telle que :*

$$S(0) = 0 \text{ et } (\lambda I - A)^{-1} = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \qquad \text{pour tout} \qquad \lambda > \omega.$$

Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ qui est continu localement lipschitzien , alors d'aprés [34], $S(.)x$ est continùment différentiable si et seulement si $x \in \overline{D(A)}$, et $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $\overline{D(A)}$. Le théoème suivant montre que la condition de Hille-Yosida caractérise les générateurs des semi-groupes continus localement lipschitziens.

Théorème 1.2.2. *[11] Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A satisfait la condition de Hille-Yosida .*
2. *A est le générateure d'un semi-groupe intégré continu localement lipschitzien.*

Pour plus de détails sur la théorie des semi-groupes intégrés le lecteur intéressé peut consulter[11][7]

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

Dans cette section, nous donnerons quelques théorèmes utilisés dans la résolution des équations différentielles par l'approche du poit fixe. Pour plus de détails sur cette approche le lecteur pourra consulter [20]
Soient E un espace de Banach muni de la norme $|.|, T : E \to E$ une application.

Définition 1.3.1. *On dit que T est une contraction sur E, s'il existe un réel $\lambda \in]0, 1[$ tel que :*

$$|Tx - Ty| \leq \lambda |x - y|, \forall x, y \in E.$$

Un élément x est dit point fixe de T si : $Tx = x$.
*Dans notre cas on utilisera le théorème suivant dû à **Burton** et **Kirk**.*

Théorème 1.3.1. *[31] Soient E un espace de Banach, F et G deux opérateurs de E dans E satisfaisant :*

1. *G est une contraction.*
2. *F est complétement continu.*

Alors :
Ou bien l'équation $y = F(y) + G(y)$ a une solution.
Ou bien l'ensemble $H = \{u \in E : u = \lambda F(u) + \lambda G(\frac{u}{\lambda}), \lambda \in]0,1[\}$ n'est pas borné.

Définition 1.3.2. *Une sous ensemble fermé non vide C d'un espace de Banach E est dit cône si :*

1. *$C + C \subset C$*
2. *$\lambda C \subset C, \forall \lambda > 0$.*
3. *$\{-C\} \cap \{C\} = \{0\}$.*

Un cône C est dit normal si $\|.\|$ est semi-monotone sur C c'est à dire s'il existe une constante $N > 0$ telle que $\|x\| \leq N\|y\|$, lorsque $x \leq y$. Pour plus de détails sur les cônes et leurs propriétés voir[8][30]. On munit l'espace $C(J, E)$ de la relation d' ordre $\leq$ induite par le cône rgulier C de E, c'est à dire pour tout $y, \overline{y} \in C(J, E)$: $y \leq \overline{y}$ ssi $\overline{y}(t) - y(t) \in C$ $\forall t \in J$. Dans tout ce qui suit on suposera que le cône C est regulier. Pour plus de détails sur les cônes et leurs propriétés voir[8][30]. Soient $a, b \in E$ tels que $a \leq b$. Alors l'intervalle [a,b] est l'ensemble de poits de E défini par :$[a, b] = \{x \in E / a \leq x \leq b\}$.

Définition 1.3.3. *Soit E un espace de Banach ordonné. Une application $T : E \to E$ est dite monotone croissante si $Tx \leq Ty$ pour tous $x, y \in E$ et $x \leq y$. On dit que T est monotone décroissante si $Tx \geq Ty$ et $x < y$.*

Les points fixe extrémales :

Définition 1.3.4. *On dit que $x \in E$ est le plus petit point fixe de G dans E si : $x = Gx$ et $x \leq y$ quand $y \in E$ et $y = Gy$. On le note x_**
Si x_* et x^* de G existent, on les appelle points fixe extrémales de G dans E.
Le théorème suivant est dû à Heikkila et lakshmikantham [30].

Théorème 1.3.2. *Soient [a,b] un intervalle ordonné d'un espace ordonné de Banach E et $P : [a, b] \to [a, b]$ une application croissant. Si chaque suite $(P_{x_n}) \subset P([a, b])$ converge, ((x_n) suite monotone dans [a,b]) alors la suite de* *la P-intération de a converge vers x_* de P et la suite de la P-itération de b converge vers x^* de P. De pluse :*

$$x_* = \min\{y \in [a,b] : y \geq Py\} \qquad et \qquad x^* = \max\{y \in [a,b] : y \leq Py\}.$$

Comme conséquence, Dhage et Henderson[4] ont prouvé le théorème de point fixe suivant qui est utilisé pour prouver l'existence de solution extrémale.

Théorème 1.3.3. *[4] Soit [a,b] unintervalle ordonné dans un espace de Banach E et soient $B_1, B_2 : [a,b] \to E$ deux fonctions satisfaisant :*
- *B_1 est une contraction.*
- *B_2 est complétement continu.*
- *B_1 et B_2 sont monotones strictement croissantes.*
- *$B_1(x) + B_2(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$.*

Si le cône C dans E est normal, alors l'équation $x = B_1(x) + B_2(x)$ a un plus petit point fixe x_* et un plus grand point fixe x^* dans [a,b]. De plus $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x^* = \lim_{n\to\infty} y_n$ oû (x_n) et (y_n) sont deux suites dans [a,b] définies par :

$$x_{n+1} = B_1(x_n) + B_2(x_n),\ x_0 = a \qquad et \qquad y_{n+1} = B_1(y_n) + B_2(y_n),\ y_0 = b.$$

1.4 Quelques modèles à retard

Nous présentons dans cette section troix exemples de modèles à retard. Pour d'autres exemples le lecteur pourra consulter [12][9][13].

1.4.1 Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Le premier modèle dans la dynamique des populations a été développé indépendament par Lotka [2] et Volterra [32], il est décrit par le systeme d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$P'(t) = aP(t) - bP(t)Q(t) \qquad t \geq 0 \qquad (1.4.1)$$

$$Q'(t) = -cQ(t) + dP(t)Q(t) \qquad t \geq 0 \qquad (1.4.2)$$

C'est un système complexe, formé de deux espaces, proie et prédateur. Leffectif de la population de proies est $P(t)$, celui de la population des prédateurs est $Q(t)$. La quntité $P(t)Q(t)$ est une probabilité de rencontre, qui influe négativement sur une population, positevement sur l'autre. A chaque instant, connaissant les populations en présence, on peut décrire la tendance. On travaille avec des densités donc $P, Q > 0$. Les paramètres a, b, c et d sont des constantes positives qui peuvent s'interpréter de la manière suivante :

a est le taux de croissance malthusien des proies en l'absence des prédateurs.
b est le taux de disparition des proies à cause des prédateurs.
c est le taux d'apparition des prédateurs en présence des proies.
d est le taux de décroissance malthusien des prédateurs en l'absence de proies.

Plutard, plusieurs auteurs ont observé qu'il est réaliste de supposer que le taux de croissace dépend aussi du passé, il peut être le résultat de plusieurs causes, telles que le manque ou l'abandance de nourriture. Dans [32] le modèle (1.4.1)-(1.4.2) prend la forme suivante :

$$P'(t) = -P(t)(a - bQ(t)), \qquad t \geq 0$$

$$Q'(t) = Q(t)(-c + dP(t)) + \int_{-r}^{0} K(s)P(t+s)ds, \qquad t \geq 0$$

K est la fonction noyau. D'autres versions de modèles à retard infini ont été proposées par plusieurs auteurs, on citera à titre d'exemple Brelot [23].

1.4.2 Le modèle de prolifération cellulaire

C'est un modèle de production du sang proppposé par Rey et Mackey en 1993 et étudié par Dyson, Villella-Bressan et Webb en 1995. Ce modèle décrit la production des souches prolifératives et le précurseur des cellules dans la moelle osseuse :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}(xu(x,t)) = \mu u(\alpha x, t-r)(1 - u(\alpha x, t-r)), 0 < x < 1, t > 0. \\ u(x,\theta) = \phi(x,t), 0 \leq x \leq 1, -r \leq \theta \leq 0. \end{cases}$$

où $u(x,t)$ est la densité de la population de cellules dépendante de la maturité x, du temps t et des paramétres μ, α et r satisfaisant : $\mu > 0$, $0 < \alpha < 1$ et $r > 0$. La variable de maturité x est à valeurs dans [a,b] et peut êêtre reliée à l'hémoglobine qui se trouve entre les cellules individuelles. Dans le terme de transport $\frac{\partial}{\partial t}(xu(x,t))$, on suppose que toutes les cellules ont un même taux de maturation x. Le retard r et le facteur de maturité α surviennent lorsqu'on suppose que toutes les cellules se subdivisent exactement en un même age. La dépendance logistigue non linéaire de la densité de population, dans le terme $\mu u(\alpha x, t-r)(1-u(\alpha x, t-r))$ signifie que le prossésus de division des cellules n'est pas modèlisé directement mais il y'a une production de nouvelles cellules de toutes les valeures de maturité.

1.4.3 Le modèle de Réaction-diffusion

Une variété de modèles mathématiques pour la plupart des processus biologiques sont bien encadrés par des équations différentielles partielles fonctionnelles. Par exemple, l'équation de réaction-diffusion logistique avec retard fini de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t,x) + ru(t,x)[1 - \frac{u(t-\tau,x)}{K}], t > 0, x \in [0,1]. \\ \frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,1) = 0. \end{cases}$$

où d, r, τ, K sont des constantes positives.
a été utilisé pour modéliser une population à une dimension herbivore.
Il est bien connu que le retard distribué doit être utilisé pour décrire l'élément stochastique dans la réponse tradive d'un processus biologique. L'équation suivante de réaction diffusion avec un retard infini

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t,x) + ru(t,x)[1 - \frac{1}{K}\int_{-\infty}^{t} k(t-s)u(s,x)ds], t > 0, x \in [0,1]. \\ \frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,1) = 0, \qquad t > 0. \end{cases}$$

où d, r, K sont des constantes positives. $k(s)$ est une fonction intégrable positive pour $s > 0$ vérifiant

$$\int_0^\infty k(s)ds = 1.$$

1.5 Quelques exemples d'opérateurs à domaines denses

Nous présentons deux exemples d'opérateurs linéaires à domaines denses :
Exemple Soit $E = l^2$ et l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ défini par $A = \{-n^2 x_n\}$ D'où

$$D(A) = \{x \in l^2 / \{n^2 x_n\} \in l^2\}$$

On peut vérifier que $D(A)$ est un sous espace non vide que est dense dans E.
Exemple Soit $E = L^2([0,1], \mathbb{R})$ et l'opérateur $E : D(A) \subset E \to E$ défini par

$Au = u''$

$$D(A) = \{u \in E : u(0) = u(1) = 0\}$$

On peut vérifier que $D(A)$ est un sous espace non vide qui est dense dans E.

Chapitre 2

Équations Différentielles Fonctionnelles Semi-Linéaires Perturbées à Retard Fini avec Opérateurs à Domaines Denses

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'existence de solutions faibles et de solutions extrémales faibles définies sur un intervalle réel compact concernant les équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires perturbées (EDFSLP) d'ordre un. La section 2.2 sera consacrée à l'existence de solutions faibles. Dans la section 2.3 on s'intéressera à l'existence de solutions extrémales faibles. Plusieurs études ont été faites sur les EDFSLP où l'opérateur A engendre un C_0-semi-groupe. On citera à titre d'exemple les travaux de : Ahmed [29], Belmekki et al [24], Benchohra et al [25], Heikkila et Lakshmikantham [30], Pazy [1], Balachandran et Dauer [26], Byszewski et Akca [21].
Notre approche sera basée sur l'existence de solutions faibles en utilisant un théoème de point fixe pour la somme de deux applications : une contraction et une application complètement continue. Pour la solution extrémale faible, le concept utilisé est celui des sous et sur solutions avec toujours l'approche du point fixe. Une application à la théorie de contrôle et un exemple illustrant la théorie abstraite clôtureront ce chapitre.
Le système d'évolution décrit par l'équation différentielle suivante est un exemple

d'équation différentielle fonctinnelle semi linéaire perturbée :

$$y'(t) = Ay(t) + f(t, y_t) + g(t, y_t), \qquad t \in J := [a, b] \qquad (2.1.1)$$

$$y(t) = \phi(t) \qquad t \in [-r, 0], \qquad (2.1.2)$$

où $f, g : J \times C([-r, 0], E) \to E$ sont des fontions données, $A : D(A) \subset E \to E$ est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, $\phi : [-r, 0] \to E$ une fonction continue donnée et $(E, |.|)$ un espace de Banach réel.
Pour n'importe quelle fonction y définie sur $[-r, b]$ et $t \in [0, b]$, on note par y_t l'élément de $C([-r, 0], E)$ défini par : $y_t(\theta) = y(t + \theta)$; $\theta \in [-r, 0]$.
Ici $y_t(.)$ indique l'histoire d'un état entre le temps $t - r$ et l'instant présent t.

2.2 Existence de solutions faibles

Dans cette section nous donnerons un résultat principal d'existence de solution au problème (2.1.1)-(2.1.2). Avant de prouver ce résultat, donnons la définition de la solution faible.

Définition 2.2.1. *On dit que la fonction $y : [-r, b] \to E$ est solution faible du problème (2.1.1)-(2.1.2) si elle satisfait l'équation $y(t) = \phi(t)$, $t \in [-r, 0]$ et l'équation intégrale :*

$$y(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t - s)[f(s, y_s) + g(s, y_s)]ds, \ t \in J$$

Pour résoudre le problème (2.1.1)-(2.1.2) introduisons les hypothèses suivantes :
(H_1) *$A : D(A) \subset E \to E$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\in J}$, où J est un compacte pour $t > 0$ sur l'éspace de Banach E avec*

$$M = \sup\{\|T(t)\|_{B(E)}, t > 0\}.$$

(H_2) *La fonction $f : J \times C([-r, 0], E) \to E$ est de Carathéodory.*
(H_3) *Il existe une fonction $K \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que :*

- **(i)** $|g(t, u) - g(t, \overline{u})| \leq K(t)\|u - \overline{u}\|_\infty$, *p.p* $t \in J$ *et* $u, \overline{u} \in C([-r, 0], E)$.
- **(ii)** $M\|k\|_{L^1} \leq 1$.

(H_4) *Il existe une fonction $P \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ et une fonction continue croissante*

$$\psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$$

telle que :

$$|f(t, u)| \leq P(t)\psi(\|u\|_\infty), \ p.p\ t \in J \ et\ u \in C([-r, 0], E).$$

Théorème 2.2.1. *Supposons les hypothèses* $(H_1)-(H4)$ *satisfaites. Si de plus on a :*

$$\int_c^{\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)} > \|\gamma\|_{L^1}$$

où

$$c = M\|\phi(0)\|_\infty + M\int_0^b |g(s,0)|ds \text{ et } \gamma(t) = \max\{MK(t), MP(t)\},\ t \in J.$$

Alors le problème (2.1.1)-(2.1.2) admet au moins une solution faible dans l'intervalle $[-r, b]$

Preuve : Ramenons le problème $(2.1.1) - (2.1.2)$ à un problème de point fixe, pour cela considerons les deux opérateurs :

$$F, G : C([-r,b],E) \longrightarrow C([-r,b],E)$$

définis par :

$$F(y)(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si} \quad t \in [-r,0] \\ T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds & \text{si} \quad t \in J \end{cases}$$

$$G(y)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [-r,0] \\ \int_0^t T(t-s)g(s,y_s)ds & \text{si} \quad t \in J. \end{cases}$$

alors le problème qui consiste à trouver une solution au problème (2.1.1)-(2.1.2) se amène au problème consistent à trouver la solution de l'équation d'opérateurs :

$$F(y)(t) + G(y)(t) = y(t), \qquad t \in [-r,b].$$

on doit montrer que les opérateurs F et G satisfont les conditions du théorème de **burton** et **kirk** en l'occurence :

- G est un contraction.
- F est un opérateur complètement continu.
- L'ensemble $H = \{u \in E : \lambda G(\frac{u}{\lambda}) + \lambda F(u) = u, \lambda \in]0,1[\}$ est borné.

La preuve sera donnée en cinq étapes :

Etape 1 : F est complètement continu. En effet F est continu car si : (y_n) est une suite de $C([-r,b],E)$ telle que $(y_n) \longrightarrow y$ *et* $\eta > 0$ *tel que* $\|y_n\|_\infty \leq \eta$ alors :

$$\begin{aligned} |F(y_n(t)) - F(y)(t)| &= |\int_0^t T(t-s)[f(s,y_{n_s}) - f(s,y_s)]ds| \\ &\leq M\int_0^t |f(s,y_{n_s}) - f(s,y_s)|ds \\ &\leq M\|f(.,y_n) - f(.,y)\|_{L^1} \end{aligned}$$

puisque f et de carathéodory et en vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a alors :

$$|F(y_n(t)) - F(y(t))|_\infty \leq M\|f(.,y_n - f(.,y)\|_{L^1} \longrightarrow 0 \; lorsque \; n \longrightarrow \infty.$$

Etape 2 : l'mage par F de tout borné B de $C([-r,b]),E)$ est un borné de $C([-r,b],E)$.
Soit :

$$B_{_d} = \{y \in C([-r,b],E) : \|y\|_\infty \leq d \; avec \; d \geq 0\}.$$

on a pour tout $t \in [-r,b]$ et $y \in B_{_d}$:

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &= |T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds| \\
&\leq M|\phi(0)| + M\int_0^t |f(s,y_s)|ds \\
&\leq M|\phi(0)| + M\int_0^t P(s)\psi(\|y_s\|_\infty)ds, \; p.p \; t \in J \; et \; y \in C([-r,b],E) \\
&\leq M|\phi(0)| + M\int_0^t P(s)\psi(d)ds \\
&= M|\phi(0)| + M\psi(d)\int_0^t P(s)ds \\
&\leq M\|\phi\|_\infty + M\psi(d)\|P\|_{L^1} = c
\end{aligned}$$

donc :

$$\|F(y)\|_\infty \leq c,$$

par suite $F(B_d)$ est borné.
Etape 3 : F applique des ensembles bornés dans des ensembles équicontinus de $C([-r,b],E)$. Considérons B_d comme dans l'etape 2 et soient donnés $\epsilon > 0$,$\tau_1, \tau_2 \in [-r,b]$ avec $\tau_2 > \tau_1$.

Premier cas : $\tau_1 > \epsilon$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &\leq |T(\tau_2)\phi(0) - T(\tau_1)\phi(0)| \\
&+ |\int_0^{\tau_1-\epsilon} [T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)] f(s, y_s) ds| \\
&+ |\int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1} [T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)] f(s, y_s) ds| \\
&+ |\int_{\tau_1}^{\tau_2} [T(\tau_2 - s)] f(s, y_s) ds| \\
&\leq |T(\tau_2)\phi(0) - T(\tau_1)\phi(0)| \\
&+ M\psi(d) \|T(\tau_2 - \tau_1 + \epsilon) - T(\epsilon)\|_{B(E)} \int_0^{\tau_1-\epsilon} P(s) ds \\
&+ 2M\psi(d) \int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1} P(s) ds + M\psi(d) \int_{\tau_1}^{\tau_2} P(s) ds
\end{aligned}$$

Deuxieme cas : $\tau_1 < \epsilon$: pour $\tau_2 - \tau_1 < \epsilon$, on a :

$$|F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| \leq |T(\tau_2)\phi(0) - T(\tau_1)\phi(0)| + M\psi(d) \int_0^{2\epsilon} P(s) ds + M\psi(d) \int_0^{\epsilon} P(s) ds.$$

l'equicontinueté vient du fait que :

1. $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continue.
2. $T(t)$ est compact pour $t > 0$.

soient $0 < t \leq b$ fixé et $0 < \epsilon < t$. pour $y \in B_d$ on définit

$$\begin{aligned}
F_\epsilon(y)(t) &= T(t)\phi(0) + \int_0^{t-\epsilon} T(t-s) f(s, y_s) ds \\
&= T(t)\phi(0) + T(\epsilon) \int_0^{t-\epsilon} T(t - s - \epsilon) f(s, y_s) ds
\end{aligned}$$

notons que l'ensemble

$$\{\int_0^{t-\epsilon} T(t - s - \epsilon) f(s, y_s) ds : y \in B_d\}$$

est borné car :

$$|\int_0^{t-\epsilon} T(t - s - \epsilon) f(s, y_s) ds| \leq M\psi(d) \int_0^{t-\epsilon} P(s) ds.$$

Et maintenant puisque $T(t)$ est compact pour $t > 0$, l'ensemble

$$Y_\epsilon(t) = \{F_\epsilon(y)(t) : y \in B_d\}$$

est relativement compact dans E pour tout $t > 0$. De plus

$$|F(y)(t) - F_\epsilon(y)(t)| \leq M\psi(d)\int_{t-\epsilon}^{t} P(s)ds.$$

donc l'ensemble $Y(t) = \{F(y)(t) : y \in B_d\}$ est totalement borné et donc $Y(t)$ est relativement compacte dans E. Comme conséquence des étapes 2 et 3 du théorème d'Ascoli-Arzéla, voir [14] on conclut que l'opérateur

$$F : C([-r,b],E) \longrightarrow C([-r,b],E)$$

est complètement continu.

Etape 4 : G est une contraction. En effet, soient $x, y \in C([-r,b],E)$ alors :

$$\begin{aligned} |G(x)(t) - G(y)(t)| &= |\int_0^t T(t-s)[g(s,x_s) - g(s,y_s)]ds| \\ &\leq M\int_0^b |g(s,x_s) - g(s,y_s)|ds \\ &\leq M\int_0^b k(s)\|x_s - y_s\|_\infty ds. \end{aligned}$$

alors :

$$\|G(x)(t) - G(y)(t)\|_\infty \leq M\|k\|_{L^1}\|x-y\|_\infty.$$

or d'aprés (ii) de (H_3), $M\|K\|_{L^1} < 1$, donc G est une contraction

Etape 5 : il reste maintenant à montrer que l'ensemble :

$$H = \{y \in C([-r,b],E) : y = \lambda F(y) + \lambda G(\frac{y}{\lambda})\ pour\ 0 < \lambda \leq 1\}$$

est borné.

soit y un élement quelconque de H. Pour tout $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda T(t)\phi(0) + \lambda\int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds + \lambda\int_0^t T(t-s)g(s,\frac{y_s}{\lambda})ds.$$

et

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \lambda M|\phi(0)| + \lambda M\int_0^t |f(s,y_s|ds \\ &\quad +\lambda M\int_0^t |g(s,\frac{y_s}{\lambda} - g(s,0)|ds + \lambda M\int_0^t |g(s,0)|ds \\ &\leq M|\phi(0)| + M\int_0^t P(s)\psi(\|y_s\|_\infty)ds \\ &\quad +M\int_0^t K(s)\|y_s\|_\infty ds + M\int_0^t |g(s,0)|ds. \end{aligned}$$

considérons maitenant la fonction μ definie par :

$$\mu(t) = \max\{|y(s)| : -r \leq s \leq t,\ t \in J\}.$$

soit

$$t^* \in [-r, t] \ tel \ que \ \mu(t) = |y(t^*)|,$$

si $t^* \in [0, b]$, alors d'aprés l'inégalité précédente on a pour $t \in J$:

$$\begin{aligned}
\mu(t) &\leq M|\phi(0)| + M\int_0^t P(s)\psi(\mu(s))ds + M\int_0^t K(s)\mu(t)ds + M\int_0^t |g(s,0)|ds \\
&\leq M|\phi(0)| + M\int_0^b |g(s,0)|ds + \int_0^t \gamma(s)[\mu(s) + \psi(\mu(s))]ds \\
&= c + \int_0^t \gamma(s)[\mu(s) + \psi(\mu(s))]ds.
\end{aligned}$$

si $t^* \in [-r, 0]$ alors $\mu(t) \leq \|\phi\|$ et l'inegalité précédente est verifiée.
Soit :

$$m(t) = c + \int_0^t \gamma(s)[\mu(s) + \psi(\mu(s)])ds, \qquad t \in J$$

Alors on a :

$$\mu(t) \leq m(t) \qquad \forall t \in J, \qquad m(0) = c$$

et

$$m'(t) = \gamma(t)[\mu(t) + \psi(\mu(t))] \qquad p.p \qquad t \in J.$$

En utilisant le fait que ψ est croissante on obtient :

$$m'(t) \leq \gamma(t)[m(t) + \psi(m(t))] \qquad p.p \qquad t \in J.$$

soit

$$\frac{m'(t)}{m(l) + \psi(m(l))} \leq \gamma(t) \qquad p.p \qquad t \in J.$$

par intégration entre 0 et t on obtient :

$$\int_0^t \frac{m'(s)}{m(s) + \psi(m(s))}ds \leq \int_0^t \gamma(s)ds$$

par changement de variable on obtient :

$$\int_c^{m(t)} \frac{ds}{s + \psi(s)} \leq \|\gamma\|_{L^1} < \int_c^{\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)}$$

donc il existe une constante l telle que :

$$\mu(t) \leq m(t) \leq l \ pour \ tout \qquad t \in J.$$

La constante l dépend uniquement des constantes M, w, d, K et ψ d'aprés la définition de μ, il vient :

$$\|y\|_\infty = \sup_{t\in J} |y(t)| = \mu(b) \leq m(b) \leq l \qquad pour \qquad y \in H.$$

Ceci montre que l'ensemble H est borné. D'aprés le theoréme1.3.1 de **burton et kirk** , l'opérateur $F+G$ admet un point fixe qui est solution du probléme (2.1.1)(2.1.2).

2.3 Existence de solutions extrémales faibles

Dans cette section nous allons prouver l'existence de solutions minimales et maximales faibles du problème (2.1.1)(2.1.2) sous les coditions de monotonie des fonctions qui s'y trouvent. Pour cela nous avons besoins des definitions suivantes :

Définition 2.3.1. *on dit qu'une fonction $\nu : [-r, b] \longrightarrow E$ est une sous solution faible du problème* (2.1.1)(2.1.2) *si :*

$$\begin{cases} \nu(t) = \phi(t), & t \in [-r, 0] \\ \nu(t) \leq T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)[f(s, y_s) + g(s, y_s)]ds, & t \in J. \end{cases}$$

On définit de même sur solution faible w du problème (2.1.1)(2.1.2) *en inversant l'ordre de l'inégalité .*

Définition 2.3.2. *une solution x_M du problème* (2.1.1)(2.1.2) *est dite maximale si pour tout solution x sur J de se dernier, on a :*

$$x(t) \leq x_M(t) \qquad \forall\, t \in J.$$

on définit de même une solution minimale en inversant l'ordre de l'inégalité.

Considérons maintenant les hypothèses suivantes :
(H_5) les fonctions $f(t, y), g(t, y)$ sont strictement croissantes en y p.p $t \in J$.
(H_6) $T(t)$ présèrve l'ordre c'est à dire : $T(t) \geq 0$ lorsque $\nu \geq 0$.
(H_7) le problème (2.1.1)(2.1.2) admet une sous solution faible ν et une sur solution faible w avec $\nu \leq w$.
Notre résultat dans cette section est dans ce théorème .

Théorème 2.3.1. *supposons les hypothèses du théorème* 2.2.1 *satisfaites, si de plus les hypothèses $(H_5) - (H_7)$ sont verifiées, alors le problème* (2.1.1)(2.1.2) *admet une solution minimale faible et une solution maximale faible sur $[-r, b]$.*

Preuve : On peut montrer comme dans la preuve du théorème 1.3.2 que F est complètement continue et G une contraction sur $[v, w]$. On doit montrer que F et G sont croissants sur $[v, w]$.
Soitent $y, \overline{y} \in [v, w]$ tels que $y \leq \overline{y}, \ y \neq \overline{y}$. d'aprés (H_6) et (H_7), on a pour $t \in J$:

$$\begin{aligned} F(y)(t) &= T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, y_s)ds \\ &\leq T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, \overline{y_s})ds \\ &= F(\overline{y}(t)) \end{aligned}$$

De même $G(y) \leq G(\overline{y}\ )$ donc F et G sont croissantes sur $[v, w]$. Finalement soit l'element $x \in [v, w]$ d'aprés (H_7) on déduit que :

$$v \leq F(v) + G(v) \leq F(x) + G(x) \leq F(w) + G(w) \leq w$$

ce qui montre que :

$$F(x) + G(x) \in [v, w]$$

pour tout $x \in [v, w]$. Donc les fonctions F et G satisfont les conditions du théorème 1.3.3 et donc le problème(2.1.1)(2.1.2) admet une solution minimale et une solution maximale sur $[-r, b]$

2.4 Application à la théorie de contrôle

Dans cette section, il s'agit d'appliquer l'argument utilisé dans la section précédente à la contrôlabilité des équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires, plus précisément en considérant le problème suivant :

$$y'(t) - Ay(t) = f(t, y_t) + Bu(t), \qquad t \in J = [0, b] \qquad (2.4.4)$$

$$y(t) = \phi(t), \qquad t \in [-r, 0] \qquad (2.4.5)$$

où A et f sont comme dans la section 2.2 la fonction de contrôle $u(.)$ est donnée dans $L^2(J, U)$, (espace de Banach des fonctions admissibles de contrôle). Finalement B est un opérateur linéaire borné de U dans E.

Définition 2.4.1. *une fonction* $y \in C([-r, b], E)$*est dite solution faible du problème* $(2.4.4) - (2.4.5)$ *si :*

$$y(t) = \phi(t), \qquad t \in [-r, 0]$$

et

$$y(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds + \int_0^t T(t-s)B(u(s))ds, \qquad t \in [0,b].$$

Définition 2.4.2. *Le système* (2.4.4)−(2.4.5) *est dit contrôlable sur l'intervalle* $[-r,b]$ *si : Pour toute fonction initiale continue* $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R})$ *et pour tout* $y_1 \in E$, *il existe un contrôle* $u \in L^2(J,U)$ *tel que la solution* $y(.)$ *du problème* (2.4.4) − (2.4.5) *satisfait :* $y(b) = y_1$.
Le résultat de cette section est le :

Théorème 2.4.1. *Supposons les hypothèses* $(H_1) - (H_2)$ *réalisées. Supposons en plus :*
(C_1) *: L'application*

$$W : L^2(J,U) \to E$$

définie par :

$$Wu = \int_0^b T(b-s)Bu(s)ds,$$

possède un pseudo inverse W^{-1} *qui prend ses valeurs dans* $L^2(J,U)\setminus kerW$ *et supposons qu'il existe deux constantes positives* M_1 *et* M_2 *telles que :*

$$\|B\|_\infty \leq M_1 \qquad et \qquad \|W^{-1}\|_\infty \leq M_2.$$

(C_2) *: Il existe une fonction* $l \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ *telle que :*

$$|f(t,u)-f(t,\overline{u})|_\infty \leq l(t)\|u-\overline{u}\|, \qquad p.p \qquad t \in J \qquad et \qquad u,\overline{u} \in C([-r,0],E)$$

avec $bM^2M_1M_2\|l\|_{L^1} < 1$. *Alors le problème* (2.4.4) − (2.4.5) *est contrôlable sur* $[-r,b]$.

Preuve : Utilisons l'hypothèse C_1 et définissons le contrôle u_y par :

$$u_y(t) = W^{-1}[y_1 - T(b)\phi(0) - \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b T(b-s)B_\lambda f(s,y_s)ds](t).$$

Transformons le problème (2.4.4) − (2.4.5) en un problème de point fixe en utilisant les opérateurs :

$$\overline{F},\overline{G} : C([-r,b],E) \to C([-r,b],E)$$

définis par :

$$\overline{F}(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si} \quad t \in [-r,0] \\ T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds, & \text{si} \quad t \in J \end{cases}$$

$$\overline{G}(y)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \in [-r, 0] \\ \int_0^t T(t-s)Bu_y(s)ds, & \text{si} \quad t \in J. \end{cases}$$

Alors le problème qui consiste à trouver une solution au problème $(2.4.4) - (2.4.5)$ se réduit au problème consistant à résoudre l'équations d'opérateurs :

$$\overline{F}(y)(t) + \overline{G}(y)(t) = y(t), \qquad t \in J.$$

Comme dans la section 2.2, on peut facilement montrer que les opérateurs $\overline{F}$ et $\overline{G}$ satisfont les condition du Théorème 1.3.1. Donc le probleme $(2.4.4)-(2.4.5)$ est contrôlable. Pour plus de détails sur la théorie de contrôle le lecteur pourra consulter [28].

2.4.1 Exemple

Considérons le probleme suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}z(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}z(t,x) = F(t, z(t-r,x)) + G(t, z(t-r,x)); 0 \le x \le \pi, t \in J := [0,b], \quad (2.5.6)$$

$$z(t,0) = z(t,\pi) = 0 \qquad t \in [0,b],$$

$$z(t,x) = \phi(t) \qquad t \in [-r,0], x \in [0,\pi]$$

où F et G sont des fonctions données.
Soient $E = L^2[0,\pi]$, et $A : E \to E$ un opérateur défini par :

$$A\omega = \omega''$$

où

$$D(A) = \{\omega \in E : \omega, \omega' \; absolument\ continues\ et\ \omega'' \in E\ avec\ \omega(0) = \omega(\pi) = 0\}.$$

Alors :

$$A\omega = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\omega, \omega_n)\omega_n, \; \omega \in D(A) \; o \; \omega_n(s) = \{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ns : n = 1, 2, ...\}$$

est l'ensemble des vecteurs propres orthogonaux de A.
Il est bien connu maitenant (voir[1]) que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ sur E donné par :

$$T(t)\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t)(\omega, \omega_n)\omega_n, \; \omega \in E.$$

Puisque le semi-groupe analytique $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est compact, il existe une constante M telle que :

$$\|T(t)\|_{B(E)} \leq M.$$

Alors le proplème $(2.1.1)-(2.1.2)$ est une formulation abstraite du problem(2.5.6). Si les conditions $(H_1) - (H_7)$ sont satisfaites, alors d'aprés les Théorèmes 2.2.1 et 2.3.1 le proplème (2.5.6) admet aussi bien des solutions faibles que des solutions extrémales faibles.

Chapitre 3

Équations Différentielles Fonctionnelles Semi-Linéaires Perturbées de Type Neutre à Retard Fini avec Opérateures à Domaines Denses

3.1 Introduction

On s'intéressera dans ce chapitre aux solutions faibles des équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires perturbées de type neutre du premier ordre à retard fini dans un espace de Banach réel $(E, |.|)$. On considérera plus précisement le problème suivant :

$$\frac{d}{dt}[y(t)-h(t,y_t)] = A[y(t)-h(t,y_t)]+f(t,y_t)+g(t,y_t), t \in J = [0,b] \tag{3.1.1}$$

$$y_0 = \phi \in C([-r,0],E) \tag{3.1.2}$$

où $f, g, h : J \times C([-r,0],E) \to E$ sont des fonctions données, A un opérateure linéaire fermé sur E, et $\phi \in C([-r,0],E)$.

Les équations différentielles de type neutre sont le résultat de plusieurs applications mathématiques, une extension théorique est développée pour l'équation (3.1.1) avec $g = 0$, A étant un opérateur linéaire défini. Pour plus de détails voir par exemple [27] [16] [33].

Nos résultats seront basés sur l'application du Théorème 1.3.1 de point fixe de

Burton et **Kirk** pour la somme d'une contraction et d'un opérateur complètement continu.

3.2 Existence de solutions faibles

Cette section est consacrée au cas où l'opérateur A génére un C_0-semi groupe. Pour plus de détails sur les opérateurs fortement continus voir par exemple le livre de Fattorini [10] et les articles de Travis et Webb [5] [6] .
Avant de prouve les résultat concernant le problème $(3.1.1)-(3.1.2)$ commenons par donner la définition de la solution faible.

Définition 3.2.1. *On dit qu'une fonction $y : [-r, b] \to E$ est solution faible du problème $(3.1.1)-(3.1.2)$ si : $y_0 = \phi$, la restriction de y à l'intervalle $[0, b]$ est continue et vérifie :*

$$y(t) = h(t, y_t)+T(t)[\phi(0)-h(0, \phi(0))]+\int_0^t T(t-s)[f(s, y_s)+g(s, y_s)]ds, \ t \in J.$$

Introduisons les hypothèses suivantes :
(H_1) *A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ compact pour $t > 0$ dans l'espace de Banach E. Posons :*

$$M = sup\{\|T(t)\|_{B(E)} : t \in J\}.$$

(H_2) *Il existe des constantes $0 \leq c_1 < 1,\ c_2 \geq 0$ et $l \geq 0$ telles que :*

- **(i)** $|h(t, u) - h(t, \overline{u})| \leq l\|u - \overline{u}\|_\infty,\ t \in J$ *et* $u, \overline{u} \in C([-r, 0], E)$.
- **(ii)** $|h(t, u)| \leq c_1\|u\|_\infty + c_2, t \in J$ *et* $u \in C([-r, 0], E)$.

(H_3) *$f, g : J \times C([-r, 0], E) \to E$ sont des fonctions de Carathéodory.*
(H_4) *Il existe une fonction $K \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que :*

- **(i)** $|g(t, u)-g(t, \overline{u})| \leq K(t)\|u-\overline{u}\|_\infty,\ t \in J$ *et* $u, \overline{u} \in C([-r, 0], E)$.
- **(ii)** $(l + M\|k\|_{L^1}) < 1$

(H_5) *Il existe une fonction $P \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ et une fonction croissante et continue*

$$\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$$

telles que

$$|f(t, u)| \leq P(t)\psi(\|u\|_\infty),\ \text{pour tout } t \in J \text{ et } u \in C([-r, 0], E).$$

Posons :

$$\beta_1 = \frac{1}{1-c_1}(c_1 M\|\phi\|_\infty + c_2(1+M) + M\int_0^b |g(s,0)|ds.$$

Théorème 3.2.1. *Supposons les hypothèses* $(H_1)-(H_5)$ *satisfaites et supposons en plus :*

$$\int_{\beta_1}^{\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)} > \|\gamma\|_{L^1}$$

où

$$\gamma_1(t) = \frac{M}{1-c_1}\max\{P(t), K(t)\}, \text{ pour } t \in J.$$

Alors le propblème $(3.1.1)-(3.1.2)$ *admet au moins une solution faible.*

Preuve : Transformons le problème $(3.1.1)-(3.1.2)$ en un problème de point fixe, pour cela considérons l'opérateur :

$$N : C([-r,b],E) \to C([-r,b],E)$$

défini par :

$$N(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [-r,0] \\ T(t)[\phi(0) - h(0,\phi)] + h(t,y_t) + \int_0^t T(t-s)[f(s,y_s) + g(s,ys)]ds, & t \in J \end{cases}$$

Considérons l'ensemble $C([-r,b],E)$ muni de la norme suivante :

$$\forall y \in C([-r,b],E) : \|y\|_\infty = \sup\{|y(s)|, 0 \le s \le b\}.$$

Il est clair que $(C([-r,b],E), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.
Définissons les deux opérateurs

$$F, G : C([-r,b],E) \to C([-r,b],E)$$

par :

$$F(y)(t) = \int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds, \qquad t \in J$$

$$G(y)(t) = h(t,y_t) - T(t)h(0,\phi) + \int_0^t T(t-s)g(s,y_s)ds, \qquad t \in J$$

Il est clair que N admet un point fixe equivaut à dire que l'opérateur $F+G$ en admet un.
Il suffit donc de prouver que $F+G$ admet un point fixe.
Pour cela on doit montrer que les opérateurs F et G satisfont les conditions du théorème de **Burton** et **Kirk** en locurence F est comlètement continu et

G une contraction.

La preuve sera donnée en cinq étapes :

Etape 1 :F est continue, en effet :

Soit la suite (y_n) telle que $y_n \to y$ dans $C([-r,b],E)$. Soit $\eta > 0$ tel que $\|y_n\|_\infty \leq \eta$.

Alors :

$$\begin{aligned} |F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= |\int_0^t T(t-s)[f(s,y_{n_s}) - f(s,y_s)]ds| \\ &\leq M\int_0^t |f(s,y_{n_s}) - f(s,y_s)|ds \\ &\leq M\|f(.,y_{n.}) - f(.,y.\|_{L^1} \end{aligned}$$

Comme f est de Carathéodory et en vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, alors en passant au sup sur t on a :

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \leq M\|(f.,y_{n.}) - f(.,y.)\|_{L^1} \to 0 \; lorsque \; n \to \infty.$$

Etape 2 : L'image par F de tout borné de $C([-r,b],E)$ est bornée.

Il suffit de montrer que pour tout $q > 0$, il existe une constante l telle que pour tout $y \in B_q = \{y \in C([-r,b],E) : \|y\|_\infty \leq q\}$ on a :

$$\|F(y)\|_\infty \leq l.$$

Soit $y \in B_q$. On a pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &= |\int_0^t T(t-s)f(s,y_s)ds| \\ &\leq M\psi(q)\int_0^b P(s)ds. \end{aligned}$$

En passant au sup sur t, on obtient :

$$\|F(y)\|_\infty \leq M\psi(q)\|P\|_{L^1} = l$$

Etape 3 : F applique des ensembles bornés dans des ensembles équicontinus de $C([-r,b],E)$.

Considérons B_q comme dans l'étape 2 et soit ϵ donné. Soient maintenant τ_1 et $\tau_2 \in J$ avec $\tau_2 > \tau_1$

On considérera deux cas :$\tau_1 > \epsilon$ et $\tau_1 \leq \epsilon$.

Cas1 : Si $\tau_1 > \epsilon$ alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &\leq |\int_0^{\tau_1-\epsilon} [T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)]f(s, y_s)ds| \\
&+|\int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1} [T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)]f(s, y_s)ds| \\
&+|\int_{\tau_1}^{\tau_2} T(\tau_2 - s)f(s, y_s)ds| \\
&\leq \psi(q)\int_0^{\tau_1-\epsilon} |T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)|P(s)ds \\
&+\psi(q)\int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1} |T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)|P(s)ds \\
&+M\psi(q)\int_{\tau_1}^{\tau_2} P(s)ds
\end{aligned}$$

Cas2 : Si $\tau_1 \leq \epsilon$ alors pour $\tau_2 - \tau_1 < \epsilon$ on a :

$$|F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| \leq M\psi(q)\int_0^{2\epsilon} P(s)ds + M\psi(q)\int_0^{\epsilon} P(s)ds.$$

Lorsque $\tau_1 \to \tau_2$ et ϵ suffisement petit, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers zero car $T(t)$ est un opérateur fortement continu et la compacité de $T(t)$ pour $t > 0$ implique la continuité uniforme dans la topologie des opérateurs.

Comme conséquence des étapes 1-3 et du théorème **d'Ascoli-Arzela**, il suffit de montrer que l'image par F de B_q est un précompact de E.

Soient $0 < t < b$ fixé et ϵ un nombre réel satisfaisant $0 < \epsilon < t$.

Pour $y \in B_q$ on définit :

$$F_\epsilon(y)(t) = T(\epsilon)\int_0^{t-\epsilon} T(t - s - \epsilon)f(s, y_s)ds.$$

Comme $T(t)$ est compact pour $t > 0$, l'ensemble

$$Y_\epsilon(t) = \{F_\epsilon(y)(t) : y \in B_q\}$$

est précompact dans E pour tout ϵ tel que $0 < \epsilon < t$. De plus

$$\begin{aligned}
|F(y)(t) - F_\epsilon(y)(t)| &\leq \int_{t-\epsilon}^{t} \|T(t - s)\|_{B(E)}|f(s, y_s)|ds \\
&\leq M\psi(q)\int_{t-\epsilon}^{t} P(s)ds.
\end{aligned}$$

Dans l'ensemble
$$Y(t) = \{F(y)(t) : y \in B_q\}$$
est précompact dans E, par suite l'opérateur F est complètement continu.

Etape 4 : G est une contraction, en effet soient $y_1, y_2 \in B_q$ alors :

$$\begin{aligned}
|G(y_1)(t) - G(y_2)(t)| &\leq |h(t, y_{1_t}) - h(t, y_{2_t}| \\
&\quad + \int_0^b \|T(t-s)\|_{B(E)} |g(s, y_{1_s}) - g(s, y_{2_s})| ds \\
&\leq (l + M\|K\|_{L^1})\|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

En passant au sup sur t, on obtient :

$$\|G(y_1) - G(y_2)\|_\infty \leq (l + M\|K\|_{L^1})\|y_1 - y_2\|_\infty$$

D'aprés (ii)de (H_4) G est une contraction.

Etape 5 : Il reste mantenant à montrer que l'ensemble

$$\Omega = \{y \in C([-r, b], E) : y = \lambda F(y) + \lambda G(\frac{y}{\lambda})\ pour\ 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $y \in C([-r, b], E)$ alors pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq c_1\|y_t\|_\infty + c_2 + c_1 M\|\phi\|_\infty \\
&\quad + c_2 M + M\int_0^t P(s)\psi\|y_s\|_\infty ds \\
&\quad + M\int_0^t K(s)\|y_s\|_\infty ds + M\int_0^t |g(s, 0)| ds.
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
(1 - c_1)|y(t)| &\leq c_1 M\|\phi\|_\infty + c_2(1 + M) + M\int_0^t |g(s, 0)| ds \\
&\quad + M\int_0^t P(s)\psi(|y(s)| + \|\phi\|_\infty) ds \\
&\quad + M\int_0^t K(s)[|y(s)| + \|\phi\|_\infty] ds.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|y(t)| + \|\phi\|_\infty &\leq \beta_1 + \frac{M}{1 - c_1}\int_0^t P(s)\psi(|y(s)| + \|\phi\|_\infty) ds \\
&\quad + \frac{M}{1 - c_1}\int_0^t K(s)[|y(s)| + \|\phi\|_\infty] ds.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq t \; avec \; 0 \leq t \leq b\}.$$

Soit $t^* \in [0, t]$ que $\mu(t) = |y(t^*)|$.
D'aprés l'inégalité précédente on a :

$$\begin{aligned} \mu(t) &\leq \beta_1 + \frac{M}{1-c_1}\int_0^t P(s)\psi(\mu(s))ds \\ &+\frac{M}{1-c_1}\int_0^t K(s)\mu(s)ds. \end{aligned}$$

Notons par $v(t)$ le membre de droite de l'inégalité précédente, on a alors :

$$v(0) = \beta_1, et \; \mu(t) \leq v(t) \qquad pour \; tout \qquad t \in J$$

et

$$v'(t) = \frac{M}{1-c_1}P(t)\psi(\mu(t)) + \frac{M}{1-c_1}K(t)\mu(t) \qquad pour \; tout \qquad t \in J.$$

En utilisant le fait que ψ est croissante, on obtient :

$$v'(t) \leq \gamma_1(t)[v(t) + \psi(v(t))] \; pour \; tout \; t \in J.$$

Soit :

$$\frac{v'(t)}{v(t) + \psi(v(t))} \leq \gamma_1(t).$$

Donc :

$$\int_{\beta_1}^{v(t)} \frac{ds}{s+\psi(s)} \leq \int_0^b \gamma_1(s)ds = \|\gamma_1\|_{L^1} < \int_{\beta_1}^{\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)}.$$

Par conséquent, d'aprés la condition de théorème 3.2.1, il existe une constant α telle que :

$$v(t) \leq \alpha \qquad t \in J$$

et donc il existe une constante d telle que :

$$\|y\|_\infty \leq d.$$

Ceci montre que l'ensemble Ω est borné. D'aprés le théorème de **Burton** et **Kirk**, on déduit que $F + G$ admet un poit fixe qui est solution faible du problème $(3.1.1) - (3.1.2)$.

3.2.1 Exemple

Comme application des résultats précédents, on considère l'équation d'évolution semi-linéaire de type neutre suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}[z(t,x) - \int_{-r}^{t}\int_{0}^{\pi} a(s-t,y,x)z(s,y)dyds] \\ = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) + v(t, z(t-r,x), \frac{\partial z}{\partial x}(t-r,x)), \quad t\in[0,b],\ x\in[0,\pi], \\ z(t,0) = z(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,b], \\ z(t,x) = \phi(t,x), \quad t\in[0,b],\ x\in[0,\pi,] \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où $r > 0$; $v : [0,b]\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\phi : [-r,0]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Soit

$$y(t)(x) = z(t,x),\ t\in[0,b],\ x\in[0,\pi],$$

$$\varphi(\theta)(x) = \phi(\theta,x),\ \theta\in[-r,0], x\in[0,\pi],$$

$$g(t,\varphi)(x) = \int_{-r}^{t}\int_{0}^{\pi} a(s-t,y,x)\varphi(s,y)dyds,\ x\in[0,\pi]$$

et

$$f(t,\varphi)(x) = v(t,\varphi(\theta,x), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\theta,x)),\ \theta\in[-r,0],\ x\in[0,\pi].$$

Considèrons $E = L^2[0,\pi]$ et définissons $A(t)$ par :

$$A(t)w = w''$$

de domaine

$$D(A) = \{w \in E\ : w, w'\ absolument\ continues,\ w''\in E,\ w(0) = w(\pi) = 0\}$$

Alors $A(t)$ génére un système d'évolution $U(t,s)$ satisfaisant les conditions des suppositions $(P1) - (P3)$ ci-dessous :

$(P1)$ $U(t,t) = I$ où I est l'opérateur identité de E
$(P2)$ $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$ pour $0 \le \tau \le s \le t < b$,
$(P3)$ $U(t,s) \in B(E)$,

où pour tout $(t,s) \in J\times J$ et pour tout $y \in E$, l'application $(t,s) \to U(t,s)$ est continue (voir [3]). Ici on considère que $\varphi : [-r,0] \to E$ telle que φ est Lebesgue mesurable et $h(s)|\varphi(s)|^2$ est Lebesgue integrable sur $[-r,0]$ où $h : [-r,0] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable positive. La norme est définie par :

$$\|\varphi\| = |\phi(0)| + (\int_{-r}^{0} h(s)|\varphi(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction a est mesurable sur $[0, \infty[\times[0, \pi] \times [0, \pi]$,

$$a(s, y, 0) = a(s, y, \pi) = 0, \qquad (s, y) \in [0, \infty[\times[0, \pi],$$

$$\int_0^\pi \int_{-r}^t \int_0^\pi \frac{a^2(s, y, x)}{h(s)} dsdydx < \infty,$$

et $\sup_{t\in[0,b]} N(t) < \infty$, où

$$N(t) = \int_0^\pi \int_{-r}^t \int_0^\pi (\frac{1}{h(s)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} a(s, y, x)^2 dsdydx.$$

Donc, en vertue des définitions précédentes de f, g et $A(.)$, le système (3.2.1) peut être représenté par le problème d'évolution de type neutre abstrait (3.1.1)-(3.1.2). Avec des conditions appropriées sur V on assure l'existence d'au moins une solution faible pour (3.2.1).

Conclusion et Prespectives

Dans ce mémoire nous avons considéré le problème d'existence des solutions faibles d'équations différentialles fonctionnelles semi-linéaires perturbées d'ordre un à retard fini sur un intervalle réel $J := [0, b]$ avec opérateurs à domaines denses, ces résultats sont obtenus à l'aide de la théorie des semi-groupe de classe C_0 et l'argument du poit fixe, et nous avons également une étude des équations différentielles fonctionnelles semi-linéaires de type neutre à domaines denses.

On peut aussi étendre nos résultats à l'étude de l'unicité, de la régularité, de la contrôlabilité et de la stabilité des solutions.

Comme perspectives l'étude peut être faite dans le cas infini, et ces résultats peuvent être étendus à la demi-droit réelle $[0, \infty[$.

Bibliographie

[1] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.*

[2] A.J. Lotka, *Elements of Physical Biology,* Williams and Wilkins, Baltimore, 1925.

[3] A. Freidman, *Partial Differential Equation,* Holt, Rinehat and Winston, New York, 1969.

[4] B.C .Dhage and J.Henderson, Existence theory for nonlinear functional boundary value problems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2004 No.1,1-15.*

[5] C. C Travis and G.F. Webb, Existence and Stability for Partial Functional Differential Equations, *Trans. Amer Math. Sc, 200, (1947), 395-418.*

[6] C.C Travis and G.F. Webb, Existence, Stability and compactness in the α norm for partial functional differential equations, *Trans. Amer. Math. Sc, 240, (1978), 129-143.*

[7] D. L. Ludovic, A Comparative Study Concerning the well Known Theory of C_0-Semigroups and the Theory of Once - Integrated Semigroups. *Lecturas matemáticas. Volumen 26(2005), 35-96.*

[8] D. Guo and V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abtract Cones,* Academic Presse, New York, 1988.

[9] G.F. Webb, Regularity of solutions to an abstract inhomogeneous linear dierential equation, *Proc. Amer. Math. Soc, Vol.62, N.2, (1977) 271-277.*

[10] H.O. Fattorini, *Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces,* North Holland, Mathematical Studies 108, North Holland, Amsterdam, 1985.

[11] H. Kellermann and M. Hieber, Integrated Semigroup, *J. Funct. Anal. 84, (1989)160-180.*

[12] J.P. Aubin, *L'Analyse Non Linéaire et ses Motivations Économiques.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maitrise. 1984, 224 pages.

[13] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations,* Applied Mathematical Sciences 119, Springer-Verlag, New York, 1996.

[14] J.P. Aubin, *Initiation à l'Analyse Appliquée, Masson, Paris, Milan Barcelone, 1994.*

[15] J.K. Hale,*Theory of Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1977.

[16] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations,* Applied Mathematical sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[17] K.J. Engel and R. Nagel, *A Short Course on Operators Semigroups.* Universitex. New York, N.Y, Springer, 2006.

[18] K.S. Miller and B.Ross, *An Introduction to the Functional Calculus and Differential Equations,* John Wiley, New York, 1993.

[19] K. Yosida,*Functional analysis,* 6^{th}edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[20] L.Gorniewiez,*Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Mathematics and its Application, 495,* Kluwer Academic publishers, Dordrecht, 1999.

[21] L. Byszewski and H. Akca, On a mild solution of a semilinear functional differential evolution nonlocal problem, *J. Appl. Math. Stochastic Anal. 10(1997), 265-271.*

[22] M.Belmekki, Existence results for semilinear pertubated functional differential equations with nondensly defined operators, *Fixed poit theo. Appl,2006, Art, ID 43696, 13 pp.*

[23] M. Brelot, Sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévorante et dévorée, *Annali di mathematica pura et applicata, 9(1931), 57-74.*

[24] M. Belmekki M. Benchohra,L. Gòrniewiez and S.K. Ntouyas, Existence results for semilinear perturbed functional differential inclusions with infinite delay. Nonlinear Analysis Forum. 13(2)2008,135-165.

[25] M. Benchohra, L. Gorniewiez and S.K. Ntouyas, *Controllability of some nonlinear systems in Banach spaces (The Fixed Point Theorem Approach),* Pawel Wlodkowic University College ; Plok : Wydawnictwo Naukowe NOVUM, 2003.

[26] M. Balachandran et J.P. Dauer, Controllability of nonlinear systems in Banach spaces. Dedicated to professor Wolfram Stadler, *J. Optim. Theory appl. 115(2002).*

[27] M. Adimy, H. Bouzahir et K. Ezzinbi, Existence and stability for some partial neutral functinal differential equation with infinite delay, *J. Math. Anal.Appl. 204(2004) 438-461.*

[28] N.U. Ahmed, *Dynamic Sestems and Control With Applications,* Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Hackensack, NJ. 2006.

[29] N.U. Ahmed, *Semigroup Theory With Applications to Systems and Control*, Pitmans Research Sotes in Mathematics Series, 246. Longman Scientifie Technical, Harlow, John Wiley Sons, New York, 1991.

[30] S. Heikkila and V. Lakshmikantham, *Monotone Iterative Technic for Nonlinear Discontinuous Differential Equations,* Marcel Dekker Inc. New York, 1994.

[31] T.A. Burton and C.Kirk A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, *Math Nachr. 189(1998),23-31.*

[32] V. Volterra, Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires, *J. Math. Pures Appl,7, (1928), 249-298.*

[33] V. Kolmanovskii, and A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations.* Mathematics and its Applications, 463. Kluwer Academic Pubishers, Dordrecht, 1999.

[34] W. Arendt, Vector Valued Laplace Transforms and Cauchy Proplems, *Israel J. Math.59(1987), 327-352.*