République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Les fonctions confluentes (partie fonctions spéciales)

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Chibani **S**amira [1]

Sous la direction de

Dr A. Azzouz

Soutenue le 16/07/2019 devant le jury composé de

O. Bennehi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
F.Z. Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
A. Zeglaoui	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : samirachibani17@gmail.com

Table des matières

1 Préliminaires **7**

1.1 Méthode de Fröbenius 7

1.2 Formulation de la méthode 8

1.3 Notes sur les fonctions Gamma et Bêta 11

1.3.1 Equation fonctionnelle 11

1.3.2 Prolongement de Gamma 11

1.4 Intégration sur le contour de Hankel 13

1.4.1 Intégrale de Hankel 14

1.4.2 Lacet double de Pochhammer 15

1.5 Intégrales de Barnes, Mellin, Ramanujan et Hardy : 15

1.5.1 Formule de duplication 15

1.5.2 Théorème de Ramanujan 16

1.5.3 Première intégrale de Barnes 16

1.6 Fonction bêta 17

2 Fonction hypergéométrique de Gauss **19**

2.1 Introduction 19

2.2 Série hypergéométique de Gauss 20

2.3 Solution de l'équation diffiérentielle hypergéométrique : 21

2.4 Propriétés fondamentales de la Fonction hypergéométrique 25

2.4.1 Analyticité 25

2.4.2 Relations de fonction contiguës 27

2.4.3 Différentielle de la fonction de Gauss 31

2.5 Représentations intégrales de la fonction de Gauss 32
2.5.1 Représentation intégrale d'Euler 32
2.5.2 Évaluation de la fonction de Gauss pour $z = \pm 1$ 34
2.5.3 Représentation intégrale du contour de Barnes 45
2.6 Identités de transformation 57
2.6.1 Transformations fractionnaires en z linéaires 57
2.6.2 Transformations quadratiques 60

3 Fonction confluente **67**
3.1 Introduction 67
3.2 Définition de la fonction hypergéométrique de Gaus 68
3.2.1 Équation différentielle 68
3.2.2 Solutions standards 69
3.3 F.C.G : propriétés 73
3.3.1 Analyticité 73
3.3.2 Continuation analytique 75
3.3.3 Relations et transformations 75
3.3.4 Relations de récurrence 77
3.4 Représentations intégrales ([33]) 80
3.4.1 L'intégration de contour 85
3.5 Représentation intégrale de Barnes 87
3.6 Développement asymptotique 91
3.6.1 Développement de type Poincaré 93
3.6.2 Limites d'erreur 95
3.6.3 Développement exponentiellement améliorée 96
3.7 Équations et fonctions de *Whittaker* $M_{k,m}(z)$ 98
3.7.1 Solutions de l'équation de *Whittaker* 99
3.7.2 Relations de récurrence 100
3.7.3 Représentation intégrale 100

Introduction

L'étude des fonctions hypergéométriques à une variable a plus de 200 ans. Elles apparaissent dans les travaux d'*Euler, Gauss, Riemann* et *Kummer*. *Barnes* et *Mellin* ont étudié leurs représentations intégrales, *Schwarz* et Goursat ont montré leurs propriétés particulières.

L'équation hypergéométrique de *Gauss* est omniprésente en physique mathématique, de nombreuses équations aux dérivées partielles bien connues pouvant être réduites à l'équation de *Gauss* par séparation de variables.

L'histoire des fonctions hypergéométriques a commencé pratiquement avec un article de *Gauss*. Là, il a présenté la plupart des propriétés des fonctions hypergéométriques que nous voyons aujourd'hui, comme par exemples les séries puissances, les équations différentielles, les relations contiguës, le développement fractionnaire continu, les valeurs spéciales, etc. Il a également été démontré que les fonctions hypergéométriques avaient des applications dans la théorie de représentation des groupes, la géométrie algébrique, la K-théorie algébrique et la théorie des champs conformes.

L. Euler (1778) a découvert pour la première fois plusieurs faits importants sur les séries hypergéométriques sans leur donner aucun nom spécial, il remarqua que cette série vérifie une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, qu'il utilise pour établir une formule de transformation ; antérieurement ; en (1769) il avait déjà, dans un cas particulier, intégré cette équation par une intégrale définie et *J. Pfaff* (1797), l'un des professeurs de *G. F.Gauss*, a consacré un long chapitre à l'étude de cette équation et aux diverses formes des séries qui la vérifient. Toutefois, c'est *G. F. Gauss* (1813) lui-même qui a pleinement reconnu leur signification et qui en a rendu compte de manière systématique dans deux documents importants, dont l'un a été publié à

titre posthume. Une des raisons de l'intérêt de Gauss pour les fonctions hypergéométriques est que les fonctions élémentaires et plusieurs autres fonctions importantes en mathématiques sont exprimables en termes de fonctions hypergéométriques. Un demi-siècle après *Gauss*, *Riemann* a développé des fonctions hypergéométriques d'un point de vue différent, qui rendaient disponibles les formules de base avec un minimum de calcul. Une autre approche des fonctions hypergéométriques utilisant des intégrales de contour a été présentée par les mathématiciens *C. Jordan* (1887) et L. *Pochhammcr* (1890) introduisent une intégrale prise le long d'un double lacet ; *S. Pincherle* (1888), *Hj. Mellin* (1896) et *E.W.Barnes* (1900) utilisent une intégrale portant sur un quotient de fonctions gamma il a exprimé une fonction hypergéométrique sous la forme d'une intégrale de contour, qui peut être vue comme une formule d'inversion de *Mellin*. Chacune de ces différentes approches présentent ses avantages.

E. Kummer appliquant pour la première fois le qualificatif « hypergéométrique » à la série de *Gauss* ; exprime 24 intégrales particulières par des séries ${}_2F_1$. En revanche, *Kummer* a beaucoup contribué à la recherche sur les propriétés arithmétiques des fonctions hypergéométriques

Les fonctions hypergéométriques ont deux propriétés très importantes qui ajoutent à leur utilité : elles satisfont certaines identités pour des valeurs spéciales de la fonction et elles ont des formules de transformation. Nous présentons de nombreuses applications de ces propriétés.

Par exemple, en analyse combinatoire, les identités hypergéométriques classifient des sommes uniques de produits de coefficients binomiaux. De plus, les transformations quadratiques des fonctions hypergéométriques permettent de mieux comprendre la relation (connue de *Gauss*) des intégrales elliptiques à la moyenne arithmétique-géométrique.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres

Au **chapitre 1**, nous présentons brièvement quelques concepts et théorèmes préliminaires tirés d'autres domaines des mathématiques, qui fourniront les bases nécessaires à l'établissement de résultats impliquant les fonctions gamma et beta tels que les représentations intégrales définies (ou périodes) ou curvilignes (le long d'un contour) de la fonction gamma ainsi que différentes identités remarquables satisfaites par cette

fonction qui sont essentielles à la compréhension des fonctions hypergéométriques.
Au **chapitre 2**, nous définissons la fonction hypergéométrique de *Gauss* et présentons certains résultats classiques, nous présentons trois approches importantes des fonctions hypergéométriques. La première approche, une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par une fonction hypergéométrique. Deuxièment, une représentation intégrale d'Euler conduit facilement à la dérivation d'identités essentielles et à la transformation de fonctions hypergéométriques. Troisièmement, une représentation intégrale de *Barnes* pour dériver des relations de transformation entre des fonctions hypergéométriques et pour étudier leurs asymptotes. Certaines intégrales qui apparaissent ici sont en réalité des extensions de l'intégrale bêta.
Le **dernier chapitre** est consacré à l'étude de la fonction hypergéométrique confluente obtenue à partir de la confluence de deux singularités régulières de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$. De même Il existe trois manières possibles de caractériser les fonctions hypergéométriques confluente : en tant que fonctions représentées par des séries dont les coefficients satisfont à certaines propriétés de récursivité ; en tant que solution d'équation différentielle qui sont, dans un sens approprié, holonomique et présente des singularités légères ; en tant que fonctions définies par des intégrales telles que l'intégrale de *Mellin-Barnes*. Ainsi, nous étudions les fonctions de *Whittaker* qui transforme l'équation confluente en une équation dans laquelle le coéfficient de la première dérivée est égal à zéro.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre se décompose en deux parties, Dans la première partie on présente la technique de Frobenius pour l'obtention du developpement en série entière des solutions du type hypergéométriques d'une équation différentielle de second ordre à coefficients variables autour des points réguliers.
La deuxième partie est consacrée à l'étude de la fonction Gamma d'Euler noté Γ. Après avoir présenté ces résultats bien connus, nous intéressons par la suite à la représentation intégrale de Γ par certains intégrales définies (par périodes) ou des intégrales curvilignes (le long d'un contour) ainsi que différentes identités remarquables satisfaites par cette fonction.

1.1 Méthode de Fröbenius

En analyse, la méthode de Frobenius portant le nom du mathématicien Allemand "Ferdinand George Fröbenius", elle permet d'obtenir le developpement en série entière des solutions d'une équation différentielle de la forme

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = 0$$

où $a,\ b$ et c sont des polynômes et $x \in \mathbb{C}$, ou d'une manière équivalente,

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0 \tag{1.1}$$

avec

$$p\,(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, \quad q(x) = \frac{c(x)}{a(z)}$$

et permet d'obtenir au voisinage d'un point $x = x_0$ un developpement d'au moins une solution en série entière de la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x - x_0)^{n+r}, \ \alpha_0 \neq 0; \quad r \in \mathbb{R}$$

r est appelé "exposant indiciaire".

Définition 1.1.1. *(Points singuliers réguliers) Un point x_0 est dit singulier régulier de l'équation* (1.1) *si $p(x)$ et $q(x)$ sont analytiques au voisinage de x_0 (i.e.x_0 est un point singulier) et les limites suivantes existent*

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) p(x) = p_0$$

et

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x) = q_0$$

sinon (i.e. si les limites n'existent pas) x_0 est un points singulier irrégulier.

Remarque 1.1.1. *Un point x_0 est un point singulier régulier pour* (1.1) *si* (1.1) *peut être écrit comme*

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) p(x) y' + q(x) y = 0 \tag{1.2}$$

où p et q sont analytiques à x_0.

1.2 Formulation de la méthode

Supposons qu'une solution de (1.2) peut être représentée par une série de puissance étendue

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n \tag{1.3}$$

Nous substituons formellement (1.3) à (1.2) et trouvons r et $\alpha_1, \alpha_2, ...$ en termes de α_0 et r. Une fois que nous avons trouvé (1.3), nous vérifions ensuite la convergence de la série. Si elle converge, alors (1.3) devient une solution pour (1.2).

En effet, substituons (1.3) dans l'équation (1.2), nous trouvons

$$\begin{aligned}(x-x_0)^2y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\alpha_n(x-x_0)^{n+r}\\ (x-x_0)y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\alpha_n(x-x_0)^{n+r}\end{aligned}$$

Puisque p et q sont analytiques, on écrit

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n,\ q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n$$

En se substituant dans (1.2), on obtient
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\alpha_n(x-x_0)^{n+r}+(\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n)(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\alpha_n(x-x_0)^{n+r})+$
$(\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n)(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-x_0)^{n+r})=0$
où

$$x^r\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)\alpha_n+\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\alpha_k](x-x_0)^n=0$$

Puisque $(x-x_0)>0$, cela devient

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)\alpha_n+\sum_{k=0}^{n-1}(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\alpha_k](x-x_0)^n=0$$

Ainsi, nous devons avoir

$$[(n+r)(n+r-1)+(n+r)p_0+q_0]+\sum_{k=0}^{n-1}[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]\alpha_k]=0 \tag{1.4}$$

Maintenant (1.4) donne α_n en termes de $\alpha_0,\alpha_1\cdots,\alpha_{n-1}$ et r.
pour $n=0$. On trouve

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0 \tag{1.5}$$

Puisque $\alpha_0\neq 0$. L'équation(1.5) est appelée équation indiciaire pour (1.2.)

La forme des solutions de (1.2) linéairement indépendantes dépend des racines de l'équation (1.5).
Soit $\rho(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\rho(r+n)\alpha_n + \beta_n = 0$$

où

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\alpha_k$$

Soient r_1, r_2 les racines de l'équation indiciaire (1.5) alors on a le :

Théorème 1.2.1. ([7])*Supposant que $x_0 = 0$ est un point singulier régulier de l'équation* (1.1) *et que les racines de l'équation indiciaire* (1.5) *sont r_1 et r_2, alors*

- *Si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$, alors il existe deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de* (1.2) *de la forme*

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(r_1)x^n),\ y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(r_2)x^n)$$

- *Si $r_1 - r_2 = n > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de* (1.2)*de la forme*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(r_1)x^n \\ y_2(x) &= c\,(\ln x)\, y_1(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(r_2)x^n) \end{aligned}$$

- *Si $r_1 = r_2 = r$, la deuxième solution a la forme*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(r)x^n \\ y_2(x) &= (\ln x)\, y_1(x) + x^{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(r)x^n \end{aligned}$$

1.3 Notes sur les fonctions Gamma et Bêta .

Définitions et premières propriétés ([8]) ([33])et ([20])

Définition 1.3.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ la fonction Γ est définie par l'intégrale à un paramètre :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.6}$$

qui est absolument convergente sur $]0, +\infty[$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$

Plus précisément $\Gamma(z)$ définit comme une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$.

1.3.1 Equation fonctionnelle

Proposition 1.3.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$ on a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

En particulier, si $z = n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Preuve 1.3.1. *La preuve de la première formule est immédiate à l'aide d'une intégration par partie et la seconde se traite par récurrence et en calulant explicitement $\Gamma(1)$.*

1.3.2 Prolongement de Gamma

L'équation fonctionnelle permet de prolonger $\Gamma(z)$ en une fonction meromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples en $z = 0, -1, -2, ...$

Théorème 1.3.1. *La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ tout entier et pour tout entier négatif n*

$$res_{\{z=n\}}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Preuve 1.3.2. *En effet, on a :*

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)...z\Gamma(z)$$

ou

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)...z}$$

et

$$\Gamma(z+n+1) = 1 + O(z+n)$$

d'où

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + O(1)$$

i.e. $\Gamma(z)$ *a en* $z = -n$ *un pôle simple avec le résidu*

$$Res_{z=-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

On a la formule des compléments :

Proposition 1.3.2. ([38])*(Formule des réflexion d'Euler). Pour tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$.*on a*

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \tag{1.7}$$

Et les formule de multiplication de Gauss, Legendre :

Théorème 1.3.2. *(Formule de multiplication de Gauss, Legendre)*

$$\prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{r}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{(n-1)}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz).$$

Preuve 1.3.3. *voir*()

Proposition 1.3.3. *Formule de duplication de Legendre Il suffit d'appliquer* (1.3.2) *dans le cas* $n = 2$ *:*

$$\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})\frac{2^{2z-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Corollaire 1.3.1.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{k})e^{-\frac{z}{n}}$$

où γ *est la constante d'Euler donnée par*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

1.4 Intégration sur le contour de Hankel

Après avoir présenté ces résultats bien connus sur la fonction gamma, intéressons-nous par la suite à la représentation intégrale de Γ par une intégrale de Cauchy ; on considère pour cela l'intégrale suivante :

$$\int_{\rho}^{0+} e^{-t}t^{z-1}dt, \rho > 0$$

on intègre sur le contour de Hankel représenté sur la figure ci-dessous

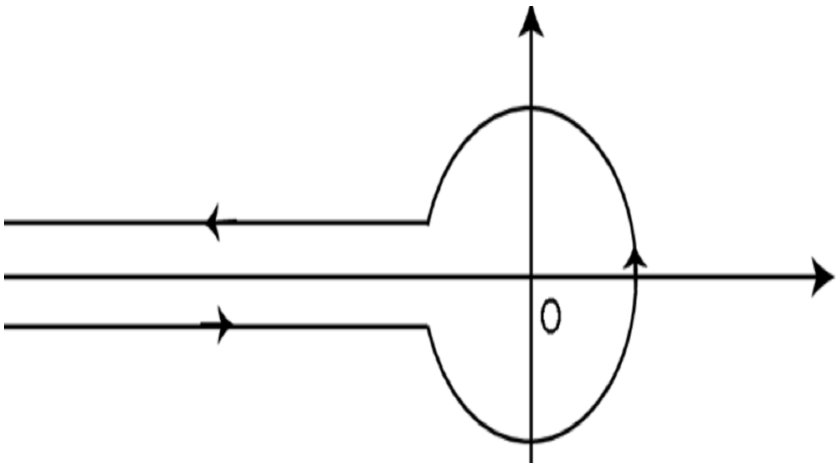


Fig 1 : Contour de Hankel

Ici $\rho \in \mathbb{R}^+$. On peut prendre pour $(\rho, 0+)$ un contour

$$\begin{aligned} D &= \{\rho \geq t \geq \delta\} \cup \{t = -\delta e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq \pi\} \cup \{\delta \leq t \leq \rho\} \\ &= D_- \cup D_\delta \cup D_+ \end{aligned}$$

Ici δ, $0 < \delta < \rho$ est un arbitraire, l'intégrale ne depend pas de δ.
On prend sur D_- la branche de $(-t)^{z-1}$ correspondante à $\arg(-t) = -\pi$, i.e.

$$(-t)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)}t^{z-1} \text{ sur } D_-$$

de là, par l'extension analytique le long de D_δ , $\arg(-t) = \pi$ sur $D+$, i.e.

$$(-t)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)}t^{z-1} \text{ sur } D_+$$

Il s'en suit

$$\begin{aligned}\int_\rho^{0+}(-t)^{z-1}e^{-t}dt &= \int_\rho^{\delta} e^{-i\pi(z-1)}t^{z-1}\ e^{-t}dt \\ &+ \int_{D_\delta}(-t)^{z-1}e^{-t}dt + \int_\delta^{\rho} e^{-i\pi(z-1)}t^{z-1}\ e^{-t}dt \\ = \ & -2i\sin(\pi z)\int_\delta^\rho t^{z-1}e^{-t}dt + \int_{D_\delta}(-t)^{z-1}e^{-t}dt\end{aligned}$$

Maintentant

$$\begin{aligned}\int_{D_\delta}(-t)^{z-1}e^{-t}dt &= -\int_{-\pi}^{\pi}\delta(e^{i\theta})^{z-1}e^{\delta(\cos\theta+i\sin\theta)}\delta ie^{i\theta}d\theta \\ &= -i\delta^z\int_{-\pi}^{\pi}\delta(e^{i\theta})^{z-1}e^{\delta(\cos\theta+i\sin\theta)}\delta ie^{i\theta}d\theta \to 0\end{aligned}$$

si $\mathrm{Re}(z) > 0$. On a alors :

Théorème 1.4.1.

$$\int_\rho^{0+}(-t)^{z-1}e^{-t}dt = -2i\sin(\pi z)\int_0^\rho t^{z-1}e^{-t}dt$$

si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

En faisant tendre ρ à l'infini, on obtient ;

1.4.1 Intégrale de Hankel

Définition 1.4.1. *Si* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *alors*

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin(\pi z)}\int_\infty^{0+}(-t)^{z-1}e^{-t}dt$$

On peut prendre le membre droit pour une définition de $\Gamma(z)$ pour z arbitraire. En déduire du théorème (1.4.1) le résultat suivant

Corollaire 1.4.1.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0+}(-t)^{-z}e^{-t}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0+}t^{-z}e^{-t}dt,$$

Et en utilisant la formule des compléments, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.2.

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0+}e^{-t}t^{s-1}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0+}e^{-t}t^{-s}dt$$

si $\mathrm{Re}(s) > 0$.

1.4.2 Lacet double de Pochhammer

E.T.Whittaker et all dans ([42]) ils ont montré que

$$\int_{P}^{(1+,0+,1-,0-)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = (1-e^{2\pi ia})(1-e^{2\pi ib})B(a,b)$$

et donc

$$e^{-\pi i(a+b)}\int_{P}^{(1+,0+,1-,0-)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(a+b)}.$$

1.5 Intégrales de Barnes, Mellin, Ramanujan et Hardy :

Pour plus de détails sur la fonction gamma, nous renvoyons à ([21]), ([30]), ([16]) et ([42]) (chapitre 12) et enregistrons ici par commodité les résultats de base que nous allons utiliser.

1.5.1 Formule de duplication

Théorème 1.5.1. (*i*) *Si* $\mathrm{Re}\, a > 0$,

$$\sqrt{\pi}\Gamma(a) = 2^{a-1}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

(*ii*) *Pour* $c > 0$ *fixé, la fonction* $t \longmapsto |\Gamma(c+it)|$ *se désintègre de manière exponentielle quand* $t \to \pm\infty$ *tel que*

$$|\Gamma(c+it)| = |t|^{c-\frac{1}{2}}e^{\left(-\pi\frac{|t|}{2}+O(1)\right)}; \quad t \to \pm\infty$$

1.5.2 Théorème de Ramanujan

Théorème 1.5.2. *Si a est un nombre complexe dans le demi-plan droit ouvert, alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(c+it)\,\Gamma(a+it)\,e^{-i\xi t}dt = \sqrt{\pi}\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\sinh^{2a}\frac{\xi}{2}$$

1.5.3 Première intégrale de Barnes

Théorème 1.5.3. *Pour a, b, c et d dans le demi-plan droit, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(a+it)\,\Gamma(b+it)\,\Gamma(c-it)\,dt = \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}$$

Comme cas particulier remarquable, nous obtenons, en vertu de la formule de duplication, le résultat suivant ([37]) et ([15]) :

Corollaire 1.5.1. *(Ramanujan) : Si a et b sont des nombres réels positifs,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(a+it)\,\Gamma(b+it)|^2\,dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b-a-\frac{1}{2})}{\Gamma(b)\Gamma(b-\frac{1}{2})\Gamma(b-a)}$$

Un résultat plus général peut être prouvé dans le même sens :

Théorème 1.5.4. *Si* $\mathrm{Re}(b-a) \geq 0$, $\mathrm{Re}(d-c) \geq 0$, $\mathrm{Re}(b+d) > 1$ *et* $\mathrm{Re}(b+d-a-c) > 1$ *alors ;*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+it)\,\Gamma(c-it)}{\Gamma(b+it)\,\Gamma(d-it)}dt = \frac{\Gamma(a+c)\,\Gamma(b+d-a-1)}{\Gamma(b+d-1)\,\Gamma(b-a)\,\Gamma(d-c)}$$

Il existe des démonstrations notamment par la formule d'Euler et la formule de Cauchy. ([38])

Théorème 1.5.5. *(Formule de Stirling) Pour $\delta > 0$ et $|\arg z| \leq \pi - \delta$*

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z} \text{ quand } |z| \to \infty \tag{1.8}$$

Corollaire 1.5.2. *Lorsque $z = a + ib$, $a_1 < a < a_2$ et $|b| \to \infty$, alors*

$$|\Gamma(a+ib)| = \sqrt{2\pi}\,|b|^{a-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{|b|}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{|b|}\right)\right]$$

où la constante impliquée dans O ne dépend que de a_1 et a_2.
On a la formules asymptotique ([38])

$$\log\Gamma(z+a) = \left(z+a-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + o(1)$$

où $o(1) \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Il en suit que

$$\sqrt{\Gamma}(a+z) = \sqrt{2\pi}e^{-z}z^{z+a-\frac{1}{2}}R(z)$$

si

$$|\arg(z)| \leq \pi - \delta \text{ et } \ |\arg(z)| \leq \pi - \delta,$$

$\delta > 0$, avec $\mathrm{Re}(z) \to 1$ quand $|z| \to \infty$.

1.6 Fonction bêta

Définition 1.6.1. *Soient $z,\ y \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Re}(y) > 0$, on définit la fonction bêta par*

$$B(z,\ y) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{1.9}$$

Sachant les propriétés de Γ, on peut énoncer quelques résultats.

Théorème 1.6.1. *Soient $z,\ y \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Re}(y) > 0$, on a*

$$B(z,\ y) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(y)}{\Gamma(z+y)}. \tag{1.10}$$

Théorème 1.6.2. *(Euler, Gauss)([5]) .*

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} n^z B(n+1,z) = \lim_{n\to\infty} n^z \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^z \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)}\end{aligned}$$

Remarque 1.6.1. *Du théorème (1.6.1) on peut déduire pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$B(n+1,z) = \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}du = \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

et cela est vrai pour tout $z \neq 0, -1, ..., -n$

Définition 1.6.2. *(Symbole de Pochhammer) Soient $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit le symbole de Pochhammer par*

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

On a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} (a)_0 &= 1 \\ (a)_k &= a(a+1)\dots(a+k-1) \\ (a)_{k+1} &= (a+k)(a)_k. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Un simple exemple est

$$(1)_k = 1.2\dots k = k!.$$

Proposition 1.6.1. *On a les relations suivantes :*

$$(a)_n = (-1)^n \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-n)}, \quad a \notin \mathbb{N} \tag{1.12}$$

Pour $k, n \in \mathbb{N}$;

$$(a)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{a}{2}\right)_n \left(\frac{a+1}{2}\right)_n, \quad a \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{1.13}$$

Pour $k, n \in \mathbb{N}$;

$$(-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k \geq n+1 \end{cases} \tag{1.14}$$

Chapitre 2

Fonction hypergéométrique de Gauss

2.1 Introduction

Le terme "série hypergéométrique" a été introduit pour la première fois par John Wallis dans son papier "Arithmetica Infmitorum" (1655) pour décrire des séries infinies de la forme

$$1 + a + a(a\ + 1) + a(a\ + 1)(a + 2) + \cdots$$

En 1836, ce terme fut utilisé par *E. D. Kummer* $(1810 - 1898)$ pour la série

$$1 + \frac{a.b}{1.c}\chi + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}\chi^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3.c(c+1)(c+2)}\chi^3 + \cdots$$

qui est la forme actuelle de la série hypergéométrique. ([5].)

Dans ce chapitre, nous considérons en particulier la série hypergéométrique de Gauss qui contient trois paramètres, ainsi que son équation hypergéométrique et sa fonction hypergéométrique associée. On présente certaines de ses représentations intégrales réelles et complexes ainsi que des transformations linéaires et quadratiques.

2.2 Série hypergéométique de Gauss

L'origine des fonctions hypergéométriques se trouve au début du 19 ème siècle ([17]), lorsque Gauss étudie l'équation différentielle suivante :

$$z(1-z)u''(z) + [c-(a+b+1)z]\,u'(z) - abu(z) \;\; = 0$$

où $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$. Cette équation linéaire, a trois points singuliers réguliers en $z = 0$; $z = 1$ et $z = \infty$.

Définition 2.2.1. *La fonction hypergéométrique, désigne généralement une fonction spéciale particulière, dépendant de trois paramètres $a; b; c$; s'exprimat sous la forme suivante :*

$$F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \qquad (c \neq 0, -1, -2, \ldots), \tag{2.1}$$

La notation $(a)_k$ désigne le symbole de Pochammer qui définit par :

$$(a)_k = \begin{cases} (a)_k = (a)(a+1)...(a+k-1), & a \in \mathbb{C}; \quad k \in \mathbb{N}^* \\ (a)_0 = 1 & n = 0 \end{cases}$$

Remarque 2.2.1. *D'après le critère d'Alembert,*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(a)_{k+1}\,(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(c)_k}{(a)_k\,(b)_k} \frac{(k)!}{z^k} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(a+k)\,(b+k)}{(c+k)\,(k+1)} z \right| \\ &= |z| \end{aligned}$$

la série converge si $|z| < 1$ ainsi que sur le cercle, elle est absolument convergente si $\mathrm{Re}(c-b-a) > 0$:

Notation 2.2.1. *La fonction hypergéométrique de Gauss est également présentée par des notations alternatives telles que*

$${}_2F_1(a,b,c,z) = F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array}; z\right) = F\,(a,b,c,z)$$

Remarque 2.2.2. *Il est possible d'étudier le caractère régulier ou singulier à l'infini, en efectuant dans l'équation (2.2) le changement de variable (transformation de Mobius) $w = \dfrac{1}{z}$ et étudier le comportement en $w = 0$.*

2.3 Solution de l'équation diffiérentielle hypergéométrique :

Théorème 2.3.1. *Pour $|z|<1$, la série* $F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$ *est une solution particulière de l'équation hypergéométrique*

$$z(1-z)u''(z)+[c-(a+b+1)z]\,u'(z)-abu\ =0 \tag{2.2}$$

Preuve 2.3.1. *Pour chercher une solution formelle de l'équation diffiérentielle hypergéométrique* (2.2) *. Posons*

$$y\left(z\right)=z^r\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^n$$

où r un nombre à choisir convenablement, telle que

$$y'\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)w_nz^{r+n-1}$$

et

$$y"\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(r+n\right)\left(r+n-1\right)w_nz^{r+n-2}$$

et en remplaçant ces équations dans (2.2)*, on obtient*

$$z(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(r+n\right)\left(r+n-1\right)w_nz^{r+n-2}+[c-(a+b+1)z]-\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)w_nz^{r+n-1}-ab\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^{r+n}=0.$$

nous donnons

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(r+n\right)\left(r+n-1+c\right)w_nz^{r+n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n)w_nz^{r+n}-(a+b)\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)w_nz^{r+n}-ab\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^{r+n}=0$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(r+n\right)\left(r+n-1+c\right)w_nz^{r+n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(r+n+a)(r+n+b)w_nz^{r+n}\ &=\ 0\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(r+n\right)\left(r+n-1+c\right)w_n-(r+n-1+a)(r+n-1+b)w_{n-1}\right]z^{r+n-1}\ &=\ 0\end{aligned}$$

Alors, le système d'équation suivant ce qui nous permet de déterminer l'exposant r *et le coefficient* w_n

$$(r+n)\,(r+n-1+c)w_n-(r+n-1+a)(r+n-1+b)w_{n-1}=0$$

et

$$w_0 r\,(r-1+c)=0$$

Les deux dernières équations nous permet de déterminer le coefficient w_n*. En fixant* $w_0=1$*, on obtient* $r=0$ *ou* $r=1-c$ *:*
Pour $r=0$ *; nous sopposons que* $c\neq -0;-1;-2;...$ *On a la relation de récurrence :*

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(a+n-1)(b+n-1)}{(c+n-1)n}w_{n-1},\ n\geqq 1 \\ &= \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)n!} \\ &= \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n},\ n\geqq 1 \end{aligned}$$

Donc la première solution particulière de (2.2) *est définie par*

$$y_1(z)=F\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\qquad |z|<1$$

Pour le cas $r=1-c$ *telle que* $c\neq 2,3,4,\dots$*,nous donne*

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(a+n-c)(b+n-c)}{(n-c+1)n}w_{n-1},\ n\geqq 1 \\ &= \frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{(2-c)n!},\ n\geqq 0 \end{aligned}$$

On voit que la deuxième solution particulière de (2.2) *est donnée par*

$$\begin{aligned} y_2(z) &= z^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{(2-c)_n n!}z^n,\quad |z|<1 \\ &= zF\left(\begin{matrix}a+1-c,b+1-c\\ 2-c\end{matrix};z\right),\quad |z|<1,\ |\arg z|<\pi \end{aligned}$$

Lorsque c *n'est pas un entier, les deux solutions sont linéairement indépendants, donc la solution générale de* (2.2) *prend la forme suivante*

$$y(z)=A\ F\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};z\right)+B\ z^{1-c}F\left(\begin{matrix}1-c+a,1-c+b\\ 2-c\end{matrix};z\right)$$

Pour $|z| < 1,\ |\arg z| < \pi$, *et* $A; B$ *sont des constantes arbitraires*

Remarque 2.3.1. *En utilisant la propriété de la fonction gamma* Γ

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

on obtient par conséquent

$$\begin{aligned}\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) = (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2)\\ &= \ldots = (a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)(a)\Gamma(a).\end{aligned}$$

on peut vérifier que $F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array}; z\right)$ *peut s'écrire :*

$$w_n = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)}\frac{1}{n!}.$$

d'où

$$F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array}; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}$$

Théorème 2.3.2. *La série hypergéométrique de Gauss* $F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array}; z\right)$ *est*

i) Absolument convergente lorsque $|z| < 1$,

ii) Divergente lorsque $|z| > 1$

iii) Converge lorsque $|z| = 1$ *si* $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$.

Preuve 2.3.2. *Considérons*

$$F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k.$$

Comme

$$\frac{(a)_{k+1}}{(a)_k} = a+k$$

et par définition de la fonction de Gauss, nous avons

$$\left|\frac{t_{k+1}}{t_k}\right| = \frac{|z|\left(1+\frac{|a|}{k}\right)\left(1+\frac{|b|}{k}\right)}{\left(1+\frac{|c|}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

de sorte que le test de rapport établit une convergence absolue pour $|z| < 1$ *et une divergence pour* $|z| > 1$.
Pour étudier le cas où $|z| = 1$, *on pose* $\delta = (\frac{1}{2})\,\mathrm{Re}(c - a - b) > 0$ *et comparons les termes de la série*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!} \right|$$

avec ceux de la série convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}$$

Si $|z| = 1$, *puis en introduisant de nouveaux facteurs que nous avons*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^{1+\delta}(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(a)_k}{(k-1)!k^a} \frac{(b)_k}{(k-1)!k^b} \frac{(k-1)!k^c}{(c)_k} \frac{(k-1)!k^{1+\delta}}{k!k^{c-a-b}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \Gamma(c) \right| \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k^{c-a-b-\delta}} \right| \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Re}(c - a - b - \delta) = 2\delta - \delta > 0$, *cette dernière limite est égale à zéro et donc la série* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}$ *converge, Alors la série hypergéométrique* $F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; z \right)$ *est convergente pour* $|z| = 1$ *lorsque* $\mathrm{Re}(c - a - b) > 0$.

Remarque 2.3.2. *Slater* ([*25*]) *fournit les critères de convergence supplémentaires suivants. Pour* $|z| = 1$, $z \neq 1$, *la série de Gauss diverge lorsque* $\mathrm{Re}(c - a - b) < -1$ *et converge (mais pas absolument) lorsque* $-1 < \mathrm{Re}(c - a - b) \leq 0$. *De plus, si* $\mathrm{Re}(c - a - b = -1)$, *la série converge si* $\mathrm{Re}(a + b) > \mathrm{Re}(ab)$ *sinon elle diverge.*

Exemple 2.3.1. *La puissance de la fonction hypergéométrique réside dans sa capacité à représenter de nombreuses fonctions standard. Quelques exemples sont fournis ci-dessous et de nombreux autres sont disponibles dans des textes standard tels que* ([*14*]),([*31*]) *et* ([*25*]).
Supposons maintenant que nous prenons $b = c$. *Alors, la série est beaucoup simplifiée et nous trouvons*

$$F\left(\begin{matrix} a, b \\ b \end{matrix} ; z \right) = (1 - z)^{-a} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a\,(a+1)\,...\,(a+n+1)}{n!} z^n, \ |z| < 1$$

Donons nous quelques développements des fonctions usuelles en terme de la fonction hypergéométrique :

$$\begin{aligned}
\log(1-z) &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k+1} = -z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k(1)_k z^k}{(2)_k k!} = -zF\left(\begin{array}{c}1,1\\2\end{array};z\right),\ |\arg(1-z)|<\pi\\
\log\frac{1+z}{1-z} &= 2z\ \ F\left(\begin{array}{c}\frac{1}{2},1\\\frac{3}{2}\end{array};-z^2\right).\\
\cos kz &= F\left(\begin{array}{c}\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\\\frac{1}{2}\end{array};\sin^2 z\right)\\
\cos z &= \lim_{a,b\to\infty} F\left(\begin{array}{c}a;b\\\frac{1}{2}\end{array};-\frac{z^2}{4ab}\right)\\
\arcsin z &= z\ F\left(\begin{array}{c}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{array};z^2\right),\ |\arg(1\pm iz)|<\pi\\
\arctan z &= z\ F\left(\begin{array}{c}\frac{1}{2},1,\\\frac{3}{2}\end{array},-z^2\right),\ |\arg(1\pm iz)|<\pi\\
\cosh z &= \lim_{a,b\to\infty}\ F\left(\begin{array}{c}a,b\\\frac{1}{2}\end{array};\frac{z^2}{4ab}\right)\\
e^z &= \lim_{a\to\infty}\ F\left(\begin{array}{c}a,b\\b\end{array};\frac{z}{a}\right)
\end{aligned}$$

2.4 Propriétés fondamentales de la Fonction hypergéométrique

Nous présentons dans cette section quelques propriétés et relations de la fonction hypergéométrique de Gauss (([41]) , ([25])).

2.4.1 Analyticité

Le théorème ci-dessous montre que la fonction de Gauss est analytique sauf pour un nombre de pôles dénombrables, ce qui nous permet d'appliquer les propriétés

de fonctions bien comportées dans les preuves ultérieures. La preuve ci-dessous suit Rainville ([9]).

Théorème 2.4.1. *Pour $|z| < 1$, la fonction $F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right)$ est analytique dans a, b et c finis sauf les pôles simples à $c = 0, -1, -2, \ldots$.*

Preuve 2.4.1. *Considérons la fonction entière*

$$\frac{1}{\Gamma(c)}\ F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{\Gamma(c+k)} \frac{z^n}{n!}$$

dans lequel il n'y a plus de possibilité de division par zéro. Comme dans la preuve du théorème (2.3.2)*, nous utilisons l'identité*

$$\Gamma(a) = \frac{(k-1)!k^a}{(a)_n}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(a)_n (b)_n}{\Gamma(c+n)} \frac{z^{\frac{n}{2}}}{n!} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(a)_n (b)_n}{(n-1)!n^a (n-1)!n^b} \frac{(n-1)!n^c}{\Gamma(c+n)} \frac{z^{\frac{n}{2}}}{n^{1-c-a-b}} \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{z^{\frac{n}{2}}}{n^{1-c-a-b}} \right| = 0 \text{ pour } |z| < 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout z fixé dans le cercle unité, il existe une constante K indépendante de a, b, c telle que

$$\left| \frac{(a)_n (b)_n}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \right| < K|z|^{\frac{n}{2}}$$

et ainsi, par le test de comparaison, la série $\frac{1}{\Gamma(c)}\ F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right)$ est absolument et uniformément convergente.

Le résultat complet découle de l'emplacement des pôles de $\Gamma(c)$.

Corollaire 2.4.1. *Accessoirement, nous avons*

1. $\lim_{b\to+\infty} F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};\frac{z}{b}\right) = F\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$.
2. $\lim_{c\to+\infty} F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};cz\right) = F\left(\begin{array}{c} a,b \\ - \end{array};z\right)$.

Preuve 2.4.2. *1. Nous avons,*

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty} F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};\frac{z}{b}\right) &= \lim_{b\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}(\frac{z}{b})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}\lim_{b\to+\infty}\frac{(b)_n}{b^n},\end{aligned}$$

Or $(b)_n = b(b+1)\dots(b+n\ -1)$, *donc* $\lim_{b\to\infty}\frac{(b)_n}{b^n} = 1$. *Par la suite,*

$$\lim_{b\to+\infty} F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};\frac{z}{b}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}$$

$$= F\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$$

2. Par la définition de F *on a*

$$\begin{aligned}\lim_{c\to+\infty} F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};cz\right) &= \lim_{b\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}(cz)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n z^n}{n!}\lim_{c\to+\infty}\frac{c^n}{(c)_n} = F\left(\begin{array}{c} a,b \\ - \end{array};z\right).\end{aligned}$$

2.4.2 Relations de fonction contiguës

Deux fonctions hypergéométriques de Gauss sont dites contiguës si une paire de paramètres correspondants diffère d'une unité ([9]). Ces relations contiguës ont de nombreuses applications, notamment l'établissement de relations de récurrence à trois termes pour les polynômes hypogéométriques orthogonaux et pour étendre les tables numériques de la fonction de Gauss.

Définition 2.4.1. *Les fonctions hypergéométriques contiguës à* $F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right)$ *sont*

$$\begin{aligned} F(a\ \pm 1) &= F\left(\begin{array}{c} a\pm 1,b \\ c \end{array};z\right) \\ F(b\pm 1) &= F\left(\begin{array}{c} a,b\pm 1 \\ c \end{array};z\right), \\ F(c\pm 1) &= F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c\pm 1 \end{array};z\right). \end{aligned}$$

Un total de $\binom{6}{2} = 15$ relations de récurrence de ce type peuvent être établies et répertoriés dans([25]), bien que quatre seulement soient indépendantes, les autres étant obtenues par des combinaisons et symétrie.

Théorème 2.4.2. *Pour* $c \neq 0, -1, -2, \ldots,$

$$cF\left(\begin{array}{c} a,b-1 \\ c \end{array};z\right) + (a\ -b)zF\left(\begin{array}{c} a,b \\ c+1 \end{array};z\right) = cF\left(\begin{array}{c} a-1,b \\ c \end{array};z\right)$$

Preuve 2.4.3. *Par définition, le coefficient de* z^n *du côté gauche du théorème* (2.4.2) *est*

$$\begin{aligned} & c\frac{(a)_n(b-1)_n}{(c)_n n!} + (a\ -b)\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}(n-1)!} \\ = & \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}(n-1)!}[\frac{(b-1)(a+n-1)}{n} + (a\ -b)] \\ = & \frac{c(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_n n!}\ (a\ -1)(b+n-1) = c\frac{(a-1)_n(b)_n}{(c)_n n!}. \end{aligned}$$

C'est aussi le coefficient de z^n *du côté droit, ce qui prouve le théorème.*

Rainville dans ([9]) fournit une méthode alternative pour prouver des relations de récurrence.

Si $F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$ il a montrer d'abord que

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} a+1,b \\ c \end{array};z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n t_n}{(a)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)t_n}{a}, \\ F\left(\begin{array}{c} a,b+1 \\ c \end{array};z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b+1)_n t_n}{(b)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b+n)t_n}{b} \\ F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c+1 \end{array};z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c+1)_n t_n}{(c)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ct_n}{c+n}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit également que

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} a-1,b \\ c \end{array};z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)t_n}{a-1+n}; \\ F\left(\begin{array}{c} a,b+1 \\ c \end{array};z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-1)t_n}{b-1+n}; \\ F\left(\begin{array}{c} a,b \\ (c-1) \end{array};z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-1+n)t_n}{c-1}. \end{aligned}$$

En définissant l'opérateur différentiel v par

$$v = z(\frac{d}{dz})$$

de sorte que $vz^n = nz^n$, il est alors simple d'établir que

$$(v+a)F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(a+n)(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!}.$$

De ces résultats nous avons donc

$$\begin{aligned} (v+a)F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) &= aF\left(\begin{array}{c} a+1,b \\ c \end{array};z\right); \\ (v+b)F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) &= bF\left(\begin{array}{c} a,b+1 \\ c \end{array};z\right) \end{aligned}$$

et

$$(v+c-1)F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = (c-1)F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c-1 \end{array};z\right)$$

Ces relations constituent la base des quatre relations contiguës données ci-dessous, les deux premières découlant directement de l'addition des résultats ci-dessus et les autres par simple manipulation.

Théorème 2.4.3.

$$(a-b)F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};z\right) = aF\left(\begin{array}{c} a+1,\ b \\ c \end{array};z\right) - bF\left(\begin{array}{c} a,\ b+1 \\ c \end{array};z\right)$$

$$(a-c+1)F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};z\right) = aF\left(\begin{array}{c} a+1,\ b \\ c \end{array};z\right) - (c-1)F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c-1 \end{array};z\right)$$

$$c[a+(b-c)z]F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};z\right) = ac(1-z)F\left(\begin{array}{c} a+1,\ b \\ c \end{array};z\right) - (c-a)(c-b)zF\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c+1 \end{array};z\right)$$

$$c(1-z)F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};z\right) = cF\left(\begin{array}{c} a-1,\ b \\ c \end{array};z\right) - (c-b)zF\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c+1 \end{array};z\right)$$

En général, les fonctions $F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right)$ *et* $F\left(\begin{array}{c} a+m,b+n \\ c+l \end{array};z\right)$, $m,n,l \in \mathbb{Z}$ *sont appelées séries associées.*

Théorème 2.4.4. *Pour* $c \neq 0,-1,-2,\ldots,$

$$(c-a)(c-b)F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c+1 \end{array};z\right) = c(c-a-b)F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) + ab(1-z)F\left(\begin{array}{c} a+1,b+1 \\ c+1 \end{array};z\right)$$

Preuve 2.4.4. *Par l'équation* (2.1) *et l'identité* $a(a+1)_n = (a+n)(a)_n$, *le coefficient de* z^n *sur le membre droit du théorème* (2.4.4) *est*

$$\begin{aligned} & c(c-a-b)\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} + ab\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n n!} - ab\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}(n-1)!} \\ = \ & \frac{(a)_n(b)_n}{(c+1)_n n!}\{(c-a\ -b)(c+n) + (a\ +n)(b+n) - n(c+n)\} \\ = \ & \frac{(a)_n(b)_n}{(c+1)_n n!}(c-a)(c-b), \end{aligned}$$

qui est aussi le coefficient de z^n *de membre gauche du théorème.*

Remarque 2.4.1. *On peut de même démontrer que*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b+1 \\ c \end{array};z\right) = F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};z\right) + \frac{az}{c}F\left(\begin{array}{c} a+1,\ b+1 \\ c+1 \end{array};z\right)$$

en utilisant le fait que

$$\frac{(a)_n(b+1)_n}{(c)_n n!} - \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} = \frac{a(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{c(c+1)_{n-1}(n-1)!}.$$

Il existe de nombreuses relations impliquant des séries associées.

2.4.3 Différentielle de la fonction de Gauss

En utilisant l'identité $(a)_{n+1} = a(a+1)_n$, nous pouvons établir la formule dérivée suivante pour la fonction hypergéométrique de Gauss, impliquant des séries associées.

Théorème 2.4.5. *La dérivée d'une fonction de type hypergéométrique est une fonction de type hypergéométrique. Pour $c \neq 0, -1, -2, \ldots,$*

$$\frac{d}{dz}F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = \frac{ab}{c}F\left(\begin{array}{c} a+1,b+1 \\ c+1 \end{array};z\right)$$

L'application répétée de ce résultat donne la formule généralisée ci-dessous ([31]).

$$\frac{d^m}{dz^m}F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}F\left(\begin{array}{c} a+m,b+m \\ c+m \end{array};z\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

D'autres relations différentielles peuvent être trouvées dans ([25]).

Preuve 2.4.5. *On montre ça par réccourence, la première dérivée*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}}\frac{z^n}{n!} = \frac{ab}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n}\frac{z^n}{n!} \\
&= \frac{ab}{c}F\left(\begin{array}{c} a+1,b+1 \\ c+1 \end{array};z\right).
\end{aligned}$$

La deuxième dérivée

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+2}(b)_{n+2}}{(c)_{n+2}}\frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}F\left(\begin{array}{c} a+2,b+2 \\ c+2 \end{array};z\right)\end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$\frac{d^m}{dz^m}F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}F\left(\begin{array}{c} a+m,\ b+m \\ c+m \end{array};z\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

La fonction hypergéométrique F a plusieurs représentations intégrales dont celle donnée par "*Euler* en 1978" :

2.5 Représentations intégrales de la fonction de Gauss

Les représentations intégrales de la fonction hypergéométrique de Gauss constituent un outil puissant pour développer des relations de transformation et d'autres identités hypergéométriques. Celles-ci peuvent souvent fournir une approche plus utile que les expressions de séries qui ne valent que pour $|z| < 1$. Elles illustrent également la relation étroite qui existe entre les fonctions hypergéométriques et gamma.

2.5.1 Représentation intégrale d'Euler

En 1748, Euler développa sa célèbre représentation intégrale de la fonction hypergéométrique de Gauss ([32]), parfois appelée intégrale de Pochhammer. Une observation intéressante est que, si la fonction hypergéométrique est symétrique par rapport à ses paramètres de numérateur, cela n'est pas immédiatement évident dans la représentation intégrale d'Euler.

Théorème 2.5.1. *Intégrale d'Euler : Pour* $|z| < 1$ *et* $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$,

$$F\left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array}; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt \tag{2.3}$$

dans le plan z *coupé le long de l'axe réel de* 1 *à* ∞, *où il est entendu que* $\arg t = \arg(1-t) = 0$ *et que* $(1-zt)^{-a}$ *a sa valeur principale.*

Preuve 2.5.1. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$ *et* $|z| < 1$, *nous avons par la formule du binôme généralisée,*

$$(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (zt)^n}{n!},$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt &= \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{n!} t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{n!} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{n!} \beta(n+b,\ c-b) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{n!} \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

En vertu de la définition du symbole de Pochhammer, la relation (2.4) *devient*

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{n!} \frac{(b)_n \Gamma(b)\Gamma(c-b)}{(c)_n \Gamma(c)} \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\ F\left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array}; z\right) \end{aligned}$$

Ce qui montre le théorème .

2.5.2 Évaluation de la fonction de Gauss pour $z = \pm 1$

Au fil des ans, de nombreuses formules ont été développées pour évaluer la fonction hypergéométrique pour des valeurs particulières de z. En 1812, Gauss établit une identité centrale évaluant la série hypergéométrique quand $z = 1$. Bemdt ([3]) fournit de nombreuses évaluations de ce type dans son résumé du travail de *Ramanujan. Wilfred N. Bailey* $(1893 - 1961)$ a fourni une longue liste de telles formules de sommation dans ([41]), qui est devenue l'ouvrage de référence standard des identités hypergéométriques. Il a ensuite collaboré avec *Slater* ([25]) pour élargir cette liste. Dans cette section, nous fournissons les identités les plus courantes.

Pour $z = 1$

En 1812, Gauss établit une identité centrale évaluant la série hypergéométrique quand $z = 1$. Des preuves alternatives existent pour le théorème de sommation de Gauss ([25]) . Ci-dessous, nous suivons la preuve fournie par Rainville ([9])

Théorème 2.5.2. *(Formule de Sommation de Gauss* 1812*)* ([9]) *:*
Pour $c \neq 0, -1, -2, \ \ldots,$ $\mathrm{Re}(c - a - b) > 0$, *et* $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$,

$$F\left(\begin{matrix} a, \ b \\ c \end{matrix} ; 1 \right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{2.5}$$

Preuve 2.5.2. *Prenons* $z \to 1$ *dans l'intégrale d'Euler* (2.3*) pour* $F\left(\begin{matrix} a, \ b \\ c \end{matrix} ; z \right)$. *Le résultat est, selon le théorème de continuité d'Abel,*

$$\begin{aligned}
F\left(\begin{matrix} a, \ b \\ c \end{matrix} ; 1 \right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-t)^{-a} dt \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1} dt \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \beta(b, \ c-b-a) \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)} \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}
\end{aligned}$$

pour tout $\mathrm{Re}(c-b-a) > 0$ *et* $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$. *La dernière condition est obtenue par le prolongement analytique.*

Rainville ([9]) utilise le théorème de sommation de Gauss pour établir le résultat utile suivant.

La condition $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$ peut être éliminé par continuation. Il est cependant instructif de donner une preuve qui ne fasse pas appel au principe de la continuuité analytique. Donnons le corollaire suivant :

Corollaire 2.5.1.

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};1\right) = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-b-a)} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c+1 \end{array};1\right) \tag{2.6}$$

Preuve 2.5.3. *Soit*

$$A_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \ et\ B_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c+1)_n n!}$$

alors

$$c(c-a-b)A_n - (c-a)(c-b)B_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c+1)_{n-1}} \left[c-a-b-\frac{(c-a)(c-b)}{c+n}\right]$$

et

$$c\left(nA_n - (n+1)\, A_{n+1}\right) = \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c+1)_{n-1}} \left[n - \frac{(a+n)(b+n)}{c+n}\right]$$

Donc, puisque les membres droits des deux dernières expressions sont égaux,

$$c(c-a-b)A_n = (c-a)(c-b)B_n - cnA_n - c(n+1)A_{n+1}$$

et

$$c(c-a-b)\sum_0^N A_n = (c-a)(c-b)\sum_0^N B_n - c(N+1)A_{N+1}$$

Maintenant, soit $N \to \infty$ *et par la formule de Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n}$$

on obtient

$$(N+1)A_{N+1} \sim \frac{(a+N)!\,(b+N)!}{(c+N)!N!} \sim \frac{1}{N^{c-a-b}} \to 0$$

car $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$. *Cela prouve* (2.6). *Itérons cette relation n fois on obtient*

$$\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\,\Gamma(c-b-a)}F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};1\right)=\frac{\Gamma(c+n-a)\Gamma(c+n-b)}{\Gamma(c+n)\,\Gamma(c+n-b-a)}F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c+n \end{array};1\right)$$

d'où

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};1\right)=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n\,(c-b-a)_n}F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c+n \end{array};1\right)$$

Quand $n\to\infty$ *on peut aussi obtenir la formule de somme de Gauss dans le théorème* (2.5.2)

Corollaire 2.5.2. *Pour* $\mathrm{Re}(b)>0$ *et* $n\epsilon\mathbb{N}$,

$$F\left(\begin{array}{c} -\frac{n}{2},\frac{1}{2}-\frac{n}{2} \\ b+\frac{1}{2} \end{array};1\right)=\frac{(b)_n 2^n}{(2b)_n} \tag{2.7}$$

Preuve 2.5.4. *Appliquons la sommation de Gauss* (2.5) *au membre gauche de la formule* (2.7)

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} -\frac{n}{2},\frac{1}{2}-\frac{n}{2} \\ b+\frac{1}{2} \end{array};1\right) &= \frac{\Gamma(b+\frac{1}{2})\Gamma(b+n)}{\Gamma(b+\frac{n}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2}+\frac{n}{2})} \\ &= \frac{(b)_n\Gamma(b)\Gamma(b+\frac{1}{2})}{\Gamma(b+\frac{n}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}. \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\Gamma(b)\Gamma(b+\frac{1}{2})=2^{1-2b}\sqrt{\pi}\Gamma(2b)$$

et

$$\Gamma(b+\frac{n}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2}+\frac{n}{2})=2^{1-2b-n}\sqrt{\pi}\Gamma(2b+n)$$

Alors,

$$F\left(\begin{array}{c} -\frac{n}{2},\frac{1}{2}-\frac{n}{2} \\ b+\frac{1}{2} \end{array};1\right)=\frac{(b)_n 2^n\Gamma(2b)}{\Gamma(2b+n)}=\frac{(b)_n 2^n}{(2b)_n}$$

ce qui donne le résultat.

Si $z = 1$ et $a = -n\,;\ n \in \mathbb{N}$, La série de Gauss se réduit à l'identité utile de *Chu-Vandermonde*, donnée ci-dessous.

Théorème 2.5.3. *Si $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ nous avons*

$$F\left(\begin{array}{c} -n,\ b \\ c \end{array};1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.8}$$

Preuve 2.5.5. *Prenant $a = -n$ dans la formule de Gauss* (2.1)*, on aura*

$$F\left(\begin{array}{c} -n,\ b \\ c \end{array};1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+n)},$$

Puisque

$$\frac{\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-b)} = (c-b)_n \ , et \ \ \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} = (c)_n,$$

alors

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} -n,\ b \\ c \end{array};1\right) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b)(c-b)_n}{\Gamma(c-b)\Gamma(c)(c)_n} \\ &= \frac{(c-b)_n}{(c)_n} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 2.5.1. *Ce résultat ne s'applique plus si c est un entier négatif $(-m)$ tel que $m < n$, alors $(c)_n = 0$.*

L'identité Chu-Vandermonde est un outil puissant pour établir des identités a coefficients binomiaux, comme illustré dans l'exemple ci-dessous, trouvé dans ([40]) .

Exemple 2.5.1. *Montrons l'égalité*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right)$$

Soit $t_k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ *alors*

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k-n)^2}{(k+1)^2},$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = F\left(\begin{array}{c} -n,\ -n \\ 1 \end{array};1\right).$$

Reprenons (2.8) *avec* $b=-n,\ c=1$, *alors*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{(1+n)_n}{(1)_n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right).$$

Remarque 2.5.2. *La relation*

$$(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n (zt)^n}{n!} \tag{2.9}$$

montre que l'intégrale d'Euler (2.3) *s'écrit sous la forme*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\ {}_1F_0(a;.;zt)dt$$

pour $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$.

Pour $z=-1$

Whipple ([**?**]) a fourni l'évaluation de la série hypergéométrique au point $z=-1$ donnée par le théorème suivant

Théorème 2.5.4. *Pour* $c \neq 0, -1, -2, \ldots,$

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};-1\right) = \frac{\Gamma(c)}{2\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(c-a+b-1)_k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{a+k}{2})}{\Gamma(c-\frac{a-k}{2})} \tag{2.10}$$

Preuve 2.5.6. *Posant* $z=-1$ *dans l'intégrale d'Euler* (2.3), *alors*

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};-1\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t^2)^{c-a-1}(1+t)^{-c+a-b+1}dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t^2)^{c-a-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(c-a+b-1)_k t^k}{k!}dt. \end{aligned}$$

Maintenant, en intervertissant l'ordre d'intégration et de sommation et en utilisant la substitution $t = \sqrt{s}$*, nous avons*

$$\begin{aligned} F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}; -1\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (c-a+b-1)_k}{k!} \times \int_0^1 \frac{1}{2} s^{\frac{a+k}{2}-1} (1-s)^{c-a-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(c)}{2\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (c-a+b-1)_k}{k!} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{k}{2})\Gamma(c-a)}{\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{k}{2}+(c-a))} \end{aligned}$$

par la présence d'une intégrale bêta, et le résultat souhaité suit directement.

Le théorème central de *Kummer* ci-dessous fournit une évaluation de la fonction de Gauss à $z = -1$ et correspond au théorème de *Bailey* dans ([41]).

Théorème 2.5.5. *Théorème de Kummer : Pour* $\mathrm{Re}(b) < 1,\ b - a \neq -1, -2, \ldots,$

$$F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ 1+b-a \end{matrix}; -1\right) = \frac{\Gamma(1+b-a)\Gamma(1+\frac{b}{2})}{\Gamma(1+b)\Gamma(1+\frac{b}{2}-a)} \tag{2.11}$$

Preuve 2.5.7. *Pour* $z = -1$ *dans l'intégrale d'Euler* (2.3)*, et* $c = b-a+1$ *on obtient*

$$F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ 1+b-a \end{matrix}; -1\right) = \frac{\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(1-a)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t^2)^{-a} dt.$$

Par la substitution $u = t^2$*, l'intégrale devient* $\frac{1}{2}\beta(\frac{b}{2}, 1-a)$*, de sorte que nous obtenons,*

$$F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ 1+b-a \end{matrix}; -1\right) = \frac{\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(1-a)} \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{b}{2})\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a+\frac{b}{2})}.$$

Comme $\dfrac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(b)} = \dfrac{2\Gamma(1+\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{b}{2})}$*, le résultat souhaité suit directement.*

Ci-dessous, une forme équivalente du théorème de *Kummer*, trouvée dans ([41]).

$$F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ 1+b-a \end{matrix}; -1\right) = \frac{\Gamma(1+b-a)\Gamma(\frac{1}{2})}{2^a \Gamma(\frac{1}{2}+\frac{b}{2})\Gamma(1+\frac{b}{2}-a)} \tag{2.12}$$

Pour illustrer la puissance du théorème de *Kummer*, les identités de sommation de *Ramanujan* suivantes peuvent être dérivées directement de (2.12). En substituant respectivement $a = b = \frac{1}{2}$ et $a = 1,\ b = 1 - x$ et en simplifiant, on obtient

$$1 - (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1.3}{2.4})^2 - \ldots + (-1)^n (\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!})^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma^2(\frac{3}{4})},$$

et pour $\mathrm{Re}(x) > 0$,

$$1 + \frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} + \ldots + (-1)^n \frac{(1-x)_n}{(x+1)_n} = \frac{2^{2x-1}\Gamma^2(x+1)}{\Gamma(2x+1)}.$$

Petkovšek et al. ([**?**, **?**, **?**]) fournissent la forme suivante du théorème de *Kummer* pour b un entier négatif. Le résultat découle de (2.11) en utilisant la formule de réflexion

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

et prendre la limite lorsque b approche d'un nombre entier négatif.

Théorème 2.5.6. *Pour un entier négatif, b*

$$F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ 1+b-a \end{matrix} ; -1 \right) = 2\cos\frac{\pi b}{2} \frac{\Gamma(|b|)\Gamma(b-a+1)}{\Gamma(\frac{|b|}{2})\Gamma(1+\frac{b}{2}-a)} \tag{2.13}$$

Petkovšek et al. Montrent un exemple sur la manière d'utiliser la forme ci-dessus du théorème de *Kummer* pour évaluer une série donnée.

Exemple 2.5.2. *Considérons la série $f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\begin{matrix} 2n \\ k \end{matrix} \right)$ pour un entier non négatif n. Le rapport de terme est*

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(-1)^{k+1} \left(\begin{matrix} 2n \\ k+1 \end{matrix} \right)^2}{(-1)^k \left(\begin{matrix} 2n \\ k \end{matrix} \right)^2} = \frac{(k-2n)^2(-1)}{(k+1)^2}.$$

La série est donc $f(n) = F\left(\begin{array}{c} -2n, -2n \\ 1 \end{array}; -1\right)$, *qui en appliquant l'identité de Kummer* (2.13) *pour l'entier négatif* $(-2n)$ *devient la forme agréable*

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{2(-1)^n\Gamma(2n)\Gamma(1)}{\Gamma(n)\Gamma(1+n)} = \frac{(2n-1)!2(-1)^n}{(n-1)!n!} \\ &= (-1)^n \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right). \end{aligned}$$

L'identité de *Kummer*, prouvée ci-dessous, est liée au théorème de *Kummer* ([14]).

Théorème 2.5.7. *Pour* $n \in \mathbb{Z}$,

$$F\left(\begin{array}{c} -2n,\ b \\ 1-2n-b \end{array}; -1\right) = \frac{(b)_n(2n)!}{n!(b)_{2n}}$$

Preuve 2.5.8. *De l'identité* $(1-z)^{-b}(1+z)^{-b} = (1-z^2)^{-b}$, *on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_n z^n}{n!}\frac{(b)_n(-z)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n z^{2n}}{n!}$$

qui peut être écrit sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(b)_{n-k} z^n}{(n-k)!}\frac{(b)_n(-1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n z^{2n}}{n!}.$$

Nous égalisons maintenant les coefficients de z^{2n} *des deux côtés pour obtenir*

$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{(b)_{2n-k}}{(2n-k)!}\frac{(b)_n(-1)^k}{k!} = \frac{(b)_n}{n!}.$$

En introduisant des facteurs appropriés et en utilisant les identités $(a)_{n-k} = \dfrac{(-1)^k(a)_n}{(1-a-n)_k}$ *et* $(-n)_k = \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!}$, *ce résultat devient*

$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!(b)_{2n-k}}{(b)_{2n}(2n-k)!}\frac{(b)_n(-1)^k}{k!} = \frac{(b)_n(2n)!}{n!(b)_{2n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-2n)_k(b)_{2n}(b)_n(-1)^k}{(b)_{2n}(1-b-2n)_k k!} = \frac{(b)_n(2n)!}{n!(b)_{2n}},$$

Remarque 2.5.3. *L'intégrale d'Euler montre que la fonction hypergéométrique a un point de ramification à $z = 1$ et à $z = \infty$. Considérons $t = \frac{1}{z}$ comme une singularité de $(1 - zt)^{-a}$ (un entier non négatif). Si z varie continuellement le long d'un chemin fermé autour du point $z = 1$, le chemin d'intégration doit être déformé pour qu'il ne croise pas le point $\frac{1}{z}$. Cependant, lorsque z revient à sa position initiale, l'intégrale ne prend pas nécessairement sa valeur initiale, et donc $z = 1$ est un point de ramification de $F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right)$. De même, $z = \infty$ est un point de branchement, car la variation de z autour du point à l'infini est équivalente à celle de $\frac{1}{z}$ autour de point $z = 0$. Ainsi, l'intégrale d'Euler est une branche à valeur unique de $F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right)$ qui prend la valeur 1 lorsque $z = 0$. Puisque l'intégrale d'Euler est analytique dans le plan z coupé le long de $[1, \infty[$, elle fournit la suite analytique de $F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right)$ au domaine $|\arg(1 - z)| < \pi$, quand $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$. Ainsi, dans ces conditions données, $F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right)$ est une fonction analytique à valeur unique dans le plan z avec une branche coupée $[1, \infty[$ le long de l'axe réel, et donc selon le principe de la méthode analytique. Suite, les formules éprouvées pour la série hypergéométrique sous la restriction $|z| < 1$ s'appliquent également à tout le domaine de la définition.*

Représentation intégrale de Slater

Slater fournit huit représentations intégrales supplémentaires pour la fonction de Gauss, par des substitutions appropriées à l'intégrale d'Euler (2.3) ([25]). Par exemple, pour $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$, $|\arg z| < \pi$, en remplaçant $s = \frac{t}{1-t}$,

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; 1 - z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^\infty s^{b-1}(1+s)^{a-c}(1+sz)^{-a} ds.$$

Pour $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$, substituant e^{-t} pour t on obtient

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^\infty e^{-bt}(1-e^{-t})^{c-b-1}(1-ze^{-t})^{-a} dt.$$

Pour $1 + \mathrm{Re}(a) > \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b),\ |\arg(z-1)| < \pi$, en remplaçant $\frac{1}{s}$ pour t nous donnent

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; \frac{1}{z}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^\infty (s-1)^{c-b-1} s^{a-c} (s - \frac{1}{z})^{-a} ds,$$

et pour $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$, en remplaçant $\sin^2 t$ pour t donnée

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) = \frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{2b-1} (\cos t)^{2c-2b-1}}{(1 - z\sin^2 t)^a} dt.$$

H. Bateman $(1882 - 1944)$ a fourni l'extension de l'intégrale d'*Euler* à un domaine plus large ([14]).

Théorème 2.5.8. *Pour* $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(d) > 0,\ z \neq 1,$ *et* $|\arg(1-z) < \pi|$,

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{c-d-1} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ d \end{array}; zt\right) dt \tag{2.14}$$

Erdéyli ([2]) fournit trois autres extensions de la représentation intégrale.

Théorème 2.5.9.

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{c-d-1}(1-tz)^{c-a-b} \\ &\quad \times F\left(\begin{array}{c} \lambda - a, \lambda - b \\ d \end{array}; tz\right) F\left(\begin{array}{c} a+b-\lambda, \lambda - d \\ \gamma - d \end{array}; \frac{(1-t)z}{1-tz}\right) dt \end{aligned} \tag{2.15}$$

pour $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(d) > 0$

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(c-d)} \int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{c-d-1}(1-tz)^{-a'} \\ &\quad \times F\left(\begin{array}{c} a-a', b \\ d \end{array}; z\right) F\left(\begin{array}{c} a', b-d \\ \gamma - d \end{array}; \frac{(1-t)z}{1-tz}) dt\right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(d) > 0$$

$$
\begin{aligned}
& F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) \qquad (2.17)\\
= \ & \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(v)\Gamma(\gamma+d-\lambda-v)} \int_0^1 t^{v-1}(1-t)^{\gamma+d-\lambda-v-1} \\
& \times F\left(\begin{array}{c} d-\lambda, \gamma-\lambda \\ \gamma+d-\lambda-v \end{array}; 1-t\right) F\left(\begin{array}{c} a,b,d \\ \lambda, v \end{array}; tz\right) dt,
\end{aligned}
$$

pour $\mathrm{Re}(\lambda,\ v,\ \gamma+d-\lambda-v) > 0.$

Remarque 2.5.4. *i) Lorsque $d = b$, l'extension de Bateman* (2.14) *devient l'intégrale d'Euler* (2.3)*.*
ii) Les substitutions $\lambda = a+b$, $a' = 0$ et $\lambda = d$ dans les première et deuxième intégrales d'Erdéyli (2.15) *et* (2.16)*, respectivement, donnent l'extension de Bateman* (2.14)*.*
iii) Erdéyli a utilisé l'intégration fractionnelle par parties pour dériver les extensions intégrales (2.15) − (2.17)*, mais plus récemment, Joshi et Vyas* ([6]) *ont utilisé des manipulations en série et des théorèmes de sommation classiques pour prouver et généraliser ces résultats.*

Convergence de l'intégrale d'*Euler*

Slater ([25]) a montré que les conditions de convergence pour l'intégrale d'*Euler* peuvent être assouplies avec des contours plus compliqués. Il a fourni trois versions, dont l'un est donné ci-dessous.

Théorème 2.5.10. *Pour* $c - b \neq 1, 2, 3, \ldots,\ |\arg(1-z)| < \pi,\ \mathrm{Re}(b) > 0,$

$$
F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) = \frac{i\Gamma(c)e^{i\pi(b-c)}}{2\Gamma(b)\Gamma(c-b)\sin\{\pi(c-b)\}} \int_0^{(1+)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt.
$$

Preuve 2.5.9. *Considérons l'intégrale*

$$
I = \int_0^{(1+)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt,
$$

où le contour commence à l'origine, encercle le point $+1$ *une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et revient à l'origine. On déforme ce contour en axe réel*

$(0, 1-\varepsilon)$ *avec* $\arg t = 0$, *le cercle* C *centré à* $+1$ *avec le rayon* ε, *puis encore l'axe réel* $(1-\epsilon, 0)$ *avec* $\arg t = 2\pi$. *Alors*

$$I = [1 - e^{2\pi i(c-b)}] \int_0^{1-\varepsilon} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt + \int_C t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt.$$

Quand $\varepsilon \to 0$, *on a* $\int_{1-\varepsilon}^{1} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt \to 0$ *et* $\int_c t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt \to 0$, *pour que*

$$I = [1 - e^{2\pi i(c-b)}] \int_0^{1} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt.$$

Le résultat souhaité suit ensuite en substituant ce résultat dans l'intégrale d'Euler (2.3) *et en utilisant la relation* $\sin a = \dfrac{e^{ai} - e^{-ai}}{2i}$.

2.5.3 Représentation intégrale du contour de Barnes

Dans une série d'articles publiés entre 1904 et 1910, *Barnes* développa d'autres méthodes de traitement de la fonction hypergéométrique de Gauss, basées sur l'intégration du contour et la théorie des résidus. Alors que les représentations intégrales de type *Euler* de la série hypergéométrique sont utiles en calcul numérique, les intégrales de contour de type *Barnes* (ou *Mellin-Barnes*) sont extrêmement utiles pour dériver des relations de transformation entre des fonctions hypergéométriques et pour discuter leurs asymptotiques.

Transformation de *Mellin*

Définition 2.5.1. ([*14*]) *La transformée de Mellin d'une fonction* $f(x)$ *est définie par l'intégrale*

$$F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(s) ds.$$

Son inversion est donnée par

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} z^{-s}\ F(s) ds$$

Nous commençons par un exemple simple et surtout familier

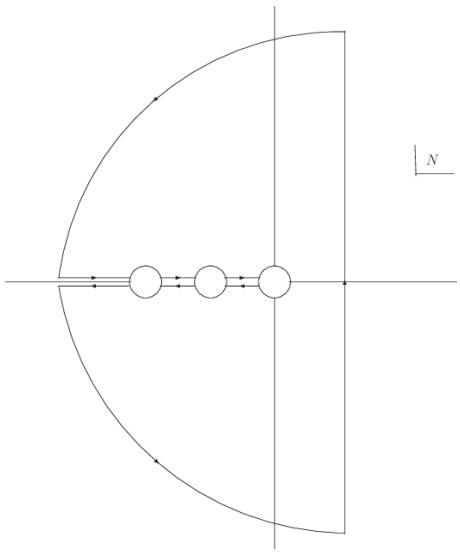
Exemple 2.5.3. *La fonction* Γ *est donnée par*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty z^{s-1} e^{-z} dz.$$

Il s'avère qu'il est possible de récupérer la fonction intégrée e^{-z} *sous la forme d'une intégrale complexe impliquant* $\Gamma(s)$.
En effet, la formule d'inversion est donnée par

$$M^{-1}\left\{\Gamma(s); z\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} \Gamma(s) ds, \ c > 0 \tag{2.18}$$

Cela peut être prouvé par le théorème des résidus . Observons que tous les pôles apparaissent aux valeurs de la fonction gamma où $s = -n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$
Cela implique que, dans le demi-plan à droite, la fonction gamma est analytique. Nous pouvons évaluer l'intégrale en considérant le contour de la figure 1



Contour de transformation de Mellin inverse

Sur la base de la formule des résidus, nous pouvons conclure que

$$M^{-1}\left\{\Gamma(s); z\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} res\left\{z^{-s}\Gamma(s); -n\right\} \tag{2.19}$$

Pour montrer que $M^{-1}\{\Gamma(s);z\} = e^{-z}$ *nous rappelons l'équation* (1.7) *et la réecrirons comme*

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)\sin(\pi s)} \tag{2.20}$$

En remplaçant (2.20) *par* (2.19) *on obtient*

$$M^{-1}\{\Gamma(s);z\} = \sum_{n=0}^{\infty} res\left\{z^{-s}\frac{\pi}{\Gamma(1-s)\sin(\pi s)};-n\right\} \tag{2.21}$$

Comme les pôles de (2.21) *sont de pôles simples (ie, les zéros de* $\sin \pi s$*). En appliquant le théorème de residu à* (2.21)*, nous obtenons :*

$$\begin{aligned} res\left\{z^{-s}\Gamma(s);-n\right\} &= \left.\frac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)\cos(\pi s)}\right|_{s=-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+n)\cos(-n\pi)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!} \\ &= e^{-z} \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que

$$\begin{aligned} M^{-1}\{\Gamma(s);z\} &= \sum_{n=0}^{\infty} res\left\{z^{-s}\Gamma(s);-n\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!} \\ &= e^{-z} \end{aligned} \tag{2.22}$$

et par conséquent,

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s}\Gamma(s)ds,\ c>0 \tag{2.23}$$

Remarque 2.5.5. *Comme indiqué précédemment (voir* **??***), les pôles de* $\Gamma(s)$ *apparaissent dans le plan de gauche. Comme le nombre de pôles est infini, cela produira une série infinie ascendante, comme indiqué dans* (2.22)*. Si notre fonction a des pôles dans le plan de droite, cela produira une série décroissante.*

Exemple 2.5.4. *L'intégrale de* $\int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}dz$ *est la transformée de*

$$(1-z)_+^{t-1} = \begin{cases} (1-z)^{t-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{(1-z)^t}dz$$

est la transformation de $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^t}$. *Encore une fois, on peut prouver que*

$$(1-z)_+^{t-1} = \frac{1}{2\pi i\Gamma(t)}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+t)}ds, \;\; \mathrm{Re}\, t > 0 \;\; et \; c > 0,$$

et

$$\frac{1}{(1-z)^t} = \frac{1}{2\pi i\Gamma(t)}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s}\Gamma(s)\Gamma(t-s)ds, \;\; 0 < c < \mathrm{Re}\, t. \tag{2.24}$$

Le phénomène présenté par (**??**) *à* (2.24) *reste valable pour une classe de fonctions assez large* f.

Représentation intégrale complexe pour la fonction hypergéométrique

Afin de développer une représentation intégrale complexe pour la fonction hypergéométrique, *Barnes* a considéré sa transformée de *Mellin* et son inverse, intégrant à $-z$ pour éviter le point de branchement à $z = 1$. Pour illustrer cette approche, *Andrews* et al. ([14]) utiliser l'intégrale d'*Euler* (2.3) pour obtenir

Théorème 2.5.11. *Pour* $\min((\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Re}\, e)) > \mathrm{Re}\, s > 0)$ *on a*

$$\int_0^\infty z^{s-1}\; F\left(\begin{matrix} a, \; b \\ c \end{matrix}; -z\right) dz = \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{\Gamma(b-s)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-s)} \tag{2.25}$$

Preuve 2.5.10.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty z^{s-1}\ F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix};-z\right)dz \\ &= \int_0^\infty z^{s-1}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1+tz)^{-a}dtdz \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{(1+tz)^a}dzdt \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)}\int_0^1 t^{b-s-1}(1-t)^{c-b-1}dt \\ &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{\Gamma(b-s)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-s)}. \end{aligned}$$

pour $\min\left((\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} e) > \operatorname{Re} s > 0\right)$

Remarque 2.5.6. *La condition auxiliaire* $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b$ *peut être supprimée par poursuite analytique ou via des relations contiguës, qui sont traitées dans la section* (2.4.2) .

Remarque 2.5.7. *Notons que nous avons intégré* F *en* $-z$ *car, en général,* $F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix};z\right)$ *a des points de branchement en* $x = 1$ *et* $x = \infty$ *et dans* (2.25) *l'intégrale se trouve sur l'axe réel positif.*
Si on pose $u = \frac{z}{z+1}$ *Il existe une autre preuve de* (2.25) *donnée par :*

$$\int_0^\infty z^{s-1}\ F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix};-z\right)dz = \int_0^\infty z^{s-1}\,(1+z)^{-a}\ F\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix};\frac{z}{z+1}\right)dz$$

Formule de Barnes

Nous nous espérons, par inversion, que

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\ F\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix};z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}(-z)^{-s}ds$$

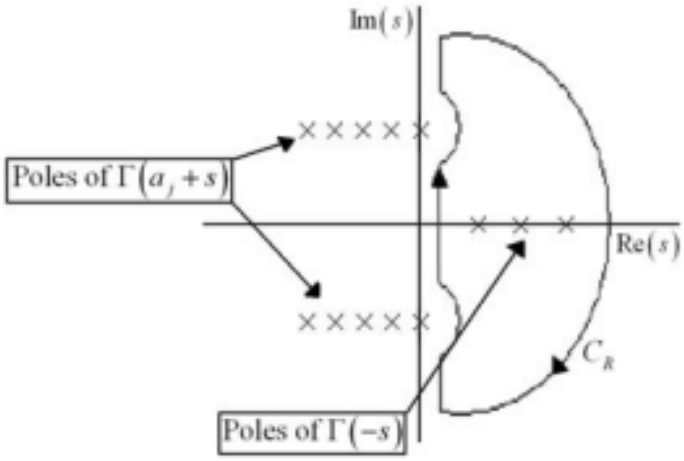
où $\min(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b) > k > 0$ et $c \neq 0, -1, -2, ...$ C'est la formule de Barnes et c'est la base d'un développement alternatif de la théorie des fonctions hypergéométriques. La forme précise du théorème de Barnes [1908] est donnée par.

Théorème 2.5.12.

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\ F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^{-s}ds \qquad (2.26)$$

$|\arg(-z)| < \pi$. *Le chemin d'intégration est courbé, si nécessaire, pour séparer les pôles* $s = -a-n,\ s = -b-n$, *des pôles* $s = n$, *où* n *est un entier* ≥ 0.

Preuve 2.5.11. *Soit* C_R *le contour fermé formé par une partie de la courbe utilisée dans le théorème de* $-(R+\frac{1}{2})i$ *vers* $(R+\frac{1}{2})i$ *avec le demi-cercle de rayon* $R+\frac{1}{2}$ *dessiné à droite avec* 0 *comme centre.*



Contour d'integrale de Barnes enfermant les pôles dans le plan de droite

Nous montrons d'abord que l'intégrale ci-dessus définit une fonction analytique pour $|\arg(-z)| < \pi - \delta,\ \delta > 0$.
On a ;

$$\begin{aligned} (-s)^{-s} &= e^{-s(\log|s| + i\arg(-s))} \\ s^{-s} &= e^{-s(\log|s| + i\arg(s))} \end{aligned}$$

donc sur la droite

$$D = [-\infty i, \infty i] = \{re^{\pi\frac{i}{2}} \ , r \geq 0\} \cup \{re^{-\pi\frac{i}{2}}, \ r \geq 0\}$$

Preuve 2.5.12. *on a*

$$(-s)^{-s} = s^{-s}e^{-\pi|\operatorname{Im}(s)|}$$

Ensuite,

$$(-z)^s = e^{s\log|z|+i\arg(-z)} = O(e^{-\arg(-z)\operatorname{Im}(s)})$$

quand $|s| \to \infty$ *sur* D*. Il en résulte que*

$$\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^{-s} = O\left(|s|^{a+b-c-1}\, e^{-\arg(-z)\operatorname{Im}(s)-\pi|\operatorname{Im}(s)|}\right)$$

quand $|s| \to \infty$ *sur* D *et pour* $|\arg(-z)| < \pi - \delta$ *. Cette estimation montre que l'intégrale représente une fonction analytique dans* $|\arg(-z)| < \pi - \delta$ *pour chaque* $\delta > 0$*, ce qui implique qu'elle est analytique pour* $|\arg(-z)| < \pi$*.*
On a

$$\Gamma(-s)\Gamma(1+s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Considèrons l'intégrale

$$\begin{aligned} I(N) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^{-s}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)}\frac{\pi}{\sin s\pi}(-z)^{s}ds \end{aligned}$$

où

$$C_R = s = \left\{(R+\frac{1}{2})e^{i\theta}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Pour $s = (R+\frac{1}{2})e^{i\theta}$ *et* $|z| < 1$*,*

$$\begin{aligned} (-z)^s &= e^{(R+\frac{1}{2})(\cos\theta+i\sin\theta)(\log|z|+i\arg(-z))} \\ &= O\left(e^{(R+\frac{1}{2})(\cos\theta)(\log|z|-\sin\theta\arg(-z))}\right) \end{aligned}$$

On a sur C_R *:*

$$\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)} = O\left(R^{a+b-c-1}\right), \ R \to \infty$$

Par le (1.5.5)*, cette expression est asymptotique à*

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s &= -\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)}\frac{\pi}{\sin s\pi}(-z)^s \\ &\sim -s^{a+b-c-1}\frac{\pi}{\sin s\pi}(-z)^s.\end{aligned}$$

puisque

$$\sin(s\pi) = \frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{2}$$

et de plus

$$\frac{2}{e^a - e^{-a}} = O(e^{-|a|}),\ a \to \infty$$

nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin s\pi} &= \frac{2\pi}{e^{(R+\frac{1}{2})(\cos\theta + i\sin\theta)i\pi} - e^{-\left((R+\frac{1}{2})(\cos\theta+i\sin\theta)i\pi\right)}} \\ &= O(e^{-(R+\frac{1}{2})\pi|\sin\theta|}),\quad R\to\infty\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\pi}{\sin s\pi}(-z)^s = O[e^{(R+\frac{1}{2})(\cos\theta\log|z| - \sin\theta\arg(-z) - \pi|\sin\theta|}].$$

si $|\arg(z)| < \pi - \delta$

$$\frac{\pi}{\sin s\pi}(-z)^s = O[e^{(R+\frac{1}{2})(\cos\theta\log|z| - \delta|\sin\theta|)}]$$

Maintenant nous avons $\cos\theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ *pour* $0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{4}$*, et* $|\sin\theta| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ *pour* $\frac{\pi}{4} \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$*, . Donc, puisque* $\log|z| < 0$*,l'intégrale est*

$$\begin{cases} o(N^{a+b-c-1}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(R+\frac{1}{2})\log|z|}) & pour\quad 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{4} \\ o(N^{a+b-c-1}e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}\delta(R+\frac{1}{2})} & pour\quad \frac{\pi}{4} \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Sur la partie semi-circulaire du contour C_R*, l'intégrale est*

$$o(N^{a+b-c-1})\frac{(-z)^s}{\sin\pi s}$$

Ceci implique que l'intégrale sur le demi-cercle tend vers zéro quand $R \to \infty$*.*

Or

$$\operatorname*{res}_{s=n}\frac{\pi(-z)^s}{\sin\pi s} = z^n,\quad n\in\mathbb{N}$$

d'où par la formule de Cauchy

$$\begin{aligned} I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array} ; z \right) \qquad \textit{pour } |z| < 1 \end{aligned}$$

d'où finalement, la représentation intégrale de Barnes (2.26) *pour* $|\arg(z)| = |\arg(-z)| < \pi$.

Pour avoir un aperçu du prochain résultat de Barnes [1910], supposons que $F(s)$ et $G(s)$ sont les transformées de Mellin de $f(z)$ et $g(z)$ respectivement.
La transformation de Mellin a une propriété de convolution, qui peut être obtenue comme suit. supposons que

$$F(s) = \int_0^{\infty} z^{s-1} f(z) dz \quad et \quad G(s) = \int_0^{\infty} z^{s-1} g(z) dz$$

alors nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} F(s) dz \quad et \quad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-s} G(s) dz$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} z^{s-1}\ f(z)g(z)dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} z^{s-1} g(z) \left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(t) z^{-t} dt \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(t) \left(\int_0^{\infty} z^{s-t-1} g(z) dz \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(t) G(s-t) dt \end{aligned}$$

En tant qu'application, nous considérons

$$f(z) = \frac{z^b}{(1+z)^a} \leftrightarrow F(s) = \frac{\Gamma(b+s)\Gamma(a-b-s)}{\Gamma(a)}$$

et

$$g(z) = \frac{z^d}{(1+z)^c} \longleftrightarrow G(s) = \frac{\Gamma(d+s)\Gamma(c-d-s)}{\Gamma(c)}$$

qui conduit à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(b+s)\Gamma(a-b-s)\Gamma(d+1-s)\Gamma(c-d-1+s)}{\Gamma(a)\Gamma(c)}ds \\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}F(s)G(1-s)ds=\int_0^\infty f(z)g(z)dz \\
= & \int_0^\infty\frac{z^{b+d}}{(1+z)^{a+c}}dz=\beta(b+d+1,a+c-b-d-1) \\
= & \frac{\Gamma(b+d+1)\Gamma(a+c-b-d-1)}{\Gamma(a+c)}
\end{aligned}$$

pour un k approprié. En renommant les paramètres, cela peut être écrit comme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)ds=\frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)_2F_1(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}$$

qui vaut pour $\mathrm{Re}\,a>0$, $\mathrm{Re}\,b>0$, $\mathrm{Re}\,c>0$ et $\mathrm{Re}\,d>0$, brièvement pour $\mathrm{Re}(a,b,c,d)>0$. Cette intégrale est appelée l'intégrale de Mellin-Barnes [1937]. Plus général nous avons

Théorème 2.5.13. *Si le chemin d'intégration est courbé pour séparer les pôles de* $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ *des pôles de* $\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)$*, alors nous avons*

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)ds \\
&= \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}
\end{aligned}$$

pour $\mathrm{Re}(a+b+c+d)<1$*, et aucun de* $a+c,a+d,b+c,b+d$ *égal à zéro ou a un entier négatif.*

Preuve 2.5.13. *De nouveau, nous utilisons la formule de réflexion d'Euler pour écrire l'intégrle comme*

$$\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(1-c+s)(1-d+s)}\frac{\pi^2}{\sin\pi(c-s)\sin\pi(d-s)}$$

Soit C_R *le contour fermé formé par une partie de la courbe utilisée dans le théorème de* $-iR$ *à* iR *avec un demi-cercle de rayon* R *situé à droite de l'axe imaginaire, avec* 0 *comme centre.*

D'après le théorème de Stirling (1.5.5)*, l'intégrale est*

$$o(s^{a+b+c+d-2}e^{-2\pi|\operatorname{Im} s|}) \quad pour \quad |s| \to \infty \quad sur\ C_R$$

Puisque $\operatorname{Im} s$ *peut être arbitrairement petit lorsque* $|s|$ *est grand, on suppose que* $\operatorname{Re}(a+b+c+d) < 1$ *pour s'assurer que l'intégrale du théorème* (2.5.13) *sur le demi-cercle tend vers zéro quand* $R \to \infty$*. Alors, selon le théorème des résidus de Cauchy (pôles dans* $s = c+n$ *et* $s = d+n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *qui on de résidus* $\frac{(-1)^n}{n!}$*), L'intégrale est égale à*

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+n)\Gamma(d-c-n)\frac{(-1)^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+d+n)\Gamma(b+d+n)\Gamma(c-d-n)\frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

Notons que pour $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\begin{aligned} \Gamma(d-c-n) &= \frac{\Gamma(d-c)}{(d-c-1)(d-c-2)...(d-c-n)} \\ &= \frac{\Gamma(d-c)}{(-1)^n(1+c-d)(2+c-d)...(n+c-d)} \\ &= (-1)^n\frac{\Gamma(d-c)}{(1+c-d)_n} \end{aligned}$$

Cela implique que l'intégrale est égale à

$$\begin{aligned} &\Gamma(a+c)\Gamma(b+c)\Gamma(d-c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+c)_n(b+c)_n}{(1+c-d)_n n!} \\ &+\Gamma(a+d)\Gamma(b+d)\Gamma(c-d)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+d)_n(b+d)_n}{(1+d-c)_n n!} \end{aligned}$$

Enfin, nous utilisons la formule de sommation de Gauss et la formule de réflexion

d'Euler pour constater que l'intégrale est égale à

$$\begin{aligned}
&\Gamma(a+c)\Gamma(b+c)\Gamma(d-c)F\left(\begin{array}{c} a+c, b+c \\ 1+c-d \end{array};1\right) \\
&+\Gamma(a+d)\Gamma(b+d)\Gamma(c-d)F\left(\begin{array}{c} a+d, b+d \\ 1+d-c \end{array};1\right) \\
= \;& \Gamma(a+c)\Gamma(b+c)\Gamma(d-c)\frac{\Gamma(1+c-d)\Gamma(1-a-b-c-d)}{\Gamma(1-a-d)\Gamma(1-b-d)} \\
&+\Gamma(a+d)\Gamma(b+d)\Gamma(c-d)\frac{\Gamma(1+d-c)\Gamma(1-a-b-c-d)}{\Gamma(1-a-c)\Gamma(1-b-c)} \\
= \;& \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(b+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)} \\
&\times\frac{\pi}{\sin\pi(d-c)}\frac{\sin\pi(a+d)\sin\pi(b+d)}{\pi}\frac{\pi}{\sin\pi(a+b+c+d)} \\
&+\frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}\times\frac{\sin\pi(a+c)\sin\pi(b+c)-\sin\pi(a+d)\sin\pi(b+d)}{\sin\pi(c-d)\sin\pi(a+b+c+d)}
\end{aligned}$$

En utilisant des relations trigonométriques, on peut montrer que

$$\frac{\sin\pi(a+c)\sin\pi(b+c)-\sin\pi(a+d)\sin\pi(b+d)}{\sin\pi(c-d)\sin\pi(a+b+c+d)}=1$$

Cela prouve le théorème pour $\mathrm{Re}(a+b+c+d-1)<0$. *Cette condition peut être supprimée en utilisant la continuation analytique des paramètres.*

Remarque 2.5.8. *Le* (2.5.13) *est l'analogue intégral de la serie de Gauss* $F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array},z\right)$ *à* $z=1$. *De plus, si on pose* $b=e-it$, $d=f-it$, *et* $s=itz$ *dans le théorème et si* $t\to\infty$, *nous obtenons, après une réduction utilisant la formule de Stirling,*

$$\int_0^1 z^{a+c-1}(1-z)^{e+f-1}dz=\frac{\Gamma(a+c)\Gamma(e+f)}{\Gamma(a+c+e+f)}$$

Ainsi, la formule intégrale de Barnes est une extension de l'intégrale bêta sur $(0,1)$ *et s'appellera donc l'intégrale bêta de Barnes. On l'appelle aussi le premier lemme de Barnes. Andrews et al. cf.*([14]) *utilise ce résultat pour prouver que*

$$\begin{aligned}
F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};z\right) \;=\; & \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,F\left(\begin{array}{c} a,b \\ a+b-c+1 \end{array};1-z\right) \\
&+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}\,F\left(\begin{array}{c} c-a,c-b \\ c-a-b+1 \end{array};1-z\right)
\end{aligned}$$

Théorème 2.5.14. *Pour une ligne d'intégration convenablement incurvée, de sorte que les suites de pôles décroissantes se situent à gauche et que la suite de pôles croissante se situe à droite du contour :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)\Gamma(1-d-s)\Gamma\left(-s\right)}{\Gamma(e+s)}ds \\ = \quad & \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(1-d+a)\Gamma(1-d+b)\Gamma(1-d+c)}{\Gamma(e-a)\Gamma(e-b)\Gamma(e-c)} \end{aligned}$$

où $d+e=a+b+c+1$.

2.6 Identités de transformation

Il existe un grand nombre de ces identités, qui expriment une fonction hypergéométrique de Gauss en termes d'une ou plusieurs autres, et des listes étendues peuvent être trouvées dans des textes tels que ([**?**, **?**]) , [74] et ([25]). Dans cette section, nous discutons des transformations linéaires et quadratiques les plus connues.

2.6.1 Transformations fractionnaires en z linéaires

Transformation de Pfaff

Théorème 2.6.1. . *Pour* $|\arg(1-z)|<\pi,\ |z|<1$ *et* $|\frac{z}{1-z}|<1$,

$$F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right)=(1-z)^{-a}\ F\left(\begin{array}{c} a,c-b \\ c \end{array};\frac{z}{z-1}\right) \tag{2.27}$$

Preuve 2.6.1. *Dans la formule* (2.3),

$$F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt.$$

posons $t = 1 - s$ et en utilisant la formule du binôme, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt &= (1-z)^{-a}\int_0^1 (1-s)^{b-1}s^{c-b-1}(1-\frac{sz}{z-1})^{-a}ds \\
&= (1-z)^{-a}\int_0^1 (1-s)^{b-1}s^{c-b-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}(\frac{sz}{z-1})^n ds \\
&= (1-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}(\frac{z}{z-1})^n\int_0^1 (1-s)^{b-1}s^{c-b+n-1}ds \\
&= (1-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}(\frac{z}{z-1})^n\beta(c-b+n,\ b) \\
&= (1-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}(\frac{z}{z-1})^n\frac{\Gamma(c-b+n)\Gamma(b)}{\Gamma(c+n)} \\
&= (1-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}(\frac{z}{z-1})^n\frac{\Gamma(c-b)(c-b)_n\Gamma(b)}{\Gamma(c)(c)_n} \\
&= (1-z)^{-a}\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(c-b)_n}{(c)_n n!}(\frac{z}{z-1})^n \\
&= (1-z)^{-a}\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\ F\left(\begin{array}{c}\alpha, c-b\\ c\end{array};\frac{z}{z-1}\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(1-z)^{-a}\ F\left(\begin{array}{c}a, c-b\\ c\end{array};\frac{z}{z-1}\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt \\
&= F\left(\begin{array}{c}a, b\\ c\end{array};z\right).
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 2.6.1. *Il existe différentes formes de transformation de Pfaff. Les deux fournies ci-dessous se trouvent dans ([41]), et ([31]) respectivement.*

$$F\left(\begin{array}{c}a, b\\ c\end{array};z\right) = (1-z)^{-b}\ F\left(\begin{array}{c}c-a, b\\ c\end{array};\frac{z}{z-1}\right)$$

$$F\left(\begin{array}{c}a; c-b\\ c\end{array};z\right) = (1-z)^{-a}\ F\left(\begin{array}{c}a, b\\ c\end{array};-\frac{z}{1-z}\right)$$

La transformation de Pfaff (2.27) *fournit une approche élégante pour prouver différentes relations. Par exemple, cela nous permet de montrer que*

$$\begin{aligned}\arctan z &= z\ F\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},1\\ \frac{3}{2}\end{matrix};-z^2\right)=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\ F\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{1+z^2}\right)\\ &= \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.\end{aligned}$$

Remarque 2.6.2. *Au point* $z=\dfrac{1}{2}$, *la transformation de Pfaff* (2.27) *et le théorème de Kummer* (2.11), *donne*

$$F\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};\frac{1}{2}\right)=2^a\ F\left(\begin{matrix}a,c-b\\ c\end{matrix};-1\right)$$

Transformation d'Euler

Théorème 2.6.2. *Pour* $|z|<1,\ |\arg(1-z)|<\pi$,

$$F\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix};z\right)=(1-z)^{c-a-b}\ F\left(\begin{matrix}c-a,\ c-b\\ c\end{matrix};z\right).$$

Preuve 2.6.2. *Puisque*

$$F\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix};z\right)=\ F\left(\begin{matrix}b,\ a\\ c\end{matrix};z\right).$$

et en appliquant la formule de Pfaff (2.27) *deux fois, il en résulte que*

$$\begin{aligned}F\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix};z\right) &= (1-z)^{-a}\ F\left(\begin{matrix}c-b,\ a\\ c\end{matrix};\frac{z}{a-1}\right)\\ &= (1-z)^{-a}(1-\frac{z}{z-1})^{b-c}\ F\left(\begin{matrix}c-b,\ c-a\\ c\end{matrix};\frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}-1}\right)\\ &= (1-z)^{c-b-a}\ F\left(\begin{matrix}c-b,\ c-a\\ c\end{matrix};z\right)\end{aligned}$$

Et donc

$$F\left(\begin{matrix}\alpha,\ b\\ c\end{matrix};z\right)=(1-z)^{c-b-a}\ F\left(\begin{matrix}c-a,\ c-b\\ c\end{matrix};z\right).$$

Théorème 2.6.3. *Pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$F\left(\begin{array}{c} -n,\ b \\ c \end{array}; z\right) = \frac{(b)_n}{(c)_n}(-z)^n\ F\left(\begin{array}{c} -n,\ 1-c-n \\ 1-b-n \end{array}; \frac{1}{z}\right).$$

Preuve 2.6.3. *Utilisant l'identité* (1.12) *dans la formule*

$$(1-\alpha-n)_k = \frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n-k)}$$

nous éltendoun la série finie hypergéométrique sur le membre droit du théorème on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{(b)_n}{(c)_n}(-z)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(1-c-n)_k z^{-k}}{(1-b-n)_k k!} \\ = & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(b)_n(-1)^n\Gamma(c+n)\Gamma(b+n-k)z^{n-k}}{(c)_n k!\Gamma(c+n-k)\Gamma(b+n)} \\ = & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(-1)^n}{k!}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+n-k)z^{n-k}}{\Gamma(c+n-k)\Gamma(b)} \\ = & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(-1)^n(b)_{n-k}z^{n-k}}{k!(c)_{n-k}}, \end{aligned}$$

et le résultat souhaité découle en remplaçant $n-k$ par j et en appliquant l'identité (1.14.)

Théorème 2.6.4. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $c,\ b+1-c-n \neq 0,-1,\ldots,-n+1$,*

$$F\left(\begin{array}{c} -n,\ b \\ c \end{array}; 1-z\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}\ F\left(\begin{array}{c} -n,\ b \\ -n+b+1-c \end{array}; z\right).$$

2.6.2 Transformations quadratiques

A présent, nous allons regarder de prés la transformation liée a la forme quadratique établie par Kummer ([41]).

Théorème 2.6.5. (*Première transformation Kummer*). *Si $c = 2b \in (-\mathbb{N})$, et si $|z| < \frac{1}{2}$ et $\left|\frac{z}{1-z}\right| < 1$, alors*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 2b \end{array}; 2z\right) = (1-z)^{-a}\ F\left(\begin{array}{c} \frac{a}{2},\ \frac{1+a}{2} \\ b+\frac{1}{2} \end{array}; \frac{z^2}{(1-z^2)}\right).$$

Preuve 2.6.4. *En élargissant le côté droit conformément a la définition de la série gaussienne et en appliquant ensuite l'identité*

$$(a)_{2k} = 2^{2k}(\frac{a}{2})_k(\frac{a+1}{2})_k$$

on trouve

$$RHS = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k}\ z^{2k}}{2^{2k}(b+\frac{1}{2})_k k!(1-z)^{a+2k}}$$

Nous utilisons maintenant l'extension de série pour $(1-z)^{-(a+2k)}$ *et l'identité* (1.11) *sous la forme*

$$(a)_{2k}(a+2k)_n = (a)_{n+2k}$$

d'écrire ce résultat

$$\begin{aligned} RHS &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k} z^{2k+n}(a+2k)_n}{2^{2k}(b+\frac{1}{2})_k k!n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+2k} z^{2k+n}}{2^{2k}(b+\frac{1}{2})_k k!n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(a)_n z^n}{2^{2k}(b+\frac{1}{2})_k k!(n-2k)!}, \end{aligned}$$

par application de l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n+2k)$$

Maintenant en appliquant identité (1.13) *sous la forme*

$$(-n)_{2k} = 2^{2k}(\frac{-n}{2})_k(\frac{1-n}{2})_k$$

et l'identité

$$(n-2k)! = \frac{n!}{(-n)_{2k}}$$

ce résultat simplifie a

$$RHS = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-\frac{n}{2})_k(\frac{1-n}{2})_k(a)_n z^n}{(b+\frac{1}{2})_k n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n(a)_n(2z)^n}{(2b)_n n!},$$

par (2.7)*, et le théorème est prouvé.*

en tant qu'équation (2.3.2) et fournit un outil puissant pour dériver de nouvelles transformations.

Théorème 2.6.6. (*Deuxième transformation de Kummer*) *: Pour* $\left|\frac{4z}{(1-z)^2}\right| < 1$ *et* $|z| < 1$, *avec* $(1+a-b) \in (-\mathbb{N})$

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 1+a-b \end{array}; z\right) = (1-z)^{-a}\ F\left(\begin{array}{c} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}-b \\ 1+a-b \end{array}; -\frac{4z}{(1-z)^2}\right) \tag{2.28}$$

Preuve 2.6.5. *Ecrivons la série a droite comme*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{a}{2})_k \left(\frac{1+a}{2}-b\right)_k}{k!(a-b+1)_k} \frac{(-4z)^{2k}}{(1-z)^{a+2k}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{a}{2})_k \left(\frac{1+a}{2}-b\right)_k}{k!(a-b+1)_k} (-4z)^{2k} (1-z)^{-(a+2k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{a}{2})_k \left(\frac{1+a}{2}-b\right)_k}{k!(a-b+1)_k} (-4z)^{2k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+2k)_j}{j} \end{aligned} \tag{2.29}$$

il est facile de voir que le coefficient de z *dans* (2.29) *est*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{a}{2})_k \left(\frac{1+a}{2}-b\right)_k \ (-4)^k}{k!(a-b+1)_k} \frac{(a+2k)_{n-k}}{(n-k)!} \tag{2.30}$$

Maintenant, observons que

$$(a+2k)_{n-k} = \frac{(a)_{n+k}}{(a)_{2k}} = \frac{(a)_n (a+n)_k}{2^{2k}(\frac{a}{2})_k(\frac{a+1}{2})_k}$$

alors (2.30) *est le même que*

$$\frac{(a)_n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+a}{2}-b\right)_k (a+n)_k (-n)_k}{k!(a-b+1)_k(\frac{a+1}{2})_k}$$

Une autre forme de transformation quadratique de Kummer [26] donnée par le lemme suivant

Lemme 2.6.1. *Si* $|z| < 1$ *alors*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ a+\frac{1}{2} \\ b+\frac{1}{2} \end{array}; z^2\right) = (1+z)^{-2a} F\left(\begin{array}{c} 2a, b \\ 2b \end{array}; \frac{2z}{1+z}\right) \tag{2.31}$$

Remarque 2.6.3. *Si $b \to 0$ alors la formule* (2.31) *fournit :*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ a+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}; z^2\right) = \frac{1}{2}[(1+z)^{-2a} + (1-z)^{-2a}]$$

Le théorème de Kummer (2.11) peut également être établi à partir de sa transformation quadratique. Si on fait tendre $z \to -1$ dans sa transformation (2.28), et on appliquons la formule de sommation de Gauss (2.5), nous obtenons le théorème de Kummer sous la forme

Théorème 2.6.7. *Pour $(1+a-b) \notin (-\mathbb{N})$ on a ;*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 1+a-b \end{array}; -1\right) = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+\frac{a}{2})}{\Gamma(1+\frac{a}{2}-b)\Gamma(1+a)}.$$

Preuve 2.6.6.

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 1+a-b \end{array}; -1\right) &= 2^{-a}\ F\left(\begin{array}{c} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}-b \\ 1+a-b \end{array}; 1\right) \\ &= 2^{-a}\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\frac{a}{2}-b)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2})} \end{aligned}$$

et puisque (formule de duplication de Legendre)

$$2^{-a}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2})} = \frac{\Gamma(1+\frac{a}{2})}{\Gamma(1+a)}$$

on obtient

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 1+a-b \end{array}; -1\right) = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+\frac{a}{2})}{\Gamma(1+\frac{a}{2}-b)\Gamma(1+a)}$$

d'où le résultat.

La représentation intégrale d'Euler (2.3) fournit une base utile pour établir d'autres transformations quadratiques telles que celle ci-dessous ([14]).

Théorème 2.6.8. *Pour tout z tel que la série converge, on a :*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 2a \end{array};z\right) = \left(1-\frac{z}{2}\right)^{-b}\ F\left(\begin{array}{c} \frac{b}{2},\frac{1+b}{2} \\ a+\frac{1}{2} \end{array};\left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right). \tag{2.32}$$

Preuve 2.6.7. *Par l'intégrale d'Euler* (2.3)*, la fonction de Gauss du membre gauche du théorème devient*

$$\frac{\Gamma(2a)}{4^{a-1}\Gamma(a)\Gamma(a)}\int_0^1 (1-zt)^{-b}[1-(1-2t)^2]^{a-1}dt.$$

En remplaçant $t=\dfrac{1-s}{2}$*, pour que* $dt=-\frac{1}{2}ds$*, cette intégrale devient*

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2a)}{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma(a)}\int_{-1}^1 (1-\frac{z(1-s)}{2})^{-b}(1-s^2)^{a-1}ds \\ = & \frac{\Gamma(2a)(1-\frac{\chi}{2})^{-b}}{2^{2a-1}[\Gamma(a)]^2}\int_{-1}^1 (1-\frac{sz}{z-2})^{-b}(1-s^2)^{a-1}ds \\ = & \frac{\Gamma(2a)(1-\frac{\chi}{2})^{-b}}{2^{2a-1}[\Gamma(a)]^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}(\frac{\chi}{z-2})^n\int_{-1}^1 s^n(1-s^2)^{a-1}ds. \end{aligned}$$

Si n est impair, la dernière intégrale vaut zéro, mais pour $n=2m,\ m\in\mathbb{N}$, on utilise une substitution et la relation beta-gamma pour montrer que

$$\int_{-1}^1 s^n(1-s^2)^{a-1}ds = \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{a-1}du = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(a)}{\Gamma(m+a+\frac{1}{2})}.$$

On obtient ainsi

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 2a \end{array};z\right) = \frac{\Gamma(2a)(1-\frac{\chi}{2})^{-b}}{2^{2a-1}[\Gamma(a)]^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b)_{2m}}{(2m)!}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(a)}{\Gamma(m+a+\frac{1}{2})}(\frac{z}{z-2})^{2m}$$

qui par les identités

$$\begin{aligned} (a)_{2n} &= 2^{2n}(\frac{a}{2})_n(\frac{a+1}{2})_n \\ \Gamma(a+m) &= \Gamma(a)(a)_m \end{aligned}$$

et (1.13) *sous la forme*

$$\frac{(1)_{2n}}{(\frac{1}{2})_n} = 2^{2n}n!,$$

devient

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 2a \end{array};z\right)=\frac{\Gamma\left(2a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-b}}{\Gamma\left(a\right)2^{2a-1}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}F\left(\begin{array}{c} \frac{b}{2},\frac{1+b}{2} \\ a+\frac{1}{2} \end{array};\left(\frac{z}{2-z}\right)^{2}\right)$$

et le résultat souhaité suit en appliquant la formule de duplication de Legendre (**??**) *au rapport gamma du côté droit.*

Bien qu'il soit pratique d'utiliser les transformations existantes pour en déduire d'autres, nous pouvons également établir de nouvelles transformations indépendamment par substitution dans l'équation différentielle hypergéométrique ([9]).

Théorème 2.6.9. *Pour* $|z|<1,\ |4z(1-z)|<1$ *et* $a+b+\frac{1}{2}$ *pas zéro ou un entier négatif,*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{array};4z(1-z)\right)=\ F\left(\begin{array}{c} 2a,2b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{array};z\right).$$

Preuve 2.6.8. *La fonction* $F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{array};z\right)$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{dy}{dz}-aby=0,$$

avec $c=a+b+\frac{1}{2}$. *Pour* $z=4z(1-z)$, *on obtient*

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dz}(4-8z)^{-1}$$

et

$$\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{d^2y}{dz^2}(4-8z)^{-2}+8\frac{dy}{dz}(4-8z)^{-3}$$

La substitution dans l'équation différentielle donne alors

$$z(1-z)\ \frac{d^2y}{dz^2}+[a+b+\frac{1}{2}-(2a+2b+1)z]\ \frac{dy}{dz}-4aby=0,$$

qui est une équation hypergéométrique avec solution

$$y=\ F\left(\begin{array}{c} 2a,\ 2b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{array};z\right)$$

d'où le théorème.

Remarque 2.6.4. *Des substitutions similaires donnent les transformations suivantes, trouvées respectivement dans* ([*32*]) *et son inverse, et dans* ([*31*]) *:*

$$F\left(\begin{array}{c} 2a,\ 2a+1-c \\ c \end{array};z\right)=(1+z)^{-2a}F\left(\begin{array}{c} a,\ a+\frac{1}{2} \\ c \end{array};\frac{4z}{(1+z)^2}\right)$$

et son inverse

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ a+\frac{1}{2} \\ c \end{array};z\right)=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-z}}{2})^{-2a}F\left(\begin{array}{c} 2a, 2a-c+1 \\ c \end{array};\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right)$$

et pour $|\arg(1-z)|<\pi,\ a+b+\frac{1}{2}\neq 0,-1,-2,\ldots,$

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array};z\right)(a,\ b,\ a+b+\frac{1}{2},\ z)=F\left(\begin{array}{c} a,\ a+\frac{1}{2} \\ c \end{array};z\right)(2a, 2b,\ a+b+\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{1-z}}{2})$$

Remarque 2.6.5. *Les équations* (2.28) *et* (2.32) *contiennent les transformations quadratiques fondamentales, et de nombreuses autres peuvent en être déduites en utilisant des transformations linéaires fractionnaires ou des relations à trois termes reliant les solutions de l'équation différentielle hypergéométrique pour plus de détails on invite le lecteur à consulter* ([*14*]) *et* ([*9*]) *.*

Chapitre 3

Fonction confluente

3.1 Introduction

En mathématiques, une fonction *hypergéométrique confluente* est la solution d'une équation *hypergéométrique confluente*, qui est une forme dégénérée d'une équation différentielle *hypergéométrique* où deux des trois singularités régulières se fondent en une singularité irrégulière ([24]). (Le terme "confluent" fait référence à la fusion de points singuliers de familles d'équations différentielles ; "confluere" signifie en latin "couler ensemble").

En effet, les seules singularités sont les singularités régulières à 0, b et ∞ ; on fai tendre $b \to \infty$. L'équation résultante à ∞ comme un point singulier irrégulier obtenu à partir de la confluence de deux singularités régulières. Ainsi, l'équation *confluente* peut être déduite de l'équation *hypergéométrique* en modifiant la variable indépendante z en $\frac{z}{b}$ et en fait tendre $b \to \infty$. Les solutions sont ${}_1F_1$ et certaines propriétés de ces fonctions sont des limites des propriétés des fonctions ${}_2F_1$. Cependant, il est souvent plus facile de déduire directement les résultats que de justifier les procédures restrictives.

Whittaker a transformé l'équation *confluente* en une équation dans laquelle le coefficient de la première dérivée est égal à zéro. Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de *Whittaker*.

3.2 Définition de la fonction hypergéométrique de Gaus

Dans cette paragraphe, nous allons confondre les deux singularités, 1 et ∞, de l'équation hypergéométrique pour obtenir l'équation hypergéométrique *confluente*, puis nous examinerons les solutions de la nouvelle équation - les fonctions hypergéométriques *confluentes* et leurs propriétés.

3.2.1 Équation différentielle

L'équation différentielle hypergéométrique de Gauss est donnée par :

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c-(a+\beta+1)z]\frac{dy}{dz} - a\beta y = 0,$$

remplaçons z par $\frac{z}{b}$ et divisons-le par b. On obtient

$$z\ (1-\frac{z}{b})\frac{d^2y}{dz^2} + [c-(a+\beta+1)\frac{z}{b}]\frac{dy}{dz} - a\frac{\beta}{b}y = 0.$$

Les singularités de cette nouvelle équation sont $0, b, \infty$, toutes étant régulières.
Soit maintenant $b = \beta \to \infty$, on obtient

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (c-z)\frac{dy}{dz} - ay = 0. \tag{3.1}$$

Cette nouvelle équation n'a plus que deux singularités, 0 et ∞ ; la première est toujours une singularité régulière, mais la dernière, étant le *confluent* des deux singularités régulières originelles, devient une singularité irrégulière.
La solution de l'équation (3.1) est appelée équation *hypergéométrique confluente* ou équation de *Kummer* notée $y(z) = {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$.

Définition 3.2.1. *La fonction hypergéométrique confluente* $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ *est définie comme étant la solution, liée a l'origine de l'équation différentielle homogène linéaire du second ordre* $z\frac{d^2\ M}{dz^2} + (c-z)\frac{d\ M}{dz} - a\ M = 0$, *où c, a et z ne sont pas restreints. C'est ce qu'on appelle l'équation différentielle hypergéométrique confluente.*

3.2.2 Solutions standards

L'équation (3.1) a une singularité régulière à l'origine et une singularité irrégulière à l'infini.

Solutions autour de $z = 0$

Si on veut chercher une solution de l'équation (3.1) de la forme

$$y = \sum a_n z^{n+r}$$

alors l'équation indiciaire de l'équation (3.1) à la singularité régulière $z = 0$ est

$$r(r + c - 1) = 0.$$

Ses racines sont $r_1 = 0$ et $r_2 = 1-c$, identiques à celles de l'équation *hypergéométrique*. Pour les coefficients a_n on obtient la formule de récurrence

$$a_{n+1} = a_n \frac{n + r + a}{n + r + c} \frac{1}{n + r + 1}$$

Lorsque c n'est pas un entier non positif Puisque $z = 0$ est toujours un point singulier régulier de l'éqution (3.1), nous pouvons obtenir des développements autour de ce point. Il existe donc une solution analytique (correspondant $r_1 = 0$) de l'équation (3.1) à l'origine, appelée fonction hypergéomélique confluente donnée par

$$\begin{aligned} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) &= \lim_{b\to\infty} F\left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array}; \frac{z}{b}\right) = \lim_{b\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \left(\frac{z}{b}\right)^n \qquad (3.2) \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{b}\right)^n\right] \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} z^n \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}; \quad c \notin (-\mathbb{N}) \end{aligned}$$

De même si $1-c$ n'est pas un entier, alors

$$\begin{aligned} & \lim_{b\to\infty} z^{1-c} F\left(\begin{array}{c} a-c+1, b-c+1 \\ 2-c \end{array}; \frac{z}{b}\right) \qquad (3.3) \\ = & \lim_{b\to\infty} z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_n (b-c+1)_n}{(2-c)_n n!} \left(\frac{z}{b}\right)^n \\ = & z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_n}{(2-c)_n n!} z^n \\ = & z^{1-c} F\left(\begin{array}{c} a-c+1 \\ 2-c \end{array}; z\right) \end{aligned}$$

d'où la deuxième solution .

Pour $c \notin \mathbb{Z}$, la solution générale de l'équation différentielle hypergéométrique confluente (3.1) peut être écrite comme une combinaison linéaire de $F\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ et $z^{1-c} F\left(\begin{array}{c} a-c+1 \\ 2-c \end{array}; z\right)$ donc

$$\begin{aligned} y &= A.y_1(z) + B.y_2(z) \\ &= A.\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} .\frac{z^n}{n!} \quad + B.\, z^{1-c} \sum \frac{(1+a-c)_n}{(2-c)_n} .\frac{z^n}{n!} \\ &= A.\, M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) + B.z^{1-c}\, M\left(\begin{array}{c} 1+a-c \\ 2-c \end{array}; z\right) \end{aligned}$$

où A et B des constantes arbitraires.

Remarque 3.2.1. *Si c n'est pas entier, la deuxième solution de l'équation.* (3.1) *est donnée par*

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = z^{1-c}\, M\left(\begin{array}{c} a-c+1 \\ 2-c \end{array}; z\right)$$

Enfin si c est entier, une deuxième solution est donnée par ([39])

$$\begin{aligned} U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) &= M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) [\ln z + \psi(1-a) - \psi(c) + C] + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\, B_n}{\Gamma(c+n)} .\frac{z^n}{n!} \\ &\quad + (-1)^c \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-c+1+n)\,\Gamma(c-n-1)}{n!} .\frac{(-1)^n}{z^{c-n-1}} \end{aligned}$$

où

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

C est la constante d'Euler 0.577216...

$$B_n = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+n-1}\right) - \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \ldots + \frac{1}{c+n-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

De nombreux tableaux de la fonction y sont disponibles ([27]).

Remarque 3.2.2. *La fonction hypergéométrique confluente* $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ *se réduit à un polynôme lorsque a est un entier négatif.*
$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ *n'existe pas lorsque c est un entier non positif. Dans d'autres cas*

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = \Gamma(c) K\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) \tag{3.4}$$

où

$$K\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \tag{3.5}$$

Bien que $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ *n'existe pas lorsque* $c = -n$, $n \in \mathbb{N}$ *de nombreuses formules contenant* $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ *continuent de s'appliquer sous leur forme limite. En particulier,*

$$\lim_{c \to -n} \frac{1}{\Gamma(c)} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = K\left(\begin{array}{c} a \\ -n \end{array}; z\right) = \frac{(a)_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} M\left(\begin{array}{c} a+n+1 \\ n+2 \end{array}; z\right) \tag{3.6}$$

Une autre solution standard de (3.1) *est* $U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$, *qui est déterminée uniquement par la propriété :*

$$U(a,c,z) \sim z^{-a}, \ z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{3}{2}\pi - \delta \tag{3.7}$$

où δ *est une petite constante positive arbitraire. Plus de détails voir section* (3.6)

En général, $U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ *a une branche au point* $z = 0$*. La branche principale correspond à la valeur principale de* z^{-a} *dans* (3.7)*, et a une coupure dans le plan* z *le long de l'intervalle* $(-\infty, 0]$*.*

Remarque 3.2.3. *lorsque* $a = -n$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ *est un polynôme en* z *de degré* n *à condition que* c *ne soit pas un entier non positif :*

$$U\left(\begin{array}{c} -n \\ c \end{array}; z\right) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) (c+k)_{n-k} (-z)^k \tag{3.8}$$

De même, lorsque $a - c + 1 = -n$*,* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ a+n+1 \end{array}; z\right) = z^{-a} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) (a)_k z^{-k} \tag{3.9}$$

Lorsque $c = n + 1$*,* $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} U\left(\begin{array}{c} a \\ n+1 \end{array}; z\right) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!\Gamma(a-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(n+1)_k\, k!} z^k \left(\ln z + \psi(a+k) - \psi(1+k) - \psi(n+k+1)\right) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1)!\,(1-a+k)_{n-k}}{(n-k)!} z^{-k} \end{aligned} \tag{3.10}$$

si $a \neq 0, -1, -2, ...,$ *ou*

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ n+1 \end{array}; z\right) = (-1)^a \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} -a \\ k \end{array}\right) (n+k+1)_{-a-k} (-z)^k \tag{3.11}$$

si $a = 0, -1, -2, ...$

Remarque 3.2.4. *Lorsque* $c = -n$*,* $n = 0, 1, 2, ...,$ *l'équation suivante peut être combinée avec* (3.10) *et* (3.11) *:*

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ -n \end{array}; z\right) = z^{n+1} U\left(\begin{array}{c} a+n+1 \\ n+2 \end{array}; z\right) \tag{3.12}$$

Solutions autour de $z = \infty$

Il faut être un peu plus prudent pour trouver les solutions autour de l'infini. Une solution de l'équation *hypergéométrique* sur l'infini est donnée par

$$z^{-a} F\left(\begin{array}{c} a, a+1-c \\ a+1-b \end{array} ; \frac{1}{z} \right)$$

Lorsque z est changé en $\frac{z}{b}$ et $b \to \infty$, cette expression tend généralement à

$$z^{-a}{}_2F_0\left(\begin{array}{c} a, a+1-c \\ - \end{array} ; \frac{1}{z} \right)$$

Cette série diverge, elle ne donne donc pas directement une solution de l'équation (3.1).

3.3 F.C.G : propriétés

Nous présentons dans cette section, les propriétés qui sont essentielles aux sections ultérieures de ce travail.

3.3.1 Analyticité

Le théorème ci-dessous montre que la fonction confluente de Gauss est analytique sauf pour un nombre de pôles (dénombrable ou fini).

Théorème 3.3.1. *Pour $|z| < 1$ et $c \notin (-\mathbb{N})$, alors la fonction $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array} ; z \right)$ est analytique pour a et c finis.*

Preuve 3.3.1. *Considérons la fonction entière*

$$\frac{1}{\Gamma(c)} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array} ; z \right) = \sum \frac{(a)_n z^n}{\Gamma(c+n)\, n!}, \qquad (c \neq 0, -1, -2, \ldots), \tag{3.13}$$

dans lequel il n'y a plus de possibilité de division par zéro.

Si $a = -N$ ou $b = -N$, où $N \in \mathbb{N}$, les coefficients de la série (3.13) *s'annulent pour $n > N$, de sorte que* (3.13) *est un polynôme à z de degré N. Si $a \neq 0, -1, -2, \ldots$ nous obtenons*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a)_{n+1}}{(c)_{n+1}(n+1)!}\frac{(c)_n n!}{(a)_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(c+n)(n+1)}{(a+n)}\right| = 1,$$

et la série de Taylor à un rayon de convergence 1.

Considérons $\sum_{n=0}^{\infty} t_k = F\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ où $|z| = 1$. Les nombres a et c sont complexes ; écrivons-les comme suit : $a = a_1 + ia_2$ et $c = c_1 + ic_2$, où $a_1,\ a_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\frac{t_{k+1}}{t_k}\right| &= \left|\frac{(k+a)}{(k+1)\,(k+c)}\right| = \left(1+\frac{a}{k}\right)\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{c}{k}\right)\right|^{-1} \\
&= \left|1+\frac{a}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right|\left|1-\frac{1+c}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| \\
&= \left|1+\frac{a-c-1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| \\
&= \left|1+\frac{a_1-c_1-1+i\,(a_2-c_2)}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| \\
&= \sqrt{1+\left(\frac{a_1-c_1-1}{k}\right)^2+\left(\frac{(a_2-c_2)}{k}\right)^2+O\left(\frac{1}{k^2}\right)^2} \\
&= 1+\left(\frac{a_1-c_1-1}{k}\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, selon le corollaire (...),

Théorème 3.3.2. *La série converge absolument si* $\mathrm{Re}(a-c) < 0$. *Pour* $|z| = 1$ *le comportement de cette série sur son cercle de convergence est :*

(*a*) *divergence lorsque* $\mathrm{Re}(c-a) \leq -1$.

(*b*) *convergence absolue lorsque* $-1 < \mathrm{Re}(c-a) < 0$ *; le point* $z = 1$ *est exclu. la série de Gauss se réduit a un polynôme de degré n dans z lorsque a est égal à* $-m$ $(m = 0; 1; 2; ...)$, *a condition que a soit un entier négatif n avec* $n < m$. *Pour* $c = -m$.

Théorème 3.3.3. *La série hypergéométrique de Gauss* $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ *est absolument*

convergente lorsque $|z| < 1$, *divergente lorsque* $|z| > 1$ *et converge vers la limite* $|z| = 1$ *pour* $\mathrm{Re}(c-a) > 0$.

3.3.2 Continuation analytique

Quand $m \in \mathbb{Z}$,

$$U(a,c,ze^{2\pi im}) = \frac{2\pi i e^{-\pi icm}\sin(\pi cm)}{\Gamma(1+a-c)\sin(\pi c)} M(a,c,z) + e^{-2\pi icm} U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$$

Sauf lorsque $z = 0$, chaque branche de $U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ est entière dans a et c. Sauf indication contraire, toutefois, $U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ est supposé avoir sa valeur principale.

3.3.3 Relations et transformations

Les relations entre les solutions de l'équation *hypergéométrique* suggèrent des relations correspondantes entre les solutions de l'équation *confluente* ([24]). Ceux-ci peuvent alors être prouvés rigoureusement. De même, les transformations de fonctions *hypergéométrique*s impliquent des transformations de la fonction M.

Corollaire 3.3.1. *Première transformation de Kummer*

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = e^z \; M\left(\begin{array}{c} c-a \\ c \end{array}; -z\right) \tag{3.14}$$

Preuve 3.3.2. *Pour la fonction hypergéométrique, la transformation de Pfaff est donné par la relation*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) = (1-z)^{-b} \; F\left(\begin{array}{c} b,\ c-a \\ c \end{array}; \frac{z}{z-1}\right) \tag{3.15}$$

Changeons z en $\frac{z}{b}$ et faisant tendre $b \to \infty$ pour obtenir la formule :

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; \frac{z}{b}\right) &= e^{-z}\ M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l}{l!(c)_l} z^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \sum_{l=0}^{n} \frac{(-)^l (a)_l}{l!(n-l)!(c)_l} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a)_n}{n!(c)_n} (-z)^n = M\left(\begin{array}{c} c-a \\ c \end{array}; -z\right)\end{aligned}$$

d'où

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = e^z\ M\left(\begin{array}{c} c-a \\ c \end{array}; -z\right)$$

Corollaire 3.3.2. *On a la transformation de Kummer pour la fonction U :*

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = z^{1-b} U\left(\begin{array}{c} 1+a-b \\ 2-b \end{array}; z\right)$$

Preuve 3.3.3. *Un procédure similaire appliquée à la transformation quadratique de la fonction de Gaus $F\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$*

$$F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ 2a \end{array}; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) = (1+z)^{2a}\ F\left(\begin{array}{c} a,\ a+\frac{1}{2}-b \\ b+\frac{1}{2} \end{array}; z^2\right)$$

conduit à la deuxième transformation de Kummer.

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ 2a \end{array}; 4z\right) = e^{2z}\ {}_0F_1\left(\begin{array}{c} - \\ a+\frac{1}{2} \end{array}; z^2\right) \tag{3.16}$$

Corollaire 3.3.3.

$$z^{1-b} M\left(\begin{array}{c} 1+a-b \\ 2-b \end{array}; z\right) = z^{1-b} e^z M\left(\begin{array}{c} 1+a \\ 2-b \end{array}; -z\right)$$

Corollaire 3.3.4. *Relation à trois termes*

$$\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} M\left(\begin{array}{c} a+1-c \\ 2-c \end{array}; z\right) \sim (-z)^{-a}\ {}_2F_0\left(\begin{array}{c} a,\ a+1-c \\ - \end{array}; -\frac{1}{z}\right) \tag{3.17}$$

Preuve 3.3.4. *Changeons z en $\frac{z}{b}$ et faisant tendre $b \to \infty$ dans la relation*

$$\begin{aligned}
& (-z)^{-a} F\left(\begin{array}{c} a,\ a+1-c \\ a+1-b \end{array}; \frac{1}{z}\right) \\
= \ & \frac{\Gamma(1-c)\,\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a+1-c)\,\Gamma(1-b)} F\left(\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}; z\right) \\
& + \frac{\Gamma(c-1)\,\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-b)} (-z)^{1-c}\ F\left(\begin{array}{c} a+1-c,\ b+1-c \\ 2-c \end{array}; z\right)
\end{aligned}$$

suggère que

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)}\ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c}\ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a+1-c \\ 2-c \end{array}; z\right) \\
\sim \ & (-z)^{-a}\ {}_2F_0\left(\begin{array}{c} a,\ a+1-c \\ - \end{array}; -\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

Les formules (3.14) *et* (3.16) *peuvent être prouvées directement. Ainsi, le coefficient de z^n du côté droit de* (3.14) *est*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(c-a)_k}{(c)_k\, k!\,(n-k)!} &= \frac{1}{n!} F\left(\begin{array}{c} -n,\ c-a \\ c \end{array}; 1\right) \\
&= \frac{(a)_k}{n!\,(c)_k}
\end{aligned}$$

qui est le coefficient de z^n du côté gauche.

3.3.4 Relations de récurrence

Formules de différentiatien

La fonction $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ satisfiait les relations de récurrence suivantes

–

$$\frac{d}{dz} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = \frac{a}{c} M\left(\begin{array}{c} a+1 \\ c+1 \end{array}; z\right)$$

Plus généralement pour $m \in \mathbb{N}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dz^m}\, M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) &= \frac{(a)_m}{(c)_m}\, M\left(\begin{array}{c} a+m \\ c+m \end{array}; z\right) \\
\frac{d}{dz} U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) &= -aU\left(\begin{array}{c} a+1 \\ c+1 \end{array}; z\right), \\
\frac{d^m}{dz^m} U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) &= (-1)^m (a)_m U\left(\begin{array}{c} a+m \\ c+m \end{array}; z\right)
\end{aligned}$$

Formules de récurrence

Avec deux transformations de base on pourrait déduire des formules plus complexes ([19]) ; Ainsi nous pouvons établir les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
(b-a)M\left(\begin{array}{c} a-1 \\ b \end{array};z\right)+(2a-b+z)M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)-aM\left(\begin{array}{c} a+1 \\ b \end{array};z\right) &= 0\\
b(b-1)M\left(\begin{array}{c} a \\ b-1 \end{array};z\right)+b(1-b-z)M\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)+z(b-a)M\left(\begin{array}{c} a \\ b+1 \end{array};z\right) &= 0\\
(a-b+1)M\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)-aM\left(\begin{array}{c} a+1 \\ b \end{array};z\right)+(b-1)M\left(\begin{array}{c} a \\ b-1 \end{array};z\right) &= 0\\
bM\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)-bM\left(\begin{array}{c} a-1 \\ b \end{array};z\right)-zM\left(\begin{array}{c} a \\ b+1 \end{array};z\right) &= 0\\
b(a+z)M\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)+z(a-b)M\left(\begin{array}{c} a \\ b+1 \end{array};z\right)-abM\left(\begin{array}{c} a+1 \\ b \end{array};z\right) &= 0\\
(a-1+z)M\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)+(b-a)M\left(\begin{array}{c} a-1 \\ b \end{array};z\right)+(1-b)M\left(\begin{array}{c} a \\ b-1 \end{array};z\right) &= 0\\
U\left(\begin{array}{c} a-1 \\ b \end{array};z\right)+(b-2a-z)U\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)+a(a-b+1)U\left(\begin{array}{c} a+1 \\ b \end{array};z\right) &= 0\\
(b-a-1)U\left(\begin{array}{c} a \\ b-1 \end{array};z\right)+(1-b-z)U\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)+zU\left(\begin{array}{c} a \\ b+1 \end{array};z\right) &= 0\\
U\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)-aU\left(\begin{array}{c} a+1 \\ b \end{array};z\right)-U\left(\begin{array}{c} a \\ b-1 \end{array};z\right) &= 0\\
(b-a)U\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)+U\left(\begin{array}{c} a-1 \\ b \end{array};z\right)-zU\left(\begin{array}{c} a \\ b+1 \end{array};z\right) &= 0\\
(a+z)U\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)-zU\left(\begin{array}{c} a \\ b+1 \end{array};z\right)+a(b-a-1)U\left(\begin{array}{c} a+1 \\ b \end{array};z\right) &= 0\\
(a-1+z)U\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)-U\left(\begin{array}{c} a-1 \\ b \end{array};z\right)+(a-b+1)U\left(\begin{array}{c} a \\ b-1 \end{array};z\right) &= 0
\end{aligned}
$$

–

L'équation différentielle de Kummer (3.1) est équivalente a

$$(a+1)zM\left(\begin{array}{c} a+2 \\ b+2 \end{array};z\right)+(b+1)(b-z)M\left(\begin{array}{c} a+1 \\ b+1 \end{array};z\right)-b(b+1)M\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)=0$$

et

$$(a+1)zU\left(\begin{array}{c} a+2 \\ b+2 \end{array};z\right)+(z-b)U\left(\begin{array}{c} a+1 \\ b+1 \end{array};z\right)-U\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array};z\right)=0$$

3.4 Représentations intégrales ([33])

On obtien la répresentation de $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$ de la représentation intégrale de la fonction hypergéométrique ([**?**, **?**]) définie dans le chapitre (2), on peut facilement obtenir la représentation intégrale de la fonction *hypergéométrique confluente* en prenant la limite appropriée. Au chapitre (2), il a été montré que

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)=\lim_{b\to\infty}F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};\frac{z}{b}\right).$$

Ceci suggère de prendre la limite de l'équation

$$\begin{aligned} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) &= \lim_{b\to\infty}M\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};\frac{z}{b}\right) \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{a-1}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\left(1-\frac{zt}{b}\right)^{-b}dt. \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{zt}{b}\right)^{-b}=e^{zt}$$

qui conduit au théorème

Théorème 3.4.1. ([*17*]) *1- Si* $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0$ *alors*

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt.$$

2- Si $\operatorname{Re}a>0;\ \operatorname{Re}z>0$ *alors*

$$\Psi\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}dt.$$

Preuve 3.4.1. *1- Notons que nous avons*

$$e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tz)^n}{n!}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \, dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tz)^n}{n!} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^1 t^{n+a-1} (1-t)^{c-a-1} \, dt \end{aligned}$$

et pour $\operatorname{Re} a > 0$ *et* $\operatorname{Re}(c-a) > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{n+a-1} (1-t)^{c-a-1} \, dt &= B(a+n, c-a) \\ &= \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \frac{(a)_n}{(c)_n} \end{aligned}$$

où $B(.,.)$ *est la fonction eulérienne de première espèce, pour* $n \in \mathbb{N}$ *cela implique que :*

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \, dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \frac{(a)_n}{(c)_n} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} M(a,c,z) \end{aligned}$$

Et finalement :

$$M\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} ; z \right) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \, dt.$$

Notons que la condition $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$, $\arg\ t = \arg(1-t) = 0$ *doit toujours être remplie ici.*

2- Plus généralement considérons la fonction définie par :

$$\phi_C(a,c,z) = \int_C e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} \, dt.$$

où C est un chemin duplan complexe décrit par la variable t nepassant par aucune singularité de l'intégrand $I(a,c;z;t)$. Appliquons l'opérateur différentiel

$$\mathcal{H}(a,c) = z\frac{d^2}{dz^2} + (c-z)\frac{d}{dz} - a$$

à l'intégrand pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(a,c)I(a,c;z;t) &= \left(z\frac{d^2}{dz^2} + (c-z)\frac{d}{dz} - a\right) I\left(\begin{array}{c} a,c \\ z \end{array};t\right)(a,c;z;t) \\
&= \left(zt^2 + (c-z)t - a\right) I\left(\begin{array}{c} a,c \\ z \end{array};t\right) \\
&= -\left(-z + \frac{c-a}{1+t} + \frac{a}{t}\right) I\left(\begin{array}{c} a+1,c+2 \\ z \end{array};t\right) \\
&= -\frac{d}{dt}\left(e^{-zt}t^a\,(1+t)^{c-a}\right)
\end{aligned}$$

Et par conséquent si les valeurs de $e^{-zt}t^a\,(1+t)^{c-a}$ sont égales aux deux extrémités du chemin d'intégration C, on obtient :

$$\mathcal{H}(a,c)\phi_C\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = 0$$

L'intervalle $[-1,0]$ est un choix possible pour lechemin C lorsque $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,a > 0$,conduisant à la solution $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$.
Dans ledemi-plan $\mathrm{Re}\,z > 0$, un autre choix particulièrement intéressant est, pour $\mathrm{Re}\,a > 0$, la demi-droite $C = [0,+\infty[$. La solution correspondante est la fonction

$$\Psi\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{-zt}t^{a-1}\,(1+t)^{c-a-1}\,dt.$$

Cette fonction $\Psi\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$ est une solution de (3.1), elle s'exprime donc comme combinaison linéaire des deux solutions fondamentales $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$ et $z^{1-c}\left(\begin{array}{c} a-c+1 \\ 2-c \end{array};z\right)$.

On peut montrer que :

$$\Psi\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}z^{1-c}M\left(\begin{array}{c} a-c+1 \\ 2-c \end{array};z\right)$$

(voir ([8])).

Remarque 3.4.1. *D'après la discussion dans preuve du théorème* (3.4.1)*, les deux fonctions :*

$$z \to \Psi\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) \quad et \quad z \to e^z\Psi\left(\begin{array}{c} c-a \\ c \end{array};-z\right)$$

forment aussi une base des solutions de (d) sur laquelle on peut développer la fonction $M(a,c;z)$*. On trouve :*

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a-c)}e^{ia\epsilon\pi}\Psi\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^{i(a-c)\epsilon\pi}\Psi\left(\begin{array}{c} c-a \\ c \end{array};-z\right)$$

où $\epsilon = sign(\operatorname{Im} z)$

Remarque 3.4.2. *On obtient la réprésentation de* $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$ *de la représentation intégrale de la fonction hypergéométrique définie dans le chapitre* (2)*, on peut facilement obtenir la représentation intégrale de la fonction hypergéométrique confluente en prenant une limite appropriée. Au chapitre* (2)*, il a été montré que* $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = \lim_{b\to\infty} F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};\frac{z}{b}\right)$*. Ceci suggère de prendre la limite de l'équation*

$$F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 (1-t)^{-a}\,t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,dt.$$

La présence des fonctions gamma avec b (vue queleurs arguments compliquent les choses), mais par contre, la symétrie de la fonction hypergéométrique peut être utilisée

à notre avantage. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) &= \lim_{b\to\infty} F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};\frac{z}{b}\right) = \lim_{b\to\infty} F\left(\begin{array}{c} b,a \\ c \end{array};\frac{z}{b}\right) \qquad (3.18)\\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1\left(1-\frac{tz}{b}\right)^{-b} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt.\\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt. \end{aligned}$$

parce que la limite du premier terme dans l'intégrale est simplement e^{tz}. Notons que les conditions $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0$, $\arg\ t = \arg(1-t) = 0$ *doivent toujours être remplie, ici.*

Cette représentation intégrale peut être utilisée pour prouver la formule de transformation de Kummer :

Théorème 3.4.2. *(Formule de Kummer)*([36])

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = e^z M\left(\begin{array}{c} c-a \\ c \end{array};-z\right)$$

Preuve 3.4.2. *Nous utilisons la substitution $t = 1-u$ pour obtenir*

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt &= \int_0^1 (1-u)^{a-1}u^{c-a-1}e^{z(1-u)}du \qquad (3.19)\\ &= \frac{\Gamma(c)e^z}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 (1-u)^{a-1}u^{c-a-1}e^{-zu}du \end{aligned}$$

Cela implique que

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = e^z M\left(\begin{array}{c} c-a \\ c \end{array};-z\right)$$

Remarque 3.4.3. *Notons que cela découle également de la formule de transformation de Pfaff pour le* $F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right)$ *:*

$$F\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};z\right) = (1-z)^{-b}F\left(\begin{array}{c} b,c-a \\ c \end{array},\frac{z}{z-1}\right)$$

en remplaçant z par $\frac{z}{b}$ et en prenant la limite $b\to\infty$ d'où le resultat.

Théorème 3.4.3. *Si* $\operatorname{Re} a > 0, \quad |\arg z| < \frac{1}{2}\pi$

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}, z\right) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-z} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt \tag{3.20}$$

Remarque 3.4.4. *Pour éliminer la restriction nécessaire* $\operatorname{Re} z > 0$ *à la convergence dans* (**??**)*, considérons l'intégrale*

$$\int_\infty^{(0+)} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt \tag{3.21}$$

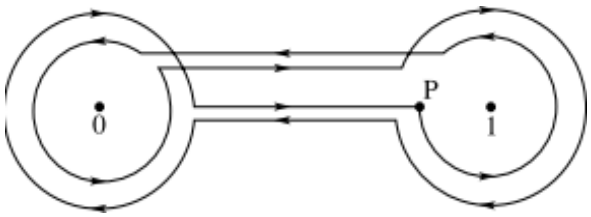
ou

$$z^{-a} \int_\infty^{(0+)} e^{-t} t^{a-1} (1+\frac{t}{z})^{c-a-1} dt \tag{3.22}$$

Ces intégrales sont aussi des solutions de l'équation confluente, mais sans les restrictions sur z *et une nécessité dans* (**??**)*.*

3.4.1 L'intégration de contour

Les deux représentations intégrales données ci-dessus (3.19) et (**??**), bien que relativement simples, restent plutôt limitées dans leurs paramètres a et c. Pour contourner ces restrictions, nous pouvons prendre comme voie d'intégration dans ([38]) le contour de Pochhammer. Le contour de l'intégration commence et se termine en un point P sur l'axe réel compris entre 0 et 1. Il encercle $t = 0$ et $t = 1$ une fois dans le sens positif, puis une fois dans le sens négatif. Les puissances fractionnaires sont continues et prennent leurs valeurs principales a $t = a$.



les auteurs (voir ([10])) montrent

$$\begin{aligned} \int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{a-1}(1-t)^{c-1} dt &= -4e^{\pi i(a+b)} \sin(\pi a) \sin(\pi b) B(a,b) \\ &= (1-e^{2\pi i a})(1-e^{2\pi i c}) B(a,c) \end{aligned}$$

de tel sorte

$$e^{-\pi i(a+c)}\int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{a-1}(1\ -t)^{c-1}dt = \frac{4\pi^2}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(a+b)}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_P^{(1+,0+,1-,0-)} e^{zt}t^{a-1}(1\ -t)^{c-a-1}dt &= \int_P^{(1+,0+,1-,0-)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{a+n-1}(1-t)^{c-a-1}dt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^2e^{(c+n)\pi i}}{\Gamma(1-a-n)\Gamma(1-c+a)\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}\\ &= \frac{(2\pi i)^2e^{c\pi i}}{\Gamma(1-a)\Gamma(c)\Gamma(1-c+a)}M\left(\begin{array}{c} a\\ c\end{array};z\right)\end{aligned}$$

Or

$$\Gamma(\lambda-n) = (-1)^n\frac{\Gamma(c)}{(1-\lambda)_n}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}M\left(\begin{array}{c} a\\ c\end{array};z\right) &= \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(c)\Gamma(1-c+a)e^{-c\pi i}}{(2\pi i)^2} \\ &\quad\times\int_P^{(0+,1+,0-,1-)} e^{zt}t^{a-1}(1\ -t)^{\gamma-a-1}dt,\quad a, c-a\neq 1,2,3,\ldots\end{aligned} \tag{3.23}$$

Des conventions similaires s'appliquent également aux intégrales restantes de cette sous-section pour $\arg t = \arg(1-t) = 0$.

Remarque 3.4.5. *Lorsque a ou $c-a$ est un entier positif, le r.h.s. de* (3.23) *une forme indéterminée.*

Si $a=-n,\ n\in\mathbb{N}$, Alors nous avons le théorème

Théorème 3.4.4. *Si $|\arg(1-t)|<\pi$ et $a=-n,\ n\in\mathbb{N}$.*

$$F\left(\begin{array}{c} -n\\ c\end{array};z\right) = \frac{(-)^n\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\frac{n!}{2\pi i}\int^{(0+)} e^{zt}t^{-n-1}(1-t)^{c+n-1}dt \tag{3.24}$$

Preuve 3.4.3. *Nous pouvons prendre le chemin C_R de Pochhammer comme contour entourant $t = 0$ une fois, en gardant $t = 1$ en dehors de celui-ci.*

$$\begin{aligned}
& \int^{(0+)} e^{zt} t^{-n-1}(1-t)^{c+n-1} dt \\
= & \int^{(0+)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} t^{k-n-1}(1-t)^{c+n-1} dt \\
= & \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{2\dot{m}}{(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (1-t)^{\gamma+n-1}|_{t=0} \\
= & \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{2\pi i}{(n-k)!} (-)^{n-k}(c+n-1)(c+n-2)\dots(c+k) \\
= & \frac{2\pi i(-)^n \Gamma(c+n)}{n!\Gamma(c)} F(-n,\ c,\ z),
\end{aligned}$$

alors,

$$F\left(\begin{array}{c} -n \\ c \end{array}; z\right) = \frac{(-1)^n \Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{n!}{2\pi i} \int^{(0+)} e^{zt} t^{-n-1}(1-t)^{c+n-1} dt$$

Remarque 3.4.6. *Si $c - a \in (-\mathbb{N})$, la représentation intégrale de $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ peut être obtenue à partir de* (3.24) *en utilisant Eq.*(6)*delaSec.*6.1.(7) *peut également être dérivé directement de* (3.23)*.*

3.5 Représentation intégrale de Barnes

Nous avons également une représentation intégrale de type Barnes pour la fonction hypergéométrique confluente ([31]). Pour trouver cette représentation, nous calculons sa transformée de Mellin. En utilisant la formule de transformation de Kummer (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^\infty z^{s-1}\ M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array},-z\right)dz &= \int_0^\infty z^{s-1}e^{-z}\ M\left(\begin{array}{c} c-a \\ c \end{array},z\right)dz \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(c-a)_n}{(c)_n\, n!}e^{-z}z^{s+n-1}dz \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(c-a)_n}{(c)_n\, n!}\int_0^\infty e^{-z}z^{s+n-1}dz \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(c-a)_n}{(c)_n\, n!}\Gamma(s+n)\end{aligned}$$

Maintenant nous avons $(s)_n = \dfrac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)}$ et en utilisant la formule de somme de Gauss

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty \frac{(c-a)_n}{(c)_n\, n!}\Gamma(s+n) &= \Gamma(s)\ F\left(\begin{array}{c} c-a,\ s \\ c \end{array};1\right) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(c-s)}\end{aligned}$$

Par la transformée inverse de Mellin, nous devrions avoir

$$\Gamma(a)\ M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};-z\right) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(c-s)}z^{-s}ds$$

ou

$$\Gamma(a)\ M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds \tag{3.25}$$

Bien sûr, une fois que nous avons vu l'intégrale de Bames pour un F, cela peut être écrit par analogie. Dans (3.25) nous avons $-z > 0$, mais cela peut être étendu. Le prochain théorème donne l'extension dû à Barnes.

Théorème 3.5.1. *Pour $|\arg z| < \pi/2$ et un nombre entier non négatif ou nul,*

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\ M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}z^s ds$$

pour $c \notin (-\mathbb{N})$ où le chemin d'intégration est courbé, si nécessaire, pour séparer les pôles $s = -a-n$ des pôles $s = n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

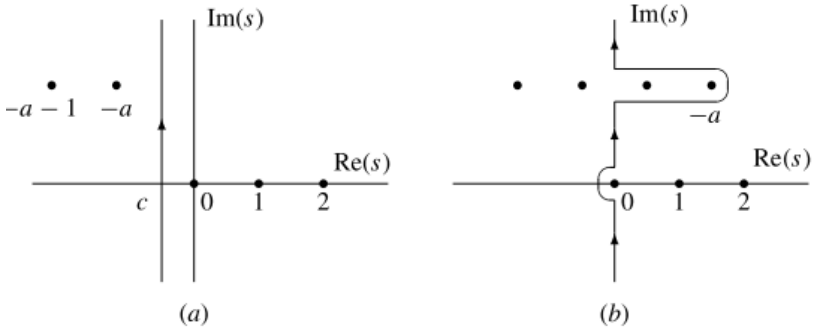
Preuve 3.5.1. *La preuve est similaire à la preuve de la représentation intégrale de Barnes pour la fonction hypergéométrique F (voir sec* (2.5.3)*). L'application du théorème des résidus de Cauchy donne alors que l'intégrale est égal a la somme des résidusconsidérent l'intégrale*

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+c)} z^s ds.$$

Le chemin d'intégration peut passer à l'infini parallèlement à l'axe imaginaire avec une valeur finie quelconque de $\alpha = \mathrm{Re}(s)$*, à condition que le contour puisse être indenté pour séparer les pôles de* $\Gamma(-s)$ *en* $s = n$ *des pôles de* $\Gamma(s+a)$ *en* $s = -a-n$*, pour un entier non négatif* n *; voir* (*la* $figure$3.2)*. D'après la formule de Stirling dans* (1.8)*, le module de l'intégrale est*

$$O(|t|^{-\sigma+a-c-\frac{1}{2}}\, e^{-\theta t-\frac{1}{2}\pi|t|})$$

Quand $t \to \pm\infty$*, où* $s = \sigma+it$ *et* $\theta = \arg z$*. Il s'ensuit que l'intégrale ci-dessus converge absolument dans le secteur* $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ *; voir preuve du théorème* (2.5.12)*. Considérons maintenant le rectangle de sommets à* $\alpha \pm iR$ *et* $N + \frac{1}{2} \pm iR$ *, où* $R > |\mathrm{Im}\, a|$ *et* N *est un entier positif qui, lorsque* $\mathrm{Re}\ (a) < 0$*, dépasse* $-\mathrm{Re}\,(a) - \frac{1}{2}$ *; Fig.*3.2(*b*)*.*
En raison de la décroissance exponentielle de l'intégrale, on constate que si N *est maintenu fixe et* $R \to \infty$*, les intégrales situées le long des côtés supérieur et inférieur du rectangle disparaissent.*



Chemins d'intégration quand (a) : $\mathrm{Re}\, a > 0$ *et*
(b) : $\mathrm{Re}\, a \leq 0$

Pour l'intégrale I_N, prenons le troisième côté que nous avons, avec $s = N + \frac{1}{2} + it$,

$$|I_N| \leq \frac{1}{2}|z|^{N+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(a+N+\frac{1}{2}+it)}{\Gamma(c+N+\frac{1}{2}+it)} \right| \frac{e^{-\theta t}\sinh \pi t}{\left|\Gamma(N+\frac{3}{2}+it)\right|} dt$$

où nous avons utilisé la formule de réflexion pour la fonction gamma (1.7)*. En utilisant le résultat obtené par Heading & Whipple* ([*34*]) *et le fait que pour N grand*

$$\left| \frac{\Gamma(a+N+\frac{1}{2}+it)}{\Gamma(b+N+\frac{1}{2}+it)} \right| \leq K\left|(N+it)^{a-c}\right| \leq K' N^{\mathrm{Re}(a-c)} \lambda_{a-c}(t)$$

uniformément pour $t \in (-\infty, \infty)$, où K, K' désignent des constantes assignables positives et

$$\lambda_\nu(t) = \begin{cases} (1+t^2)^{\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\nu)} & \mathrm{Re}(\nu) > 0 \\ 1 & \mathrm{Re}(\nu) \leq 0 \end{cases}$$

On trouve

$$|I_N| \leq \frac{K'|z|^{N+\frac{1}{2}} N^{\mathrm{Re}(a-c)}}{2\Gamma(N+\frac{3}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{a-c}(t) \frac{e^{-\theta t}}{(\cosh \pi t)^{\frac{1}{2}}} dt$$

Puisque la dernière intégrale converge absolument alors $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, on voit que $|I_N| \to 0$ quand $N \to \infty$.

Le théorème de Cauchy montre ensuite que I est donné par la somme des résidus de l'intégrle aux pôles de $\Gamma(-s)$, de sorte que

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{(-z)^n}{n!}$$

Ainsi, en remplaçant z par $-z$, nous obtenons la représentation intégrale de Barnes

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} M\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; z\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+c)} (-z)^s ds. \tag{3.26}$$

valable quand $|\arg(-z)| < \frac{1}{2}\pi$.

Remarque 3.5.1. *Cela vaut pour toutes les valeurs finies de α, à condition que le contour de l'intégration puisse être déformé pour séparer les deux suites de pôles (ce qui est toujours le cas lorsque a n'est pas un entier négatif ou zéro). Nous notons que si nous faisons le changement de variables $s \to -s$, $z \to -z$ et que nous posons $a = c$ dans* (3.26)*, nous obtenons la représentation de e^{-z} donnée dans* (2.23)*.*

Remarque 3.5.2. *Nous observons à ce stade que si nous traduisons le contour de l'intégration dans* (3.26) *à gauche sur les pôles de* $(s+a)$*, nous générons le développement asymptotique (algébrique) de* $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$ *valide comme* $|z|\to\infty$ *le secteur* $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$ *; pour plus de détails Pour ce processus,voir chap 5 dans* ([*34*])*. Ensuite, lors de l'évaluation des résidus aux pôles* $s=-a-k$*,* $k=0,1,2,...,N-1$*,nous trouvons après un petit réarrangement*

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(a)_k(1+a-c)_k}{k!}(-z)^{-k}+R_N(z),$$

où le reste après N *termes satisfait* $|R_N(z)|=O(z^{-N})$ *quand* $|z|\to\infty$ *dans* $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$.

3.6 Développement asymptotique

La fonction M se comporte très simplement (elle tend vers *un*) lorsque $z\to 0$, le comportement de la fonction U, lorsque $z\to 0$, est plus compliqué. *En gros*, elle se comporte comme la puissance z^{-a}. On peut dire aussi que la propriété individuelle qui caractérise la fonction U parmi les fonctions confluentes est la propriété d'avoir un développement asymptotique (au sens de Poincaré) très simple pour $z\to\infty$, dont le premier terme est z^{-a}.

Le développement asymptotique d'une fonction sont contenues dans la nature et la distribution des singularités de l'intégrle. Le déplacement de la voie d'intégration dans une direction produit le développement de la série de puissance convergente (ascendante), tandis que le déplacement dans la direction opposée génère la série de puissance (descendante) ou le développement asymptotique.

Nous remarquons que (3.26) définit $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)$ uniquement dans le secteur $|\arg(-z)|<\frac{1}{2}\pi$. Comme avec la fonction e^{-z} dans (2.23), nous pouvons continuer analytiquement cette définition en écrivant (pour plus de commodité, nous avons remplacé la variable s par $-s$)

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+b)} (-z)^s ds \tag{3.27}$$

où C_R désigne une boucle encerclant les pôles de $\Gamma(s)$ (au sens positif) avec des extrémités à l'infini dans $\mathrm{Re}(s) < 0$; ($Fig.3.1$).

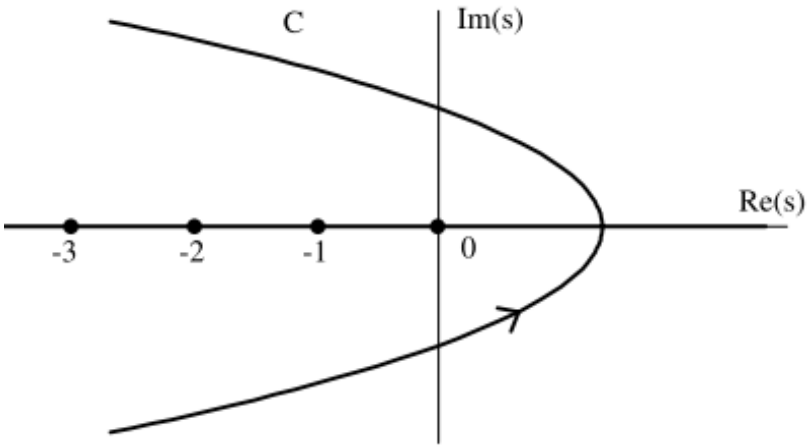


Fig. 3.1. The loop C in the complex s plane.

Cette représentation tire parti de la décroissance $\exp\{s \log s\}$contenue dans la fonction gamma voir *chap*1 et définit en conséquence $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$ sans restriction sur $\arg z$.

Le second type de fonction hypergéométrique confluente, noté $U(a; b; z)$, est défini par

$$\begin{aligned} U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)} M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M\left(\begin{array}{c} 1+a-c \\ 2-c \end{array}; z\right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

La fonction $U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$, contrairement à $M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right)$, est en général une fonction multiforme de z ; nous prendrons comme branche principale celle qui se trouve dans

le plan z coupé le long de l'axe réel négatif. Cette fonction est analytique dans le plan de coupe pour toutes les valeurs complexes de a, c et z (même lorsque c est un entier négatif ou zéro). Considérons l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{R-\infty i}^{R+\infty i} \Gamma(-s)\Gamma(s+a)\Gamma(s+1+a-c)z^{-s}ds,$$

où le chemin de l'intégration peut être indenté (si nécessaire) pour séparer les pôles de $\Gamma(-s)$ de ceux de $\Gamma(s+a)\Gamma(s+1+a-c)$ (ce qui est toujours possible à condition que $a = 0, -1, -2, ...$ et $a - c \neq -1, -2, ...$). La référence à la règle 1 au § 2.4 montre que l'intégrale ci-dessus est définie pour $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$. La translation du contour d'intégration à gauche sur les pôles de $\Gamma(s+a)\Gamma(s+1+a-c)$ produit alors un développement convergent en puissances ascendantes de z proportionnel à za fois le côté droit de (3.28). On retrouve donc la représentation

$$\begin{aligned} & \Gamma(a)\Gamma(1+a-c)z^a U(a;c;z) \\ = \; & \frac{1}{2\pi i}\int_{R-\infty i}^{R+\infty i} \Gamma(-s)\Gamma(s+a)\Gamma(s+1+a-c)z^{-s}ds \end{aligned} \tag{3.29}$$

valable pour $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$.

3.6.1 Développement de type Poincaré

Quand $z \to \infty$

De nouveau, nous observons que le déplacement de la voie d'intégration vers la droite sur les pôles de $\Gamma(-s)$ génère un dévloppement (algébrique) asymptotique donné par

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) \backsim z^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(1+a-c)_k}{k!}(-z)^{-k}$$

dans région $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$.

Une représentation valide sans restriction sur $\arg z$ peut également être obtenue en remplaçant le chemin d'intégration rectiligne dans (3.29) par une boucle appropriée C comme dans (3.27).

Cette représentation de M peut être utilisée pour obtenir une développement asymptotique en déplaçant la ligne d'intégration vers la gauche. Les résidus proviennent des pôles de $\Gamma(a+s)$ à $s=-a-n$. Le résultat est contenu dans le théorème suivant

Théorème 3.6.1. *Pour* $\operatorname{Re} z<0$,

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)\sim\frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c-a\right)}\left(-z\right)^{-a}\ {}_2F_0\left(\begin{array}{c} a,\ a+1-c \\ - \end{array};-\frac{1}{z}\right)$$

Corollaire 3.6.1. *Pour* $\operatorname{Re} z>0$,

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)\sim\frac{\Gamma\left(c\right)e^{z}}{\Gamma\left(a\right)z^{c-a}}\ {}_2F_0\left(\begin{array}{c} c-a,\ 1-a \\ - \end{array};\frac{1}{z}\right)$$

Preuve 3.6.1. *Ceci découle du théorème* (3.6.1) *et une application de* (3.14).

Cependant, lorsque la ligne d'intégration est déplacée vers la droite, on peut voir que

$$J=\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(1-c\right)M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)+\Gamma\left(a+1-c\right)\Gamma\left(c-1\right)z^{1-c}M\left(\begin{array}{c} a+1-c \\ 2-c \end{array};z\right)$$

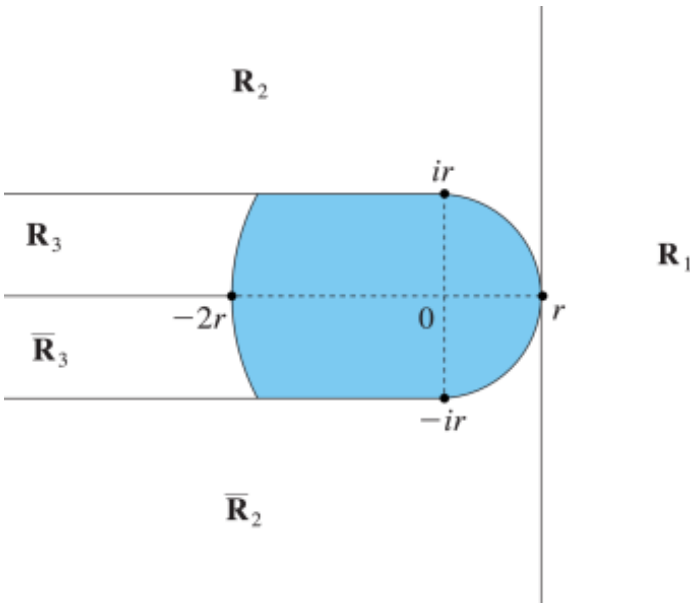
quand $\left|\arg z\right|<\frac{3\pi}{2}$.

De plus dans la région $-\frac{1}{2}\pi\leq\pm\ \arg z\leq\frac{3}{2}\pi$,

$$M(a;c;z)=\frac{e^{z}z^{a-c}}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_k(c-a)_k}{k!}z^{-k}+\frac{e^{\pm\ \pi ia}z^{-a}}{\Gamma(c-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(a-c+1)_k}{k!}(-z)^{-k} \tag{3.30}$$

à moins que $a=0,-1,\ldots$et $c-a=0,-1,\ldots..$ Également,

3.6.2 Limites d'erreur



Les régions R_1, R_2, $\overline{R}_2$, R_3 et $\overline{R}_3$ sont les fermetures des régions non ombrées indiquées délimitées par les lignes droites et les arcs de cercle centrés à l'origine, avec $r = |b - 2a|$

$$U(a,b,z) = z^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_s (a-c+1)_s}{s!} (-z)^{-s} \varepsilon_n(z) \tag{3.31}$$

où

$$|\varepsilon_n(z)|,\ \beta^{-1} |\varepsilon_n'(z)| \leq 2\alpha C_n \left| \frac{(a)_n (a-b+1)_n}{n! z^{a+n}} \right| e^{(\frac{2\alpha\rho C_1}{|z|})}$$

et avec la notation de la ($figure$ 4)

$$C_n = 1, \quad \chi(n), \quad (\chi(n) + \sigma\nu^2 n)\nu^n,$$

selon

$$z \in R_1,\ z \in R_2 \cup \overline{R}_2, \quad z \in R_3 \cup \overline{R}_3,$$

respectivement, avec

$$\sigma = \left| \frac{b-2a}{z} \right|,$$

$$\nu = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\sigma^2} \right)^{-1/2},$$

$$X(n) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})} \sim (\frac{1}{2}\pi x)^{\frac{1}{2}}.$$

Aussi, quand $z \in R_1 \cup R_2 \cup \overline{R}_2$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1-\sigma}, \\ \beta &= \frac{1-\sigma^2+\sigma|z|^{-1}}{2(1-\sigma)}, \\ \rho &= \frac{1}{2}\left|2a^2-2ab+b\right| + \frac{\sigma(1+\frac{1}{4}\sigma)}{(1-\sigma)^2} \end{aligned} \tag{3.32}$$

et quand $z \in R_3 \cup \overline{R}_3, \sigma$ est remplacé par $\nu\sigma$ et $|z|^{-1}$ est remplacé par $\nu\,|z|^{-1}$ partout dans (3.32).

Les bornes d'erreur correspondantes pour (3.30) peuvent être construites en combinant (13.2.41) avec (3.31)-(3.32).

3.6.3 Développement exponentiellement améliorée

Soit

$$U(a,b,z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a)_s(a-c+1)_s}{s!}(-z)^{-s} + R_n(a,c;z)$$

et

$$R_n(a,b,z) = \frac{(-1)^n 2\pi z^{a-b}}{\Gamma(a)(a-b+1)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-a)_s(a-c+1)_s}{s!}(-z)^{-s} G_{n+2a-b-s}(z) + (1-a)_m(b-a)_m R_{m,n}(a,b,z \right.$$

où m est un entier arbitraire non négatif, et

$$G_p(z) = \frac{e^z}{2\pi}\Gamma(p)(1-p,z).$$

Alors quand $z \to \infty$ avec $||z| - n|$ borné et $a, b,\ m$ fixe

$$R_{m,n}(a,b,z) = \begin{cases} O(e^{-|z|}z^{-m}) & |\arg z| \le \pi \\ O(e^{z}z^{-m}) & \pi \le |\arg z| \le \frac{5}{2}\pi - \delta \end{cases}$$

Sauf quand $a = 0, -1, \ldots$ (cas polynomiaux),
Si $|\arg z| \le \frac{1}{2}\pi$.

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}$$

Pour c entier,

$$\begin{aligned} U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) &\sim \pi \cot(\pi a) \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c} G\left(\begin{array}{c} 1-a \\ c-a \end{array}; z\right) \quad si\ \operatorname{Re} z > 0 \\ U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) &\sim i\pi \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} G\left(\begin{array}{c} a \\ c-a-1 \end{array}; -z\right) \quad si\ \operatorname{Re} z < 0 \end{aligned}$$

où

$$G\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = 1 + \frac{a}{1!z} + \frac{a(a+1)\,c(c+1)}{2!z^2} + \ldots$$

Quand $z \to 0$

$$M\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = 1 + O(z).$$

Ensuite, dans les cas où $a = -n$ ou $-n + c - 1$, où n est un entier non négatif,

$$U\left(\begin{array}{c} -n \\ c \end{array}; z\right) = (-1)^n (c)_n + O(z),$$

$$U\left(\begin{array}{c} -n+c-1 \\ c \end{array}; z\right) = (-1)^n (2-c)_n z^{1-c} + O(z^{2-c}).$$

Dans tous les autres cas

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}; z\right) = \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} + O(z^{2-\operatorname{Re} c}), \quad \operatorname{Re} c \ge 2, c \ne 2,$$

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)=\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}z^{1-c}+\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}+O(z^{2-\mathrm{Re}\,c}),\qquad 1\leq \mathrm{Re}\,b<2, b\neq 1$$

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}+O(z^{1-\mathrm{Re}\,c}),\qquad 0<\mathrm{Re}\,c<1$$

$$U\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}+O(z),$$

Remarque 3.6.1. *Pour les preuves, voir Olver ([13]) et ([12])). Pour le cas particulier* $\arg z=\pm\pi$*, voir Paris ([35]). Pour des extensions aux extensions hyperasymptotiques, voir Olde Daalhuis et Olver ([1]).*

3.7 Équations et fonctions de *Whittaker* $M_{k,m}(z)$

Whittaker En [1904] a donné une autre forme importante de l'équation *confluente* ([10]). Ceci est obtenu à partir de l'équation de Kummer (3.1) par une transformation qui élimine la dérivée première de l'équation.
Remplçons $y=e^{z/2}z^{-c/2}w(z)$ dans l'équation

$$zy"+(c-z)y'-ay=0$$

On obtient

$$w"+[-\frac{1}{4}+(\frac{c}{2}-a)\frac{1}{z}+\frac{c}{2}(1-\frac{c}{2})\frac{1}{z^2}]w=0.$$

Les exposants des deux solutions régulières de cette équation au point $z=0$ sont $1-\dfrac{c}{2}$ et $\dfrac{c}{2}$. Deux solutions indépendantes de cette équation peuvent avoir une forme plus symétrique si on pose

$$c=1+2m,\ \frac{c}{2}-a=k,$$

i. e.,

$$m=\frac{c-1}{2},\ a=\frac{1}{2}+m-k.$$

Le résultat est l'équation de *Whittaker* :

$$w" + [-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2}]w = 0, \tag{3.33}$$

3.7.1 Solutions de l'équation de *Whittaker*

D'après les solutions (3.3) de (3.1), il est clair que lorsque $2m$ n'est pas un entier, deux solutions linéairement indépendantes sont de (3.33) sont

$$M_{k,m}(z) = e^{-z/2}\ z^{\frac{1}{2}+m}\ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}+m-k \\ 1+2m \end{array}; z\right) \tag{3.34}$$

$$W_{k,m}(z) = e^{-z/2}\ z^{\frac{1}{2}+m} U\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}+m-k \\ 1+2m \end{array};\ z\right) \tag{3.35}$$

La solution $M_{k,\pm m}(z)$ sont appelées fonctions de *Whittaker*.

Remarque 3.7.1. *Lorsque* $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$ *et* $2m$ *n'est pas un entier*

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} M_{k,-m}(z)$$

où $|\arg z| < \frac{3\pi}{2}$ *et* $2m$ *n'est pas un entier*

$$W_{-k,m}(-z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)} M_{-k,m}(-z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)} M_{-k,-m}(-z)$$

Cependant, la fonction hypergéométrique confluente disparaït lorsque $2m$ *est un entier, les fonctions de Whittaker sont donc souvent définies à la place. Les fonctions de Whittaker sont liées aux fonctions cylindrique parabolique.*

Remarque 3.7.2. *En raison des facteurs* $z^{\frac{1}{2}\pm m}$*, les fonctions ne sont pas à valeur unique dans le plan complexe. Habituellement, on restreint* z *à* $|\arg z| < \pi$
Alors $M_{k,\pm m}(z)$ *sont des fonctions analytiques à valeur unique dans le plan* z *coupées le long de l'axe réel négatif de* $-\infty$ *à* 0.
Les formules pour ${}_1F_1$ *sont évidemment liées aux fonctions de Whittaker. La première formule de Kummer, par exemple, prend la forme*

$$z^{-\frac{1}{2}-m} M_{k,m}(z) = (-z)^{-\frac{1}{2}-m}\ M_{-k,m}(-z)$$

3.7.2 Relations de récurrence

Les fonctions de *Whittaker* satisfont aux relations de récurrence

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) &= z^{1/2}W_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(z) + \left(\frac{1}{2}+m-k\right)W_{k-1,m}(z) \\ W_{k,m}(z) &= z^{1/2}W_{k-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(z) + \left(\frac{1}{2}-m-k\right)W_{k-1,m}(z) \\ zW'_{k,m}(z) &= \left(k-\frac{1}{2}z\right)W_{k,m}(z) + \left[m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]W_{k-1,m}(z) \end{aligned}$$

3.7.3 Représentation intégrale

Un inconvénient des fonctions $M_{k,\pm m}(z)$ est que l'un d'entre eux ne sont pas définis lorsque $2m$ est un nombre entier. De plus, le comportement asymptotique de la solution de l'équation de *Whittaker* n'est pas facilement obtenu à partir de ces fonctions. Nous utilisons donc l'intégrale dans (3.22) pour dériver une autre fonction de *Whittaker*, $W_{k,m}(z)$. Ceci est défini par

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-z/2}z^k \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}dt \end{aligned}$$

où $\arg z$ prend sa valeur principale et le contour ne contient pas le point $t=-z$. De plus, $|\arg(-t)| \leq \pi$, et lorsque t approche de 0 le long du contour, $\arg(1+t/z) \to 0$. Cela rend l'intégrale unique valorisée. On vérifie facilement que $W_{k,m}(z)$ est également une solution de (3.33). Notons que l'équation de *Whittaker* (3.33) est inchangée lorsque z et k changent de signe. Ainsi, $W_{-k,m}(-z)$ est aussi une solution et est indépendant de $W_{k,m}(z)$.

Développement asymptotique de $W_{k,m}(z)$

Le lecteur devrait vérifier que les remarques après (3.22) impliquent que

$$W_{k,m}(z) \sim e^{-z/2}z^k M\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}-k+m, \frac{1}{2}-k-m \\ - \end{array}; -\frac{1}{z}\right), \quad |z| \to \infty$$

lorsque $|\arg z| \leq \pi - \delta < \pi$. Par conséquent,

$$W_{\pm k,m}(\pm z) = e^{\pm z/2}\,(\pm z)^{\pm k}\left\{1 + o\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$

Cela montre que $W_{k,m}(z)$ et $W_{-k,m}(-z)$ sont linéairement indépendants.

Fonctions *Whittaker* $W_{k,m}(z)$

$M_{k,\pm m}(z)$ sont les solutions de l'équation de *Whittaker* au point $z = 0$. Lorsque $2m$ est un entier, l'un d'eux perd son sens en général. De plus, ces solutions ne conviennent pas à la discussion des propriétés des solutions pour $|z|$ grands . Pour faire face à ces problèmes, *Whittaker* a introduit deux autres fonctions, $W_{\pm k,m}(\pm z)$, qui sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation de *Whittaker* dans tous les cas, et sont aptes à la recherche du comportement asymptotique de la solution.
Remplaçons zt par $-t$, en multipliant par $e^{-z/2}z^{c/2}$ et en exprimant a et c en termes de k et m, nous obtenons la solution de l'équation de *Whittaker* sous forme intégrale :

$$w(z) = Ae^{-z/2}z^k \int_{c'} e^{-t}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}(1+\frac{t}{z})^{k-\frac{1}{2}+m}dt.$$

Le chemin de l'intégration C' est tel qu'il faut faire

$$\{e^{-t}(-t)^{-k+\frac{1}{2}+m}(1+\frac{t}{z})^{k+\frac{1}{2}+m}\}_{C'} = 0$$

C' est un contour qui part du point à l'infini sur l'axe réel positif, encerclant le point $t = 0$ une fois le sens positif, puis revient au point à l'infini, le point $t = -z$ étant maintenu à l'extérieur le contour.

Définition 3.7.1. *La fonction de Whittaker $W_{k,m}(z)$ est*

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) &= -e^{-\frac{z}{2}}z^k\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2}-m)}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}(1+\frac{t}{z})^{k-\frac{1}{2}+m}dt \\ (k+\frac{1}{2}-m &\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots), \end{aligned}$$

où $|\arg(z)| < \pi, |\arg(-t)| \leq \pi$, *et lorsque t approche du point $t = 0$ le long d'un chemin situé à l'intérieur du contour,* $\arg(1 + t/z) \to 0$.

Remarque 3.7.3. *L'équation de Whittaker est invariante lorsque k et, dans le même temps, z changent de signes. Par conséquent, ce qui suit est aussi une solution de l'équation* (3.33) *:*

$$\begin{aligned} W_{-k,m}(-z) &= -e^{z/2}(-z)^{-k}\frac{\Gamma(-k+\frac{1}{2}-m)}{2\pi i} \\ &\quad \times \int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}(-t)^{k-\frac{1}{2}+m}(1-\frac{t}{z})^{-k-\frac{1}{2}+m}dt \\ (-k+\frac{1}{2}-m &\neq 0,-1,-2,\ \ldots; |\arg(-z)|<\pi,\ |\arg(-t)|\leq\pi) \end{aligned}$$

De plus, il est linéairement indépendant de $W_{k,m}(z)$.
Lorsque $k+\frac{1}{2}-m = 0,-1,-2,\ldots$, le r.h. s. de (3) *est une forme indéterminée, car alors $\Gamma(k+\frac{1}{2}-m)\to\infty$, et comme $t=0$ n'est plus un point de branchement de l'intégrande, la valeur de l'intégrale est égale à zéro. Dans de tels cas, supposons d'abord que $k+\frac{1}{2}-m$ n'est pas égal à zéro ni à un entier négatif. Ensuite, nous pouvons déformer le contour de l'intégration en un tracé qui part de l'infini, longe la "rive" supérieure de l'axe positif en $\delta(>0)$, entourant $t=0$ une fois dans le sens positif, puis revient à l'infini. le long de la "rive" inférieure de l'axe réel positif.*

Supposons que $\mathrm{Re}(k-\frac{1}{2}-m)<0$, alors la valeur de l'intégrale le long du cercle autour de $t=0$ se rapproche de zéro lorsque δ tend vers zéro, et

$$\begin{aligned} &\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}(1+\frac{t}{z})^{k-\frac{1}{2}+m}dt \\ &= [e^{(-k-\frac{1}{2}+m)\pi i}-e^{(-k-\frac{1}{2}+m)\pi i}]\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-k-\frac{1}{2}+m}(1+\frac{t}{z})^{k-\frac{1}{2}+m}dt \\ &= -2i\sin\pi(k+\frac{1}{2}-m)\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-k-\frac{1}{2}+m}(1+\frac{t}{z})^{k-\frac{1}{2}+m}dt. \end{aligned}$$

En substituant dans (3) et en utilisant l'équation (2) de *laSec.*3.5, nous avons

$$W_{k,m}(z)=\frac{e^{-z/2}z^k}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-k-\frac{1}{2}+m}(1+\frac{t}{z})^{k-\frac{1}{2}+m}dt,$$

qui peut être pris comme la représentation de $W_{k,m}(z)$ sous la condition $k+\frac{1}{2}-m = 0,-1,-2,\ \ldots$
Pour $W_{-k,m}(-z)$, il y a une expression similaire. Il suffit de changer z et k (5) en $-z$ et $-k$, respectivement.

Intégrales de Barnes pour $W_{k,m}(z)$

A partir de la représentation en série asymptotique, en utilisant une méthode similaire à celle décrite dans ([36]), nous pouvons normalement obtenir la représentation intégrale de Barnes pour $W_{k,m}(z)$:

Théorème 3.7.1. *La représentation intégrale de Barnes pour $W_{k,m}(z)$ est*

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{\frac{-\pi}{2}} z^k}{2\pi i} \int_{-\cdot\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(-s-k-m+\frac{1}{2})\Gamma(-s-k+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(-k-m+\frac{1}{2})\Gamma(-k+m+\frac{1}{2})} z^s ds. \qquad (3.36)$$

Le chemin de l'intégration est tel qu'il garde les pôles de $\Gamma(s)$ à sa gauche et ceux de $\Gamma(-s-k\pm m+(1/2))$ à sa droite. Cela nécessite que $k\pm m+(1/2)$ ne soit pas égal à un entier positif.

Corollaire 3.7.1. *L'intégrale* (3.36) *vérifie l'équation de Whittaker*

Preuve 3.7.1. *Posons* $W(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^k v(z)$. *La substitution dans équation* (3.36) *donne*

$$z^2 v'' + 2kzv' \ + (k-m-\frac{1}{2})(k+m-\frac{1}{2})v - z^2 v' = 0.$$

Mettre l'intégrale

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s)\Gamma(-s-k-m+\frac{1}{2})\Gamma(-s-k+m+\frac{1}{2}) z^s ds$$

dans le l.h. s. de l'équation pour u, on obtient

$$(\int_{-i\infty}^{i\infty} - \int_{1-i\infty}^{1+i\infty}) \Gamma(s)\Gamma(-s-k-m+\frac{3}{2})\Gamma(-s-k+m+\frac{3}{2}) z^s ds.$$

Entre ces deux voies d'intégration, il n'y a pas de singularités de l'intégrant et, comme nous l'avons montré ci-dessus, la valeur de l'intégrande s'approche de zéro lorsque s tend vers l'infini le long des voies d'intégration. Par conséquent, selon le théorème de Cauchy, l'intégrale s'efface, c'est-à-dire que je vérifie l'équation de Whittaker. Par conséquent,

$$I \ = AW_{k,m}(z) + BW_{-k,m}(-z).$$

Soit $|z|$ approche l'infini, $\mathrm{Re}(z) > 0$. *Des expressions asymptotiques de $W_{\pm k,m}(\pm z)$, on voit que B doit être égal à zéro. De plus, puisque I et $W_{k,m}(z)$ ont la même*

devellopement asymptotique, $A = 1$ *et* (3.33) *est justifiée. De* (3.33)*, le domaine* $W_{k,m}(z)$ *est étendu à* $|\arg z| < 3\pi/2$

Bibliographie

[1] A. B. Olde Daalhuis and F. W. J. Olver (1995a) Hyperasymptotic solutions of second-order linear differential equations. I. Methods Appl. Anal. 2 (2), pp. 173–197.

[2] A. Erdéylie, Transformation of hypergeometric integrals by means of fractionalintegration by parts, Quart. J. Math., Oxford Ser., 9 : 176-189, 1939.

[3] B. C. Berndt, Ramanujan's Notebooks Part II, Springer-Verlag, New York,1989.

[4] B. Carlson, Special Functions of Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1977.

[5] C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam, Commen. Soc. Reg.Sci. Götting. Rec., Vol 2, 1812.

[6] C. Joshi, Y. Vyas, Extensions of certain classical integrals of Erdélyi for Gauss hypergeometric functions, J. Comp. Appl. Math., 160 : 125-138, 2003.

[7] Carl M. Bender (en) et Steven A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, New York, Mc Graw-Hill, coll. « International Series in Pure and Applied Mathematics », 1978, 593 p., relié

[8] E. Artin, The Gamma Function (translated by Michael Butler), Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[9] E. D. Rainville, Special Functions, Chelsea Publishing Company, New York,1960.

[10] E.T. *Whittaker*, G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, London, 1927.

[11] F. J. Whipple, On series allied to the hypergeometric series with argument -1, Proc. London Math. Soc., 30 : 81-94, 1930.

[12] F. W. J. Olver "Exponentially-improved asymptotic solutions of ordinary differential equations I : The confluent hypergeometric function". SIAM J. Math. Anal. 24 (3), pp. 756–767)(1993)

[13] F. W. J. Olver "Uniform, exponentially improved, asymptotic expansions for the confluent hypergeometric function and other integral transforms". SIAM J. Math. Anal. 22 (5), pp. 1475–1489 (1991).

[14] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[15] G. H. Hardy, Collected Papers - VII, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[16] G. K. Srinivasan, The Gamma function - An eclectic tour, Amer. Math. Monthly, 114 (2007) 297-315.

[17] H. Bateman, The solution of linear differential equations by means of definite integrals, Trans. Cambridge Phil. Soc., 21 : 171-196, 1909.

[18] J. B. Seaborne, Hypergeometric Functions and their Applications, Springer-Verlag, New York, 1991.

[19] J. Choi, Contiguous extensions of Dixon's theorem on the sum of a x F 3, J. of Inequalities and applications, Volume 2010, 1-18.

[20] J. Havil, Gamma : Exploring Euler's Constant, Princeton University Press, 2003. 190.

[21] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, Distributions, Theory and Applications, Translated from Dutch by J. P. van Braam Houckgeest, Birkhauser, 2010.

[22] K. A. Driver, S. J. Johnston, An integral representation of some hypergeometric functions, Electron. Trans. Numer. Anal., 25 : 115-120, 2006. 188

[23] K. Driver, M. Möller, Quadratic and cubic transformations and zeros of hypergeometric polynomials, J. Comp. Appl. Math., 142 (2) : 411-417, 2002.

[24] L. J. Slater, Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

[25] L. J. Slater, Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966. 193.

[26] M. Abramowitz, I. A. Stegun, eds. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1965.

[27] H. T. Davis, "Tables of the Higher Mathematical Functions", Vol. I, The Principia Press, Bloomington, Ind., 1933.

[28] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, A = B, A. K. Peters., Wellesley,Massachusetts, 1996.

[29] M. W. Coffey, S. J. Johnston, Some results involving series representations of hypergeometric functions, J. Comp. Appl. Math., 233 : 674-679, 2009.

[30] N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, B. G. Teubner, Leipzig, 1906.

[31] N. N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Prentice Hall, New Jersey, 1965.

[32] N. M. Temme, Special Functions : An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics, John Wiley and Sons, New York, 1996.

[33] P. J. Davis. Leonhard Euler's Integral : A Historical Profile of the Gamma Function. The American Mathematical Monthly, 66 (10) : 849-869, 1959.

[34] R. B.Paris D. Kaminski ; Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals ; Encyclopedia of mathematics and its applications ; Cambridge University Press 2001.

[35] R. B. Paris Exponentially small expansions of the confluent hypergeometric functions. Appl. Math. Sci. (Ruse) 7 (133-136), pp. 6601–6609 (2013).

[36] R. Vidunas, A Generalization of Kummer's identity, Rocky Mt. J. of Math., 32 (2) : 919-936, 2002.

[37] S. Ramanujan, Some definite integrals, Messenger of Mathematics, 44 (1915) 10-18.

[38] Vadim Schechtman, Introduction aux Fonctions Speciales , Notes du cours. Université de Toulouse, France Automne 2006

[39] W. J. Archibald, Phil. Mag. (London) 7, 26, 419 (1938).

[40] W. Koepf, Hypergeometric Summation : An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities, Vieweg, Braunschweig, 1998.

[41] W. N. Bailey, Generalized Hypergeometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1935, Reprinted : Stechert-Hafner, New York, 1964.

[42] Whittaker and Whatson , A course of modern analysis, 4-th Edition, Cambridge at the university Press, 1927.

[43] Carl M. Bender (en) et Steven A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, New York, Mc Graw-Hill, coll. « International Series in Pure and Applied Mathematics », 1978, 593 p., relié