République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2018/2019

Équations différentielles à retard et semi-groupes associés

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse mathématique

par

Souiah **S**alah **E**ddine [1]

Sous la direction de

Dr Bennihi Omar

Soutenue le 15/07/2019 devant le jury composé de

H. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
A. Halimi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : souiahsalah@gmail.com

Remerciements

Nous remercions « Allah » qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématiques, en particulier, mon encadreur pédagogique monsieur "Bennihi Omar"

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences.

Nous remercions également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master Analyse mathématique, 2018/2019 à l'université de Saida Dr. Moulay Tahar.

En fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Notations générales

X	Espace de Banach.
H^1, H_0^1, H^2	Espaces de Sobolev.
$\mathscr{L}(X)$	Espace des opérateures linéaires bornés de X dans X.
X'	Espace dual de X.
$L^p([0,T];X)$	Espace des fonctions mesurable de $[0,T]$ dans X vérifiés $\int_0^T \|f(T)\|_X^p < +\infty$.
$C^1([0,+\infty[,H)$	Espace des fonctions continûment différentiable de $[0,+\infty[$ dans X.
$\langle,\rangle,(,)$	Produit scalaire et de dualité X', X.
∂	L'opérateur de différentiation partielle.
Δ	Opérateur de Laplace.
∇	Opérateur gradient.
$D(A)$	Domaine de l'opérateur A.
$\mathcal{S}$	L'ensemble des fonctions test.
$\rho(T)$	Ensemble résolvant de l'opérateur T.
u_{xx}	La dérivée partielle de u par rapport à x d'ordre 2.
u_t	La dérivée partielle de u par rapport à t.
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$	Dérivée partielle multi-indice α.
$C_0(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans Ω.
$R(\lambda,T)$	Application résolvante de T pour λ .
$p.p$	Presque partout.
C_0-*semigroupe*	Semi-groupe fortement continu.

Table des matières

Introduction générale

Les équations différentielles à retard surviennent dans certains modèles dont l'état à un instant donné, est une fonction qui dépend de son passé. On peut rencontrer ces équations dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie ... etc. En effet, dans certains phénomènes, on s'est aperçu que la connaissance de la solution en un point ne suffit pas pour décrire l'évolution sur un intervalle de temps donné.

La signification du retard dans un tel ou tel modèle peut être différente : période d'incubation d'une maladie contagieuse, temps d'accumulation, temps nécessaire pour la maturation des cellules ou la transformation d'un type de cellules en un autre.

Rappelons que les équations à retard ont été introduites pour modéliser des phénomènes dans lesquels il y a un décalage temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action par exemple, dans les processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries,...), ou qui nécessitent qu'un certain seuil soit atteint avant que le système ne soit pas activé.

Beaucoup de phénomènes rencontrés en physique, biologie , chimie , étude des réseaux de neurones, circulation routière,...etc. ont trouvé dans la théorie des équations à retard un bon moyen de modélisation, (un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires). On appelle équation à retard toute équation dans laquelle la valeur de la dérivée à un instant de la solution dépend aussi des valeurs prises avant cet instant.

Une classe générale d'équations différentielles à retard a été initialement introduite par V. Volterra (1928) [22], il a étudié le modèle prédateur-proie.

Dans la deuxième moitié du dernier siècle, la théorie des équations à retard a connu un grand développement, notamment on trouve Bellman et Cooke (1963) [20], El'sgol'ts et

Norkin (1973) [13], Lunel et Walther (1995) [18].... En pratique, il se peut que certains modèles dépendent d'un paramètre : température, tension, résistance, ...etc. Dans ce cas, le modèle est décrit par une équation différentielle qui dépend de ce paramètre.

Dans le premier chapitre on s'intéresse à donner quelques notions générales sur les espaces de Sobolev avec quelques propriétés associées et quelques inégalité utiles utilisés dans la suite de ce mémoire, nous avons donné aussi quelques théorèmes principaux comme le théorème de Lax-Milgram, théorème de Hille-Yoshida et théorème de trace.

Le deuxième chapitre est consacré à donner la notion générale d'une équation différentielle à retard et comment peut être transformer à une équation différentielle sans retard pour pouvoir appliquer le théorème de Hille-Yoshida, avec quelques lemmes et théorèmes principaux permettant de définir les conditions nécessaires pour trouver un semi-groupe associé a une équation à retard, Pour illustrer cette idée, nous avons donné quelques problèmes étudiés dans les chapitres suivants.

Dans le troisième chapitre nous avons vu comment peut étudier l'existence et l'unicité de la solution en appliquant l'idée décrit précédemment sur deux exemples en détaille, le premier exemple est un problème des ondes avec un terme retard et comme deuxième exemple nous avons donné un problème des ondes avec terme retard sur les bords du domaine, l'existence et l'unicité de la solution pour chaque problème équivalent est démontré en utilisant les théorèmes de Hille-Yosida et de Lax-Milgram.

Le dernier chapitre consiste à donné une application à un autre type de problème, présenté par un problème de type de Timoshenko, ce type de problèmes a été introduit en 1921 par Stephen Timoshenko en absence de terme dissipatif qui décrit la vibration transversale du faisceau.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales sur les espaces de Sobolev, l'espace de Hilbert et la théorie de semi-groupe comme le théorème de Lax-Milgram, théorème de Hille-Yosida et théorème de trace que nous utiliserons dans les chapitres 2, 3 et 4.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. *Un espace préhilbertien complet muni de la norme induite par le produit scalaire est dit un espace de Hilbert.*

1.2 Les espaces de Sobolev

Dans toute la suite $I =]a, b[$ est un intervalle (borné ou non) et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1.2.1 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Définition 1.2.1. *[9] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On pose*

$$L^p(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R};\ f \ \textit{ est mesurable et } \int_I |\ f(x)\ |^p\ dx < \infty\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_I |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Définition 1.2.2. *[9] On pose*

$$L^\infty(I) = \Big\{ f:\ I \longrightarrow \mathbb{R};\ \textit{mesurable et}\ \exists\ \textit{une constante}\ C\ \textit{telle que}\ |f(x)| \leq C\ \textit{p.p. sur}\ I \Big\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \Big\{ C;\ |f(x)| \leq C\ \textit{p.p. sur}\ I \Big\}.$$

Définition 1.2.3. *[9] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par*

$$W^{1,p}(I) = \Big\{ u \in L^p(I); \quad \exists g \in L^p(I) \quad \textit{tel que} \quad \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I) \Big\}.$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note g par u' est on l'appelle dérivée faible de u.

Proposition 1.2.1. *L'espace $W^{1,p}(I)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

Pour $1 \leq p < \infty$, la norme ci-dessus est équivalente à la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \Big[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p \Big]^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $H^1(I)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

est un espace de Hilbert.

La norme associée est

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.2.4. *[9] On définit l'espace*

$$H_0^1(I) = \overline{C_0^1(I)}$$

par rapport à la norme de $H^1(I)$.

Définition 1.2.5. *[9] On désigne par $H^{-1}(I)$ l'espace dual de $H_0^1(I)$.*

1.2.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Définition 1.2.6. *[9] Soient $m \geq 2$ un entier et p un réel avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit par rècurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \Big\{u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I)\Big\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que pour $u \in W^{m,p}(I)$ on peut considérer les dérivées faibles successives $u' = g_1$, $(u')' = g_2$... jusqu'à l'ordre m ; on les note Du, D^2u... $D^m u$.
L'espace $W^{m,p}$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.
L'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.2.7. *Pour $s \in \mathbb{R}$; on note $H^s(\mathbb{R})$ l'espace des distributions u de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, telque*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Pour u et v dans $H^s(\mathbb{R})$, on pose

$$(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

On vérifie facilement que $(.,.)_{H^s}$ est un produit scalaire sur $H^s(\mathbb{R})$. On désigne par $\|.\|_{H^s}$ la norme associée, c'est-à-dire

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H^s(\mathbb{R}),$$

où $\widehat{u}$ est la transformée de Fourier de u donnée par

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx.$$

1.2.3 Espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 1.2.8. *[9] Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(I)$ désigne la fermeture de $C_0^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

L'espace $W_0^{1,p}(I)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$. H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit de H^1.

Remarque 1.2.1. *Si I est borné, $W_0^{1,p}(I)$ sera muni de la norme*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \sum_{1 \leq i \leq n} \|D_i u\|_{L^2},$$

c'est une norme équivalente à celle induite par $W^{1,p}(I)$.

Théorème 1.2.1. *[9] Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ pour $x = a$, où $x = b$.*

Remarque 1.2.2. *Toutes les définitions et les propriétés indiqués précédemment restent juste si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^n$.*

1.3 Théorème de trace

On note $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$ la variable de $\mathbb{R}^n$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, et on s'intéresse à l'opérateur de trace γ qui à une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, associé la fonction $\gamma\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{C}$ définie par $(\gamma\phi)(x') = \phi(x', 0)$.
Bien entendu, cet opérateur qui est bien défini pour des fonctions continues, n'a pas de sens, à priori, pour des classes de fonctions localement intégrables, l'hyperplan $\{x_n = 0\}$ étant de mesure nulle.
Nous avons donner dans ce paragraphe la définition de γu dès que $u \in H^s$ et $s > \frac{1}{2}$; et c'est le prolongement par continuité de l'opérateur de trace usuel.

Théorème 1.3.1. *[6] Pour tout $s > \frac{1}{2}$, on considère l'opérateur γ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ défini par $(\gamma\phi)(x') = \phi(x', 0)$.*

1. *L'opérateur γ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu, noté encore γ, de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.*
2. *L'opérateur γ est surjectif de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

1.4 Quelques inégalités utiles

Les inégalités suivantes sont d'une grande importance

Inégalité de Young

Soitent p et q deux réels conjugués : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. *Alors*

$$\forall (a,b)\in \mathbb{R}_+^2, \quad ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

En partieulier si u, $v \in L^2(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega |uv| \leq \varepsilon \int_\Omega |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |v|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$, alors

$$\Big|(u,v)\Big| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}}(v,v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u,v \in H.$$

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.5 Rappel sur les opérateurs

Définition 1.5.1. *Une application $T : H \to H$; où H est un espace de Hilbert, est dit opérateur linéaire si et seulement si T satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *Additivité :*

$$T(x+y) = Tx + Ty \qquad \forall x, y \in H;$$

2. *Homogénité :*

$$T(\lambda x) = \lambda \cdot Tx \qquad \forall x \in H, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.5.2. *L'opérateur T définit sur un espace de Hilbert est dit borné s'il existe un $C > 0$ tel que*

$$\|Tx\|_H \leq C\|x\|_H \qquad \forall x \in H.$$

On note par $\mathscr{L}(H)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés.

Théorème 1.5.1. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ la norme de T est donnée par :*

$$\|T\|_{\mathscr{L}(H)} = \sup\{\|Tx\|_H,\ x \in H,\ \|x\|_H = 1\}.$$

1.5.1 L'ensemble résolvant et la résolvante

Définition 1.5.3. *[11] On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble de points réguliers de l'opérateur T et on le note par*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T : D(A) \subset H \longrightarrow H,\ inversible\}.$$

Définition 1.5.4. *[11] L'application*

$$R(.,T) : \rho(T) \longrightarrow \mathscr{L}(H)$$

$$R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}$$

s'appelle la résolvante de T.

Théorème 1.5.2. *[11] Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, l'ensemble $\rho(T)$ est un ouvert non vide.*

1.5.2 Opérateur fermé

Définition 1.5.5. *On dit que l'opérateur A est fermé si toute suite (x_n) d'éléments de $D(A)$ converge vers x telle que la suite (Ax_n) soit convergente vers y alors, on a*

$$x \in D(A) \quad et \quad y = Ax.$$

1.5.3 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.5.6. *[11] Un opérateur linéaire non borné dans H est un couple $(A, D(A))$ où $D(A)$ un sous-espace vectoriel de H et A est une application linéaire de $D(A)$ dans H. Le sous-espace $D(A)$ est le domaine de A.*

Définition 1.5.7. *[11] Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H, est dissipatif si*

$$\forall v \in D(A), \quad (Av, v) \leq 0.$$

Définition 1.5.8. *[11] Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H, est m-dissipatif si :*

1. *A est dissipatif,*
2. *$Im(I - A) = H$ i.e.*

$$\forall f \in H, \ \exists u \in D(A) \quad \textit{tel que} \quad u - Au = f.$$

1.6 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.6.1. *[9] Une forme bilinéaire*

$$a(.,.) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

est :

1. *Continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H \qquad \forall u, v \in H,$$

2. *Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|_H^2 \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 1.6.1. ***(Lax-Milgram)****[9] Soient H un espace de Hilbert réel et $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Pour tout $L \in H^{'}$ (i.e. $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue). Alors, il existe $u \in H$ solution unique du problème*

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

1.7 Semi-groupe fortement continu

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni d'une norme notée $\| \, . \, \|_X$.

Définition 1.7.1. *[11] Une famille d'opérateurs $(T(t))_{t\geq 0}$ de $\mathscr{L}(X)$ est un semi-groupe fortement continu sur X lorsque les conditions suivantes sont réalisées :*

1. *$T(0) = I_X$, où I_X est l'opérateur identique de X dans X,*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $s \geq 0$,*
3. *$\lim_{t\to 0^+} \| \, T(t)x - x \, \|_X = 0$ pour tout $x \in X$.*

Proposition 1.7.1. *[12] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X. Alors il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \qquad \textit{pour } \; t \geq 0. \tag{1.1}$$

Définition 1.7.2. *[11] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X. On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur non borné $(A, D(A))$ défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe dans } X \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \qquad \textit{pour tout } x \in D(A).$$

Théorème 1.7.1. *[11] L'opérateur $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X vérifiant (1.1) si et seulement si pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'opérateur $(A - cI, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(e^{-ct}T(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X.*

Proposition 1.7.2. *[14] Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigroupe et A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité*

$$T(t)Ax = AT(t)x, \;\; \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.7.3. *[14] Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigroupe et A son générateur infinitésimal. Alors l'application*

$$\begin{aligned} [0, +\infty[\; &\longrightarrow X \\ t \; &\longmapsto T(t)x \end{aligned}$$

est de classe C^1 *sur* $[0,+\infty[$, *pour tout* $x \in D(A)$, *et nous avons*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \ \ \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.7.4. *[14] Soient* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semigroupe et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in X$, *alors* $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ *et on a l'égalité*

$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \qquad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.7.2. *[14] Soient* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu sur* X *et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

1. $\overline{D(A)} = X$,
2. *A est un opérateur fermé.*

1.8 Théorème de Hille-Yosida

Rappelons qu'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, vérifie

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{t\omega}, \ \ \textit{pour} \ \ M \geq 1 \ \ \textit{et} \ \ \omega \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.8.1. ***(Semi-groupes de contractions)****[11] Si* $\omega = 0$ *le semi-groupe est dit uniformement borné. Si de plus* $M = 1$ *le semi-groupe est dit de contractions.*
Un semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$ *vérifie*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1, \ \ \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.8.1. ***(Hille-Yosida)****[11] Un opérateur linéaire non borné* $(A, D(A))$ *dans un espace de Banach* X *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur* X *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *A est fermé,*
2. *$D(A)$ est dense dans X,*
3. $]0,+\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > 0$,

$$\big\|R(\lambda, A)\big\|_{\mathscr{L}(X)} = \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.8.2. ***(Lumer-Phillips)****[10] Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur tel que $\overline{D(A)} = H$ alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe de contraction si et seulement si :*

1. *A est dissipatif,*
2. *Il existe $\lambda > 0$ tel que $Im(\lambda I - A) = H$. (A est maximal).*

1.9 Résolution d'un problème d'évolution

Etant donné, le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - Au = 0 \qquad \text{sur} \quad \Omega \times [0, +\infty[\\ \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.2}$$

Théorème 1.9.1. ***(Hille-Yosida)****[9] Soit A un opérateur maximal dissipatif dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction*

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$$

unique solution du (1.2).
De plus, on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad pour\ tout\ t \geq 0.$$

Remarque 1.9.1. *[9] L'intérêt principal du théorème 1.9.1 réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution (1.2) on se ramène à vérifier que A est maxi mal dissipatif, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire $u - \lambda Au = f$.*

1.9.1 Problème de Cauchy abstrait

Soient X est un espace de Banach, $A : D(A) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire et $x \in X$. Le problème de la valeur initiale

$$(PCA) \qquad \begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad pour \quad t \geq 0, \\ u(0) = x \end{cases}$$

s'appelle le problème de Cauchy abstrait associé à la valeur initiale x.

Définition 1.9.1. *[3] Une fonction* $u : \mathbb{R}_+ \to X$ *est une solution classique de* (PCA) *si :*

1. u *est continûment différentiable,*
2. $u(t) \in D(A)$ *pour tout* $t \geq 0$,
3. $u(t)$ *satisfait* (PCA) *pour tout* $t \geq 0$.

Définition 1.9.2. *[3] On dit que le problème de Cauchy abstrait est bien posé si :*

1. *Le domaine* $D(A)$ *est dense dans* X,
2. *Pour tout* $x \in D(A)$ *il existe une solution classique unique* u_x *de* (PCA),
3. *Pour chaque suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $D(A)$ *satisfaisant*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0$$

on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_{x_n}(t) = 0$$

uniformément pour tout t *dans des intervalles compacts* $[0, T]$.

Théorème 1.9.2. *[3] Pour un opérateur fermé* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *associé, le problème* (PCA) *est bien posé si et seulement si* $(A, D(A))$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur* X.

Chapitre 2

Quelques résultats sur les équations différentielles à retard

Dans ce chapitre, nous allons voir que le cadre approprié pour les équations différentielles linéaires à retard est celle d'un problème de Cauchy abstrait dans un espace de Banach approprié, aussi nous avons donné quelques définitions et résultats sur les semi-groupes associés aux équations différentielles à retard, nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Pour plus de détails nous référons aux [1], [2] et [3].

2.1 Notion d'une équation à retard

Considérons d'abord l'équation différentielle ordinaire

$$u'(t) = A\ u(t), \qquad t \geq 0, \tag{2.1}$$

pour une matrice $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Comme il est généralement connu que la solution fondamentale de l'équation (2.1) est donnée par la fonction exponentielle e^{tA}. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, la fonction $u(t) := e^{tA}x$ est une solution unique de l'équation (2.1) avec une valeur initiale x.

Modifions maintenant l'équation (2.1) en considérant

$$u'(t) = A\ u(t-\tau), \qquad t \geq 0, \tag{2.2}$$

où $\tau > 0$.

Question. *Trouverons-nous toujours une fonction exponentielle résolvant cette équation ?*

Bien sûr, la fonction e^{tA} ne fonctionne plus et il n'y a pas d'autre matrice $B \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que e^{tB} soit une solution fondamentale. Néanmoins, la réponse reste toujours "oui" à condition de le regarder dans le bon réglage.

Pour ce faire, nous devons choisir une dimension infinie.

Définition 2.1.1. *Soit X un espace de Banach, considérons une fonction*

$$\begin{array}{rrcl} u: & [-\tau,\infty) & \longrightarrow & X \\ & t-\tau & \longmapsto & u(t-\tau) \end{array}$$

pour chaque $t \geq 0$. La fonction suivante

$$\begin{array}{rrcl} u^t: & [-\tau,0] & \longrightarrow & X \\ & \sigma & \longmapsto & u(t+\sigma) \end{array}$$

s'appelle le segment d'histoire par rapport à $t \geq 0$.

La fonction d'histoire de u est alors la fonction suivante

$$h_u : t \longmapsto u^t$$

sur $\mathbb{R}_+$.

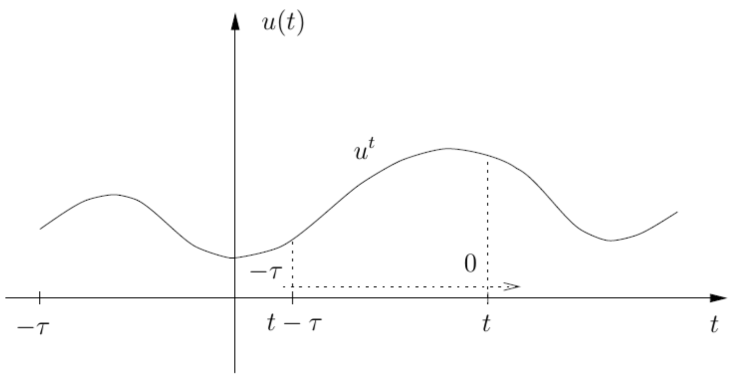

FIGURE 2.1 – Le segment d'histoire.

Définition 2.1.2. *Soit X un espace de Banach, une équation différentielle à retard est une équation de la forme*

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \varphi(u(t), u^t), \tag{2.3}$$

où $\varphi(.,.)$ est une application à valeur dans X.

Dans de nombreuses situations concrètes, la dérivée $u'(t)$ dépend réellement de $u(t)$ et on $u(t-\tau)$ pour certains $\tau > 0$ et il faut étudier les équations differentielles de la forme

$$u'(t) = \Psi(u(t), u^t(-\tau)),$$

pour une fonction Ψ de $X \times X$ dans X. Ainsi, en interprétant t comme le temps, les valeurs de u ont un effet sur u' avec un certain retard τ. Si nous définissons maintenant φ comme

$$\varphi(u(t), u^t) := \Psi(u(t), u^t(-\tau)),$$

on obtient l'équation (2.3).

2.2 Semi-groupe associé

On considére l'équation différentielle abstraite à retard suivante

$$(ER_p) \qquad \begin{cases} u'(t) = Bu(t) + \Phi u^t, \; t \geq 0, \\ u(0) = x, \\ u^0 = f, \end{cases}$$

où $f \in L^p([-\tau, 0], X)$ et p est un paramètre historique.

Nous supposons que le problème (ER_p) est associé aux hypothèses suivantes :

Hypothèses 2.2.1.

(H_1) *X est un espace de Banach,*

(H_2) *$B : D(B) \subseteq X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ dans X,*

(H_3) *$1 \leq p < \infty, f \in L^p([-\tau, 0], X)$ et $x \in X$,*

(H_4) *$\Phi : W^{1,p}([-\tau, 0], X) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire borné, appelé l'opérateur de retard.*

(H_5) *$\varepsilon_p := X \times L^p([-\tau, 0], X)$.*

Remarque 2.2.1. *Si on pose $X := \mathbb{C}^n$, $B = 0$ et $\Phi := A\delta_{-\tau}$, où $\delta_{-\tau}$ désigne l'évaluation ponctuelle à $-\tau$, l'équation (2.2) prend la forme*

$$u'(t) = Bu(t) + \Phi u^t.$$

Dans la suite nous posons $\tau = 1$:

Définition 2.2.1. *On dit qu'une fonction $u : [-1, \infty) \longrightarrow X$ est une solution classique de (ER_p) si :*

1. $u \in C([-1, \infty), X) \cap C^1([0, \infty), X)$,
2. $u(t) \in D(B)$ *et* $u^t \in W^{1,p}([-1, 0], X)$ *pour tous* $t \geq 0$,
3. u *satisfait* (ER_p) *pour tous* $t \geq 0$.

Lemme 2.2.1. *Soit $u : [-1, \infty) \longrightarrow X$ une fonction de $W^{1,p}_{loc}([-1, \infty), X)$. Alors, la fonction d'histoire $h_u : t \longmapsto u^t$ de u est continûment différentiable de $\mathbb{R}_+$ dans $L^p([-1, 0], X)$ et sa dérivée satisfait*

$$\frac{d}{dt} h_u(t) = \frac{d}{d\sigma} u^t.$$

Preuve. Soit $(A, D(A))$ le générateur du groupe de décalage à gauche $(S(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace $L^p(\mathbb{R}, X)$, c'est-à-dire

$$D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}, X) \quad et \quad A = \frac{d}{d\sigma},$$

(voir [12], section II.2.10).

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $K > 1$. Nous pouvons étendre $u_{|[t-K, t+K]}$ à une fonction $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}, X) = D(A)$, alors

$$\frac{d}{dt} S(t)v = AS(t)v.$$

On note que

$$(S(s)v)(\sigma) = u(s + \sigma) = u^s(\sigma) = h_u(s)(\sigma) \quad pour\ \sigma \in [-1, 0] \ \ et \quad | s - t | < K - 1.$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \left\| \frac{S(t+h)v - S(t)v}{h} - AS(t)v \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}, X)} \\ &\geq \lim_{h \to 0} \left\| \frac{h_u(t+h) - h_u(t)}{h} - \frac{d}{d\sigma} u^t \right\|^p_{L^p([-1,0], X)} \geq 0, \end{aligned}$$

alors,

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{h_u(t+h) - h_u(t)}{h} - \frac{d}{d\sigma} u^t \right\|^p_{L^p([-1,0], X)} = 0,$$

donc
$$\frac{d}{dt}h_u(t) = \frac{d}{d\sigma}u^t.$$
De plus, l'application
$$t \longmapsto \frac{d}{d\sigma}u^t = \frac{d}{dt}h_u(t)$$
est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^p([-1,0],X)$, car l'application $t \longmapsto AS(t)v = S(t)Av$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^p(\mathbb{R},X)$. □

2.2.1 Transformation au problème de Cauchy absrait

À partir du lemme 2.2.1, nous pouvons maintenant transformer les solutions classiques de (ER_p) aux solutions classiques d'un problème de Cauchy abstrait.

Corollaire 2.2.1. *Soit $u : [-1,\infty) \longrightarrow X$ une solution classique de (ER_p).*
Alors la fonction
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{U} : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & X \times L^p([-1,0],X) \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} u(t) \\ u^t \end{pmatrix} \end{array}$$
est continûment différentiable et vérifie
$$\mathcal{U}'(t) := \mathcal{A}\,\mathcal{U}(t),$$
où
$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} B & \Phi \\ 0 & \frac{d}{d\sigma} \end{pmatrix},$$
défini sur le domaine
$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in D(B) \times W^{1,p}([-1,0],X) \quad : f(0) = x \right\}$$
et $\frac{d}{d\sigma}$ désigne la dérivée distributive.
Ainsi, toute solution classique u de (ER_p) donne une solution classique du problème de Cauchy abstrait
$$(PCA_p) \qquad \begin{cases} \mathcal{U}'(t) = \mathcal{A}\,\mathcal{U}(t), & t \geq 0, \\ \mathcal{U}(0) = \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}, \end{cases}$$
sur ε_p.

Remarque 2.2.2. *Chaque solution classique de* (ER_p) *nous donne une solution classique de* (PCA_p)*. C'est-à-dire les deux problèmes* (ER_p) *et* (PCA_p) *sont équivalent au sens que l'inverse du corollaire 2.2.1 est aussi vrais. Alors, toute solution classique* $\mathcal{U}$ *de* (PCA_p) *est de la forme*

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^t \end{pmatrix},$$

où, u *est une solution classique de* (ER_p)*.*

Nous fixons l'espace de Banach pour (PCA_p) en ajoutant l'hypothèse suivante :
(H_6) $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ est un opérateur sur ε_p.
Le lemme suivant montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ est fermé et de domaine dense, donc nous pouvons appliquer le théorème 1.9.2 pour montrer que (PCA_p) est bien posé.

Lemme 2.2.2. *Sous les hypothèses* (H_1)*-*(H_6)*, l'opérateur* $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ *est fermé et de domaine dense dans* ε_p*.*

Preuve.
1) $\mathcal{A}$ *est fermé*
Soient $\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \varepsilon_p \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} Bx_n + \Phi f_n \\ \frac{d}{d\sigma} f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix} \in \varepsilon_p.$$

En particulier, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f dans la topologie induite par les normes de l'espace de Sobolev $W^{1,p}([-1,0], X)$. Par conséquent, nous avons

$$f \in W^{1,p}([-1,0], X) \quad et \quad \frac{d}{d\sigma} f = g.$$

Comme l'opérateur $\Phi : W^{1,p}([-1,0], X) \longrightarrow X$ est borné, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi f_n = \Phi f.$$

De l'hypothèse (H_2) et du théorème 1.7.2, l'opérateur B est fermé dans X, alors

$$x \in D(B) \quad et \quad Bx + \Phi f = y.$$

De plus,

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p([-1,0],X)} \leq \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{W^{1,p}([-1,0],X)} = 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\sigma) = f(\sigma), \qquad \forall \sigma \in [-1,0].$$

Pour $\sigma = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = f(0),$$

alors,

$$f(0) = x.$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}) \ \ et \ \ \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix}.$$

Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est fermé dans ε_p.

2) D($\mathcal{A}$) est dense dans ε_p

Soient $\begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix} \in \varepsilon_p$ et $\varepsilon > 0$. Comme $D(B)$ est dense dans X et $W_0^{1,p}([-1,0],X)$ est dense dans $L^p([-1,0],X)$, nous pouvons trouver $x \in D(B)$ et $\tilde{g} \in W_0^{1,p}([-1,0],X)$ tels que

$$\|x-y\|_X < \varepsilon \quad et \quad \|\tilde{g}-g\|_{L^p([-1,0],X)} < \varepsilon.$$

Soient $h \in W^{1,p}([-1,0],X)$ *et* $k \in W_0^{1,p}([-1,0],X)$ tels que

$$h(0) = x \quad et \quad \|k-h\|_{L^p([-1,0],X)} < \varepsilon.$$

Finalement, soit $f := \tilde{g} + h - k$, on obtient $f \in W^{1,p}([-1,0],X)$, $f(0) = x$, et

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon_p} &\leq \left\| \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon_p} + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}-g \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon_p} + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ k-h \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon_p} \\ &\leq \|x-y\|_X + \|\tilde{g}-g\|_{L^p([-1,0],X)} + \|k-h\|_{L^p([-1,0],X)} < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc le domaine $D(\mathcal{A})$ est dense dans ε_p. □

Corollaire 2.2.2. *Le problème de Cauchy abstrait (PCA_p) associé à l'opérateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ sur l'espace ε_p est bien posé si et seulement si $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ sur ε_p.*
Dans ce cas, les solutions classiques et faibles de (PCA_p) sont données par la fonction

$$\mathcal{U}(t) := \mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

Nous introduisons maintenant les notations suivantes :

Définition 2.2.2. *Désignons par* $\pi_1 : \varepsilon_p \to X$*, la projection canonique de* ε_p *dans* X*. De même, désignons par* $\pi_2 : \varepsilon_p \to L^p([-1,0],X)$*, la projection canonique de* ε_p *dans* $L^p([-1,0],X)$*.*

Proposition 2.2.1. *Soient* $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ *et* $\mathcal{U} : [0,\infty) \longrightarrow \varepsilon_p$ *telle que* $\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} (\pi_1 \circ \mathcal{U})(t) \\ (\pi_2 \circ \mathcal{U})(t) \end{pmatrix}$*, une solution classique de* (PCA_p)*. Soit* $u : [-1,\infty) \longrightarrow X$ *la fonction définie par*

$$u(t) := \begin{cases} (\pi_1 \circ \mathcal{U})(t), & t \geq 0, \\ f(t), & t \in [-1,0), \end{cases} \tag{2.4}$$

alors $u^t = (\pi_2 \circ \mathcal{U})(t)$ *pour chaque* $t \geq 0$ *et* u *est une solution classique de* (ER_p)*.*

Preuve. Soit $\mathcal{U}$ une solution classique de (PCA_p), alors $\pi_2 \circ \mathcal{U} \in C^1(\mathbb{R}_+, L^p([-1,0],X))$ résout le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\pi_2 \circ \mathcal{U})(t) = \frac{d}{d\sigma}(\pi_2 \circ \mathcal{U})(t), & t \geq 0, \\ (\pi_2 \circ \mathcal{U})(t)(0) = (\pi_1 \circ \mathcal{U})(t), & t \geq 0, \\ (\pi_2 \circ \mathcal{U})(0) = f \end{cases} \tag{2.5}$$

sur l'espace $L^p([-1,0],X)$.

Maintenant nous observons que par définition

$$u^t(\sigma) = u(t+\sigma) = \begin{cases} (\pi_1 \circ \mathcal{U})(t+\sigma) & t+\sigma \geq 0, \\ f(t+\sigma) & t+\sigma < 0, \end{cases}$$

où

$$\pi_1 \circ \mathcal{U} \in C^1([0,+\infty[,X), \ f \in W^{1,p}([-1,0],X)$$

et

$$f(0) = x = (\pi_1 \circ \mathcal{U})(0),$$

par hypothèse.

Par conséquent, $u \in W^{1,p}_{loc}([-1,+\infty[,X)$. Nous pouvons étendre u à une fonction dans $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R},X)$ et par le lemme 2.2.1, nous avons

$$\frac{d}{dt}h_u(t) = \frac{d}{d\sigma}u^t \ \text{ pour tous } t \geq 0,$$

sur l'espace $L^p([-1,0],X)$. De plus, par la définition de u^t, nous avons

$$u^t(0) = u(t) = (\pi_1 \circ \mathcal{U})(t) \text{ pour tous } t \geq 0$$

et

$$u^0 = f.$$

Par conséquent, l'application $t \longmapsto u^t$ est aussi une solution classique du problème (2.5) sur l'espace $L^p([-1,0],X)$.

Définissons maintenant

$$w(t) := u^t - (\pi_2 \circ \mathcal{U})(t) \qquad \textit{pour } t \geq 0.$$

Alors w est une solution classique du problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w(t) = \frac{d}{d\sigma}w(t), & t \geq 0, \\ w(t)(0) = 0, & t \geq 0, \\ w(0) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

sur l'espace $L^p([-1,0],X)$.

Comme l'équation (2.6) est le problème de Cauchy abstrait associé au générateur infinitésimal d'un semi-groupe de décalage à gauche (nilpotent) $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sur $L^p([-1,0],X)$ (voir *1.34* [3]) avec valeur initiale 0, nous avons

$$w(t) = 0 \qquad t \geq 0.$$

Donc,

$$u^t = (\pi_2 \circ \mathcal{U})(t) \in W^{1,p}([-1,0],X) \quad \textit{et} \quad \mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^t \end{pmatrix} \qquad t \geq 0$$

et u est une solution classique de (ER_p). □

L'équivalence de (ER_p) et (PCA_p) établi ci-dessus nous met en position d'utiliser les méthodes et les résultats de la théorie des semi-groupes pour traiter.

Maintenant, nous transférons les notions de bien posé et des solutions faibles, connu des problèmes de Cauchy abstraits et des semi-groupes, à (ERp).

Définition 2.2.3. *1. (ER_p) est appelé bien posé si (PCA_p) est bien posé, c'est-à-dire si $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur ε_p.*
2. Supposons que (ER_p) soit bien posé et $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ le semi-group généré par $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ sur ε_p. Alors, pour chaque $x \in X$ et chaque $f \in L^p([-1,0], X)$ la fonction que nous avons désignée par (2.4) est appelée une solution faible de (ER_p).

Proposition 2.2.2. *Soit u une solution faible de (ER_p). Alors, u satisfait*

$$\int_0^t u(s)ds \in D(B), \ \int_0^t u^s ds \in W^{1,p}([-1,0], X)$$

et l'équation intégrale

$$u(t) = \begin{cases} x + B\displaystyle\int_0^t u(s)ds + \Phi \int_0^t u^s ds & \textit{pour} \quad t \geq 0, \\ f(t) & \textit{pour} \quad t \in [-1,0), \end{cases} \tag{2.7}$$

est valable.

Preuve.
Rappelons que, la projection $\pi_1 : \varepsilon_p \to X$ sur le premier composante de ε_p définit par

$$\pi_1 \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} := x \quad \textit{pour} \quad \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \varepsilon_p$$

est borné, c'est-à-dire

$$\exists M > 0 \ \ \textit{tel que} \ \ \left\| \pi_1 \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\|_X \leq M \left\| \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon_p}, \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \varepsilon_p.$$

Montrons cette proposition en deux étapes suivantes :
Étape 1 : Montrons d'abord que

$$u^t = \pi_2 \left(\mathcal{T}(t) \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right) \tag{2.8}$$

pour chaque $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \varepsilon_p$ et tous $t \geq 0$.
Pour $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ l'identité (2.8) est vérifié a partir de la proposition 2.2.1.
Soit $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \varepsilon_p$, alors, il existe une suite $\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ converge vers $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}$. Comme le semi-groupe $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue, la suite $\mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix}$ converge uniformément

vers $\mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}$ dans ε_p pour t dans des sous-ensembles compacts de $[0, \infty)$. c'est-à-dire

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n \geq N,\ \forall \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \varepsilon_p,\ \left\| \mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} - \mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon_p} \leq \frac{\varepsilon}{2M},\ \forall t \in [0, \alpha]/\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Maintenant, soit

$$u_n(t) := \begin{cases} \pi_1 \left(\mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \right) & si \quad t \geq 0, \\ f_n(t) & si \quad t \in [-1, 0). \end{cases}$$

Comme $\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$, de la proposition 2.2.1, nous avons

$$(u_n)^t = \pi_2 \left(\mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \right).$$

Pour $t \geq 1$, nous avons

$$(u_n)^t(\sigma) = u_n(t + \sigma) = \pi_1 \left(\mathcal{T}(t + \sigma)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \right), \tag{2.9}$$

converge uniformément vers $\pi_1 \left(\mathcal{T}(t + \sigma)\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right) = u^t(\sigma)$ pour $\sigma \in [-1, 0]$. Parce que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N > 0$, tel que, pour tout $n \geq N$, $\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \varepsilon_p$ et $\sigma \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} \left\| \pi_1 \left(\mathcal{T}(t + \sigma)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \right) - \pi_1 \left(\mathcal{T}(t + \sigma)\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right) \right\|_{\varepsilon_p} &= \left\| \pi_1 \left(\mathcal{T}(t + \sigma)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} - \mathcal{T}(t + \sigma)\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right) \right\|_{\varepsilon_p} \\ &\leq M\frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(u_n)^t$ converge vers u^t dans $L^p([-1, 0], X)$ et nous avons

$$u^t = \lim_{n \to \infty} (u_n)^t = \lim_{n \to \infty} \pi_2 \left(\mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \right) = \pi_2 \left(\mathcal{T}(t)\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \right).$$

En particulier, $u^t \in L^p([-1, 0], X)$.

Pour $0 \leq t < 1$. D'aprés le corollaire 2.2.2 et (2.4), nous avons

$$(u_n)^t(\sigma) = \begin{cases} \pi_1 \left(\mathcal{T}(t + \sigma)\begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \right) & pour \quad \sigma \in [-t, 0], \\ f_n(t + \sigma) & pour \quad \sigma \in [-1, -t). \end{cases}$$

Cette formule associée au calcul donné en (2.9), implique que $(u_n)^t(\sigma)$ converge uniformément vers $\pi_1\left(\mathcal{T}(t+\sigma)\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}\right)$ pour $\sigma\in[-t,0]$. De plus, par hypothèse, $(u_n)^t$ converge vers $f(t+\cdot)$ dans $L^p([-1,-t),X)$. Par conséquent, $(u_n)^t$ converge vers u^t dans $L^p([-1,0],X)$ et par le même argument ci-dessus, $u^t=\pi_2\left(\mathcal{T}(t)\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}\right)$.

Étape 2 : D'aprés la proposition (1.7.4), pour tout $\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}\in\varepsilon_p$, on a

$$\int_0^t\mathcal{T}(s)\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}ds\in D(\mathcal{A})\ \ et\ \ \mathcal{T}(t)\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}=\mathcal{A}\int_0^t\mathcal{T}(s)\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}ds,\qquad t\geq 0,$$

alors,

$$\int_0^t u(s)ds\in D(B),\ \int_0^t u^s ds\in W^{1,p}([-1,0],X)$$

et

$$\mathcal{T}(t)\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}=\mathcal{A}\int_0^t\mathcal{T}(s)\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix},\qquad t\geq 0.\tag{2.10}$$

Substituons (2.10) dans (2.4), on obtient

$$u(t)=\begin{cases}\pi_1\left(\mathcal{A}\displaystyle\int_0^t\mathcal{T}(s)\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}\right) & pour\ \ t\geq 0,\\ f(t) & pour\ \ t\in[-1,0),\end{cases}$$

d'où

$$u(t)=\begin{cases}\pi_1\left(\begin{pmatrix}B & \Phi\\ 0 & \frac{d}{d\sigma}\end{pmatrix}\displaystyle\int_0^t\begin{pmatrix}u(s)\\u^s\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}\right) & pour\ \ t\geq 0,\\ f(t) & pour\ \ t\in[-1,0),\end{cases}$$

alors,

$$u(t)=\begin{cases}\pi_1\left(\begin{pmatrix}B & \Phi\\ 0 & \frac{d}{d\sigma}\end{pmatrix}\displaystyle\int_0^t\begin{pmatrix}u(s)\\u^s\end{pmatrix}ds\right)+\pi_1\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix} & pour\ \ t\geq 0,\\ f(t) & pour\ \ t\in[-1,0),\end{cases}$$

selon la définition de la projection π_1, on obtient

$$u(t) = \begin{cases} x + B\displaystyle\int_0^t u(s)ds + \Phi\int_0^t u^s ds & pour \quad t \geq 0, \\ f(t) & pour \quad t \in [-1, 0). \end{cases}$$

. $\square$

Nous terminons cette présentation par donner la terminologie suivante :

Définition 2.2.4. *Dans le cas où* (ER_p) *est bien posé, nous appelons le semi-groupe* $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ *généré par* $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ *sur* ε_p *le semi-groupe de retard associé à* (ER_p).

Chapitre 3

Applications aux quelques problèmes des ondes avec terme retard

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux cas de ce type des problèmes, le premier cas est un problème des ondes avec terme retard dans le domaine d'étude, le deuxième cas est un problème des ondes avec un terme retard sur le bord du domaine.

3.1 Introduction

L'établissement de l'équation d'onde est venu de l'étude des vibrations d'une corde de violon. Afin de pouvoir modéliser ce comportement, les mathématiciens du XVII siècle ont appliqué la deuxième loi de Newton à la corde, d'abord vue comme un ensemble fini de masses ponctuelles reliées par des ressorts (dont le comportement est donné par la loi de Hooke établie en 1660), avant d'augmenter le nombre de masses pour se rapprocher de la corde .

En 1727, Jean Bernoulli reprend l'expérience de la corde de violon et constate que ses vibrations forment une sinusoïde et que la variation de son amplitude en un point forme également une courbe sinusoïdale, mettant ainsi en évidence les modes. En 1746, Jean le Rond d'Alembert reprend le modèle des masses ponctuelles liées par des ressorts et établit uniquement à partir des équations que les vibrations de la corde dépendent à la fois de l'espace et du temps.

3.2 Équation des ondes localement amorti avec terme retard

On considère le problème à retard suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a\chi_\omega u_t(x,t) + ku_t(x,t-\tau) = 0, & \textit{dans} \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \textit{sur} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), & \textit{dans} \quad \Omega, \\ u_t(x,t) = f_0(x,t), & \textit{dans} \quad \Omega \times (-\tau,0), \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\tau > 0$ représente le temps de retard, a et k sont des constantes positives.
De plus, χ_ω est la fonction caractéristique de ω, définie par

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \textit{pour} \quad x \in \omega, \\ 0, & \textit{pour} \quad x \notin \omega. \end{cases}$$

Remarque 3.2.1. *Si on pose $v = u_t$, le problème (3.1) devient*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = v(x,t), \\ v_t(x,t) = \Delta u(x,t) - a\chi_\omega v(x,t) - kv(x,t-\tau), & \textit{dans} \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \textit{sur} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = u_1(x), & \textit{dans} \quad \Omega, \\ v(x,t) = f_0(x,t), & \textit{dans} \quad \Omega \times (-\tau,0), \end{cases}$$

qui peut être écrire alors,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = B\ U(t) + \Phi\ U^t(-\tau), \quad t \geq 0, \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \\ U^t(-\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0(.,t-\tau) \end{pmatrix}, \qquad t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -a\chi_\omega \end{pmatrix}$ *et* $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$.

3.2.1 Écriture du problème équivalent

Nous introduisons la nouvelle variable dépendante suivante

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t-\tau\rho), \quad x\in\Omega, \ \ \rho\in(0,1), \ \ t>0.$$

Par conséquent, on a

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \quad x\in\Omega, \ \ \rho\in(0,1), \ \ t>0.$$

Alors, le problème (3.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a\chi_\omega u_t(x,t) + kz(x,1,t) = 0, & dans \quad \Omega\times(0,+\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & dans \quad \Omega\times(0,1)\times(0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & sur \quad \partial\Omega\times(0,+\infty), \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), & sur \quad \Omega\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & dans \quad \Omega, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\rho\tau), & dans \quad \Omega\times(0,1). \end{cases} \tag{3.3}$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert, où

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &:= H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega\times(0,1)) \\ &:= X\times L^2(\Omega\times(0,1)), \end{aligned}$$

muni du produit scalaire suivant

$$\langle \mathcal{U},\tilde{\mathcal{U}}\rangle_{\mathscr{H}} := \int_\Omega (\nabla u(x)\nabla\tilde{u}(x) + v(x)\tilde{v}(x))dx + \xi\tau\int_\Omega\int_0^1 z(x,\rho)\tilde{z}(x,\rho)d\rho dx,$$

avec $\mathcal{U} = (u,v,z)^T$, $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{z})^T \in \mathscr{H}$ et ξ est un nombre positif fixe.
Pour $\mathcal{U} = (u,u_t,z)^T$, avec $v = u_t$ le problème (3.3) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t = \mathcal{A}\mathcal{U}, \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0 = (u_0,u_1,f_0(.,-.\tau))^T, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A})\subset\mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{H}$ est un opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - a\chi_\omega v - kz(.,1) \\ -\frac{1}{\tau}z_\rho \end{pmatrix},$$

avec le domaine

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ (u, v, z)^T \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1(0,1)) : v = z(.,0) \quad dans \quad \Omega \right\}.$$

3.2.2 Étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent

Sous les hypothèses associés à ce problème, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.2.1. *Pour toute donnée initiale* $\mathcal{U}_0 \in \mathscr{H}$*, il existe une solution unique*

$$\mathcal{U} \in C([0, +\infty[, \mathscr{H})$$

du problème (3.4). De plus, si $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$*, la solution de (3.4) satisfait*

$$\mathcal{U} \in C([0, +\infty[, D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty[, \mathscr{H}).$$

Preuve. Pour montrer l'existence d'une solution du système (3.4) il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est un générateur infinitisimal d'un C_0-semigroupe de contraction, c'est-à-dire $\mathcal{A}$ est maximal dissipatif, pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{A} - cI$ est dissipatif et maximal (voir le théorèm 1.7.1).

1) $\mathcal{A}$ - cI dissipatif

Pour montrer que $\mathcal{A} - cI$ est dissipatif il suffit de prouver qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\langle (\mathcal{A} - cI)\mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathscr{H}} \leq 0, \qquad \forall \mathcal{U} \in D(\mathcal{A}). \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathscr{H}} = \int_\Omega (\nabla v(x) \nabla u(x) + \Delta u(x) v(x)) dx - a \int_\omega v^2(x) dx - k \int_\Omega z(x,1) v(x) dx \\ -\xi \int_0^1 \int_\Omega z_\rho(x,\rho) z(x,\rho) dx d\rho, \end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathscr{H}} = -a \int_\omega v^2(x) dx - k \int_\Omega z(x,1) v(x) dx - \xi \int_0^1 \int_\Omega z_\rho(x,\rho) z(x,\rho) dx d\rho. \tag{3.6}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^1 z_\rho(x,\rho) z(x,\rho) d\rho dx &= \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x,\rho) d\rho dx \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \{ z^2(x,1) - z^2(x,0) \} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega z^2(x,1) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega v^2(x) dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Donc, d'aprés (3.6) et (3.7), on trouve

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} = -a\int_\omega v^2(x)dx - k\int_\Omega z(x,1)v(x)dx + \frac{\xi}{2}\int_\Omega v^2(x)dx - \frac{\xi}{2}\int_\Omega z^2(x,1)dx.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} -k\int_\Omega z(x,1)v(x)dx &\leq k\int_\Omega |z(x,1)v(x)|dx \\ &\leq k\varepsilon\int_\Omega z^2(x,1)dx + \frac{k}{4\varepsilon}\int_\Omega v^2(x)dx \end{aligned}$$

pour $\varepsilon = \frac{\xi}{2k}$,

$$-k\int_\Omega z(x,1)v(x)dx \leq \frac{\xi}{2}\int_\Omega z^2(x,1)dx + \frac{k^2}{2\xi}\int_\Omega v^2(x)dx.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} &\leq -a\int_\omega v^2(x)dx + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{k^2}{2\xi}\right)\int_\Omega v^2(x)dx \\ &\leq \left(\frac{\xi}{2} + \frac{k^2}{2\xi}\right)\int_\Omega v^2(x)dx. \end{aligned}$$

Donc, il existe $c > 0$ tel que

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} \leq c\|v\|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} \leq c\|\mathcal{U}\|^2_{\mathscr{H}}.$$

Alors, l'estimation (3.5) est résult. Donc l'opérateur $\mathcal{A} - cI$ est dissipatif.

2) $\mathcal{A}$ - cI maximal

Pour montrer la maximalité de $\mathcal{A}-cI$, il suffit de montrer que $\lambda I-\mathcal{A}$ est surjectif pour chaque $\lambda > 0$, nous supposons que $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathscr{H}$ et on cherche $\mathcal{U} = (u, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $(\lambda I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F$, ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$\lambda u - v = f_1, \tag{3.8}$$

$$\lambda v - \Delta u + a\chi_\omega v + kz(.,1) = f_2, \tag{3.9}$$

$$\lambda\tau z + z_\rho = \tau f_3. \tag{3.10}$$

Supposons que nous voulons trouvé u avec régularité appropriée. Alors, de (3.8), on a

$$v = \lambda u - f_1. \tag{3.11}$$

De plus, de $(3.3)_4$, (3.10) et (3.11), z est donnée par

$$z(x,\rho) = \lambda u(x)e^{-\lambda\tau\rho} - f_1(x)e^{-\lambda\tau\rho} + \tau e^{-\lambda\tau\rho}\int_0^\rho f_3(x,s)e^{\lambda s\tau}ds, \qquad \Omega\times(0,1). \tag{3.12}$$

En particulier,

$$z(x,1) = \lambda u(x)e^{-\lambda\tau} + z_0(x), \quad \textit{pour} \quad x\in\Omega, \tag{3.13}$$

avec $z_0 \in L^2(\Omega)$ défini par

$$z_0(x) = -f_1(x)e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau}\int_0^1 f_3(x,s)e^{\lambda s\tau}ds, \qquad x\in\Omega.$$

Substituons (3.11) et (3.13) dans (3.9), on obtient

$$\lambda^2 u - \Delta u + a\lambda\chi_\omega u + k\lambda u e^{-\lambda\tau} = f_2 + (\lambda + a\chi_\omega)f_1 - kz_0(x), \quad \textit{pour} \quad x\in\Omega.$$

Il reste à prouver qu'il existe u satisfait

$$(\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau})u - \Delta u + a\lambda\chi_\omega u = g \in L^2(\Omega). \tag{3.14}$$

On définit l'espace $\mathcal{W} = H_0^1(\Omega)$.

En multipliant l'équation (3.14) par une fonction $w\in\mathcal{W}$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$(\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau})\int_\Omega uwdx + \int_\Omega \nabla u\nabla wdx + a\lambda\int_\omega uwdx = \int_\Omega gwdx. \tag{3.15}$$

Pour u et w, on définit sur $\mathcal{W}$ une forme bilinéaire $a(.,.)$ et une form linéaire $L(.)$ par

$$a(u,w) = (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau})\int_\Omega uwdx + \int_\Omega \nabla u\nabla wdx + a\lambda\int_\omega uwdx$$

$$L(w) = \int_\Omega gwdx.$$

On montre que $a(.,.)$ est continue, coercive et $L(.)$ est continue.

***1)* Continuité de $a(.,.)$**

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\Big|a(u,w)\Big| &\leq (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau} + a\lambda)\|u\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max(\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau} + a\lambda, 1)\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&\leq C_1\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\Big)\Big(\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&\leq C_1\|u\|_{\mathcal{W}}\|w\|_{\mathcal{W}}.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

2) **Coercivité de $a(.,.)$**

D'aprés l'expression de $a(.,.)$, on a

$$\begin{aligned} a(u,u) &= (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau}) \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \nabla u^2 dx + a\lambda \int_\omega u^2 dx \\ &\geq (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau}) \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \nabla u^2 dx \\ &\geq \min(\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau}, 1) \int_\Omega (u^2 + \nabla u^2) dx \\ &\geq C_2 \|u\|^2_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est coercive.

3) **Continuité de $L(.)$**

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \Big| L(w) \Big| &\leq \int_\Omega |g||w| dx \\ &\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_3 \|w\|_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

Donc $L(.)$ est continue.

$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur $\mathcal{W}$ et $L(.)$ est linéaire et continue sur $\mathcal{W}$, d'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $u \in \mathcal{W} = H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(u,w) = L(w), \qquad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Ce qui signifie que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $v = \lambda u - f_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Il reste à montrer que $u \in H^2(\Omega)$, $z \in L^2(\Omega; H^1(0,1))$ et $z(x,0) = v(x)$.

D'aprés (3.15), on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = -\int_\Omega (g + (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau})u + a\lambda\chi_\omega u) w dx, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui signifie que ∇u admet une derivée faible dans L^2 car

$$(g + (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau})u + a\lambda\chi_\omega u) \in L^2(\Omega)$$

et on a

$$\Delta u = g + (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau})u + a\lambda\chi_\omega u$$

par suit $\nabla u \in H^1(\Omega)$ donc $u \in H^2(\Omega)$.

Finalement, à partir de (3.12) et (3.10), on obtient

$$z(x,0) = v(x) \quad et \quad z \in L^2(\Omega; H^1(0,1)).$$

Donc il existe $\mathcal{U} = (u,v,z)^T \in D(\mathcal{A})$ qui vérifie $(\lambda I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F$ pour $\lambda > 0$ et $F \in \mathscr{H}$. C'est-à-dire $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I - (\mathcal{A} - cI)$ est surjectif, donc $\mathcal{A} - cI$ est maximal.

Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (3.4). Ceci terminé la démonstration. □

Conclusion 3.2.1. *Si $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu $(\mathcal{T}_1(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathscr{H}$, alors, d'aprés le corollaire 2.2.2 et la définition 2.2.3, la solution de (3.4) est donnée par la fonction*

$$\mathcal{U}(t) := \mathcal{T}_1(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ f_0(.,-.\tau) \end{pmatrix}$$

et le problème (3.2) admet une solution unique pour chaque $(u_0, u_1, f_0(.,-.\tau))^T \in D(\mathcal{A})$ donnée par

$$U(t) = \begin{cases} \pi_1\left(\mathcal{T}_1(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ f_0(.,-.\tau) \end{pmatrix} \right), & t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ f_0(.,t) \end{pmatrix}, & t \in [-\tau, 0). \end{cases}$$

3.3 Équation des ondes avec terme retard sur les bords

Nous étudions la condition nécessaire et suffisante pour obtenu une solution unique pour un problème des ondes avec terme retard sur les bords.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné du frontière Γ de classe C^2. Nous supposons que Γ est divisé en deux parties Γ_D et Γ_N, c'est-à-dire, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, avec $\overline{\Gamma}_D \cap \overline{\Gamma}_N = \emptyset$ et $\Gamma_D \neq \emptyset$.

On considère le problème à retard suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & dans \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & sur \quad \Gamma_D \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\mu_1 u_t(x,t) - \mu_2 u_t(x,t-\tau), & sur \quad \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & dans \quad \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), & dans \quad \Gamma_N \times (0,\tau), \end{cases} \tag{3.16}$$

où $\nu(x)$ désigne le vecteur unitaire normal vers l'extérieure au point $x \in \Gamma$ et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée normal. De plus, $\tau > 0$ représente le temps de retard, μ_1 et μ_2 sont des constantes positives.

3.3.1 Écriture du problème équivalent

De la même façon que le problème précédent, nous introduisons la nouvelle variable

$$z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho), \qquad x \in \Gamma_N, \quad \rho \in (0,1), \quad t > 0.$$

Donc, on a

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \qquad x \in \Gamma_N, \quad \rho \in (0,1), \quad t > 0.$$

Alors, le problème (3.16) est équivalent à :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & dans \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & dans \quad \Gamma_N \times (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & sur \quad \Gamma_D \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\mu_1 u_t(x,t) - \mu_2 z(x,1,t), & sur \quad \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), & sur \quad \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & dans \quad \Omega, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\rho\tau), & dans \quad \Gamma_N \times (0,1). \end{cases} \tag{3.17}$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert, où

$$\begin{aligned} \mathscr{H} \quad &:= \quad H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_N \times (0,1)) \\ &:= \quad X \times L^2(\Gamma_N \times (0,1)), \end{aligned}$$

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.17), nous considérons que

$$\mu_2 \leq \mu_1 \tag{3.18}$$

et ξ une constante positive tel que

$$\tau\mu_2 \leq \xi \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2). \tag{3.19}$$

Définissons sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ le produit scalaire

$$\langle \mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}} \rangle_{\mathscr{H}} := \int_\Omega (\nabla u(x)\nabla\tilde{u}(x) + v(x)\tilde{v}(x))dx + \xi\int_{\Gamma_N}\int_0^1 z(x,\rho)\tilde{z}(x,\rho)d\rho d\Gamma,$$

avec $\mathcal{U} = (u,v,z)^T$, $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{z})^T \in \mathscr{H}$ et ξ est un nombre positif fixe.
Pour $\mathcal{U} = (u,u_t,z)^T$, avec $v = u_t$ le problème (3.17) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t = \mathcal{A}\mathcal{U}, \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0 = (u_0, u_1, f_0(.,-.\tau))^T, \end{cases} \tag{3.20}$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ est un opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ -\frac{1}{\tau}z_\rho \end{pmatrix},$$

avec le domaine

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{array}{c} (u,v,z)^T \in (E(\Delta, L^2(\Omega)) \cap H^1_{\Gamma_D}(\Omega)) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma_N; H^1(0,1)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\mu_1 v - \mu_2 z(.,1) \quad sur \quad \Gamma_N, \ v = z(.,0) \quad sur \quad \Gamma_N \end{array} \right\}$$

où

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \quad dans \quad \Gamma_D\}$$

et

$$E(\Delta, L^2(\Omega)) = \{u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Rappelons que pour une fonction $u \in E(\Delta, L^2(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$ et la formule de Green suivante est valable (voir section *1.5* de [19])

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = -\int_\Omega \Delta u w dx + \langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, w\rangle_{\Gamma_N} \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \tag{3.21}$$

où $\langle .,. \rangle_{\Gamma_N}$ est le crochet de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$.
Notez en outre que pour $(u,v,z)^T \in D(\mathcal{A})$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ appartient à $L^2(\Omega)$ puisque $z(.,1)$ est dans $L^2(\Omega)$.

3.3.2 Étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent

Sous les hypothèses associés à ce problème, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.3.1. *Pour toute donnée initiale $\mathcal{U}_0 \in \mathscr{H}$, le problème (3.20) admet une solution unique*

$$\mathcal{U} \in C([0, +\infty[, \mathscr{H}).$$

De plus, si $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, la solution de (3.20) satisfait

$$\mathcal{U} \in C([0, +\infty[, D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty[, \mathscr{H}).$$

Preuve. Pour montrer l'existence d'une solution du système (3.20), on applique le théorème de Lumer-Phillips, pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif et maximal.

1) $\mathcal{A}$ dissipatif

Pour montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif il suffit de prouver que

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} \leq 0, \quad \forall \mathcal{U} \in D(\mathcal{A}).$$

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} = \int_\Omega (\nabla v(x)\nabla u(x) + \Delta u(x)v(x))dx - \frac{\xi}{\tau}\int_{\Gamma_N}\int_0^1 z_\rho(x,\rho)z(x,\rho)d\rho d\Gamma,$$

en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} &= \int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x)d\Gamma - \frac{\xi}{\tau}\int_{\Gamma_N}\int_0^1 z_\rho(x,\rho)z(x,\rho)d\rho d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x)d\Gamma - \frac{\xi}{2\tau}\int_{\Gamma_N} z^2(x,1)d\Gamma + \frac{\xi}{2\tau}\int_{\Gamma_N} v^2(x)d\Gamma \\
&= -\int_{\Gamma_N}\{\mu_1 v(x) + \mu_2 z(x,1)\}v(x)d\Gamma - \frac{\xi}{2\tau}\int_{\Gamma_N} z^2(x,1)d\Gamma + \frac{\xi}{2\tau}\int_{\Gamma_N} v^2(x)d\Gamma \\
&= (-\mu_1 + \frac{\xi}{2\tau})\int_{\Gamma_N} v^2(x)d\Gamma - \mu_2\int_{\Gamma_N} z(x,1)v(x)d\Gamma - \frac{\xi}{2\tau}\int_{\Gamma_N} z^2(x,1)d\Gamma.
\end{aligned}$$

On a d'aprés l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
-\mu_2\int_{\Gamma_N} z(x,1)v(x)d\Gamma &\leq \mu_2\int_{\Gamma_N} |z(x,1)v(x)|d\Gamma \\
&\leq \varepsilon\mu_2\int_{\Gamma_N} z^2(x,1)d\Gamma + \frac{\mu_2}{4\varepsilon}\int_{\Gamma_N} v^2(x)d\Gamma
\end{aligned}$$

on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$-\mu_2 \int_{\Gamma_N} z(x,1)v(x)d\Gamma \;\leq\; \frac{\mu_2}{2} \int_{\Gamma_N} z^2(x,1)d\Gamma + \frac{\mu_2}{2} \int_{\Gamma_N} v^2(x)d\Gamma,$$

donc

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathscr{H}} \;\leq \left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau}\right) \int_{\Gamma_N} v^2(x)d\Gamma + \left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau}\right) \int_{\Gamma_N} z^2(x,1)d\Gamma.$$

D'aprés, les conditions (3.18) et (3.19), on a

$$-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau} \leq 0 \quad et \quad \frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau} \leq 0,$$

alors,

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathscr{H}} \leq 0.$$

Donc $\mathcal{A}$ est dissipatif.

2) $\mathcal{A}$ maximal

Pour montrer la maximalité de $\mathcal{A}$, nous supposons que $F = (f^1, f^2, f^3)^T \in \mathscr{H}$ et on cherche $\mathcal{U} = (u, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $(I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F$, ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$u - v = f^1, \tag{3.22}$$

$$v - \Delta u = f^2, \tag{3.23}$$

$$\tau z + z_\rho = \tau f^3. \tag{3.24}$$

Supposons que nous voulons trouvé u avec régularité appropriée. Alors, de (3.22), on a

$$v = u - f^1. \tag{3.25}$$

Aussi nous pouvons déterminer z. En effet, par $(3.17)_5$,

$$z(x,0) = v(x) \quad pour \quad x \in \Gamma_N \tag{3.26}$$

et, de (3.24), on a

$$\tau z(x,\rho) + z_\rho(x,\rho) = \tau f^3(x,\rho) \quad pour \quad x \in \Gamma_N,\ \rho \in (0,1). \tag{3.27}$$

Alors, d'aprés (3.26) et (3.27), on obtient

$$z(x,\rho) = v(x)e^{-\tau\rho} + \tau e^{-\tau\rho} \int_0^\rho f^3(x,s)e^{s\tau}ds.$$

Donc, à partir de (3.25),

$$z(x,\rho) = u(x)e^{-\tau\rho} - f^1(x)e^{-\tau\rho} + \tau e^{-\tau\rho}\int_0^\rho f^3(x,s)e^{s\tau}ds, \quad \Gamma_N \times (0,1). \tag{3.28}$$

En particulier,

$$z(x,1) = u(x)e^{-\tau} + z_0(x), \quad pour \quad x \in \Gamma_N, \tag{3.29}$$

avec $z_0 \in L^2(\Gamma_N)$ défini par

$$z_0(x) = -f^1(x)e^{-\tau} + \tau e^{-\tau}\int_0^1 f^3(x,s)e^{s\tau}ds, \qquad x \in \Gamma_N.$$

Substituons (3.25) dans (3.23), on obtient

$$u - \Delta u = f^1 + f^2, \tag{3.30}$$

où $(f^1 + f^2) \in L^2(\Omega)$. On définit l'espace $\mathcal{W} = H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$.

En multipliant l'équation (3.30) par une fonction $w \in \mathcal{W}$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega (u - \Delta u)wdx = \int_\Omega (f^1 + f^2)wdx. \tag{3.31}$$

D'aprés la formule de Green et en utilisant (3.25) et (3.29), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u - \Delta u)wdx &= \int_\Omega (uw + \nabla u \nabla w)dx - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu} wd\Gamma \\
&= \int_\Omega (uw + \nabla u \nabla w)dx + \int_{\Gamma_N} (\mu_1 vw + \mu_2 z(x,1)w)d\Gamma \\
&= \int_\Omega (uw + \nabla u \nabla w)dx + \int_{\Gamma_N} \{\mu_1(u - f^1)w + \mu_2(ue^{-\tau} + z_0)w\}d\Gamma.
\end{aligned}$$

Donc, (3.31) peut être réécrit comme

$$\begin{aligned}
\int_\Omega uwdx + \int_\Omega \nabla u \nabla wdx + (\mu_1 + \mu_2 e^{-\tau})\int_{\Gamma_N} uwd\Gamma &= \int_\Omega (f^1 + f^2)wdx \\
+ \mu_1 \int_{\Gamma_N} f^1 wd\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z_0 wd\Gamma, \quad \forall w \in \mathcal{W}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Pour u et w, on définit sur $\mathcal{W}$ une forme bilinéaire $a(.,.)$ et une form linéaire $L(.)$ par

$$a(u,w) = \int_\Omega uwdx + \int_\Omega \nabla u \nabla wdx + (\mu_1 + \mu_2 e^{-\tau})\int_{\Gamma_N} uwd\Gamma$$

$$L(w) = \int_\Omega (f^1 + f^2)wdx + \mu_1 \int_{\Gamma_N} f^1 wd\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z_0 wd\Gamma.$$

On montre que $a(.,.)$ est continue coercive et $L(.)$ est continue.

***1)* Continuité de $a(.,.)$**

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\Big|a(u,w)\Big| &\leq (1+\mu_1+\mu_2 e^{-\tau})\|u\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max\left(1+\mu_1+\mu_2 e^{-\tau},1\right)\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&\leq C_1'\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\Big)\Big(\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&\leq C_1'\|u\|_{\mathcal{W}}\|w\|_{\mathcal{W}}.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

***2)* Coercivité de $a(.,.)$**

D'aprés l'expression de $a(.,.)$, on a

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \nabla u^2 dx + (\mu_1+\mu_2 e^{-\tau})\int_{\Gamma_N} u^2 d\Gamma \\
&\geq \int_\Omega (u^2+\nabla u^2)dx \\
&\geq \|u\|^2_{\mathcal{W}}.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est coercive.

***3)* Continuité de $L(.)$**

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\Big|L(w)\Big| &\leq \int_\Omega |f^1||w|dx + \int_\Omega |f^2||w|dx + \mu_1\int_{\Gamma_N}|f^1||w|d\Gamma + \mu_2\int_{\Gamma_N}|z_0||w|d\Gamma \\
&\leq \|f^2\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} + (1+\mu_1)\|f^1\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} + \mu_2\|z_0\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max(\|f^2\|_{L^2(\Omega)}, (1+\mu_1)\|f^1\|_{L^2(\Omega)}, \mu_2\|z_0\|_{L^2(\Omega)})\|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_3'\|w\|_{\mathcal{W}}
\end{aligned}$$

Donc $L(.)$ est continue.

$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur $\mathcal{W}$ et $L(.)$ est linéaire et continue sur $\mathcal{W}$, d'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $u \in \mathcal{W} = H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ telle que

$$a(u,w) = L(w), \quad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Ce qui signifie que $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ et $v = u - f^1 \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ donc $u, v \in H^1(\Omega)$.
Il reste à montrer que $u \in E(\Delta, L^2(\Omega))$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\mu_1 v - \mu_2 z(.,1)$, $z \in L^2(\Gamma_N; H^1(0,1))$ et $z(x,0) = v(x)$.
D'aprés (3.30), on a

$$\Delta u = u - f^1 - f^2 \in L^2(\Omega),$$

car $f^2 \in L^2(\Omega)$ et $u, f^1 \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$. Donc

$$u \in E(\Delta, L^2(\Omega)).$$

En substituant la formule de Green (3.21) dans (3.32) et en utilisant (3.30), on obtient

$$\int_{\Gamma_N} (\mu_1 + \mu_2 e^{-\tau}) u w d\Gamma + \langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, w \rangle_{\Gamma_N} = \mu_1 \int_{\Gamma_N} f^1 w d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z_0 w d\Gamma,$$

par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu_1 + \mu_2 e^{-\tau}) u = \mu_1 f^1 - \mu_2 z_0 \quad sur \quad \Gamma_N. \tag{3.33}$$

Substituons (3.25) et (3.29) dans (3.33), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\mu_1 v - \mu_2 z(.,1) \quad sur \quad \Gamma_N.$$

Finalement, à partir de (3.28) et (3.24), on obtient

$$z(x,0) = v(x) \quad et \quad z \in L^2(\Gamma_N; H^1(0,1)).$$

Donc il existe $\mathcal{U} = (u, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$ qui vérifie $(I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F$ pour tout $F \in \mathscr{H}$, et $\mathcal{A}$ est maximal.
Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (3.20). Ceci terminé la démonstration. $\square$

Chapitre 4

Application à un système de type Timoshenko avec terme retard

Dans ce chapitre, on étudiera l'existence et l'unicité de la solution d'un système de type Timoshenko, en utilisant le théorème de Hille-Yosida, par l'application de la technique indiqué en deuxième chapitre.

4.1 Introduction

Historiquement, le premier modèle du système de Timoshenko a été introduit en 1921 par Stephen Timoshenko en absence de terme dissipatif qui décrit la vibration transversale du faisceau.
Timoshenko considère donc le système hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} = (k(\varphi_x + \psi))_x, & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ I_\rho\psi_{tt} = (EI\psi_x)_x + k(\varphi_t + \psi), & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{4.1}$$

où, ρ, k, I_ρ et EI sont des constantes positives, $\varphi = \varphi(x, t)$ est le vecteur de déplacement et $\psi = \psi(x, t)$ est l'angle de rotation du filament.

Parmi les nouveaux travaux, de nombreux chercheurs ont utilisé le modèle classique pour la propagation de la chaleur dans les équations bien connues pour la température θ et le vecteur de flux de chaleur q

$$\theta_t + \beta divq = 0 \tag{4.2}$$

et

$$q + \kappa \nabla \theta = 0. \tag{4.3}$$

Avec des constantes positives β et κ. En substituant (4.3) (lois de Fourier) en (4.2), on obtient l'équation parabolique de la chaleur suivante

$$\theta_t - \beta\kappa\Delta\theta = 0. \tag{4.4}$$

En utilisant le lois de Fourier, Rivera et Racke [17] ont étudié le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3\theta_t - \kappa\beta\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0, & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{4.5}$$

où, ρ_1, ρ_2, ρ_3, k, b, κ, β et δ sont des constantes positives.
Plus tard, Fernández Sare et Racke ont considéré dans [8] le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{tx} = 0, & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, & dans \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t), & \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{4.6}$$

Numériquement, Raposo [4] considére le système de Timoshenko avec terme retard dans la réaction :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x,t) - k(\varphi_x + \psi)_x(x,t) + \mu_1\varphi_t(x,t) + \mu_2\varphi_t(x,t-\tau) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt}(x,t) - b\psi_{xx}(x,t) - k(\varphi_t + \psi)(x,t) + \mu_3\psi_t(x,t) + \mu_4\psi_t(x,t-\tau) = 0, \\ \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

où $(x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty)$, et il a donné différents tests de résultats de la stabilité pour les solutions du système précédent.

4.2 Résultat d'existence et d'unicité pour un système de type Timoshenko de thermoélasticité de type III avec retard

On considère le système de type Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt}(x,t) - K(\phi_x+\psi)_x(x,t) + \mu_1\phi_t(x,t) + \mu_2\phi_t(x,t-\tau) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt}(x,t) - b\psi_{xx}(x,t) + K(\phi_x+\psi)(x,t) + \beta\theta_{tx}(x,t) = 0, \\ \rho_3\theta_{tt}(x,t) - \delta\theta_{xx}(x,t) + \gamma\psi_{tx}(x,t) - \kappa\theta_{txx}(x,t) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

où $(x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty)$, ρ_1, ρ_2, ρ_3, K, b, κ, β, γ, δ, μ_1 et μ_2 sont des constantes positives, et $\tau > 0$ représente le temps de retard.

De plus on suppose que ϕ, ψ et θ satisfant les conditions aux limites suivantes

$$\phi(0,t) = \phi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0,\ t \in (0,+\infty) \tag{4.9}$$

et les conditions initiales

$$\phi(x,0) = \phi_0(x),\ \phi_t(x,0) = \phi_1(x),\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x),$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x),\ \theta_t(x,0) = \theta_1(x),\ \phi_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau),\quad (x,t) \in (0,1)\times(0,\tau).$$

Remarque 4.2.1. *En utilisant la réduction standard $U = (\phi,\phi_t,\psi,\psi_t,\theta,\theta_t)^T$, nous pouvons transformer (4.8) et (4.9) à un système de premier ordre*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = B\ U(t) + \Phi\ U^t(-\tau), & t \geq 0, \\ U(0) = (\phi_0,\phi_1,\psi_0,\psi_1,\theta_0,\theta_1)^T, & \\ U^t(-\tau) = (0, f_0(.,t-\tau), 0,0,0,0)^T, & t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{4.10}$$

avec $B = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K\partial_{xx} & -\mu_1 & K\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -K\partial_x & 0 & b\partial_{xx}-K & 0 & 0 & -\beta\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma\partial_x & \delta\partial_{xx} & \kappa\partial_{xx} \end{pmatrix}$ *et* $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4.2.1 Écriture du problème équivalent

De même, on définit la fonction

$$z(x,\rho,t)=\phi_t(x,t-\tau\rho),\quad x\in(0,1),\quad \rho\in(0,1),\quad t>0.$$

Donc, nous avons

$$\tau z_t(x,\rho,t)+z_\rho(x,\rho,t)=0,\quad x\in(0,1),\ \rho\in(0,1),\ t>0.$$

Par conséquent, le système (4.8) est équivalent à :

$$\begin{cases}\rho_1\phi_{tt}(x,t)-K(\phi_x+\psi)_x(x,t)+\mu_1\phi_t(x,t)+\mu_2 z(x,1,t)=0,\\ \rho_2\psi_{tt}(x,t)-b\psi_{xx}(x,t)+K(\phi_x+\psi)(x,t)+\beta\theta_{tx}(x,t)=0,\\ \rho_3\theta_{tt}(x,t)-\delta\theta_{xx}(x,t)+\gamma\psi_{tx}(x,t)-\kappa\theta_{txx}(x,t)=0,\\ \tau z_t(x,\rho,t)+z_\rho(x,\rho,t)=0,\end{cases}\tag{4.11}$$

où $x\in(0,1)$, $\rho\in(0,1)$, $t\in(0,+\infty)$, et les conditions aux limites et initiales devient

$$\begin{cases}\phi(0,t)=\phi(1,t)=\psi(0,t)=\psi(1,t)=\theta_x(0,t)=\theta_x(1,t)=0, & t\in(0,+\infty),\\ z(x,0,t)=\phi_t(x,t), & x\in(0,1),\ t\in(0,+\infty),\\ \phi(x,0)=\phi_0,\quad \phi_t(x,0)=\phi_1,\quad \psi(x,0)=\psi_0,\quad \psi_t(x,0)=\psi_1, & x\in(0,1),\\ \theta(x,0)=\theta_0,\quad \theta_t(x,0)=\theta_1, & x\in(0,1),\\ z(x,\rho,0)=f_0(x,-\tau\rho), & x\in(0,1),\ \rho\in(0,1).\end{cases}\tag{4.12}$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert, où

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &:= H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times H_\star^1(0,1)\times L_\star^2(0,1)\times L^2((0,1),L^2(0,1))\\ &:= X\times L^2((0,1),L^2(0,1))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}L_\star^2(0,1) &= \left\{w\in L^2(0,1):\int_0^1 w(s)ds=0\right\},\\ H_\star^1(0,1) &= \left\{w\in H^1(0,1):\int_0^1 w(s)ds=0\right\},\\ H_\star^2(0,1) &= \left\{w\in H^2(0,1):w_x(0)=w_x(1)=0\right\}.\end{aligned}$$

On associé le problème (4.12) par les conditions suivantes

$$\mu_2 \leq \mu_1 \tag{4.13}$$

et ξ une constante positive tel que

$$\gamma\tau\mu_2 \leq \xi \leq \gamma\tau(2\mu_1 - \mu_2). \tag{4.14}$$

Le produit scalaire dans $\mathscr{H}$ est

$$\langle \mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}} \rangle_{\mathscr{H}} = \gamma \int_0^1 (\rho_1 \varphi \tilde{\varphi} + \rho_2 u \tilde{u} + K(\phi_x + \psi)(\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}) + b\psi_x \tilde{\psi}_x) dx$$

$$+\beta \int_0^1 (\rho_3 v \tilde{v} + \delta \theta_x \tilde{\theta}_x) dx + \xi \int_0^1 \int_0^1 z(x,\rho) \tilde{z}(x,\rho) d\rho dx,$$

avec $\mathcal{U} = (\phi, \varphi, \psi, u, \theta, v, z)^T$, $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\phi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{v}, \tilde{z})^T \in \mathscr{H}$ et ξ est un nombre positif fixe. Pour $\mathcal{U} = (\phi, \phi_t, \psi, \psi_t, \theta, \theta_t, z)^T$, avec $\varphi = \phi_t$, $u = \psi_t$ et $v = \theta_t$ le système (4.11) et (4.12) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t = \mathcal{A}\mathcal{U}, \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \theta_1, f_0(., -.\tau))^T, \end{cases} \tag{4.15}$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ est un opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \\ \psi \\ u \\ \theta \\ v \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{K}{\rho_1}(\phi_{xx} + \psi_x) - \frac{\mu_1}{\rho_1}\varphi - \frac{\mu_2}{\rho_1} z(.,1) \\ u \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{K}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2} v_x \\ v \\ \frac{\delta}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3} u_x + \frac{\kappa}{\rho_3} v_{xx} \\ -\dfrac{1}{\tau} z_\rho \end{pmatrix},$$

avec le domaine

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{array}{c} (\phi, \varphi, \psi, u, \theta, v, z)^T \in \mathscr{H} \mid \phi, \psi \in H^2 \cap H_0^1,\ \theta, v \in H_\star^1,\ \varphi, u \in H_0^1, \\ \delta\theta + \kappa v \in H_\star^2,\ z, z_\rho \in L^2((0,1), L^2(0,1)),\ z(x,0) = \varphi(x)\ sur\ (0,1) \end{array} \right\}.$$

4.2.2 Étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent

Sous les hypothèses associés à ce problème, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 4.2.1. *Pour toute donnée initiale $\mathcal{U}_0 \in \mathscr{H}$, il existe une solution unique*

$$\mathcal{U} \in C([0,+\infty[, \mathscr{H})$$

du problème (4.15). De plus, si $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, la solution de (4.15) satisfait

$$\mathcal{U} \in C([0,+\infty[, D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,+\infty[, \mathscr{H}).$$

Preuve. Pour montrer l'existence d'une solution du système (4.15), on applique le théorème de Lumer-Phillips, pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif et maximal.

1) $\mathcal{A}$ dissipatif

Pour montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif il suffit de prouver que

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} \leq 0, \quad \forall \mathcal{U} \in D(\mathcal{A}).$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} \;=\;& \gamma \int_0^1 (K\phi_{xx}\varphi + K\psi_x\varphi - \mu_1\varphi^2 - \mu_2 z(x,1)\varphi + b\psi_{xx}u - K\phi_x u - K\psi u \\
& -\beta v_x u + K\varphi_x\phi_x + K\varphi_x\psi + Ku\phi_x + Ku\psi + bu_x\psi_x)dx + \beta \int_0^1 (\delta\theta_{xx}v \\
& -\gamma u_x v + \kappa v_{xx}v + \delta v_x\theta_x)dx - \frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho dx,
\end{aligned}$$

en utilisant l'integration par partie on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} &= \gamma K\left[\phi_x\varphi\right]_0^1 - \gamma K\int_0^1 \phi_x\varphi_x dx + \gamma K\left[\psi\varphi\right]_0^1 - \gamma K\int_0^1 \psi\varphi_x dx - \gamma\mu_1\int_0^1 \varphi^2 dx \\
& -\gamma\mu_2\int_0^1 z(x,1)\varphi(x)dx + \gamma b\left[\psi_x u\right]_0^1 - \gamma b\int_0^1 \psi_x u_x dx - \gamma K\int_0^1 \phi_x u dx - \gamma\beta\left[vu\right]_0^1 \\
& +\gamma\beta\int_0^1 u_x v dx - \gamma K\int_0^1 \psi u dx + \gamma K\int_0^1 \varphi_x\phi_x dx + \gamma K\int_0^1 \varphi_x\psi dx + \beta\delta\left[\theta_x v\right]_0^1 \\
& -\beta\delta\int_0^1 \theta_x v_x dx + \gamma K\int_0^1 u\phi_x dx + \gamma K\int_0^1 u\psi dx + \gamma b\int_0^1 u_x\psi_x dx + \beta\kappa\left[v_x v\right]_0^1 \\
& -\beta\kappa\int_0^1 v_x^2 dx - \beta\gamma\int_0^1 u_x v dx + \beta\delta\int_0^1 v_x\theta_x dx - \frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho dx,
\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} =& -\gamma\mu_1\int_0^1 \varphi^2 dx - \gamma\mu_2\int_0^1 z(x,1)\varphi dx - \beta\kappa\int_0^1 v_x^2 dx\\ &-\frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho dx. \qquad (4.16)\end{aligned}$$

De plus,

$$\int_0^1\int_0^1 z_\rho(x,\rho)z(x,\rho)d\rho dx = \frac{1}{2}\int_0^1 z^2(x,1)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx. \qquad (4.17)$$

Donc, d'aprés (4.16) et (4.17), on trouve

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} = (-\gamma\mu_1+\frac{\xi}{2\tau})\int_0^1 \varphi^2 dx - \gamma\mu_2\int_0^1 z(x,1)\varphi dx - \beta\kappa\int_0^1 v_x^2 dx - \frac{\xi}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1)dx.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}-\gamma\mu_2\int_0^1 z(x,1)\varphi dx &\leq \gamma\mu_2\int_0^1 |z(x,1)\varphi| dx\\ &\leq \gamma\mu_2\varepsilon\int_0^1 z^2(x,1)dx + \frac{\gamma\mu_2}{4\varepsilon}\int_0^1 \varphi^2 dx\end{aligned}$$

pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$-\gamma\mu_2\int_0^1 z(x,1)\varphi dx \leq \frac{\gamma\mu_2}{2}\int_0^1 z^2(x,1)dx + \frac{\gamma\mu_2}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx.$$

Finalement, on obtient

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} \leq \left(-\gamma\mu_1+\frac{\gamma\mu_2}{2}+\frac{\xi}{2\tau}\right)\int_0^1 \varphi^2 dx + \left(\frac{\gamma\mu_2}{2}-\frac{\xi}{2\tau}\right)\int_0^1 z^2(x,1)dx - \beta\kappa\int_0^1 v_x^2 dx.$$

D'aprés les conditions (4.13) et (4.14), on a

$$-\gamma\mu_1+\frac{\gamma\mu_2}{2}+\frac{\xi}{2\tau}\leq 0 \quad et \quad \frac{\gamma\mu_2}{2}-\frac{\xi}{2\tau}\leq 0,$$

alors,

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U}\rangle_{\mathscr{H}} \leq 0.$$

Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif.

2) $\mathcal{A}$ maximal

Pour montrer la maximalité de $\mathcal{A}$, nous supposons que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^T \in \mathscr{H}$

et on cherche $\mathcal{U} = (\phi, \varphi, \psi, u, \theta, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $(I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F$, ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$\phi - \varphi = f_1, \tag{4.18}$$

$$\rho_1\varphi - K(\phi_{xx} + \psi_x) + \mu_1\varphi + \mu_2 z(x,1) = \rho_1 f_2, \tag{4.19}$$

$$\psi - u = f_3, \tag{4.20}$$

$$\rho_2 u - b\psi_{xx} + K(\phi_x + \psi) + \beta v_x = \rho_2 f_4, \tag{4.21}$$

$$\theta - v = f_5, \tag{4.22}$$

$$\rho_3 v - \delta\theta_{xx} + \gamma u_x - \kappa v_{xx} = \rho_3 f_6, \tag{4.23}$$

$$\tau z + z_\rho = \tau f_7. \tag{4.24}$$

D'aprés $(4.12)_2$, (4.24) et (4.18), on obtient

$$z(x,\rho) = \phi(x)e^{-\tau\rho} - f_1(x)e^{-\tau\rho} + \tau e^{-\tau\rho}\int_0^\rho f_7(x,s)e^{s\tau}ds, \qquad (x,\rho) \in (0,1) \times (0,1). \tag{4.25}$$

En particulier,

$$z(x,1) = \phi(x)e^{-\tau} + z_0(x), \qquad pour \quad x \in (0,1), \tag{4.26}$$

avec $z_0 \in L^2(0,1)$ défini par

$$z_0(x) = -f_1(x)e^{-\tau} + \tau e^{-\tau}\int_0^1 f_7(x,s)e^{s\tau}ds, \qquad x \in (0,1).$$

Substituons (4.18), (4.20), (4.22) et (4.26) dans (4.19), (4.21) et (4.23), on obtient

$$\begin{cases} \rho_1\phi - K(\phi_{xx} + \psi_x) + \mu_1\phi + \mu_2 e^{-\tau}\phi = \rho_1 f_2 + (\rho_1 + \mu_1)f_1 - \mu_2 z_0 \\ \rho_2\psi - b\psi_{xx} + K(\phi_x + \psi) + \beta\theta_x = \rho_2(f_4 + f_3) + \beta f_{5x}, \\ \rho_3\theta - \delta\theta_{xx} + \gamma\psi_x - \kappa\theta_{xx} = \rho_3(f_6 + f_5) + \gamma f_{3x} - \kappa f_{5xx}. \end{cases}$$

Il reste à prouver qu'il existe ϕ, ψ et θ satisfaisant

$$(\rho_1 + \mu_1 + \mu_2 e^{-\tau})\phi - K(\phi_{xx} + \psi_x) = g_1 \in L^2(0,1), \tag{4.27}$$

$$\rho_2\psi - b\psi_{xx} + K(\phi_x + \psi) + \beta\theta_x = g_2 \in L^2(0,1), \tag{4.28}$$

$$\rho_3\theta - (\delta + \kappa)\theta_{xx} + \gamma\psi_x = g_3 \in H^{-1}(0,1). \tag{4.29}$$

On définit l'espace $\mathcal{W} = H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_\star^1(0,1)$.

En multipliant les trois équations (4.27), (4.28) et (4.29) par des fonctions $(\phi_1, \psi_1, \theta_1) \in$

$H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_\star^1(0,1)$ respectivement et on intègre sur $(0,1)$, on obtient

$$\int_0^1 ((\rho_1+\mu_1+\mu_2 e^{-\tau})\phi\phi_1 + K(\phi_x+\psi)\phi_{1x})dx = \int_0^1 g_1\phi_1 dx, \tag{4.30}$$

$$\int_0^1 (\rho_2\psi\psi_1 + b\psi_x\psi_{1x} + K(\phi_x+\psi)\psi_1 + \beta\theta_x\psi_1)dx = \int_0^1 g_2\psi_1 dx, \tag{4.31}$$

$$\int_0^1 (\rho_3\theta\theta_1 - (\delta+\kappa)\theta_{xx}\theta_1 + \gamma\psi_x\theta_1)dx = \int_0^1 g_3\theta_1 dx. \tag{4.32}$$

Additionnons $\gamma \times$ (4.30),$\gamma \times$ (4.31) et $\beta \times$ (4.32), on obtient

$$\gamma(\rho_1+\mu_1+\mu_2 e^{-\tau})\int_0^1 \phi\phi_1 dx + \gamma K\int_0^1 (\phi_x+\psi)(\phi_{1x}+\psi_1)dx + \beta(\delta+\kappa)\int_0^1 \theta_x\theta_{1x}dx$$

$$+\gamma\rho_2\int_0^1 \psi\psi_1 dx + \gamma b\int_0^1 \psi_x\psi_{1x}dx + \beta\gamma\int_0^1 \theta_x\psi_1 dx + \beta\rho_3\int_0^1 \theta\theta_1 dx$$

$$+\beta\gamma\int_0^1 \psi_x\theta_1 dx = \gamma\int_0^1 g_1\phi_1 dx + \gamma\int_0^1 g_2\psi_1 dx + \beta\int_0^1 g_3\theta_1 dx.$$

Pour $U^* = (\phi,\psi,\theta)^T$ et $V = (\phi_1,\psi_1,\theta_1)^T$, on définit sur $\mathcal{W}$ une forme bilinéaire $a(.,.)$ et une form linéaire $L(.)$ par

$$a(U^*,V) = \gamma(\rho_1+\mu_1+\mu_2 e^{-\tau})\int_0^1 \phi\phi_1 dx + \gamma K\int_0^1 (\phi_x+\psi)(\phi_{1x}+\psi_1)dx + \beta(\delta+\kappa)\int_0^1 \theta_x\theta_{1x}dx$$

$$+\gamma\rho_2\int_0^1 \psi\psi_1 dx + \gamma b\int_0^1 \psi_x\psi_{1x}dx + \beta\gamma\int_0^1 \theta_x\psi_1 dx + \beta\rho_3\int_0^1 \theta\theta_1 dx + \beta\gamma\int_0^1 \psi_x\theta_1 dx$$

$$L(V) = \gamma\int_0^1 g_1\phi_1 dx + \gamma\int_0^1 g_2\psi_1 dx + \beta\int_0^1 g_3\theta_1 dx.$$

On montre que $a(.,.)$ est continue, coercive et $L(.)$ est continue.

1) Continuité de a(.,.)

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\Big|a(U^*,V)\Big| &\le \gamma(\rho_1+\mu_1+\mu_2 e^{-\tau})\|\phi\|_{L^2}\|\phi_1\|_{L^2} + \gamma K\|\phi_x\|_{L^2}\|\phi_{1x}\|_{L^2} + \gamma K\|\phi_x\|_{L^2}\|\psi_1\|_{L^2} \\ &+\gamma K\|\psi\|_{L^2}\|\phi_{1x}\|_{L^2} + \gamma b\|\psi_x\|_{L^2}\|\psi_{1x}\|_{L^2} + \beta\gamma\|\theta_x\|_{L^2}\|\psi_1\|_{L^2} + \beta\rho_3\|\theta\|_{L^2}\|\theta_1\|_{L^2} \\ &+\gamma(\rho_2+K)\|\psi\|_{L^2}\|\psi_1\|_{L^2} + \beta(\delta+\kappa)\|\theta_x\|_{L^2}\|\theta_{1x}\|_{L^2} + \beta\gamma\|\psi_x\|_{L^2}\|\theta_1\|_{L^2}\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\Big|a(U^*,V)\Big| &\leq \max(\gamma\rho_1+\gamma\mu_1+\gamma\mu_2e^{-\tau},\gamma K,\gamma b,\beta\gamma,\beta\rho_3,\gamma\rho_2+\gamma K,\beta\delta+\beta\kappa)\\
&\Big(\|\phi\|_{L^2}\|\phi_1\|_{L^2}+\|\phi_x\|_{L^2}\|\phi_{1x}\|_{L^2}+\|\phi_x\|_{L^2}\|\psi_1\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}\|\phi_{1x}\|_{L^2}\\
&+\|\psi_x\|_{L^2}\|\psi_{1x}\|_{L^2}+\|\theta_x\|_{L^2}\|\psi_1\|_{L^2}+\|\theta\|_{L^2}\|\theta_1\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}\|\psi_1\|_{L^2}\\
&+\|\theta_x\|_{L^2}\|\theta_{1x}\|_{L^2}+\|\psi_x\|_{L^2}\|\theta_1\|_{L^2}\Big)\\
&\leq C_1'\Big(\|\phi\|_{H_0^1}+\|\psi\|_{H_0^1}+\|\theta\|_{H_\star^1}\Big)\Big(\|\phi_1\|_{H_0^1}+\|\psi_1\|_{H_0^1}+\|\theta_1\|_{H_\star^1}\Big)\\
&\leq C_1'\|U^*\|_{\mathcal{W}}\|V\|_{\mathcal{W}}.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

2) Coercivité de $a(.,.)$

D'aprés l'expression de $a(.,.)$, on a

$$\begin{aligned}
a(U^*,U^*) &= \gamma(\rho_1+\mu_1+\mu_2e^{-\tau})\int_0^1\phi^2dx+\gamma K\int_0^1\phi_x^2dx+\gamma(\rho_2+K)\int_0^1\psi^2dx\\
&+2\gamma K\int_0^1\phi_x\psi dx+\beta(\delta+\kappa)\int_0^1\theta_x^2dx+\gamma b\int_0^1\psi_x^2dx+\beta\rho_3\int_0^1\theta^2dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
-\int_0^1\phi_x\psi dx &\leq \int_0^1|\phi_x\psi|dx\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1\phi_x^2dx+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1\psi^2dx
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1\phi_x\psi dx \geq -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1\phi_x^2dx-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1\psi^2dx.$$

On a

$$\begin{aligned}
a(U^*,U^*) &\geq \gamma(\rho_1+\mu_1+\mu_2e^{-\tau})\int_0^1\phi^2dx+\gamma(K-K\varepsilon)\int_0^1\phi_x^2dx+\beta\rho_3\int_0^1\theta^2dx\\
&+\gamma(\rho_2+K-\frac{K}{\varepsilon})\int_0^1\psi^2dx+\beta(\delta+\kappa)\int_0^1\theta_x^2dx+\gamma b\int_0^1\psi_x^2dx,
\end{aligned}$$

on choisit ε telle que $\gamma(K-K\varepsilon)>0$ et $\gamma(\rho_2+K-\dfrac{K}{\varepsilon})>0$, donc

$$\begin{aligned}
a(U^*,U^*) &\geq min(\gamma\rho_1+\gamma\mu_1+\gamma\mu_2 e^{-\tau},\gamma K-\gamma K\varepsilon,\gamma\rho_2+\gamma K-\frac{\gamma K}{\varepsilon},\beta\delta+\beta\kappa,\gamma b,\beta\rho_3)\\
&\quad \int_0^1(\phi^2+\phi_x^2+\psi^2+\psi_x^2+\theta^2+\theta_x^2)dx\\
&\geq C_2'||U^*||^2_{\mathcal{W}}
\end{aligned}$$

et $a(.,.)$ est coercive.

3) Continuité de $L(.)$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\Big|L(V)\Big| &\leq \gamma\int_0^1|g_1||\phi_1|+\gamma\int_0^1|g_2||\psi_1|+\beta\int_0^1|g_3||\theta_1|\\
&\leq \gamma\|g_1\|_{L^2}\|\phi_1\|_{L^2}+\gamma\|g_2\|_{L^2}\|\psi_1\|_{L^2}+\beta\|g_3\|_{L^2}\|\theta_1\|_{L^2}\\
&\leq max(\gamma\|g_1\|_{L^2},\gamma\|g_2\|_{L^2},\beta\|g_3\|_{L^2})\Big(\|\phi_1\|_{L^2}+\|\psi_1\|_{L^2}+\|\theta_1\|_{L^2}\Big)\\
&\leq C_3'\Big(\|\phi_1\|_{H_0^1}+\|\psi_1\|_{H_0^1}+\|\theta_1\|_{H_\star^1}\Big)\\
&\leq C_3'\|V\|_{\mathcal{W}}.
\end{aligned}$$

Donc $L(.)$ est continue.

$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur $\mathcal{W}$ et $L(.)$ est linéaire et continue sur $\mathcal{W}$, d'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $U^*\in\mathcal{W}=H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H_\star^1(0,1)$ telle que

$$a(U^*,V)=L(V),\quad \forall V\in\mathcal{W}. \tag{4.33}$$

Ce qui signifie que $\phi\in H_0^1(0,1)$, $\psi\in H_0^1(0,1)$, $\theta\in H_\star^1(0,1)$ et $\varphi=\phi-f_1\in H_0^1(0,1)$.

Par conséquent $u=\psi-f_3\in H_0^1(0,1)$ et $v=\theta-f_5\in H_\star^1(0,1)$.

Il reste à montrer que $\phi,\psi\in H^2(0,1)$, $\delta\theta+\kappa v\in H_\star^2(0,1)$, $z,z_\rho\in L^2((0,1),L^2(0,1))$ et $z(x,0)=\varphi(x)$.

On prend $(\phi_1,\psi_1,\theta_1)=(0,\psi_1,0)\in H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H_\star^1(0,1)$ dans (4.33) elle devient

$$\gamma K\int_0^1(\phi_x+\psi)\psi_1dx+\gamma\rho_2\int_0^1\psi\psi_1dx+\gamma b\int_0^1\psi_x\psi_{1x}dx+\beta\gamma\int_0^1\theta_x\psi_1dx=\gamma\int_0^1 g_2\psi_1dx.$$

Alors

$$\int_0^1 \psi_x \psi_{1x} dx = -\int_0^1 \frac{1}{b}(-g_2 + K(\phi_x + \psi) + \beta\theta_x + \rho_2\psi)\psi_1 dx, \qquad \forall \psi_1 \in H_0^1(0,1).$$

Ce qui signifie que ψ_x admet une derivée faible dans L^2 car

$$(-g_2 + K(\phi_x + \psi) + \beta\theta_x + \rho_2\psi) \in L^2(0,1)$$

et on a

$$\psi_{xx} = (\psi_x)_x = \frac{1}{b}(-g_2 + K(\phi_x + \psi) + \beta\theta_x + \rho_2\psi)$$

par suit $\psi_x \in H^1(0,1)$ donc $\psi \in H^2(0,1)$.

De la même manière si on prend $(\phi_1, \psi_1, \theta_1) = (\phi_1, 0, 0) \in H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_\star^1(0,1)$ dans (4.33), on preuve que $\phi \in H^2(0,1)$.

De plus, si nous prenons $(\phi_1, \psi_1, \theta_1) = (0, 0, \theta_1) \in H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_\star^1(0,1)$ dans (4.33), puis en utilisant (4.20) et (4.22) elle devient

$$\delta\theta_{xx} + \kappa v_{xx} = -\rho_3 f_6 + \gamma u_x + \rho_3 v \quad dans \quad L_\star^2(0,1)$$

et nous concluons que

$$(\delta\theta + \kappa v) \in H^2(0,1).$$

En outre, il est évident à partir de

$$\delta\theta_x + \kappa v_x = -\rho_3 \int_0^x f_6 dx + \gamma u + \rho_3 \int_0^x v dx,$$

par conséquent

$$(\delta\theta_x + \kappa v_x)(0) = (\delta\theta_x + \kappa v_x)(1) = 0.$$

Ainsi, on obtient

$$(\delta\theta + \kappa v) \in H_\star^2(0,1).$$

Finalement, à partir de (4.25) et (4.24), on obtient

$$z(x,0) = \varphi(x) \quad et \quad z, z_\rho \in L^2((0,1), L^2(0,1)).$$

Donc il existe $\mathcal{U} = (\phi, \varphi, \psi, u, \theta, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$ qui vérifie $(I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F$ pour tout $F \in \mathscr{H}$, et $\mathcal{A}$ est maximal.

Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (4.15). Ceci terminé la démonstration. $\square$

Remarque 4.2.2. *De même façon que le problème précédent, si $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu $(\mathcal{T}_2(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathscr{H}$, alors la solution de (4.15) est donnée par la fonction*

$$\mathcal{U}(t) := \mathcal{T}_2(t)\mathcal{U}_0$$

et le problème (4.10) admet une solution unique pour chaque $\mathcal{U}_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \theta_1,$ $f_0(., -.\tau))^T \in D(\mathcal{A})$ donnée par

$$U(t) = \begin{cases} \pi_1\Big(\mathcal{T}_2(t)\mathcal{U}_0\Big), & t \geq 0, \\ (0, f_0(., t), 0, 0, 0, 0)^T, & t \in [-\tau, 0). \end{cases}$$

Bibliographie

[1] A. Bátkai, S. Piazzera, *Semigroupe and Linear Partial Differential Equations with Delay, June, 1999.*

[2] A. Bátkai, S. Piazzera, *Semigroups for Delay equations, February, 2004.*

[3] A. Bátkai, S. Piazzera, *Semigroups for Delay equations, 2005 by A K Peters, Ltd.*

[4] C. A. Raposo, J. A. D. Chuquipoma, J. A. J. Avila, M. L. Santos, *Exponential decay and numerical solution for a Timoshenko system with delay term in the internal feedback. International Journal of Analysis and Applications. Vol. 3, no. 1, (2013), 1-13.*

[5] C. Pignotti, *A note on stabilization of locally damped wave equations with time delay, 2011.*

[6] E. Maitre *Notes du Cours Elements Finis - ENSIMAG 2A - Version du 21 février 2011.*

[7] F. Dardalhon, Federico Verga, *Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires, juin 2006.*

[8] F. Sare, H. D., and Racke, R., *On the stability of damped Timoshenko systems : Cattaneo versus Fourier law, Arch. Rational Mech. Anal., 194 (1) (2009), 221-251.*

[9] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.*

[10] Ioan I. Vrabie, C_0*-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.*

[11] J. Pierre Raymond, *Équations d'évolution. Résumé de la première partie du cours du module A0 du DEA de Mathématiques Appliquées. Université Paul Sabatier.*

[12] K. Jochen Engel, Rainer Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Alfred A.Knopf, 1995.*

[13] L. E. EL'sgol'ts, S. B. Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Diffential Equations with deviating Argument, Mathematcs in science and Engineering, Vol. 105. Academic Press, 1973).*

[14] L. Dan Lemle, *Semi-groupes integres d'operateurs, l'unicite des pre-generateurs et applications, 2007.*

[15] M. Ali Ayadi, A. Bchatnia, and Makram Hamouda, *Numerical solutions for a Timoshenko-type system with thermoelasticity with second sound.*

[16] M. Kafini, Salim A. Messaoudi, Muhammad I. Mustafa and Tijani Apalara, *Well-posedness and stability results in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with delay, 2014.*

[17] Muñoz Rivera J. E. and Racke R., *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and expo- nential stability, J. Math. Anal. Appl. 276 (2002), 248-276.*

[18] O.Diekman, S.A.Van Gils, S.M.Verdayn Lunel et H.O.Wather, *Delay Equation : Functional, complex, and Nonlinear Analysis, Springer-Verlag, New York (1995).*

[19] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Monogr. Stud. Math. 21, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1985.*

[20] R. Bellman, K. Cooke, *Differential-Difference Equations, Academic Press,1963.*

[21] S. Nicaise, C. Pignotti, *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedback, 2006.*

[22] V. Volterra, *Sur la Théorie Mathématiques des phénomènes héréditaires, J.de Mathématiques 7 (1928), 249-298.*