République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Les filtrations faiblement et fortement browniennes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

Abdourrahmane **B**ouanani [1]

Sous la direction de

Dr. A. Bouaka

Soutenue le 16 Juillet 2019 devant le jury composé de

Mme. Dr. **F**. Mokhtari	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Mlle. Dr. **A**. Bouaka	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteuse
Mlle. Dr. **S**. Idrissi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mlle. Dr. **L**. Bousmaha	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : imbouananiabdou@gmail.com

Remerciements

Je souhaite avant tout remercier Dieu clément miséricordieux de m'avoir donner le courage et la volonté de réaliser mon objectif.

A celle sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour, Mlle. **A. BOUAKA**, dont les précieux conseils et les longues conversation, j'ai apporté un véritable oeil critique indispensable à la qualité de ce travail, et qui a su le superviser afin que je puisse vous le présenter aujourd'hui.

Je remercie Madame. **F. MOKHTARI** pour l'attention qu'il a manifesté à l'égard de ce mémoire, en s'engageant à en être la présidente de jury.

De même, je suis grandement reconnaissant à Mlle. **S. IDRISSI** et Mlle. **L. BOUSMAHA** de l'intérêt et du temps qu'ils ont bien voulu accorder à l'expertise de ce mémoire, en acceptant d'en être les examinatrices. C'est un grand honneur pour moi que vous ayez accepté de juger la qualité de ma production, j'espère que vous apprécierez ce mémoire autant que j'ai eu le plaisir à l'élaborer.

Un grand merci à Mlle. **F. BENZIADI** pour son soutien constant et chaleureux pendant toute la réalisation de ce travail.

Enfin, je souhaite de tout coeur remercier ma mère qui n'a économisé aucun moyen pour me voir réussir : son soutien, son amour et sa foi en moi pour modeler l'homme que je suis. Voir la fierté dans ses yeux est la plus belle des récompenses.

Je tiens à remercier mon frère **A. FERHANE** et ma sœur **FATIHA** qui m'ont supporté et encouragé pendant les moments de doute.

A tous mes amis de l'université qui m'ont permis de m'évader de mes travaux et de décompresser.

À tous ceux qui ont, de prés ou de loin, participé à l'élaboration de ce mémoire, et que je ne pourrai nommer ici, je vous remercie de votre sollicitude aussi minime qu'elle ait pu être.

$\preceq$ **À tous, merci!** $\succeq$

Dédicaces

Je dédie ce travail

Á ma très chère mère Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu m'a données depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserve et t'accorde la santé, longue vie et bonheur.

Á la grande dame qui a tant sacrifié pour nous ; ma grand mère maternelle. Une spéciale dédicace, à mes chères et adorables cousines et leurs familles, et à ma chère soeur Fatiha la douce.

En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.

Á tous les membres de ma famille maternelle, petits et grands, veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection. A tous mes collègues de la promotion de Master A.S.S.P.A 2018.

Table des matières

Introduction

Les filtrations ont été introduites par Doob et constituent une caractéristique fondamentale de la théorie des processus stochastiques. La plupart des notions de base, tels que les martingales, semimartingales, temps d'arrêt impliquent la notion de filtration. Cette notion a été étudiée par exemple dans les livres de Karandikar et Rao [13], Jeanblanc et al. [10] et dans les articles de Jeanblanc et Simon [9], Guiol [12], Nikeghbali [17], Le Gall [14], Berglund [1], Jeanblanc [8] et Pulido [19].

La théorie moderne du mouvement brownien date des années 1930. Initiée par N. Wiener, A. Kolmogorov et P. Lévy, on peut la trouver exposée en détailles avec ses développements les plus récents dans le livre de C Klebaner [4] et les articles de Lévique [15] et Elie [7], Gallardo [11] et Zambotti [22].

La *propriété de représentation prévisible (PRP)* s'intéresse à la représentation des martingales, i.e., on dit qu'une martingale locale M a la $\mathbb{F}$-PRP, si toute $\mathbb{F}$-martingale locale X nulle en 0 s'écrit comme une intégrale stochastique d'un processus $\mathbb{F}$-prévisible H par rapport à M,

$$X_t = \int_0^t H_s dM_s, \quad \forall t \geq 0.$$

Cette propriété a été étudiée dans les livres de Jeanblanc et al. [10], Mansuy et Yor [16] et C Klebaner [4] et dans les articles de Elie [7], Chorro [3], El Karaoui [6] et Pham [18].

La propriété de représentation prévisible joue un rôle important dans la notion de filtrations *faiblement* et *fortement browniennes*. Une filtration $\mathbb{F}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathcal{F}_0$ est $\mathbb{P}$.p.s triviale, est dite fortement brownienne s'il existe un $\mathbb{F}$-mouvement brownien B tel que $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$. Une filtration $\mathbb{F}$ est dite faiblement brownienne s'il existe un $\mathbb{F}$-mouvement brownien B de tel sorte que chaque $\mathbb{F}$-martingale locale X peut s'écrire comme

$$X_t = c + \int_0^t H_s dB_s, \quad t \geq 0$$

tels que $c \in \mathbb{R}$ et H est un processus $\mathbb{F}$-prévisible. Ces filtrations ont été étudiées par Zvonkin [23], Mansuy et Yor [16], Nikeghbali [17], Jeanblanc et al. [10] et Yor [21].

Ce mémoire contient trois chapitres : dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats généraux concernant les notions de filtration, mouvement brownien et semimartingales, et nous nous intéressons à l'intégrale d'Itô.

Le deuxième chapitre étudie la propriété de représentation prévisible (PRP). Nous commençons par des définitions et propriétés de cette représentation , puis nous étudions la stabilité de la PRP sous changement localement équivalente de probabilité, et nous donnons quelques exemples concernant cette propriété, et nous finissons ce chapitre par quelques applications de la PRP en finance (la propriété de l'absence de l'arbitrage et la probabilité de risque neutre).

Le dernier chapitre est consacré aux filtrations faiblement et fortement browniennes. Premièrement, nous rappelons les définitions de ces filtrations, puis nous étudions la stabilité des filtrations faiblement browniennes sous changement localement équivalente de probabilité, et enfin, nous donnons quelques exemples de filtrations faiblement et fortement browniennes.

Chapitre 1

Filtrations, processus stochastiques et intégrale d'Itô

Dans ce chapitre, nous présentons des concepts généraux sur les filtrations, les σ-algèbres prévisibles, optionnelles et progressives, semimartingales, mouvement brownien et intégrale d'Itô.

1.1 Filtrations

On donne la définition suivante ; voir par exemple Jeanblanc et al. ([10], Définition 1.1.10.1, p. 12).

Définition 1.1.1. *Un processus X à temps continu dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \geq 0)$ telle que l'application $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable.*
Un processus X est dit ***continu****, si pour tout ω, l'application $t \to X_t(\omega)$ est continue.*

On rappelle la définition des filtrations ; voir par exemple Nikeghbali ([17], Définition 1, p. 1).

Définition 1.1.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.*
Une **filtration** *sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous σ-algèbres de $\mathcal{F}$. En d'autres termes, pour chaque t. $\mathcal{F}_t$ est une σ-algèbre incluse dans $\mathcal{F}$, et si $s \leq t$. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

*Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est appelé un **espace de probabilité filtré**.*

On a le résultat suivant ; voir par exemple Berglund ([1], Définition 3.1.2, p. 14).

Remarque 1.1.0.1. $\mathcal{F}_t$ répresente la quantité d'information disponible à l'instant t, il est logique que cette quantité augmente avec le temps.

On a la définition suivante ; voir par exemple Karandikar et Rao ([13], Définition 2.18, p. 40).

Définition 1.1.3. *Un processus X est dit $\mathbb{F}$-**adapté**, si pour tout t, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

On donne la définition des filtrations engendrées par un processus ; voir par exemple Jeanblanc et Simon ([9], Définition 1.7, p. 6).

Définition 1.1.4. *La filtration engendrée par un processus X notée $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ est la suite croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X$ engendrée par X_s, $\forall s \leq t$, i.e., $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$.*

La définition des filtrations complètes est donnée dans la définition suivante ; voir par exemple Nikeghbali ([17], Définition 3, p. 1).

Définition 1.1.5. *La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est dite* **complète** *si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complèt et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables.*

On donne la définition des filtrations satisfaisant les conditions habituelles ; voir par exemple Guiol ([12], Définition 1.7, p. 14).

Définition 1.1.6. *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration, on définit $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\cup_{s<t}\mathcal{F}_s)$ la tribu des événements antérieurs à $t > 0$ et $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ la tribu des événements instantanéments postérieurs à $t \geq 0$.*
*On pose $\mathcal{F}_{0^-} := \mathcal{F}_0$, on dit que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est **continue à droite** si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ pour tout $t \geq 0$. De façon analogue, si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$ pour tout $t \geq 0$, on dit qu'elle est **continue à gauche**.*

Remarque 1.1.0.2. On dit qu'une filtration $\mathbb{F}$ satisfait les **conditions habituelles**, si elle est complète et continue à droite.

1.2 Les σ-algèbres prévisibles, optionnelles et progressives

On rappelle la définition des tribus et processus prévisibles ; voir par exemple Guiol ([12], Définition 1.11, p. 16), Nikeghbali ([17], Définition 2.11, p. 349).

Définition 1.2.1. *On appelle **tribu prévisible** par rapport à la filtration $\mathbb{F}$, la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, notée $\mathcal{P}$ engendrée par tous les ensembles de la forme $]s,t] \times A$ où $A \in \mathcal{F}_s$ avec $0 \leq s < t$.*

Définition 1.2.2. *La σ-algèbre $\mathcal{P}$ prévisible est la σ-algèbre définie sur $\mathbb{R}_+ \times \infty$ engendrée par tous les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adaptés à $\mathbb{F}$ avec des trajectoires continus à gauche (càg) sur $]0,\infty[$. Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est appelé $\mathbb{F}$- **prévisible**, si l'application $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la σ-algèbre prévisible $\mathcal{P}$.*

On donne la définition des tribus optionnelles ; voir par exemple Guiol ([12], Définition 2.11, p. 16), Nikeghbali ([17], Définition 2.9, p. 348).

Définition 1.2.3. *On appelle **tribu optionnelle**, la plus petite tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, notée $\mathcal{O}$, engendrée par tous les ensembles de la forme $[s,t[\times A$ où $A \in \mathcal{F}_s$ avec $0 \leq s < t$.*

Définition 1.2.4. *La tribu optionnelle $\mathcal{O}$ est la σ-algèbre définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par tous les processus $(X)_{t\geq 0}$ adaptés à $\mathbb{F}$ à trajectoires continues à droite limite à gauche (càdlàg). Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit $\mathbb{F}$-**optionnel** si l'application $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la σ-algèbre optionnelle $\mathcal{O}$.*

On a l'exemple suivant, voir par exemple Nikeghbali ([17], Exemple 2.14, p. 349).

Exemple 1.2.1. Le processus de Poisson standard $N = (N_t)_{t\geq 0}$ est optionnel mais non prévisible dans sa filtration naturelle $\mathbb{F}^N$.

On rappelle la définition des tribus et processus progressifs ; voir par exemple Nikeghbali ([17], Définition 2.7, p. 342).

Définition 1.2.5. *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est appelé $\mathbb{F}$-**progressif**, si pour chaque $t \geq 0$, la restriction de $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ dans $[0,t] \times \Omega$ est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mesurable. Un ensemble $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ est appelé **progressif**, si le processus $\mathbb{1}_A(t,\omega)$ est progressif. L'ensemble* *de tous les ensembles progressifs est une σ-algèbre appelée la σ-algèbre* ***progressive*** *qui notera $\mathcal{M}$.*

Les inclusions suivantes sont toujours vérifiées :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{M}$$

1.3 Semimartingales

Martingales

On a la définition suivante ; voir par exemple Berglund ([1], Définition 2.2, p. 2).

Définition 1.3.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus aléatoire adapté pour cette filtration, i.e.,pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Supposons en plus, chaque X_t est intégrable, i.e., $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. On dit que X est une $\mathbb{F}$-* ***martingale*** *(respectivement.* ***sousmartingale****, resp.* ***surmartingale****), si pour tous t et $h \geq 0$, on a $X_t = \mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t)$ (resp. $X_t \leq \mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t)$, resp. $X_t \geq \mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t)$).*

On rappelle la définition des martingales de carrée intégrables ; voir par exemples Jeanblanc et al. ([10], p. 23).

Définition 1.3.2. *Une martingale X est dite de* ***carrée intégrable****, si $\sup_t \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$. Par l'inégalité de Jenson, si X est une martingale de carrée intégrable, X^2 est une sousmartingale.*

On a le résultat suivant ; voir par exemple Jeanblanc ([10], Définition 1.5.2.1, p. 40).

Définition 1.3.3. *Deux martingales continues de carrées intégrables sont* ***orthogonales*** *si son produit est une martingale.*

Temps d'arrêt

On rappelle la notion de temps d'arrêt ; voir par exemple Breton ([2], Définition 4.4, p. 60).

Définition 1.3.4. *Un $\mathbb{F}$-**temps d'arrêt** T est une variable aléatoire de $\Omega \to [0, +\infty[$ telle que $\forall t \geq 0$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Une conséquence importante de la continuité à droite du filtration est que : voir par exemple Berglund ([1], Proposition 1.2, p. 17).

Proposition 1.3.1. *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{T} = [0, t]$, on a T est un temps d'arrêt, si et seulement si, $\forall t \geq 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.*

On rappelle la définition suivante ; voir par exemple Ruch ([20], Définition 35, p. 25).

Définition 1.3.5. *Une famille de variables aléatoires $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ est **uniformément intégrable** si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha} \int_{\{|U_\alpha| \geq n\}} |U_\alpha| \, d\mathbb{P} = 0$$

La discussion de la convergence d'une martingale dans L^1 nécessite la notion d'intégrabilité uniforme.

Martingales Locales

On rappelle la définition des martingales locales ; voir par exemple Le Gall ([14], Définition 4.3, p. 50).

Définition 1.3.6. *On dit qu'un processus càdlàg adapté $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une **martingale locale**, s'il existe une suite $T_n \uparrow \infty$ de temps d'arrêt tels que pour $X_t^{Tn} \boldsymbol{I}_{\{T_n > 0\}}$ soit une martingale uniformément intégrable pour tout n. On dit alors que les temps d'arrêt T_n localisent ou réduisent X.*

On a la définition suivante ; voir par exemple Jeanblanc et al. ([10], p. 29).

Définition 1.3.7. *Si X est une martingale locale continue, il existe un unique processus continu croissant $\langle X \rangle$, appelé le **crochet** (ou **variation quadratique prévisible**) de X*

tel que $(X_t^2 - \langle X\rangle_t, t \geq 0)$ *est une martingale locale continue.*
Le processus $\langle X\rangle$ *est égale à la limite en probabilité de la variation quadratique*

$$\sum_i \left(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}\right)^2,$$

où $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{p(n)}^{(n)} = t$, *quand* $\sup_{0\leq i\leq p(n)-1}(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)})$ *tend vers zéro. Notons que la limite de* $\sum_i \left(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}\right)^2$ *ne dépend ni de filtration ni de probabilité, et le processus* $\langle X\rangle$ *est* $\mathbb{F}^X$*-adapté.*

L'exponentielle de Doléans-Dade

On rappelle la définition de d'exponentielle de Doléans-Dade ; voir par exemple Jeanblanc et al. ([10], Définition 1.5.7, p. 54-55).

Définition 1.3.8. *Soit* X *une martingale locale continue, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *le processus*

$$\mathcal{E}(\lambda X)_t = \exp\left(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle X\rangle_t\right)$$

est une martingale locale positive (donc une surmartingale) appelée ***l'exponentielle de Doléans-Dade*** *de* λX.

Semimartingales

On a la définition suivante ; voir par exemple Jaenblanc ([8], Définition 1.2.1, p. 15).

Définition 1.3.9. *Un processus* $\mathbb{F}$*-adapté* X *est une* $\mathbb{F}-$***semimartingale*** *si* $X = M + A$ *où* M *est une* $\mathbb{F}$*-martingale locale et* A *est un processus adapté à* $\mathbb{F}$ *et à variation finie (i.e.,* $\int |dA_s| < \infty$*), s'il existe une décomposition avec un processus* A *qui est prévisible, la décomposition* $X = M + A$ *est unique et* X *est appelée* ***semimartingale spéciale****.*

On a le résultat suivant ; voir par exemple Pulido ([19], Corollaire 2.3.3, p. 26).

Remarque 1.3.0.3.

(i) Toute martingale localement carrée intégrable càdlàg est une semimartingale.

(ii) Toute martingale locale càdlàg à variation finie est une semimartingale .

(iii) Toute martingale locale continue est une semimartingale.

On donne la définition suivante ; voir par exemple Jeanblanc et al. ([10], Définition 1.3.2.1, p. 31).

Définition 1.3.10. *Le* ***crochet*** *(ou la* ***covariation quadratique prévisible****)* $\langle X, Y\rangle$ *de deux semimartingales continues* X *et* Y *est défini comme le crochet de leurs parties martingales locales* M^X *et* M^Y.

Le crochet $\langle X, Y\rangle := \langle M^X, M^Y\rangle$ est aussi la limite en probabilité de la covariation quadratique de X et Y, i.e.,

$$\sum_{i=0}^{p(n)-1} \left(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}\right)\left(Y_{t_{i+1}^{(n)}} - Y_{t_i^{(n)}}\right),$$

pour $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{p(n)}^{(n)} = t$, quand $\sup_{0\leq i\leq p(n)-1}(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)})$ tend vers 0.

1.4 Mouvement brownien

On rappelle quelques définitions et propriétés du mouvement brownien ; voir par exemple Gallardo ([11], Définition 2.1.1, p. 50), C Klebaner ([4], Théorèmes 3.3 et 3.7, p. 60-66).

Définition 1.4.1. *Un* ***mouvement brownien (standard)*** *est un processus* B *vérifiant :*

(i) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$*-p.s ;*

(ii) B *est continu, i.e.,* $t \to B_t(\omega)$ *est* C^0 *pour presque tout* ω *;*

(iii) B *est à accroissements indépendants, i.e.,* $B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_s, s \leq t)$ *;*

les accroissements sont stationnaires gaussiennes, i.e., pour $s \leq t$: $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Théorème 1.4.1. *Un mouvement brownien est un processus gaussien avec une fonction moyenne nulle, et de fonction de covariance* $\min(t, s)$*. Inversement, un processus gaussien avec une fonction moyenne nulle et de fonction de covariance* $\min(t, s)$ *est un mouvement brownien.*

Preuve. Voir par exemple C Klebaner [4], p. 60.

Proposition 1.4.1. *Soit B un mouvement brownien en suit*

(i) B_t *est une martingale ;*

(ii) $B_t^2 - t$ *est une martingale.*

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *le processus* $\left(\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right), t \geq 0\right)$ *est une martingale.*

Preuve. Voir par exemple C Klebaner [4], p. 65-66.

On rappelle le théorème de Lèvy suivant ; voir par exemple Zambotti ([22], Théorème 6.3.1, p. 70).

Théorème 1.4.2. *Soient $M^1, ..., M^d$ des martingales locales issus de 0 telles que, toutes les composantes M^i sont des mouvements browniens indépendants, et*

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{i,j} t$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si non). Alors $(M^1, ..., M^j)$ est un $\mathbb{F}$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. En particulier, si M est une martingale locale telle que $\langle M \rangle_t = t$ pour tout $t \in [0, T]$, alors M est un $\mathbb{F}$-mouvement brownien.

Preuve. Voir par exemple Zambotti [22] p. 70-71.

Exemple 1.4.1. Le mouvement brownien B est $\mathbb{F}^B$-prévisible.

1.5 Intégrale d'Itô

On définit $\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(\Omega, [0,T]) = \{(\theta_t)_{0 \leq t \leq T},\ processus\ cádlág;\ \mathbb{F} - adapt\acute{e}\ tq\ \mathbb{E}[\int_0^T \theta_s^2 ds] < \infty\}$.

On rappelle quelques propriétés de l'intégrale d'Itô, voir par exemple Gallardo ([11], Proposition 4.2.1, p.134), Elie ([7], Proposition 4.17, p. 44-45).

Proposition 1.5.1. *Sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(\Omega, [0,T])$ l'itégrale stochastique d'Itô $\int_0^t \theta_s dB_s$ satisfait*

1. $\theta \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire ;*
2. $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue p.s ;*
3. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ *est un processus $\mathbb{F}$-adapté ;*

4. $\mathbb{E}[\int_0^t \theta_s dB_s] = 0$ *et* $Var(\int_0^t \theta_s dB_s) = \mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^2 ds]$;

5. *Propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

6. *De manière plus générale, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_u dB_u | \mathcal{F}_s\right] = 0$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_v dB_v\right)^2 | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_u^2 du | \mathcal{F}_s\right]$$

7. *On a le résultat plus général*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_v dB_v\right)\left(\int_s^u \phi_u dB_v\right) | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^{t\wedge u} \theta_v \phi_u du | \mathcal{F}_s\right]$$

8. $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale ;*

9. *Le processus* $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale ;*

10. *La variation quadratique de l'intégrale stochastique* $\int_0^t \theta_s dB_s$ *est donnée par*

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

11. *La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par*

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds$$

Preuve.

1. linéarité : $\forall \theta, \acute{\theta} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(\Omega, [0,T])$,

$$\int_0^t (\theta_s + \acute{\theta}) dB_s = \int_0^t \theta_s dB_s + \int_0^t \acute{\theta} dB_s$$

2. Pour $\pi_n = (t_i^n, ..., t_n^n)$, on a

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right)$$

et comme les trajectoires du mouvement brownien sont continues, alors $\int_0^t \theta_s dB_s$ est p.s continue.

3. La v.a $\int_0^t \theta_s dB_s$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable comme somme de v.a $\mathcal{F}_t$-mesurables, donc l'intégrale stochastique $\int_0^t \theta_s dB_s$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté.

4. Prenons $t = t_k$, quitte à rajouter un point à la suite $(t_i)_{0\leq 1\leq n}$. Alors, le calcul de l'espérance de $\int_0^t \theta_s dB_s$ donne

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)\right] = \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i\mathbb{E}\left[B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}|\mathcal{F}_{t_i}\right]\right] = 0$$

Le calcul de la variance, un peu plus lourd, s'écrit :

$$Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \lim_{\pi_n\to 0}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{k-1}\theta_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i^2\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)^2\right] \\
&+2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[\theta_i\theta_j\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)\left(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t}\right)\right] \\
&= \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}\theta_i^2\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)^2|\mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&+2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[\theta_i\theta_j\left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}\right)\mathbb{E}\left[B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t}|\mathcal{F}_{t_i}\right]\right] \\
&= \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}\theta_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right) + 0 \\
&= \int_0^t \theta_s^2 ds
\end{aligned}$$

5. La propriété d'isométrie est celle que l'on vient d'écrire

$$Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)\right]^2 = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

6. Quitte à rajouter 2 points à la suite $(t_i)_{0\leq 1\leq n}$, on peut supposer que $s = t_j$ et $t = t_k$

et alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_u dB_u|\mathcal{F}_s\right] &= \lim_{\pi_n\to 0}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\theta_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)|\mathcal{F}_{t_j}\right]\\
&= \lim_{\pi_n\to 0}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{j-1}\theta_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)|\mathcal{F}_{t_j}\right]\\
&+ \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)|\mathcal{F}_{t_j}\right]\\
&= \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=0}^{j-1}\theta_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)\\
&+ \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i\mathbb{E}\left[B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}|\mathcal{F}_{t_i}\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\\
&= \int_0^s \theta_u dB_u + 0
\end{aligned}$$

Le deuxième calcul, un peu plus lourd, s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right)^2|\mathcal{F}_s\right] &= \lim_{\pi_n\to 0}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=j}^{k-1}\theta_i\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)\right)^2|\mathcal{F}_{t_j}\right]\\
&= \lim_{\pi_n\to 0}\sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i^2\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)^2|\mathcal{F}_{t_j}\right]\\
&+2\sum_{i<l}\mathbb{E}\left[\theta_i\theta_l\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)\left(B_{t_{l+1}\wedge t}-B_{t_l\wedge t}\right)|\mathcal{F}_{t_j}\right]\\
&= \lim_{\pi_n\to 0}[\sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i^2\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)^2|\mathcal{F}_{t_i}\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\\
&+2\sum_{i<l}\mathbb{E}\left[\theta_i\theta_l\left(B_{t_{i+1}\wedge t}-B_{t_i\wedge t}\right)\mathbb{E}\left[B_{t_{l+1}\wedge t}-B_{t_l\wedge t}|\mathcal{F}_{t_i}\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]]
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E}\left[\theta_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) |\mathcal{F}_{t_j}\right] + 0$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u^2 du |\mathcal{F}_s\right]$$

7. Pour θ et ϕ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^2(\Omega, [0,T])$, et $u \leq t$, on a

$$2\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)\left(\int_s^u \phi_v dB_v\right) |\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t (\theta_v + \phi_v \mathbf{1}_{v \leq u}) dB_v\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)^2 |\mathcal{F}_s\right]$$

$$- \mathbb{E}\left[\left(\int_s^u \phi_v dB_v\right)^2 |\mathcal{F}_s\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_S^t \left(\theta_v + \phi_v \mathbf{1}_{v \leq u}\right)^2 dv |\mathcal{F}_s\right]$$

$$- \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_v^2 dv |\mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\int_s^u \phi_v^2 dv |\mathcal{F}_s\right]$$

$$= 2\mathbb{E}\left[\int_s^u \theta_v \phi_v dv |\mathcal{F}_s\right]$$

8. On a vu que le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{t \leq T}$ est $\mathbb{F}$-adapté. La propriété d'isométrie nous donne que $\int_0^t \theta_s dB_s$ est dans $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^2(\Omega, [0,T])$ et donc dans $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^1(\Omega, [0,T])$, le point 6 montre que le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{t \leq T}$ est une $\mathbb{F}$-martingale.

9. Le processus M défini par $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0 \leq t \leq T}$ est $\mathbb{F}_$adapté comme somme discrète de processus $\mathbb{F}_$adaptés. Chaque M_t est dans $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^1(\Omega, [0,T])$ comme somme de deux éléments de $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^1(\Omega, [0,T])$. La 2ème partie de la propriété 6 nous donne la propriété de martingale de M.

10. On a vu que le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{t \leq T}$ est $\mathbb{F}$-adapté. La propriété d'isométrie nous donne que $\int_0^t \theta_s dB_s$ est dans $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^2(\Omega, [0,T])$ et donc dans $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^1(\Omega, [0,T])$, le point 6 montre que le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{t \leq T}$ est une $\mathbb{F}$-martingale.

11. Le processus M défini par $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0 \leq t \leq T}$ est $\mathbb{F}_$adapté comme somme discrète de processus $\mathbb{F}_$adaptés. Chaque M_t est dans $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^1(\Omega, [0,T])$ comme somme de deux éléments de $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}^1(\Omega, [0,T])$. La 2ème partie de la propriété 6 nous donne la propriété de martingale de M. Posons :

$$M_t = \left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds = X_t^2 - A_t$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\int_0^t \theta_u dB_u)^2 - (\int_0^t \theta_u dB_u)^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(\int_0^t \theta_u dB_u + \int_0^s \theta_u dB_u)(\int_0^t \theta_u dB_u - \int_0^s \theta_u dB_u)|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(2\int_0^s \theta_u dB_u + \int_s^t \theta_u dB_u)(\int_s^t \theta_u dB_u)|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[2(\int_0^s \theta_u dB_u)(\int_s^t \theta_u dB_u) + (\int_s^t \theta_u dB_u)^2|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[2(\int_0^s \theta_u dB_u)(\int_s^t \theta_u dB_u)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[(\int_s^t \theta_u dB_u)^2|\mathcal{F}_s] \\
&= 2\int_0^t \theta_u dB_u \mathbb{E}[\int_s^t \theta_u dB_u|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\int_s^t \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s] \\
&= 2\int_0^t \theta_u dB_u \mathbb{E}[\int_s^t \theta_u dB_u] + \mathbb{E}[\int_s^t \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[\int_s^t \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(\int_0^t \theta_u^2 du - \mathbb{E}\int_0^s \theta_u^2 du)|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[\int_0^t \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\int_0^s \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}(A_t|\mathcal{F}_s) - A_s
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(A_t|\mathcal{F}_s) - A_s \\
\mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{F}_s) - X_s^2 &= \mathbb{E}(A_t|\mathcal{F}_s) - A_s \\
\mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(A_t|\mathcal{F}_s) &= X_s^2 - A_s \\
\mathbb{E}(X_t^2 - A_t|\mathcal{F}_s) &= X_s^2 - A_s \\
\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) &= M_s
\end{aligned}
$$

Donc M est une martingale.

12. On a

$$
\begin{aligned}
\langle \int_0^t \theta_s dB_s \rangle &= \langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^t \theta_s dB_s \rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} [\int_0^{t_{k+1}^{(n)}} \theta_s dB_s - \int_0^{t_k^{(n)}} \theta_s dB_s]^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \theta_s dB_s)^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \lim_{\pi_n\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\sum_{t_{k_i}^{(n)}=0}^{k-1} \theta_{t_{k_i}^{(n)}} (B_{t_{k_{i+1}}^{(n)}\wedge t} - B_{t_{k_i}^{(n)}\wedge t}))^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \lim_{\pi_n\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t_{k_i}^{(n)}} \sum_{t_{k_j}^{(n)}} \theta_{t_{k_i}^{(n)}} \theta_{t_{k_j}^{(n)}} (B_{t_{k_{i+1}}^{(n)}\wedge t} - B_{t_{k_i}^{(n)}\wedge t})(B_{t_{k_{j+1}}^{(n)}\wedge t} - B_{t_{k_j}^{(n)}\wedge t}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \lim_{\pi_n\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t_{k_i}^{(n)}=0}^{k-1} \theta^2_{t_{k_i}^{(n)}} (t_{k_{i+1}}^{(n)} - t_{k_i}^{(n)}) \\
&= \int_0^t \theta_s^2 d\langle B, B\rangle_s \\
&= \int_0^t \theta_s^2 ds
\end{aligned}
$$

On rappelle le théorème de Doob-Meyer suivant ; voir par exemple C Klebaner ([4], Théorème 8.2.4, p. 230).

Théorème 1.5.1. *Si M est une martingale continue de carré intégrale (i.e., $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$, pour tout t), alors $\langle M \rangle$ est l'unique processus croissant continu nul en 0 tel que $M^2 - \langle M \rangle$ soit une martingale.*

Et le résultat au-dessus nous permet de conclure directement.

13. On a

$$\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \rangle = \int_0^{u\wedge t} \theta_s \phi_s d\langle B, B\rangle_s = \int_0^{u\wedge t} \theta_s \phi_s ds.$$

$\square$

Formule d'Itô

La formule d'Itô est un équivalent du théoreme fondamental de l'analyse pour l'integrale stochastique ; voir par exemple Lévique ([15], Theoreme 2.5.1, p. 47).

Théorème 1.5.2. *Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconde bornée vérifie p.s*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds \quad ,\forall t \leq T$$

La notation infinitésimale de cette relation est :

$$df(B_s) = f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} f''(B_s)\, ds$$

On donne les exemples suivants ; voir par exemple Lévique ([15], Exemples 2.5.4 et 2.5.5, p. 48).

Exemple 1.5.1. (i) Pour $f(x) = x$, on a $f'(x) = 1$ et $f''(x) = 0$, donc

$$B_t - B_0 = \int_0^t 1 dB_s$$

(ii) Pour $f(x) = x^2$; on a $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$, donc

$$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds = 2\int_0^t B_s dB_s + t$$

(iii) *Pour $f(x) = xy$, on a*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X, Y]_t$$

Chapitre 2

Propriété de représentation prévisible (PRP)

Dans ce chapitre, nous donnons des résultats sur la représentation des martingales par intégrales stochastiques de processus prévisibles, également appelées la propriété de représentations prévisibles

2.1 Définitions et propriétés

La propriété de représentation prévisible joue un rôle important dans la notion des filtrations faiblement browniennes.

D'abord, on rappelle la décomposition orthogonale de Kunita-Watanabe d'une martingale locale M par rapport à une autre X ; voir par exemple Jeanblanc et al. ([10], Lemme 1.6.2.1, p. 83).

Définition 2.1.1. ***(Décomposition de Kunita-Watanabe.)*** *Soit X une $\mathbb{F}$-martingale locale continue. Alors, toute $\mathbb{F}$-martingale locale continue M nulle en 0 admet la décomposition orthogonale unique suivante :*

$$M_t = N_t + \int_0^t \theta_s dX_s$$

où θ est un processus prévisible et N est une martingale locale orthogonale à X.

Donc, la question qui se pose : pour quelle martingale locale X, la martingale locale N soit une constante ? Cette question conduit à la définition suivante ; voir par exemple Jeanblanc et al. ([10], Définition 1.6.2.2, p. 60), Mansuy et Yor ([16], Définition 4.1, p. 78), C Klebaner ([4], Définition 8.34, p. 237).

Définition 2.1.2. *Une martingale locale continue X adaptée à une filtration $\mathbb{F}$ est dite a la $\mathbb{F}^X$-**propriété de représentation prévisible (PRP)**, si pour toute $\mathbb{F}^X$-martingale locale M, il existe une constante c et un processus unique $\mathbb{F}$-prévisible θ satisfaisant $\int_0^t \theta_s^2 d\langle X\rangle_s < \infty$ tels que*

$$M_t = c + \int_0^t \theta_s dX_s, \quad t \geq 0.$$

2.1.1 Cas du mouvement brownien

Soient B un mouvement brownien à valeurs réelles et $\mathbb{F}^B$ sa filtration naturelle.

Théorème 2.1.1. *Soit $(M_t, t \geq 0)$ une $\mathbb{F}^B$-martingale de carrée intégrable (i.e., $\sup \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$), il existe une constante c et un processus prévisible unique θ satisfaisant $\mathbb{E}(\int_0^t \theta_s^2 ds) < \infty$, tel que*

$$M_t = c + \int_0^t \theta_s dB_s, \ \forall t \tag{2.1}$$

Si M est une $\mathbb{F}^B$-martingale locale, il existe un processus prévisible unique θ satisfaisant $\int_0^t \theta_s^2 ds < \infty$, tel que

$$M_t = c + \int_0^t \theta_s dB_s, \ \forall t$$

Preuve. Voir par exemple Jeanblanc et al. [10], p. 81.

Théorème 2.1.2. *Soit $(M_t,\ 0 \leq t \leq T)$ une martingale locale adaptée à la filtration brownienne $\mathbb{F}^B$, alors il existe un processus prévisible θ tel que $\mathbb{P}(\int_0^t \theta_s^2 ds < \infty) = 1$, et*

$$M_t = c + \int_0^t \theta_s dB_s$$

Preuve. Voir par exemple C Klebaner [4], p. 237.

Pour une filtration $\mathbb{G}$ contient la filtration brownienne $\mathbb{F}^B$, on a le résultat suivant.

Corollary 2.1.1. *Soit B un $\mathbb{G}$-mouvement brownien avec $\mathbb{F}^B$ sa filtration naturelle. Alors pour tout processus $\mathbb{G}$-adapté et de carré intégrable θ,*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s dB_s | \mathcal{F}_t^B\right) = \int_0^t \mathbb{E}(\theta_s | \mathcal{F}_s^B) dB_s$$

où $\mathbb{E}(\theta_s|\mathcal{F}_s)$ désigne la version prévisible de l'espérance conditionnelle.

Preuve. Voir par exemple Jeanblanc et al. [10], p. 58.

Proposition 2.1.1. *Soit $M_t = \mathbb{E}(f(B_T)|\mathcal{F}_t^B)$ pour $t \leq T$ où f est bornnée de classe C^1. Alors*

$$M_t = \mathbb{E}(f(B_T)) + \int_0^t \mathbb{E}(f'(B_T)|\mathcal{F}_s^B) dB_s$$

Preuve. Voir par exemple Jeanblanc et al. [10], p. 58-59.

Comme les intégrales d'Itô sont continues et toute martingale locale d'une filtration brownienne est une intégrale d'Itô, alors toutes les martingales locales de filtration brownienne sont continues, par conséquent, on a le résultat suivant ; voir par exemple C Klebaner ([4], Corollaire 8.36, p. 238).

Corollary 2.1.2. *1. Toutes les martingales locales de la filtration brownienne $\mathbb{F}^B$ sont continues.*

2. Tous les processus adaptés continus à droit sont prévisibles.

On a le résultat suivant ; voir par exemple C Klebaner ([4], Corollaire 8. 37, p. 238).

Corollary 2.1.3. *Soit $(M_t,\ 0 \leq t \leq T)$ une martingale de carrée intégrable adaptée à la filtration brownienne $\mathbb{F}^B$. Alors, il existe un processus prévisible θ tel que $\mathbb{E}(\int_0^t \theta_s^2 ds < \infty)$ et la représentation (2.1) est satisfaite. De plus*

$$\langle M, B\rangle_t = \int_0^t \theta_s ds \qquad et \qquad \theta_t = \frac{d\langle M, B\rangle_t}{dt} \tag{2.2}$$

On donne quelques exemples concernant le résultat précédent ; voir par exemple C Klebaner ([4], Exemple 8.25, p. 238).

Exemple 2.1.1. (1) $M_t = B_t^2 - t$. Alors $M_t = \int_0^t 2B_s dB_s$ et $\theta_t = 2B_t$, θ peut être également trouver par la formule d'Itô.

(2) Soit $M_t = f(B_t, t)$ une martingale. Par la formule d'Itô $dM_t = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t)dB_t$. Donc $\theta_t = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t)$, cela montre aussi que

$$\frac{d\langle f(B,t), B\rangle_t}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t).$$

2.1.2 Cas de processus de Poisson

La propriété de représentation prévisible est valable aussi pour le processus de Poisson ; voir par exemple C Klebaner ([4], Théorème 8.38, p. 238).

Théorème 2.1.3. *Soit $(M_t, 0 \leq t \leq T)$ une martingale locale adaptée à la filtration de processus de Poisson $\mathbb{F}^N$, alors il existe un processus prévisible θ tel que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s d\bar{N}_s$$

où $\bar{N}_t = N_t - t$ est le processus de Poisson compensé.

2.2 Stabilité de la PRP sous changement de probabilité

On étudie la stabilité de la propriété de représentation prévisible sous changement de probabilité ; voir par exemple Jeanblanc et al. ([10], p. 80).

Soient $\mathbb{F}^B$ une filtration d'un mouvement brownien B et θ un processus adapté à $\mathbb{F}^B$ tels que $L_t = \exp(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)$ est une martingale. Soit $\mathbb{Q}$ la loi de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t^B$ pour tout t, on définit $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = L_t \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$. Le théorème de Girsanov implique que $\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t \theta_s ds$ est un $(\mathbb{F}^B, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.

Proposition 2.2.1. *Soient B un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}^B$ sa filtration naturelle et $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité localement équivalente à $\mathbb{P}$. Soit $\widetilde{B}$ la partie martingale de la $\mathbb{Q}$-semimartingale B. Si M est une $(\mathbb{F}^B, \mathbb{Q})$-martingale locale, il existe un processus $\mathbb{F}^B$- prévisible θ tel que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s d\widetilde{B}_s, \qquad \forall t$$

Preuve. Voir par exemple Jeanblanc et al. [10], p. 80.

2.3 Exemples

On donne quelques exemples concernant la propriété de représentation prévisible ; voir par exemple Jeanblanc et al.([10], Commentaires 1.6.2.5(c), Exemple 1.6.2.6(a), p. 60-61), C Klebaner ([4], Exemples 8.26 et 8.37, p. 239).

Exemple 2.3.1.

(1) Soient B un MB et $\mathbb{F}^B$ sa filtration naturelle. Posons $X_t = a + \int_0^t K_s dB_s$ où $(K_t, t \geq 0)$ est un processus continu et ne s'annule pas. Alors X a la PRP par rapport à sa filtration naturelle.

(2) Soit $\mathbb{F}$ une filtration engendrée par deux mouvements browniens indépendants B et W,

et soit $M_t = \int_0^t W_s dB_s$, avec M_t est une martingale comme une intégrale stochastique satisfaisant $\mathbb{E} \int_0^t W_s^2 ds < \infty$. On va montrer que M n'a pas la PRP.

On a $\langle M, M \rangle_t = \int_0^t W_s^2 ds$. Comme $W_t^2 = \frac{d}{dt} \langle M, M \rangle_t$, ce qui montre que W_t^2 est $\mathcal{F}_t^M$-mesurable. La martingale $X_t = W_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t^M$-adaptée, mais n'est pas une intégrale d'un processus prévisible par rapport à M. Par la formule d'Itô, on a : $X_t = 2 \int_0^t W_s dW_s$,

et $\langle X, M \rangle_t = \int_0^t W_s^2 d\langle W, B \rangle_s = 0$. Supposons qu'il existe un processus prévisible H tel que $X_t = \int_0^t H_s dM_s$. Alors par (2.2) $H_t = \frac{d}{dt} \langle X, M \rangle_t = 0$, implique que $X_t = 0$, qui est une contradiction.

(3) On donne un exemple d'une martingale qui n'a pas la PRP :

Soit $M_t = \int_0^t \exp(aB_s - \frac{a^2 s}{2}) d\beta_s = \int_0^t \mathcal{E}(aB)_s d\beta_s$, où B, β sont deux mouvements browniens indépendants et de dimension 1, et $\mathcal{E}$ est l'exponentielle de Doléans-Dade de aB.

On a $d\langle M \rangle_t = (\mathcal{E}(aB)_t)^2 \, dt$, et $(\mathcal{E}_t := \mathcal{E}(aB)_t, t \geq 0)$ est $\mathbb{F}^M$-adapté et donc est une $\mathbb{F}^M$-martingale. Puisque $\mathcal{E}_t = 1 + a \int_0^t \mathcal{E}_s dB_s$, on ne peut pas écrire la martingale $\mathcal{E}$ comme une intégrale ni par rapport à β ni par rapport à M. En fait, toute $\mathbb{F}^M$-martingale peut s'écrire comme une somme d'une intégrale stochastique par rapport à M (ou β) et une intégrale stochastique par rapport à B.

(4) Soit $\mathbb{F}$ une filtration engendrée par un mouvement brownien B et un processus de Poisson N, et soit $M_t = B_t + N_t - t = B_t + \bar{N}_t$, où $\bar{N}_t = N_t - t$, M est une martingale

comme une somme de deux martingales. On va montrer que M n'a pas la PRP.

On a $[M,M]_t = [B,B]_t + [N,N]_t = t + N_t$. ça donne $N_t = [M,M]_t - t$ qui est $\mathcal{F}_t^M$-mesurable. Comme $B_t = M_t - N_t + t$ est $\mathcal{F}_t^M$-mesurable, alors la martingale $X_t = \int_0^t N_{s^-} dB_s$ est $\mathcal{F}_t^M$-mesurable, mais n'est pas une représentation prévisible. Si non, $X_t = \int_0^t N_{s^-} dB_s = \int_0^t H_s dM_s = \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t H_s d\bar{N}_s$, et $\int_0^t (N_{s^-} - H_s) dB_s = \int_0^t H_s d\bar{N}_s$. Comme l'intégrale à droite est à variation finie, $H_s = N_{s^-}$, $\forall s$, $p.s.$ Ainsi $\int_0^t H_s d\bar{N}_s = 0$, c.à.d $\int_0^t N_{s^-} dN_s = \int_0^t N_{s^-} ds$. Mais ça est impossible. Pour avoir la contradiction, soit $t = T_2$ le temps de deuxième saut de N. Alors $\int_0^{T_2} N_{s^-} dN_s = 1$ et $\int_0^{T_2} N_{s^-} ds = T_2 - T_1$.

2.4 Applications en finance

Portefeuille

On a la définition suivante ; voir par exemple Elie ([7], Définition 1.1, p. 4).

Définition 2.4.1. *Un **portefeuille autofinançant** est une stratégie (non anticipative) d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent. Pour $t \leq T$, on notera X_t la valeur en t du portefeuille X.*

Stratégie autofinancement

On a les définitions suivantes ; voir par exemple Chorro ([3], Définitions 4.1.2 et 4.2.2, p. 89).

Définition 2.4.2. *Une **stratégie financière** est un processus stochastique $H_t = (\theta_t^0, \theta_t)_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et tel que les intégrales*

$$\int_0^T \theta_t^0 dS_t^0 \quad et \int_0^T \theta_t dS_t$$

aient un sens, où S_t est la valeur (aléatoire) d'une action (part du capital d'une entreprise) cotée sur un marché organisé à l'instant t. On associe à toute stratégie financière un portefeuille financier contenant à $t \in [0,T]$, θ_t^0 unités d'actif sans risque et θ_t unités *d'actif risqué. La valeur à $t \in [0, T]$ du portefeuille associè à une stratégie H est donnée par*

$$X_t = \int_0^t \theta_s^0 dS_s^0 + \int_0^t \theta_s dS_s$$

Définition 2.4.3. *Une stratégie $(H_t)_{t\in[0,T]}$ est dite* ***autofinancée****, si la valeur du portefeuille associé vérifie l'équation différentielle suivante :*

$$dX_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t dS_t$$

Arbitrage et absence d'arbitrage

On rappelle la définition suivante ; voir par exemple Elie ([7], Définition 1.2, p. 4-5).

Définition 2.4.4. *Un* ***arbitrage*** *sur la période $[0, T]$ est un portefeuille autofinançant X de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur X_T en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive,*

$$X_0 = 0, \qquad X_T \geq 0 \quad et \quad \mathbb{P}(X_T > 0) > 0$$

On supposera qu'il y a sur le marché l'hypothèse ***d'absence d'opportunités d'arbitrage*** *(AOA, no free lunch) entre tout instant 0 et T*

$$\{X_0 = 0 \ et \ X_T \geq 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) = 0$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial" Le raisonnement (défaitiste) est : "Si il y avait un arbitrage, quelqu'un en aurait déja profité". Sachant qu'il y a dans les banques beaucoup d'arbitragistes, cette hypothèse est cohérente sur les marchés.

On donne la définition suivante ; voir par exemple El Karoui ([6], Définition 2.1.2, p. 26).

Définition 2.4.5. *Dans un marché liquide, sans limite de transaction ni de limitation sur la gestion (achat-vente) des actifs soutiens, ce n'est pas une opportunité d'arbitrage, c'est pas possible de gagner de l'argent un coup sûr à partir d'un investissement nul.*

Probabilité risque-neutre

On rappelle la définition suivante ; voir par exemple Pham ([18], Définition 2.3.2, p. 26).

Définition 2.4.6. *Une probabilité $\mathbb{Q}$ est appelée* ***probabilité risque-neutre*** *ou* ***probabilité martingale****, si $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$, et si le prix actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$, où r est le taux sans risque.*

Si la probabilité de risque neutre est unique, alors le marché est dit **complet**, i.e., tout actif est muni par une stratégie autofinancée.

Il y a une équivalence entre l'existence de probabilité de risque neutre et la propriété de l'absence de l'arbitrage.

Dans ce mémoire ; on a $S = B$ est l'actif risqué et $\tilde{S} = \tilde{B}$ est le prix actualisé.

Supposons que S a la propriété de représentation prévisible sous une mesure de probabilité $\mathbb{P}$, i.e.,

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t \theta_s^0 dS_s^0 + \int_0^t \theta_s dS_s \\ &= c + \int_0^t \theta_s dS_s \end{aligned}$$

tel que $c = \int_0^t \theta_s^0 dS_s^0 \in \mathbb{R}$ est la partie sans risque du portefeuille X.

Et comme la propriété de représentation prévisible est stable sous changement localement équivalente de probabilité, il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ localement équivalente à $\mathbb{P}$ telle que X a la PRP sous $\mathbb{Q}$, i.e., X est une martingale sous la mesure $\mathbb{Q}$. Donc, la probabilité de risque neutre $\mathbb{Q}$ existe toujours, i.e., la propriété de représentation prévisible implique l'existence de la probabilité de risque neutre.

Et comme l'existence de la probabilité de risque neutre est équivalente à la propriété de l'absence de l'arbitrage, donc la propriété de représentation prévisible implique aussi la propriété de l'absence de l'arbitrage, i.e.,

$$PRP \Rightarrow \ probabilit\acute{e} \ \ de \ \ risque \ \ neutre \Leftrightarrow \ AOA$$

Chapitre 3

Filtrations faiblement et fortement browniennes

Parmi les processus en temps continu, le mouvement brownien est sans aucun doute le processus le plus étudié et de nombreuses caractérisations de sa loi sont connues. Il peut donc sembler un peu étrange que, décider si une filtration $\mathbb{F}$ sur un espace de probabilité donné $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien ou non. Cette question est très difficile, à ce jour, aucun critère nécessaire et suffisante a été trouvé.

3.1 Définitions

On a les définitions suivantes ; voir par exemple Nikeghbali ([17], Définition 8. 40, p. 395), Jeanblanc et al. ([10], Définition 5.8.1.1, p. 311) et Mansuy et Yor ([16], Définitions 6.1 et 6.2, p. 104-105).

Définition 3.1.1. *Une filtration* ***fortement brownienne*** *est une filtration engendrée par un mouvement brownien standard.*

Définition 3.1.2. *Une filtration $\mathbb{F}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathcal{F}_0$ soit $\mathbb{P}$-p.s triviale est dite* ***faiblement brownienne****, s'il existe un $\mathbb{F}$ mouvement brownien B tel que B a la proriété de représentation prévisible par rapport à $\mathbb{F}$.*

Notons qu'une filtration fortement brownienne est faiblement brownienne puisque le mouvement brownien a la PRP.

3.2 Stabilité des filtrations faiblement browniennes sous changement de probabilité

Nous montrons que les filtrations faiblement browniennes sont globalement invariantes sous changement de probabilité localement équivalente.
Soit $\mathbb{F}$ une filtration faiblement brownienne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et on considère une autre probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = D_t\, \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$, $\forall t$.

Proposition 3.2.1. *Si $\mathbb{F}$ est faiblement brownienne sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ est localement équivalente à $\mathbb{P}$, alors $\mathbb{F}$ est aussi faiblement brownienne sous $\mathbb{Q}$.*

Preuve. Voir par exemple Jeanblanc et al. [10], p. 312.

Nous allons travailler sur l'espace canonique $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni par la filtration canonique $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ engendrée par le processus de coordonnées $X_t(\omega) = \omega(t), t \geq 0$, et considérons une martingale strictement positive D sous la mesure de Wiener. On considère ensuite la mesure W^D construite à partir de la mesure de Wiener W qui vérifie

$$W^D_{|\mathcal{F}_t} = D_t \cdot W_{|\mathcal{F}_t}$$

(nous supposons que : $\mathbb{E}_W(D_t) \equiv D_0 = 1$)

Théorème 3.2.1. *Sous W^D,*

$$\left(X_t^D := X_t - \int_0^t \frac{d\langle X, D\rangle_s}{D_s},\ t \geq 0 \right)$$

est un $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$-mouvement brownien engendre la filtration faiblement brownienne $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$.

Preuve. Voir par exemple Mansuy et Yor [16], p. 106.

X^D n'engendre pas une filtration fortement brownienne $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ sous W^D. En 1975, Tsirel'son a donné un exemple de D qui a dû par Zvonkin :

Proposition 3.2.2. *([23], p. 106.) Soit b une fonction borélienne bornnée. Alors la solution Y de l'équation différentielle stochastique*

$$Y_t = B_t + \int_0^t ds b(Y_s)$$

a la même filtration que B.

Une seconde possibilité est que, sous W^D, la filtration $\sigma\left\{X_s^D, s \leq t\right\}$ contenue dans $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$, mais néanmoins, $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ soit une filtration fortement brownienne . C'est le cas quand

$$D_t = \exp\left(\int_0^t T(X\bullet)_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t T^2(X\bullet)_s ds\right)$$

où $T(X\bullet)$ dénote "la dérive de Trisel'son" comme Trisel'son lui même se réfère (ma dérive) telle que

$$T(X\bullet)_s = \sum_{k\in -\mathbb{N}} \left\{\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}\right\} 1_{]t_k, t_{k+1}]}(s)$$

où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x et $t_k \downarrow 0$ quand $k \to -\infty$. En effet, sous W^D pour tout k, la forme de la partie fractionnaire $\left\{\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}\right\}$ est uniformément distribuée dans $[0,1]$ et indépéndante de $X_t^D = X_t - \int_0^t T(X\bullet)_s ds$ (voir par exemple Yor [21], p. 113).

3.3 Exemples

On donne quelques exemples des filtrations faiblement et fortement browniennes ; voir par exemple Jeanblanc et al. ([10], Exemple 5.8.2, p. 313-315), Mansuy et Yor ([16], Définition 6.1, p. 106).

Exemple 3.3.1. (a) Mouvement brownien réféchi

Soient B un mouvement brownien, $\mathbb{F}^B$ sa filtration naturelle. $\mathbb{F}^B$ est engendrée aussi par tout MB sous la forme,

$$\left(B_t^{(s)} = \int_0^t s_u dB_u; t \geq 0\right), \ où \ s : \mathbb{R}_+ \to \{\pm 1\} \ est \ detrministe$$

Plus généralement, nous pourrions considérer ε, tout processus $\mathbb{F}$-prévisible prend ses valeurs dans $\{\pm 1\}$, et on peut associer

$$\left(B_t^{(\varepsilon)} = \int_0^t \varepsilon_s dB_s; t \geq 0\right)$$

Alors $\mathbb{F}^{B^{(\varepsilon)}} \subset \mathbb{F}^B$.

Posons $\varepsilon_s = \operatorname{sgn}(B_s)$ et $B_t^{(\varepsilon)} = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s$. Le processus $B^{(\varepsilon)}$ est un mouvement brownien dans la filtration $\mathbb{F}^{|B|}$, avec $L_t = \sup_{s\leq t}\left(-B_s^{(\varepsilon)}\right)$, il s'ensuit que $\mathbb{F}^{B^{(\varepsilon)}} =$

$\mathbb{F}^{|B|}$, par conséquent , $\mathbb{F}^{|B|}$ est fortement brownienne et différente de $\mathbb{F}^{B}$, puisque la variable aléatoire $\operatorname{sgn}(B_t)$ est indépendante de $(|B_s|, s \leq t)$.

(b) Soit $\mathbb{F}$ une filtration et supposons que pour une $\mathbb{F}$-martingale M donnée, toute $\mathbb{F}$-martingale N nulle en 0 peut s'écrit comme

$$N_t = \int_0^t n_s dM_s$$

Cela ne signifie pas que $\sigma(M_s, s \leq t)$ est égale à $\mathbb{F}$. Par exemple supposant que, $B_t^{(s)} = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s$. Comme nous avons vu dans le premier exemple ci-dessus, $\mathbb{F}^{B^{(\varepsilon)}} = \sigma(|B_s|, s \leq t)$ est strictement plus petite que $\mathbb{F}^{B}$. Toute $\mathbb{F}^{B}$-martingale $(N_t, t \geq 0)$ avec $N_0 = 0$ peut être représentée par

$$N_t = \int_0^t \nu_s dB_s = \int_0^t \nu_s \operatorname{sgn}(B_s) \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s = \int_0^t n_s dB_s^{(\varepsilon)}$$

où $n_s = \nu_s \operatorname{sgn}(B_s)$.

(c) Soit $Y_t = \int_0^t B_s dW_s$ où W et B sont des mouvements browniens indépendants. Pour

$$Y_t = \int_0^t |B_s| \operatorname{sgn}(B_s)\, dW_s = \int_0^t |B_s|\, d\widehat{W}_s$$

où $\widehat{W}_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dW_s$, il s'ensuit que

$$\mathcal{F}_t^Y = \sigma\left\{|B_s|, \widehat{W}_s, s \leq t\right\} = \sigma\left\{B_s^{(\varepsilon)}, \widehat{W}_s, s \leq t\right\}$$

où $B_t^{(\varepsilon)} = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s$ est un MB indépendant de $\widehat{W}$. Toute $\mathbb{F}^Y$-martingale peut être écrit comme

$$y + \int_0^t \varphi_s dB_s^{(\varepsilon)} + \int_0^t \psi_s d\widehat{W}_s$$

Pour deux $\mathbb{F}^Y$-processus prévisibles ψ et φ.

(d) **Filtration engendrée par une intégrale stochastique avec intégrateur non nul**. Soient $X_t = \int_0^t H_s dW_s$ où W est un $\mathbb{G}$-mouvement brownien pour quelque filtration $\mathbb{G}$, et H est un processus $\mathbb{G}$-adapté continu strictement positif (nous n'avons pas besoin que $\mathbb{G}$ soit la filtration naturelle de W). Alors $\mathcal{F}_t^X = \sigma(H_s, W_s; s \leq t)$.

(e) Soientt W et B deux mouvements browniens independants, et soit $Z = BW$. Pour $B_t W_t = \int_0^t (B_s dW_s + W_s dB_s)$, on obtient que $B_t^2 + W_t^2$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^Z$, par conséquent, les variables aléatoires $\frac{1}{\sqrt{2}}|B_t + W_t|$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}|B_t - W_t|$ sont $\mathcal{F}_t^Z$-mesurable. Les processus $\beta_t^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_t \pm W_t)$ sont des mouvements browniens indépendants. La filtration $\mathbb{F}^Z$ est engendrée par deux MB réfléchis indépendants.

Conclusion

Le but de ce mémoire est d'étudier les filtrations faiblement et fortement browniennes. Nous avons étudié avec des exemples la propriété la représentation prévisible et nous avons aussi étudié sa stabilité sous changement de probabilité équivalente et ses applications en finance..

Nous avons donné quelques résultats généraux concernant les filtrations faiblement et fortement browniennes, i.e., ses définitions, la stabilité des filtrations faiblement browniennes sous changement de probabilité équivalente et aussi quelques exemples de ces filtrations.

Bibliographie

[1] N. Berglund. Martingales et calcul stochastique. DEA. Université d'Orléans, 2009, pp.75. $< cel - 00443085v1 >$

[2] J. C. Breton. *Processus stochastiques, M2 mathématiques*, Université de Rennes 1, Septembr-Octobre 2017.

[3] C. Chorro. *Cours de calcul stochastique*, Master M2 IRFA, Septembre 2006.

[4] F. C Klebaner. *Intoduction to stochastic calculus with applications. Second edition.* Imperial College Press, 2005.

[5] D. Coculescu, A. Nikeghbali. Filtrations. *Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley*, vol II, p. 683-686, 2010.

[6] N. El Karoui. *Couverture des risques dans les marchés financiers.* 2003-2004

[7] R. Elie. *Calcul stochastique appliqué à la finance*, Avril 2006

[8] M. Jeanblanc. *Enlargement of filteration with finance in view*, Springer Brief. 2017

[9] M. Jeanblanc, T. Simon. *Elements de calcul stochastique.* Springer, IRBID, Septembre 2005.

[10] M. Jeanblanc, M. Yor, and M. Chesney. *Mathematical methodes for financial markets.* Springer, 2009.

[11] L. Gallardo. *Mouvement brownien et calcul d'Itô*, Herman éditeurs 2008.

[12] H. Guiol. *Calcul stochastique avencée TIMB/TIMC-IMAG.* 2006

[13] R. L. Karandikar, B. V. Rao. *Introduction to stochastic calculus*, Springer. 2018

[14] J. F. Le Gall. *Mouvement brownien et calcul stochastique*, Notes de cours de Master 2, Université Paris-Sud, Master Probabilités et Statistiques, Octobre 2008, 2009.

[15] O. Lévique. *Cours de probabilite et clcul stochastique*, EPFL, 2004-2005

[16] R. Mansuy, M. Yor. *Random times and enlargements of filtrations in a brownian setting*, volume 1873 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer, 2006.

[17] A. Nikeghbali. An essay on the general theory of stochastic processes. *Probability Surveys*, 3, p. 345-412, 2006.

[18] H. Pham. *Introduction aux mathématiques et modéles stochastiques des marchés financiers*, Université Paris 7, 2006-2007.

[19] S. Pulido. *Semimartingales and stochastic integration*, Spring 2011

[20] J. J. Ruch, M. L. Chabanol. *Espérance conditionnelle martingales*, Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1, 2012 - 2013.

[21] M. Yor. On weak and strong brownian filtrations : definitions and examples.*Séminaires et Congrès, SMF*, 28, p. 109-115, 2013.

[22] L. Zambotti. *Calcul stochastique et processus de diffusion.* 2016-2017

[23] A. Zvonkin. A transformation of the phase space of a diffusion process that will remove the drift. *Mat Mat. Sb. (N.S)*, **93**(135), p. 129-149, 1974.